TEOREMA DERET PANGKAT

Konsep Dasar

Deret pangkat merupakan suatu bentuk deret tak hingga

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots \qquad (1)$$

diasumsikan x, x_0, dan koefisien a_i merupakan bilangan real. Jumlah parsial untuk n suku pertama bentuk di atas adalah s_n yang dapat dituliskan sebagai

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n \qquad (2)$$

dan sisa deret pangkat (1) didefinisikan sebagai R_n

$$R_n(x) = a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x - x_0)^{n+2} + \dots \qquad (3)$$

Untuk persamaan (1) di atas dapat diperoleh

$$s_0 = a_0$$
$$R_0 = a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$
$$s_1 = a_0 + a_1(x - x_0)$$
$$R_1 = a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots$$
$$s_2 = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$
$$R_2 = a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + a_5(x - x_0)^5 + \dots$$

Konvergensi

Jika diambil suatu nilai $x = x_1$, maka deret pangkat (1) dinyatakan konvergen jika

$\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1)$ hadir sebagai suatu bilangan real.

sebaliknya deret pangkat itu akan divergen jika $\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1)$ tidak hadir sebagai suatu bilangan real. Jika deret (1) adalah konvergen pada x = x_1, dan jumlah deret tersebut untuk x = x_1 dapat dituliskan sebagai

$$s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x_1 - x_0)^m$$

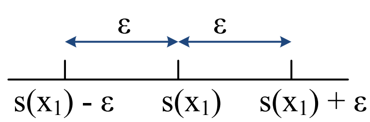
maka untuk tiap n tertentu dapat dituliskan

$$s(x_1) = s_n(x_1) + R_n(x_1) \qquad (4)$$

Pada kasus konvergensi, untuk suatu nilai positif ε tertentu terdapat suatu nilai N (yang tergantung terhadap ε) sedemikian sehingga, untuk (4)

$$|R_n(x_1)| = |s(x_1) - s_n(x_1)| < \varepsilon \quad \text{untuk setiap } n > N \qquad (5)$$

Secara geometris ini berarti bahwa semua $s_n(x_1)$ dengan n > N, terletak antara $s(x_1) - \varepsilon$ dan $s(x_1) + \varepsilon$. Untuk deret yang konvergen, kita dapat menentukan nilai pendekatan dari s(x) untuk x = x_1 dengan mengambil harga n yang cukup besar.



Radius Konvergensi

Untuk menentukan nilai x, yang menghasilkan deret konvergen, tes rasio (Boas, 1983) dapat digunakan. Tes rasio menyatakan bahwa jika rasio absolut dari suku ke-m+1 terhadap suku ke-n mendekati suatu nilai ξ karena n → ∞, maka deret dikatakan konvergen jika ξ < 1 dan divergen jika ξ > 1.

$$\xi = \lim_{m\to\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| |x - x_0| \qquad (6)$$

$$\xi = \frac{1}{R}\left|x - x_0\right| \tag{7}$$

dimana

$$\frac{1}{R} = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| \qquad \text{atau} \qquad R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right| \tag{8}$$

jika limit ada, maka deret adalah konvergen, dan konvergensi menyatakan $\xi < 1$, sehingga

$$\left|x - x_0\right| < R \tag{9}$$

R adalah radius konvergensi, dan deret akan konvergen pada interval

$$x_0 - R < x < x_0 + R \tag{10}$$

Jika deret konvergen, maka deret yang diperoleh dari hasil turunannya juga konvergen. Untuk deret pangkat yang diberikan pada persamaan (1) hanya terdapat tiga kemungkinan

- Deret tersebut konvergen hanya ketika $x = x_0$ jika diperoleh harga $R = 0$.
- Deret tersebut konvergen pada $\left|x - x_0\right| < R$, jika diperoleh harga $R = 1$.
- Deret tersebut konvergen untuk semua x, jika diperoleh harga $R = \infty$.

Untuk tiap x yang membuat deret (1) konvergen, maka deret ini akan menghasilkan nilai tertentu s(x). Dapat dituliskan fungsi s(x) yang konvergen dalam interval berikut:

$$s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \qquad \left(\left|x - x_0\right| < R\right) \tag{11}$$

Contoh 1

Selidikilah konvergensi dari deret berikut:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!x^m = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \ldots$$

Penyelesaian:

Dari deret di atas, diperoleh $a_m = m!$, dengan demikian

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$$

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{m!}{(m+1)!}\right|$$

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{m+1}\right|$$

$$R = 0$$

Menurut tes rasio, konvergensi menyatakan bahwa

$$\xi = \frac{1}{R}\left|x - x_0\right| = \frac{1}{R}\left|x\right| < 1$$

deret ini divergen untuk $x \neq 0$, dengan demikian deret ini konvergen hanya ketika $x = 0$.

Contoh 2

Selidikilah konvergensi deret geometri berikut:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad (|x| < 1)$$

Penyelesaian :

Dari deret geometri di atas diperoleh $a_m = 1$ untuk setiap m, sehingga

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$$

$$R = 1$$

Menurut tes rasio, konvergensi menyatakan bahwa

$$\xi = \frac{1}{R}\left|x - x_0\right| = \left|x\right| < 1$$

dari tes rasio didapatkan bahw deret geometri ini konvergen untuk $\left|x\right| < 1$

Contoh 3

Selidikilah konvergensi deret berikut

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

Penyelesaian :

Dari deret geometri di atas diperoleh $a_m = 1/m!$

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$$

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(m+1)!}{m!}\right|$$

$$R = \infty$$

Menurut tes rasio, konvergensi menyatakan bahwa

$$\xi = \frac{1}{R}\left|x - x_0\right| = \frac{1}{R}\left|x\right| < 1$$

Karena harga $R = \infty$, maka deret di atas konvergen untuk semua x., dan dari tes rasio diperoleh $\left|x\right| < \infty$

Contoh 4

Tentukan radius konvergensi dari deret berikut

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{8^m} x^{3m} = 1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{64} - \frac{x^9}{512} + \ldots - \ldots$$

Penyelesaian

Deret ini merupakan deret dengan pangkat t = x^3 dengan koefisien $a_m = (-1)^m/8^m$, maka

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$$

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{8^{m+1}}{8^m}\right|$$

$$R = 8$$

Menurut tes rasio, konvergensi menyatakan bahwa

$$\xi = \frac{1}{R}\left|x - x_0\right| = \frac{1}{R}\left|x^3\right| < 1$$

Dengan demikian deret ini konvergen untuk $|t| = |x^3| < 8$ yang memenuhi $|x| < 2$.

Penurunan dan Pengintegralan Deret Pangkat

Jika y(x) merupakan fungsi dari deret pangkat pada persamaan (1) :

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} am(x - x_0)^m$$

mempunyai radius konvergensi R > 0, maka hasil turunan dan integrasi dari deret pangkat tersebut pada selang $|x - x_0| < R$ diberikan oleh

$$y'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} ma_m (x - x_0)^{m-1} \tag{12}$$

$$y''(x) = \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m (x - x_0)^{m-2} \tag{13}$$

$$\int y(x)dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{(x - x_0)^{m+1}}{m+1} \tag{14}$$

Penjumlahan

Dua deret pangkat dapat dijumlahkan, misalkan

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \tag{15}$$

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^m \tag{16}$$

memiliki radius konvergensi positif (R > 0) dan jumlah dari f(x) dan g(x) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_m)(x - x_0)^m \tag{17}$$

konvergensi dari fungsi hasil penjumlahan ini terletak di dalam interval konvergensi dari tiap-tiap fungsi asal.

Perkalian

Dua deret pangkat f(x) dan g(x) yang dinyatakan pad persamaan (15) dan (16) dapat diperlakukan operasi perkalian, dengan hasil berikut:

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{\infty} (a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \ldots + a_m b_0)(x - x_0)^m \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x - x_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x - x_0)^2 + \ldots\end{aligned} \tag{18}$$

konvergensi dari fungsi hasil perkalian ini terletak di dalam interval konvergensi dari tiap-tiap fungsi asal.