MA1201 MATEMATIKA 2A

Hendra Gunawan

Semester II, 2016/2017

22 Februari 2017

Kuliah Sebelumnya

9.4 Deret Positif: Uji Lainnya

Memeriksa kekonvergenan deret positif dengan uji perbandingan dan uji rasio

9.5 Deret Ganti Tanda: Kekonvergenan Mutlak dan Kekonvergenan Bersyarat

Memeriksa kekonvergenan mutlak/bersyarat deret ganti tanda

Sasaran Kuliah Hari Ini

9.6 Deret Pangkat

Menentukan selang kekonvergenan **deret pangkat**

9.7 Operasi pada Deret Pangkat

Melakukan **operasi pada deret pangkat** (yang diketahui jumlahnya) untuk mendapatkan deret pangkat lainnya (dan jumlahnya)

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.6 DERET PANGKAT

Menentukan selang kekonvergenan **deret pangkat**

Deret Fungsi

Sejauh ini kita baru membahas deret bilangan real. Sekarang kita akan mempelajari **deret fungsi**, yang secara umum berbentuk $\sum u_n(x)$.

Sebagai contoh,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$$

Perhatikan jika kita substitusikan nilai x tertentu, misal x = π/2, maka kita peroleh deret bilangan.

Deret Pangkat

Deret pangkat adalah deret yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

dengan $a_n \in \mathbf{R}$ untuk tiap $n \in \mathbf{N}$.

Pertanyaan yang perlu kita ajukan terkait dengan deret pangkat adalah:

1. Untuk nilai x manakah deret tsb konvergen?
2. Apakah kita dapat menentukan fungsi yang merupakan jumlah deret tsb?

Contoh 1

Jika $a \neq 0$, maka deret pangkat

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \ldots$$

Merupakan deret geometri dengan suku pertama *a* dan rasio *x*. Kita tahu deret ini konvergen ke

$$S(x) = \frac{a}{1-x}$$

untuk $|x| < 1$.

BAGAIMANA DENGAN DERET PANGKAT LAINNYA?

Contoh 2

Tentukan untuk *x* mana sajakah deret berikut konvergen?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Dengan Uji Rasio Mutlak, kita hitung

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \div \frac{x^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{nx}{n+1} \right| = |x|.$$

Jadi deret <u>konvergen</u> untuk $|x| < 1$ dan <u>divergen</u> untuk $|x| > 1$. Untuk $|x| = 1$, Uji Rasio tidak memberikan kesimpulan apapun. *So*?

Kita selidiki apa yang terjadi dengan $\sum \frac{x^n}{n}$ untuk $|x| = 1$, yakni untuk $x = \pm 1$, secara tersendiri.

Jika $x = 1$, maka deret menjadi deret harmonik $\sum \frac{1}{n}$ yang divergen.

Jika $x = -1$, maka deret menjadi deret harmonik ganti tanda $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ yang konvergen.

Jadi deret pangkat $\sum \frac{x^n}{n}$ konvergen pada [-1,1).

Latihan

Tentukan pada selang manakah deret berikut konvergen.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^3}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{2n}$

Teorema Selang Kekonvergenan Deret Pangkat

Himpunan kekonvergenan deret pangkat $\sum a_n x^n$ *selalu berupa salah satu dari tiga kemungkinan berikut:*

(i) *Himpunan* {0}.

(ii) *Selang* (*–R*,*R*), *mungkin dengan salah satu atau kedua titik ujungnya*.

(iii) *Seluruh garis bilangan real* **R**.

Bila (i), (ii) atau (iii) terjadi, deret dikatakan mem-punyai jari-jari kekonvergenan 0, *R*, *atau* ∞.

Contoh

	selang kekonvergenan	**jari-jari** kekonvergenan
1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n^3}$	$[-2,2]$	2
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	**R**	∞
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{2n}$	$\{0\}$	0

Teorema

Deret pangkat $\sum a_n x^n$ *konvergen mutlak di setiap titik di dalam selang kekonvergenannya.*

Deret Pangkat dalam $x - a$

Deret pangkat berbentuk

$$\sum a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots$$

disebut **deret pangkat dalam *x – a***.

Selang dan jari-jari kekonvergenan deret pangkat dalam $x - a$ dapat ditentukan melalui deret pangkat dalam t, dengan $t = x - a$.

Sebagai contoh, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n^3}$ konvergen utk $-2 \le t \le 2$, yakni utk $-1 \le x \le 3$.

Soal

Tentukan selang kekonvergenan deret pangkat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{3n^2+1}$$

MA1201 MATEMATIKA 2A

9.7 OPERASI PADA DERET PANGKAT

Melakukan **operasi pada deret pangkat** (yang diketahui jumlahnya) untuk mendapatkan deret pangkat lainnya (dan jumlahnya)

Jumlah Deret Pangkat

Deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ yang merupakan deret geometri dengan suku pertama *a* dan rasio *x* mempunyai jumlah

$$S(x) = \frac{a}{1-x}, \qquad -1 < x < 1.$$

Bagaimana dengan deret pangkat lainnya?

Apakah kita dapat menentukan jumlahnya?

Penurunan dan Pengintegralan Suku demi Suku

Teorema. *Misalkan S(x) adalah jumlah suatu deret pangkat pada selang I, yakni*

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Maka, untuk x di dalam selang I, berlaku

(i) $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$

(ii) $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots$

Contoh 1

Kita sudah tahu bahwa

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Penurunan suku demi suku menghasilkan

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = 0 + 1 + 2x + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Pengintegralan suku demi suku menghasilkan

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Contoh 2 (Substitusi Peubah)

Kita sudah tahu bahwa

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=1+x+x^{2}+\ldots,\qquad -1<x<1.$$

Ganti x dengan $-x$, kita peroleh

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{n}=1-x+x^{2}-\ldots,\qquad -1<x<1.$$

Ganti lagi x dengan x^2, kita peroleh

$$\frac{1}{1+x^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^{2})^{n}=1-x^{2}+x^{4}-\ldots,\qquad -1<x<1.$$

Contoh 3

Tentukan deret pangkat untuk $\tan^{-1} x$.

Petunjuk: $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.$

Contoh 3

Tentukan jumlah dari deret pangkat berikut:

$$S(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Catatan. Deret ini konvergen pada **R**.

Jawab: Penurunan terhadap *x* menghasilkan

$$S'(x) = 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = S(x).$$

Solusi persamaan diferensial ini adalah $S(x) = Ce^x$. Karena $S(0) = 1$, maka $C = 1$. Jadi $S(x) = e^x$.

Soal

Tentukan deret pangkat untuk

1. e^{-x^2}

2. $\dfrac{e^x}{1+x^2}$

3. $\dfrac{xe^x}{\tan^{-1} x}$