南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目：　高等数学(上) A　　　开课单位：　数 学 系

考试时长：　120 分钟　　　命题教师：

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分 值	15 分	15 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 9 道大题，满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (15 pts) **Multiple Choice Questions:** (only $\boxed{\text{one correct answer}}$ for each of the following questions.)

(1) Let $f(x) = |x|\sin x$. The greatest value of n, for which $f^{(n)}(0)$ exists, is __B__.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) If $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = \frac{1}{2}$, then the values of a, b are __A__.

(A) $a = 1, b = -\frac{3}{2}$　　(B) $a = -1, b = \frac{3}{2}$

(C) $a = -1, b = 1$　　(D) $a = 1, b = -1$.

(3) The average value of function $g(x) = x^2 + 6$, for $0 \le x \le 6$ is __B__.

(A) 12　　(B) 18　　(C) 16　　(D) 10

(4) Which one of the following functions is not differentiable at $x = 0$?　D

(A) $f(x) = |x|\sin|x|$ $= x\sin x$ ✓

(B) $f(x) = |x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x) = \cos|x|$ ✓

(D) $f(x) = \cos\sqrt{|x|}$

(5) What is the derivative of $f(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ at $x = \pi/6$?　C

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$　　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(C) $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$　　(D) $\frac{1}{3}$

2. (15 pts) Please fill in the blank for the questions below.

(1) The integration $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x\, dx$ equals __0__.

(2) If f is continuous and $\int_0^{x^3-1} f(t)\, dt = x$, then $f(7) =$ __$\frac{1}{12}$__.

(3) If $f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ and $f(1) = 1$, then $f(x) =$ $\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}$

$= x^2+2+\frac{1}{x^2}$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$　$C=-\frac{1}{3}$

(4) A particle is moving on the sphere $x^2+y^2+z^2=13^2$. While $t=t_0$, $x(t_0)=3, y(t_0)=4, z(t_0)=12, x'(t_0)=4, y'(t_0)=3$, then $z'(t_0)=$ $\underline{-2}$.

(5) $\lim_{s\to a}\frac{\sqrt{s^2+1}-\sqrt{a^2+1}}{s-a}=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

3. (10 pts) Find the limits (DO NOT apply l'Hôpital's Rule).

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{x+1}}{x^2+x-2}$. $=0$

$-\frac{3}{4}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\sec^2 x}{x\sin x}$. $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos^3 x-1}{\cos^2 x}}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overbrace{(\cos x-1)}^{=-\frac{1}{2}x^2}(\cos^2 x+\cos x+1)}{x^2\cdot\frac{\sin x}{x}\cos^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1+1+1)}{1\times 1}=-\frac{3}{2}$

4. (10 pts) Evaluate the integral.

(1) $\int_0^{2\pi}|\sin^2 x-\cos^2 x|\,dx$. ✓

(2) $\int_0^1(x+2)\sqrt{1-x^2}\,dx$. $=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx+2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_1^0 -u^2\,du+\frac{\pi}{2}$

$u=\sqrt{1-x^2}$

$du=\frac{-2x\,dx}{2\sqrt{1-x^2}}$

$=\int_0^1 u^2\,du+\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}$

5. (10 pts) Let $f(x)=\frac{x^3+x-2}{x-x^2}$.

(1) Identify the inflection points and local maxima and minima of the function that may exist.

(2) Identify the horizontal, vertical, and oblique asymptotes that may exist.

(3) Graph the function.

6. (10 pts)

(1) Find $\frac{dy}{dx}$ if $\frac{dy}{dx}=4\sqrt{x^2+x}$

$$y(x)=\int_1^{1+2x}\sqrt{t^2-1}\,dt,\quad x>0.$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}=-\frac{5}{4}$

$2x-2y\frac{dy}{dx}=0$

(2) Find the equation of the line that is tangent to the curve $x^2-y^2=9$ at point $(5,-4)$.

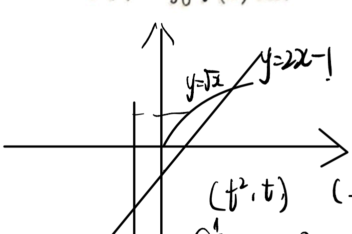
$y+4=-\frac{5}{4}(x-5)$

7. (10 pts) Find the area of the region bounded by curves $y=x^2$ and $y=2x-x^2$. $\frac{1}{3}$

8. (10 pts) Find the volume of the solid generated by revolving the region bounded by $y=2x-1$, $y=\sqrt{x}$ and y-axis about the line $x=-1$.

9. (10 pts) Assume that f is continuous on $[0,1]$. Show that there exists a number $c\in(0,1)$ such that $f(c)=\int_0^1 f(x)\,dx$.

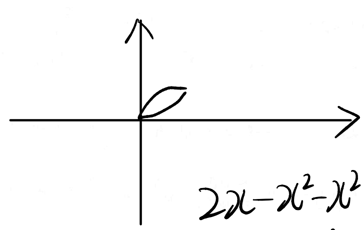
Integration Mean Value Theorem



(t^2,t) $(\frac{t+1}{2},t)$

$\int_0^1\pi(\frac{t+3}{2})^2-\pi(t^2+1)^2\,dt$

$+\int_{-1}^0(\pi(\frac{t+3}{2})^2-\pi)\,dt$



$2x-x^2-x^2$

$=2x-2x^2$

$\int_0^1(2x-2x^2)\,dx$

$=\left[x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1$

一、（15分）单项选择题: (每题只有一个正确答案.)

(1) 令 $f(x)=|x|\sin x$. 使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的 n 的最大值为______.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

(2) 若 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\frac{1}{2}$, 则 a,b 的值为______.

(A) $a=1, b=-\frac{3}{2}$　(B) $a=-1, b=\frac{3}{2}$

(C) $a=-1, b=1$　(D) $a=1, b=-1$

(3) 函数 $g(x)=x^2+6$ 在 $0\le x\le 6$ 上的平均值为______.

(A) 12　(B) 18　(C) 16　(D) 10

(4) 下列哪个函数在 $x=0$ 处不可微?

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$

(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$

(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

(5) 函数 $f(x)=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ 在 $x=\pi/6$ 的导数是______.

(A) $\frac{4\sqrt{3}}{9}$　(B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$　(D) $\frac{1}{3}$

二、（15分）填空题.

(1) 定积分 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^5 x\cos^3 x\,dx$ 的值为______.

(2) 如果 f 连续且 $\int_0^{x^3-1}f(t)\,dt=x$, 则 $f(7)=$______.

(3) 如果 $f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ 且 $f(1)=1$, 则 $f(x)=$______.

(4) 一个质点在球面 $x^2+y^2+z^2=13^2$ 上运动. 在 $t=t_0$ 时, $x(t_0)=3, y(t_0)=4, z(t_0)=12, x'(t_0)=4, y'(t_0)=3$, 则 $z'(t_0)=$______.

(5) $\lim_{s\to a}\frac{\sqrt{s^2+1}-\sqrt{a^2+1}}{s-a}=$______.

三、（10分）求下列极限（不要使用洛必达法则）.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{x+1}}{x^2+x-2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sec^2 x}{x\sin x}$.

四、（10分）计算积分.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|\sin^2 x-\cos^2 x|\,dx$.

(2) $\displaystyle\int_0^1(x+2)\sqrt{1-x^2}\,dx$.

五、（10分）考虑函数 $f(x)=\frac{x^3+x-2}{x-x^2}$.

(1) 求所有（局部）极值点和拐点.

(2) 求所有水平渐近线、垂直渐近线和斜渐近线.

(3) 作出函数$f(x)$的简略图.

六、（10分）

(1) 求 $\frac{dy}{dx}$，这里

$$y(x)=\int_1^{1+2x}\sqrt{t^2-1}\,dt,\quad x>0.$$

(2) 求曲线$x^2-y^2=9$ 在点$(5,-4)$处的切线.

七、（10分）求曲线 $y=x^2$ 和$y=2x-x^2$ 所围成的区域的面积。

八、（10分）曲线 $y=2x-1$, $y=\sqrt{x}$ 和y轴围成一个区域. 把这个区域绕直线 $x=-1$ 旋转可得一个旋转体，求此旋转体的体积.

九、（10分）设函数f 在区间 $[0,1]$ 上连续. 证明：至少存在一点$c\in(0,1)$ 使得$f(c)=\int_0^1 f(x)\,dx$.