#1.

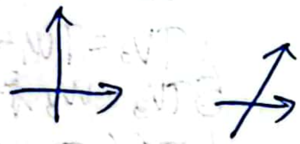
(a) T $\quad U_1\oplus U_2,\ U_2\oplus U_3,\ U_1\oplus U_3 \Rightarrow U_1\oplus(U_2\oplus U_3) \Rightarrow U_1\cap(U_2+U_3)=\{0\}$

(b) F $\quad M(T)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\text{range}\,T=V$, $\text{null}\,T=\{0\}$

当然有 $V=\text{null}\,T\oplus\text{range}\,T$

但 T 不可对角化

(c) F $\quad R^2=$ x轴 $\oplus$ y轴 $=$ x轴 $\oplus$ 直线 $y=x$



显然 y轴 $\neq$ 直线 $y=x$

(d) T $\quad \forall\varphi\in W^0,\ \varphi|_W=\text{0-map} \xRightarrow{U\subset W} \varphi|_U=\text{0-map}\Rightarrow\varphi\in U^0$

$\therefore W^0\subset U^0$

(e) F $\quad j=0,1,2,3$

#2.

(a) 验证 $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\in V_i$，加法封闭，数乘封闭

(b) V_1 的一组基：$\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\dim V_1=3$.

V_2 的一组基：$\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\dim V_2=3$.

$V_1+V_2=\left\{\begin{bmatrix}a+y & -a+x\\ b-y & c+z\end{bmatrix}: a,b,c,x,y,z\in R\right\}$

V_1+V_2 一组基为 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\dim(V_1+V_2)=4$

$V_1\cap V_2=\left\{\begin{bmatrix}a & -a\\ -a & c\end{bmatrix}: a,c\in R\right\}$

$V_1\cap V_2$ 一组基为 $\begin{bmatrix}1&-1\\-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\dim(V_1\cap V_2)=2$.

(c) 不是

$\dim V_1+\dim V_2\neq\dim(V_1+V_2)$

#3. 假设有T:

则有: $Tv_1=w_1$, $Tv_2=w_2$.

∵ $v_3=v_1-2v_2$

∴ $Tv_3=T(v_1-2v_2)=w_1-2w_2=(1,-2)\neq w_3$.

与 $Tv_3=w_3$ 矛盾

故不存在 T s.t. $T(v_i)=w_i$, $i=1,2,3$.

#4. ∵ $M(T)=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 在v_1,v_2基下

∴ $Tv_1=0$, $Tv_2=v_2$

T下的不变子空间有: $\{0\}$, $\operatorname{span}(v_1)$, $\operatorname{span}(v_2)$, $\operatorname{span}(v_1,v_2)$(即V).

#5.

构造 $\phi: V^2\to L(F^2,V)$

$\phi(v_1,v_2)=T_{(v_1,v_2)}$, 其中 $T_{(v_1,v_2)}\triangleq T_{(v_1,v_2)}(e_1)=v_1,\ T_{(v_1,v_2)}(e_2)=v_2$, $T\in L(F^2,V)$.

验证φ是线性的: check ✓.

φ是单的: check ✓.

φ是满的: $\forall S\in L(F^2,V)$, 都有 $S(e_1)=w_1$, $S(e_2)=w_2$

则 $\phi(w_1,w_2)=T_{(v_1,v_2)}=S$

∴φ是满的.

∴φ是V^2与$L(F^2,V)$之间的同构,

综上, V^2与$L(F^2,V)$是同构的.

#6. ∵ $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle+\langle u-v,u-v\rangle=2\langle u,u\rangle+2\langle v,v\rangle\ \cancel{=2(\|u\|^2+\|v\|^2)}$

$=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$

∴ ~~$u=\frac12\vec c$, $v=\vec d$, 则 $u+v=\vec a$, $u-v=\vec b$~~

∴ ~~有~~ $u=\vec a$, $v=\vec b$, 则 $u+v=2\vec d$, $u-v=\vec c$

∴ $4d^2+c^2=2(a^2+b^2)$

即 $a^2+b^2=\frac12c^2+2d^2$