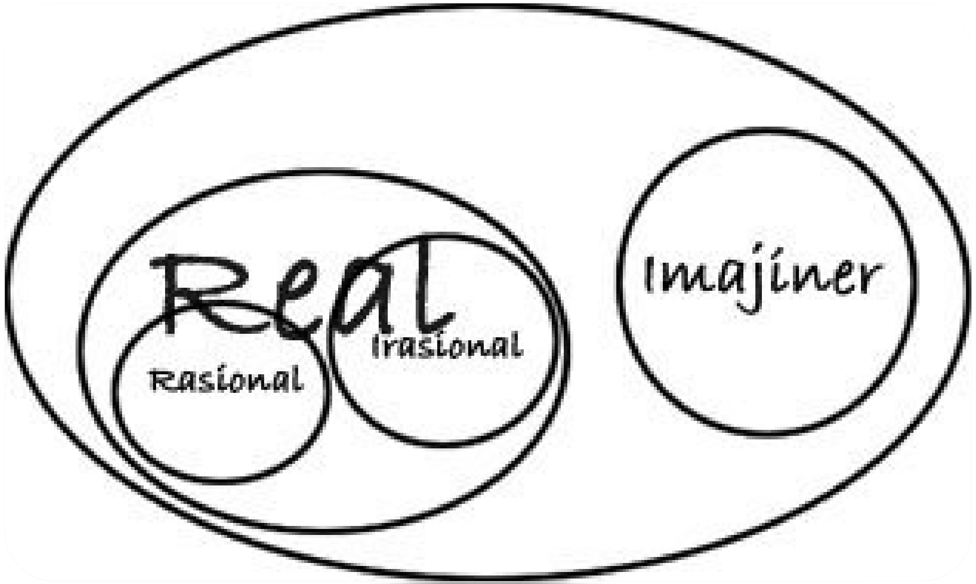
BILANGAN KOMPLEKS

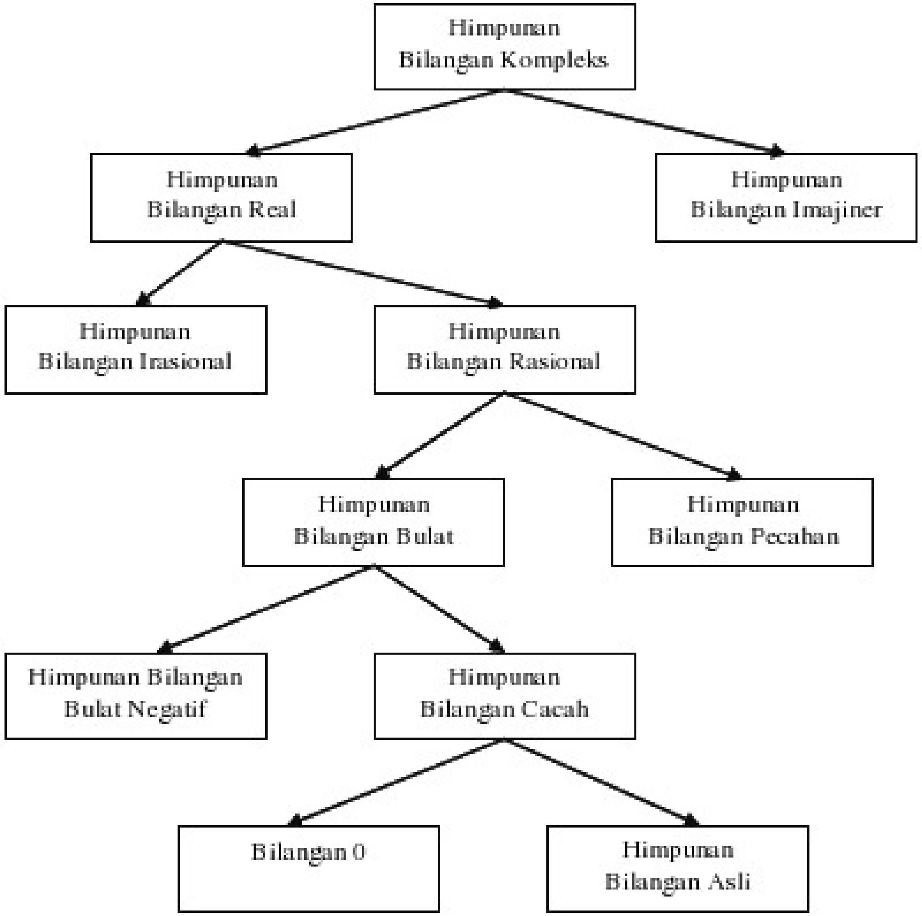
YAN BATARA PUTRA S.SI M.SI

Apakah Bilangan Kompleks itu ?

- Bilangan Kompleks adalah gabungan dari bilangan nyata (Riil) dengan bilangan imajiner



PENDAHULUAN



PENDAHULUAN

Apakah Bilangan Imajiner itu ?

- Bilangan yang merupakan akar kuadrat dari suatu bilangan negatif
- Contoh :

  $\sqrt{-5}, \sqrt{-7}, \sqrt{-13}$

- Definisi 1 : $i = \sqrt{-1}$ dan $i^2 = -1$
- Jadi $\sqrt{-5}$ dapat ditulis $\sqrt{-1} * \sqrt{5} = i\sqrt{5}$

LATIHAN 1

Tentukan akar – akar dari persamaan kuadrat berikut :

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x^2 - x + 7 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

BILANGAN KOMPLEKS

Definisi.
Sebuah bilangan kompleks z dinotasikan sebagai pasangan bilangan riil (x,y) dan kita bisa tulis sebagai z = (x,y)
Nilai x adalah bagian riil dari z
y adalah bagian imajiner dari z
dan dinotasikan x = Re(z) dan y = Im(z)

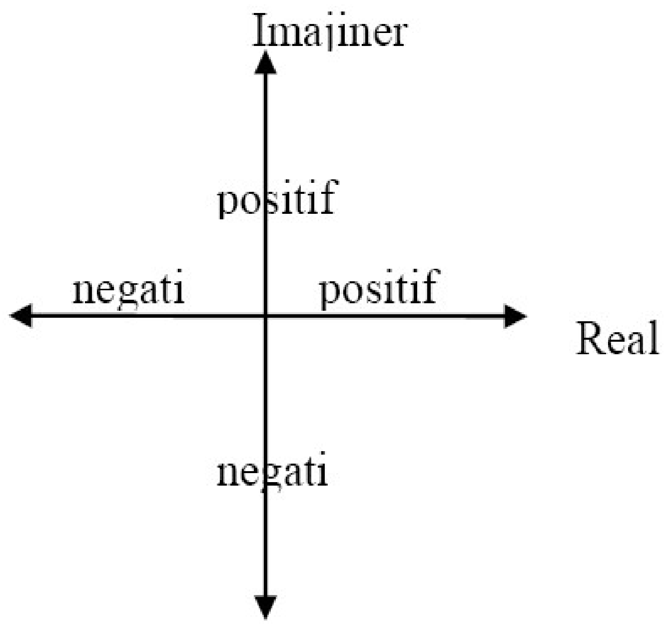
Bentuk Lain Bilangan Kompleks

1. Bentuk, z = x + iy

Selain dituliskan dalam bentuk pasangan bilangan, bilangan kompleks z juga dituliskan dalam bentuk z = x + i y,
dimana x, y real dan $i^2 = -1$.
x = Re(z) dan y = Im(z)

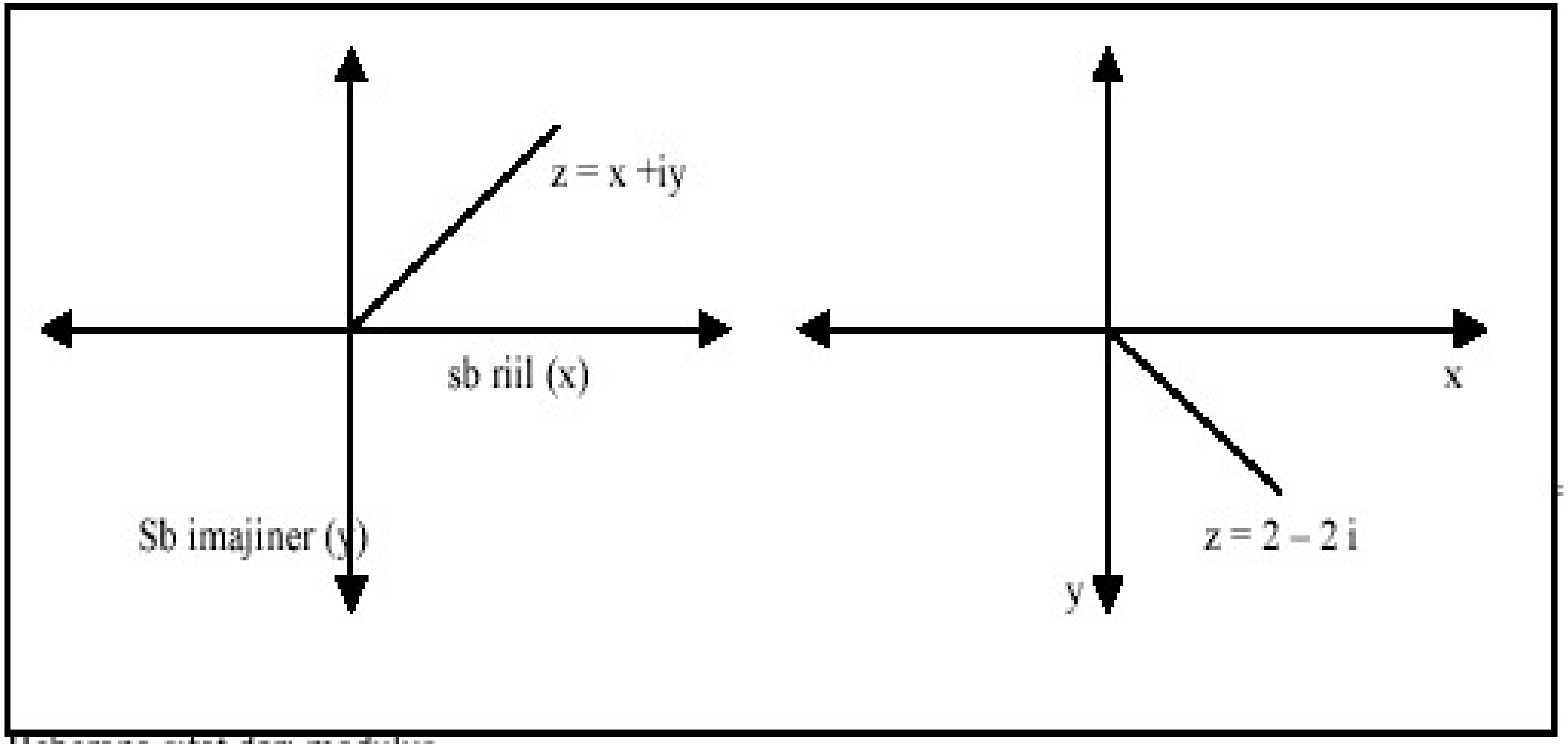
BILANGAN KOMPLEKS

- Penulisan bilangan kompleks z = a+bj sering disingkat sebagai pasangan terurut (a,b), oleh karena itu bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam suatu bidang datar seperti halnya koordinat titik dalam sistem koordinat kartesius
- Bidang yang digunakan untuk menggambarkan bilangan kompleks disebut **bidang kompleks** atau **bidang argand**



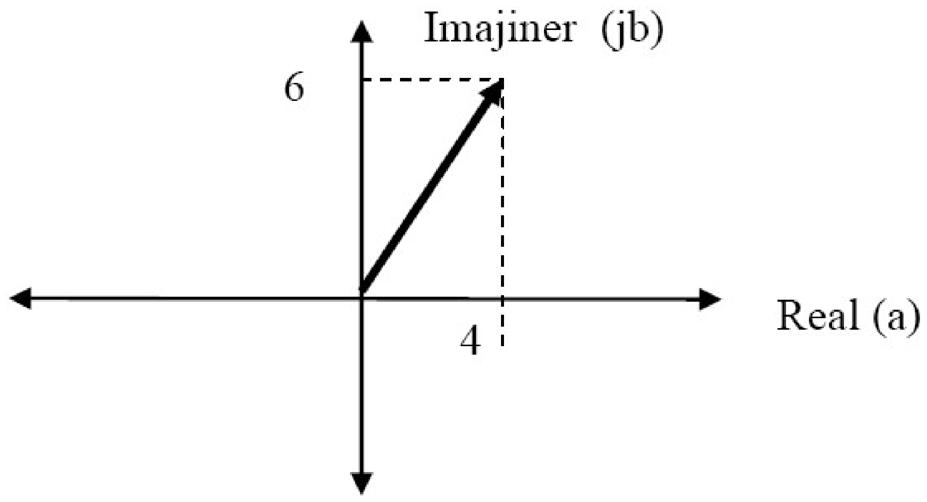
Interpretasi geometri bilangan kompleks

Secara geometri $z = x + iy$ digambarkan sama dengan koordinat kartesius dengan sumbu tegaknya yaitu x sebagai sumbu riil, dan sumbu mendatar yaitu y sebagai sumbu imajiner.
Contoh:



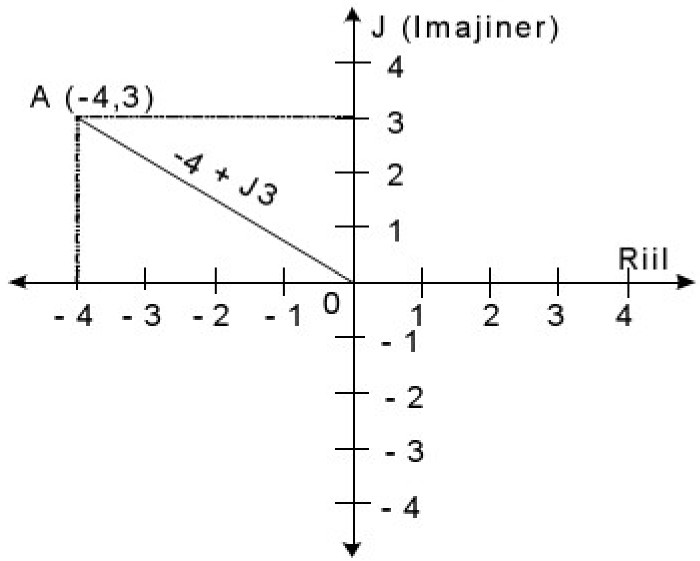
BILANGAN KOMPLEKS

- Buatlah grafik bilangan kompleks berikut :
  $x = 4 + 6j$ dimana :
  4 merupakan bilangan real positif
  6j merupakan bilangan imajiner positif



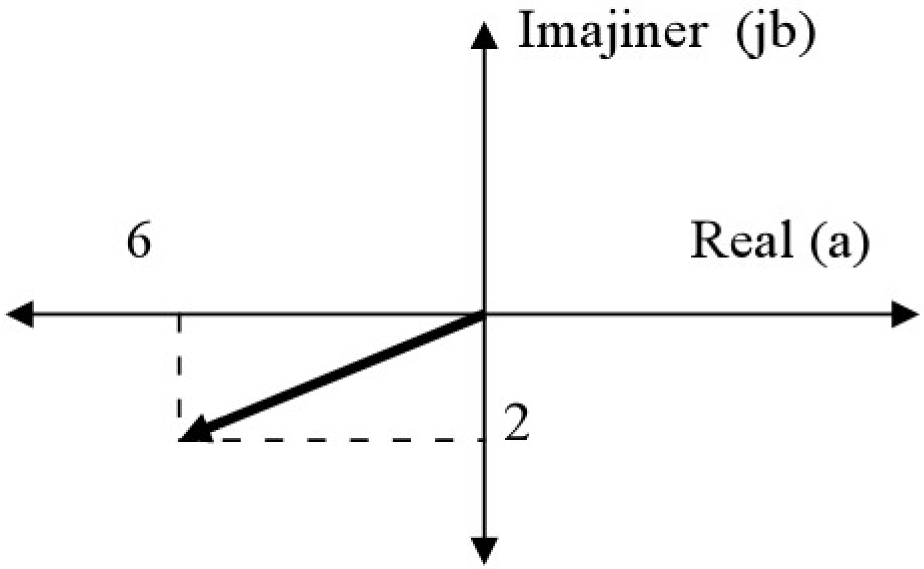
Latihan

- Buatlah grafik bilangan kompleks berikut :
  x = -4 + 3j dimana :
  -4 merupakan bilangan real negatif
  3j merupakan bilangan imajiner positif



Latihan 2

- berapa nilai bilangan kompleks dari grafis berikut:



x = - 6 – j 2

Latihan 3

- Buatkan kedalam bentuk grafis bilangan kompleks berikut:

  $x = 4 - j\,6$

  $x = -7$

  $x = -6 - j\,13$

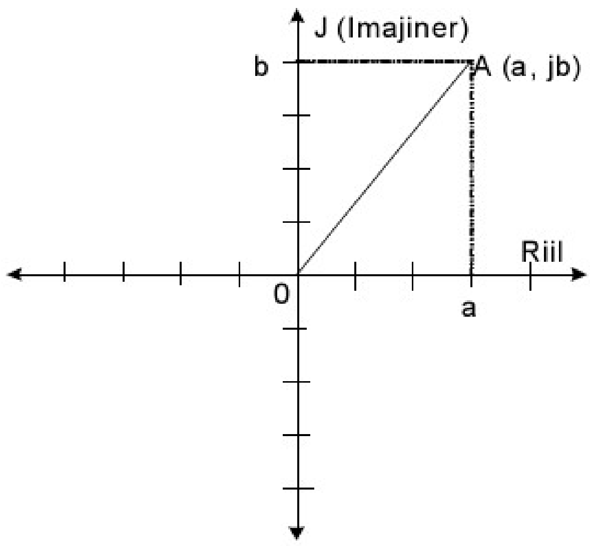
  $x = j11$

Bentuk-bentuk Bilangan Kompleks

- Ada beberapa bentuk penulisan bilangan kompleks yaitu :
  - Bentuk Polar
  - Bentuk Rectangular
  - Bentuk Exponensial

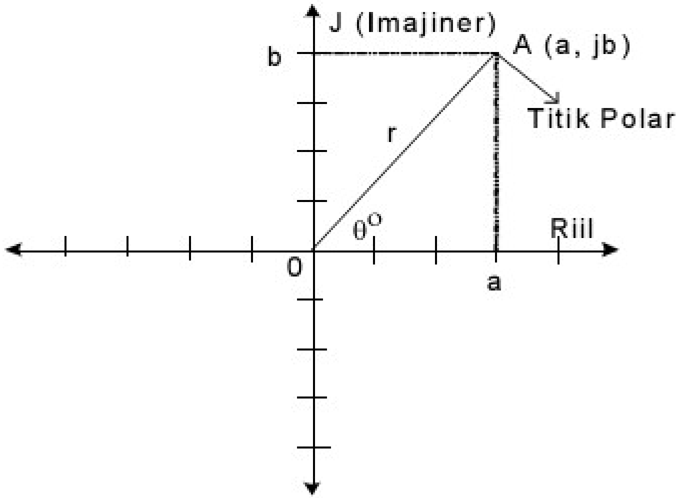
BENTUK REKTANGULAR

- Bentuk bilangan kompleks a + jb disebut juga bilangan kompleks bentuk rektangular
- Gambar grafik bilangan kompleks bentuk rektangular :
- Dari gambar di atas titik A mempunyai koordinat (a,jb). Artinya titik A mempunyai absis a dan ordinat b.



BENTUK POLAR

- Bilangan kompleks bentuk rektangular a+ jb dapat juga dinyatakan dalam bentuk polar, dengan menggunakan suatu jarak (r) terhadap suatu titik polar θ
- Jika OA = r, maka letak (kedudukan) titik A dapat ditentukan terhadap r dan θ



$$\text{Cos } \theta^\circ = \frac{a}{r} \longrightarrow a = r \text{ Cos } \theta^\circ$$

$$\text{Sin } \theta^\circ = \frac{b}{r} \longrightarrow b = r \text{ Sin } \theta^\circ$$

$$a + jb = r\,(Cos\,\theta^\circ + j\,Sin\,\theta^\circ) = r\angle\theta^\circ$$

BENTUK POLAR

Sehingga rumus yang didapatkan untuk mengubah suatu bilangan kompleks dari bentuk rektangular ke bentuk polar adalah:

$$a + jb = r\,(Cos\,\theta° + j\,Sin\,\theta°) = r\angle\theta°$$

r adalah sisi miring, yang nilainya adalah :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

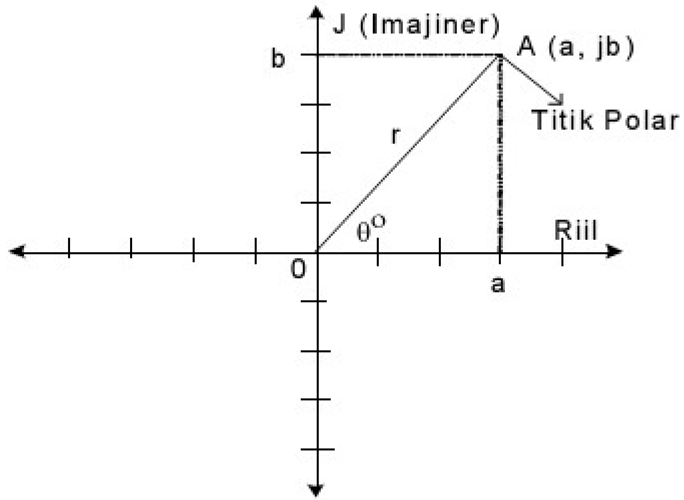
Besar sudut kemiringan dengan θ :

$$\theta = \text{arc tg } b/a$$

BENTUK EKSPONENSIAL

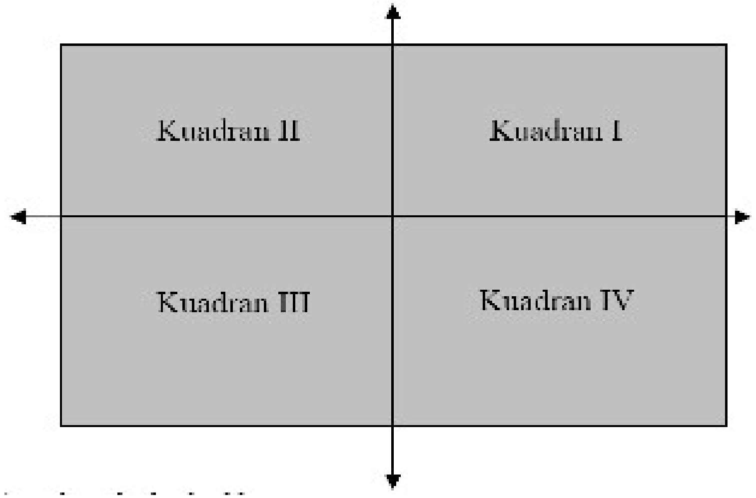
- Bentuk eksponensial diperoleh dari bentuk polar.
- Harga r dalam kedua bentuk itu sama dan sudut dalam kedua bentuk itu juga sama, tetapi untuk bentuk eksponensial harus dinyatakan dalam radian.

$$\hat{z} = r \, . \, e^{j\theta}$$



KUADRAN

- Selain itu, perlu diketahui pula letak posisi sudut berada kuadran berapa dari garis bilangan. Dimana :
  - Kuadran I berada pada sudut ke 0 - 90
  - Kuadran II berada pada sudut ke 90 - 180
  - Kuadran III berada pada sudut ke 180 – 270 atau (-90) – (-180)
  - Kuadran IV berada pada sudut ke 270 – 360 atau 0 – (-90)



CONTOH SOAL

Perhatian persamaan bilangan kompleks berikut z = 3 – j8 bentuk umum bilangan kompleks diatas dapat dirubah ke dalam bentuk bentuk penulisan yang lain.

$$r = \sqrt{3^2 + 8^2} \longrightarrow \boxed{r = 8{,}54}$$

Sudut yang dibentuk adalah $\boxed{\begin{aligned}\theta &= \text{arc tg } (-8/3)\\ &= -69{,}44\end{aligned}}$ di kuadran IV

Bentuk Polar nya :

$z = r(\cos\theta + j \sin\theta) = 8.54(\cos(-69.44) + j \sin(-69.44))$

Bentuk Exponensialnya :

$$z = r.e^{j\theta} = 8{,}54.e^{-j.69{,}44}$$

LATIHAN SOAL

Dapatkan bentuk polar dan bentuk exponensial dari bilangan kompleks z = -3 + 3i dan terletak di kuadran berapa sudut θ nya ?

$$a + jb = r\,(Cos\;\theta^\circ + j\;Sin\;\theta^\circ) = r\angle\;\theta^\circ$$

$$\hat{z} \;= \mathbf{r}\;.\;\mathbf{e}^{\mathbf{j\theta}}$$

JAWABAN

Persamaan bilangan kompleks z = -3 + j3

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = arctg(3/-3) = arctg(-1) = 135$$

Dimana : Sin θ = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Cos θ = $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ di kuadran II

Bentuk Polar nya :

z = r(cosθ + j sinθ) = $3\sqrt{2}$ (cos(135) + j sin(135))

Bentuk Exponensialnya :

$$z = r.e^{j\theta} = 3\sqrt{2}.e^{-j.135}$$

PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN

- Operasinal matematika penjumlahan dan pengurangan merupakan konsep yang umum dan sederhana. Namun bagian ini merupakan bagian yang terpenting dan mendasar.
- Prinsip penjumlahan dan pengurangan adalah sama, memenuhi sifat-sifat aljabar penjumlahan dan pengurangan

$$x1 = a + jb$$
$$x2 = c + jd$$

$$xt = x1 \pm x2 \qquad atau$$
$$xt = (a \pm c) + j(b \pm d)$$

CONTOH SOAL

$x1 = 2 - j3$
$x2 = 5 + j4$

Jawab :

$$\begin{aligned} xt &= (2-j3) + (5+j4) \\ &= (2+5) + j(-3+4) \\ &= 7+j \end{aligned}$$

CONTOH SOAL

$x1 = 2 - j3$
$x2 = 5 + j4$

Jawab :

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 &= (2-j3) + (5+j4) \\
&= (2+5) + j(-3+4) \\
&= 7+j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x1 - x2 &= (2-j3) - (5+j4) \\
&= (2-5) + j(-3-4) \\
&= -3-j7
\end{aligned}
$$

Modulus (nilai absolut) bilangan kompleks.

Modulus z = x + i y didefinisikan sebagai jarak antara z dengan pusat sumbu dan dituliskan $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Misalkan $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Beberapa sifat dari modulus

1. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
2. $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
3. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Bilangan konjugate (sekawan)

Konjugate dari z = x + iy didefinisikan sebagai bilangan kompleks yang didapatkan dari z yang dicerminkan terhadap sumbu x riil dan dituliskan

$$\bar{z} = x - iy$$

Sifat-sifat yang berhubungan dengan sekawan

1. $z\bar{z} = x^2 + y^2$
2. $\mathrm{Re}(z) = x = ½(z + \bar{z})$; $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$
3. $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
4. $\overline{(z_1 z_2)} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
5. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
6. $|z| = |\bar{z}|$

Contoh:

$$|4 - 6i| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

$$|3 + 5i| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

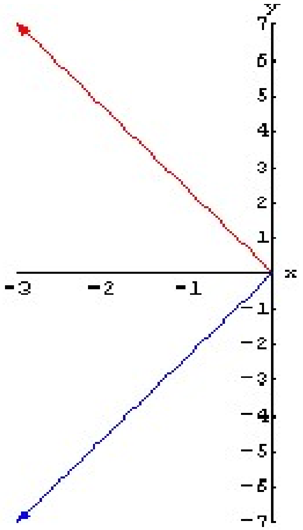
$$|4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

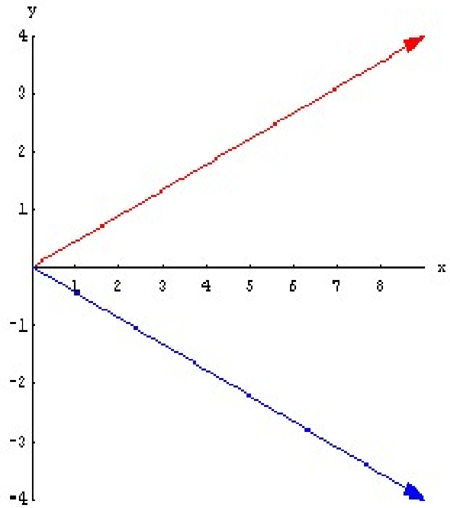
$z_1 = -3 + 7i$

$\overline{z_1} = -3 - 7i$

$z_2 = 9 + 4i$

$\overline{z_2} = 9 - 4i$





2. Bentuk Polar (Trigonometri)

Bentuk polar/trigometri, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

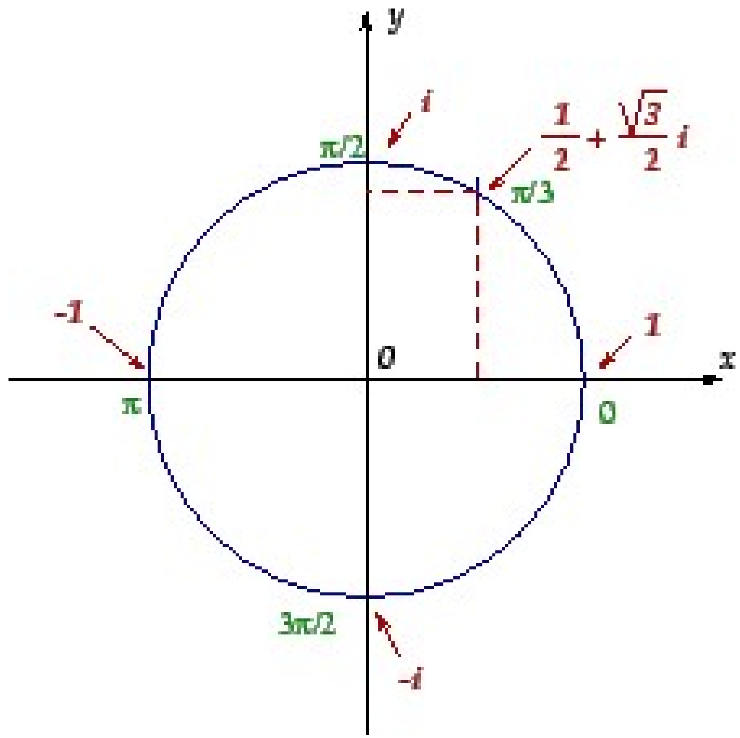
Notasi di atas menyatakan $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ dan θ adalah sudut yang dibentuk oleh z dengan sumbu riil positif. θ disebut *argumen* dari z; $\theta = \arg(z) = \arctan(y/x)$, $-\pi \le \theta \le \pi$.

Contoh:

$$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \arg\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \arg(i) = \frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

i



Example Find the polar form of $z = -\sqrt{3} - i$

Solution

$$z = -i - \sqrt{3}$$

$$r = |z| = 2$$

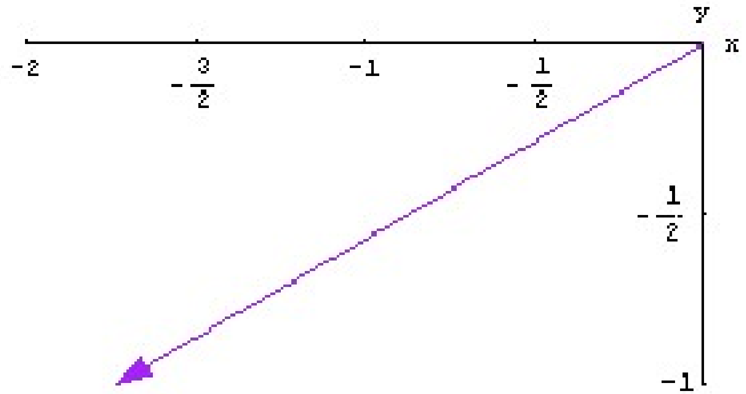
$$\theta_1 = \mathrm{Arg}[z] = \frac{7\pi}{6}$$

$$z_1 = 2e^{7\pi/6}$$

$$z_1 = 2\left(-\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_1 = -i - \sqrt{3}$$

Is $z = z_1$? True



Example Write $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ in the $z = re^{i\theta}$ form.

Solution

$$z = (-1 + i)\sqrt{2}$$

$$r = |z| = 2$$

$$\theta = \text{Arg}[z] = \frac{3\pi}{4}$$

$$z_1 = 2e^{3\pi/4}$$

$$z_1 = (-1 + i)\sqrt{2}$$

Is $z = z_1$? True