SUSTECH2018高数上期末参考答案

WY

1. (判断题)
   (1) 错，不能直接用介值定理，因为没有连续性假设。
   (2) 错，保号性只能得到$\lim_{x\to 0} f(x) \geq 1$。有反例，比如，对$x \neq 0$，$f(x) = 1 + e^{-\frac{1}{x^2}}$；和$f(0) = 2$。注意这里$f$没有连续性假设。
   (3) 错，夹逼定理相关内容。有反例。比如，当$x \to \infty$时，

$$h(x) = f(x) = g(x) = \sin x.$$

2. (黎曼和与积分的关系)
   首先，这道题的目标是找到合适的定积分，形式为：

$$\int_a^b f(x)dx.$$

因此，需要确定两个关键要素：（1）积分区间$[a,b]$;（2）被积函数$f(x)$。选点细节请自行考虑。

为了这个目的，把题中求和项改写成：

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{2n}} + \sqrt{\frac{3}{2n}} + \cdots + \sqrt{\frac{2n-1}{2n}}\right).$$

从上式能够确认积分区间是$[0,1]$，同时被积函数为$f(x) = \sqrt{x}$。选点细节请自行考虑。可参考quiz2的第7题。

3. (选择题)
   (1) D，奇函数积分性质及积分的保号性。注意：（1）连续奇函数在对称区间上的积分为0;（2）正的连续函数的积分为正。从这两条出发，我们可以很快得到：$a = 0$，$b > 0$，和$c < 0$。因此选D。
   (2) B，零点问题，简单作图，把方程写成$\int_a^x f(t)dt = \int_x^b f(t)dt$，考虑两条严格单调连续曲线的交点问题。
   (3) B，反常积分、极限（比较）判别法、重要的反常积分。请参考quiz4选择题第2题。
4. (单调性的研究、微积分基本定理)

2019年的第11题类似，单调性算一阶导数。根据微积分基本定理，

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

从上式可得到，$f'(x)$在$(-\infty, -1)$取负值，在$(-1, 0)$取正值，在$(0, 1)$取负值，在$(1, \infty)$取正值，因此得到相应的单调区间。

这里有两个注意要点。1）注意到积分里面t是变量，因此可以先把被积函数中的x^2部分放到积分符号外面，这样求导的时候就不容易错误。比如，先改写

$$f(x) = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt.$$

2）变限积分求导时请注意使用链式法则，可参考第8次补充作业第8题。

5. (参数的计算、极限的计算)

首先，注意到$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(bx)}{x} = b$，因此，

$$b = -\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan(2x)}{x^3} + \frac{a}{x^2} \right).$$

这告诉我们，右边的极限存在。注意到$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x} = 2$。我们可把右边极限部分改写成：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\tan(2x)}{x} + a}{x^2}.$$

这个我们常见的分子分母型极限计算问题。由于分母极限等于0，因此分子极限必须等于0。这样我们得到$2 + a = 0$或者$a = -2$。接下来，我们计算b的取值，

$$b = -\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x) - 2x}{x^3}.$$

可以使用洛必达法则，和三角函数恒等式

$$\sec^2(2x) - 1 = \tan^2(2x).$$

6. (极限的计算)

第一题，这个分子分母型极限的计算。注意到分母的极限不等于0，因此可以根据连续函数性质直接带入$x = 1$。

第二题，重要考点：指数、对数函数的性质，洛必达法则的应用。参考quiz3的第3题。

7. (分段函数导数的计算、连续性的判断)

第一问，需要分$x \neq 0$和$x = 0$两种情况讨论。当$x \neq 0$时，运用链式法则求导。等$x = 0$时，根据导数定义，算极限得到导数。

第二问的回答是不连续，因为第一问中$x \neq 0$时计算的导数在0点的极限不存在。回忆重要的极限不存在的例子。

类似的题型，请参考quiz1的第7题，2019年的第3题。

8. (导数的计算)

第一题，可参考quiz3中的第2题，一般形式时，记得根据以下恒等式计算通过链式法则计算导数：

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

第二题，求导法则、链式法则。运用化简思维，先改写成以下形式会方便一些：

$$\frac{(x+2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{4}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{4}{5(x-2)} - \frac{4}{5(x+3)}.$$

9. (牛顿法的应用，交点问题，零点问题)

首先，把交点问题改写成零点问题：

$$x(1-x) = 2x - 1$$

等价于

$$f(x) = x^2 + x - 1 = 0.$$

回顾牛顿法，见下面三张图。具体计算省略。

Newton's Method

1. Guess a first approximation to a solution of the equation $f(x) = 0$. A graph of $y = f(x)$ may help.
2. Use the first approximation to get a second, the second to get a third, and so on, using the formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad \text{if } f'(x_n) \neq 0. \tag{1}$$

10. (极值点、拐点的计算，函数简略图)

极值点算一阶导数，拐点常算二阶导数判断一阶导数的单调性，函数简略图可参考期中考试、几次补充作业。

11. (弧长的计算)

回忆弧长积分公式：

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

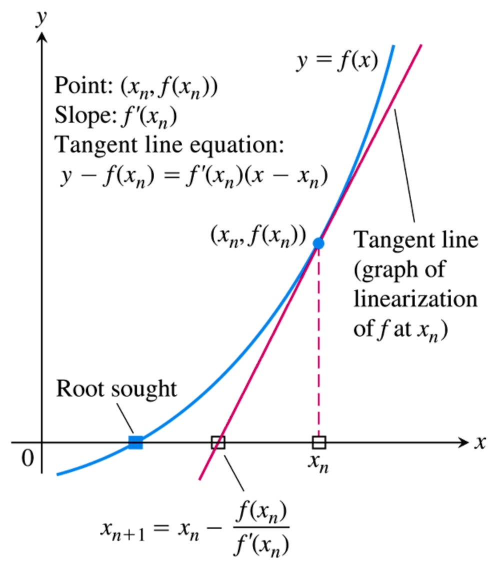

FIGURE 4.42 The geometry of the successive steps of Newton's method. From x_n we go up to the curve and follow the tangent line down to find x_{n+1}.

如果忘记了，记得用积分思想回忆下它的推导过程：

$$L=\int_a^b\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx.$$

类似的题目，请参考quiz3的第5题和补充作业。

12. (旋转体的体积计算，积分的简单应用)

根据旋转体的体积积分公式，

$$V=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\pi y^2dx=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\pi\frac{1}{1+x^2}dx.$$

注意：不记得公式时，不要慌，回忆推导过程，积分思想，不难得到。

类似题目，可参考补充作业。

13. (反常积分，比较（极限）判别法，重要反常积分)

回忆重要反常积分结果：下面的反常积分在$p>1$时收敛，在$p\leq 1$时发散：

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx.$$

（简单通过不定积分和定积分的计算即可得到。）

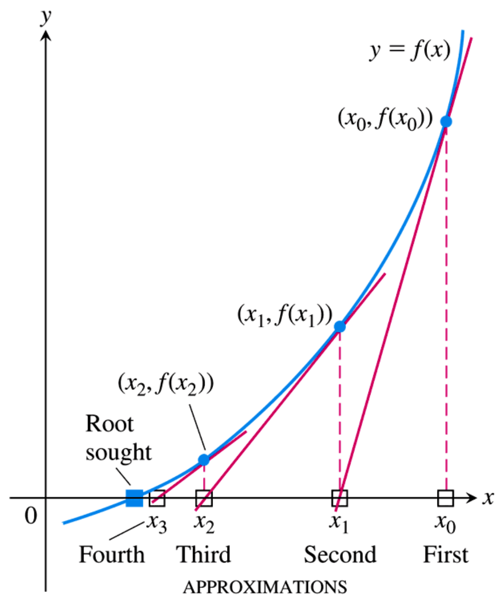

FIGURE 4.41 Newton's method starts with an initial guess x_0 and (under favorable circumstances) improves the guess one step at a time.

注意到，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x^2+1}}{\frac{1}{x}}=a.$$

因此，$a=\frac{1}{2}$。否则，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x^2+1}-\frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}}=a-\frac{1}{2}\neq 0,$$

由反常积分的极限判别法，可得$\int_1^{\infty}\left(\frac{ax}{x^2+1}-\frac{1}{2x}\right)dx$发散。

最后，当$a=\frac{1}{2}$时，计算

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\left(\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2x}\right)dx&=-\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx\\&=-\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\int_1^{r}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx\\&=-\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^r\\&=-\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}=-\frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

注意：1）反常积分的定义，两大类；2）重要的反常积分的收敛性；3）比较判别法、极限判别法；4）反常积分的计算。

14. (计算积分)

(1) 换元法：$t=\sqrt{u-2}$。回忆常见无理（根式）函数的不定积分求法，可参考习题课12课件。

1、形如 $\int R\left(x,\ \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ 或：$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,$

可作变换：$\sqrt[n]{ax+b}=t$ 或：$\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}=t$；

(2) 不定积分的分部积分法。注意

$$\tan^2 x=\sec^2 x-1$$

和

$$d\tan x=\sec^2 x dx.$$

还有

$$\int \tan x dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\ln|\cos x|+C.$$

请参考第8次补充作业的第5题，熟悉其他8类基本的三角函数的不定积分。

(3) 含根式函数的不定积分求法+积分小技巧。可参考quiz4第5题。注意到

$$\frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}dx=\frac{x^3}{x^4\sqrt{x^4-1}}dx=\frac{1}{4}\frac{dx^4}{x^4\sqrt{x^4-1}}.$$

从这里出发，我们最后换元$u=\sqrt{x^4-1}$，可得

$$\frac{1}{4}\frac{dx^4}{x^4\sqrt{x^4-1}}=\frac{1}{4}\frac{d(u^2+1)}{(u^2+1)u}=\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{u^2+1}.$$

这是熟悉的积分形式。最后注意这里计算的是定积分，需要把积分上下界做相应的调整。

(4) 不定积分的分部积分法，常用三角函数恒等式。可参考第6次补充作业的第5题。需要注意的是：碰到$\sin x$, $\cos x$的幂次形式，常可应用下面的三角函数恒等式进行化简：

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x.$$

比如，这里我们可以改写积分：

$$\begin{aligned}\int x\cos^3 x dx &= \int x(1-\sin^2 x)\cos x dx\\ &= \int x\cos x dx - \int x\sin^2 x\cos x dx\\ &= \int x d\sin x - \int x d\frac{\sin^3 x}{3}\\ &= x\sin x - \int \sin x dx - \frac{1}{3}x\sin^3 x + \frac{1}{3}\int \sin^3 x dx\\ &= x\sin x + \cos x - \frac{1}{3}x\sin^3 x + \frac{1}{3}\int (1-\cos^2 x)\sin x dx\\ &= x\sin x + \cos x - \frac{1}{3}x\sin^3 x + \frac{1}{3}\left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right) + C\\ &= x\sin x + \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{9}\cos^3 x - \frac{1}{3}x\sin^3 x + C.\end{aligned}$$

注意：1）含根式函数的不定积分求法，相应的换元；2）$\tan x$和$\sec x$的配对关系，导数关系，恒等式关系；3）基本的三角函数的不定积分；4）分子分母同时乘于某个函数的配方法；5）不定积分和定积分的分部积分法；6）涉及ln积分结果时，不要忘了加绝对值符号；7）不定积分时，不要忘了$+C$。

15. (换元法的简单应用)

根据题意，因为$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx$是一个常数，计算

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x)dx\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx + \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du.\end{aligned}$$

因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)du,$$

我们得到：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \frac{1}{1-\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \cdots.$$

这里，最后需要再次用到定积分的分部积分法，可参考第6次补充作业的第5题。

注意：1）根据题意计算相应的积分；2）合理应用换元法，分部积分法。

Here is why multiplying by $v(x)$ works:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Original equation is in standard form.

$$v(x)\frac{dy}{dx} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x)$$

Multiply by positive $v(x)$.

$$\frac{d}{dx}(v(x)\cdot y) = v(x)Q(x)$$

$v(x)$ is chosen to make $v\frac{dy}{dx} + Pvy = \frac{d}{dx}(v\cdot y)$.

$$v(x)\cdot y = \int v(x)Q(x)\,dx$$

Integrate with respect to x.

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,dx$$

16. (一阶线性微分方程的解法)

回忆解一般一阶线性微分方程的积分因子方法：

这里，

$$v(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

因此，

$$y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}\cdot Q(x)dx.$$

注意：上述积分因子方法里，我们只需找到一个满足上述性质的$v(x)$即可。因此，$v(x)$中的积分计算可以不带$+C$.

回到原题，容易得到$P(x) = 2 - x$和$Q(x) = 3(x-2)$。因此，我们可以取

$$v(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int (2-x)dx} = e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}.$$

这样，

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{1}{2}(x-2)^2}\int e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}\cdot 3(x-2)dx \\ &= 3e^{\frac{1}{2}(x-2)^2}\int e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}d\left[\frac{1}{2}(x-2)^2\right] \\ &= 3e^{\frac{1}{2}(x-2)^2}\left[-e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2} + C\right] \\ &= -3 + Ce^{\frac{1}{2}(x-2)^2}. \end{aligned}$$

这里，C可以是任意常数。

特殊做法：根据一阶线性微分方程的性质，它的通解可以写成特解加上相应齐次线性微分方程的通解，即下面方程的通解：

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0.$$

由于这个方程是可分离变量方程，它的通解可通过以下改写的方程积分得到：

$$\frac{dy}{y}+P(x)dx=0.$$

对原题中的方程，如果能观察到$y=-3$是一个特解，那么就只需解下面方程：

$$\frac{dy}{y}+(2-x)dx=0.$$

积分得到其通解为：

$$y=Ce^{\frac{1}{2}(x-2)^2}.$$

17. (伯努利微分方程—一类具有已知精确解的非线性微分方程)

根据题目提示，先作变换$u=y^{1-n}$把伯努利微分方程变成一阶线性微分方程。

这里$n=3$，令$u=y^{-2}$，简单计算可得：

$$u'-\frac{4}{x}u=-\frac{2}{x^2}.$$

根据方程形式，猜测$u=\frac{a}{x}$会是特解，带入方程可得：

$$-\frac{5a}{x^2}=-\frac{2}{x^2}.$$

这样，得到$a=\frac{2}{5}$。因此，$u=\frac{2}{5x}$是特解。接下来，求解

$$u'-\frac{4}{x}u=0.$$

简单的积分可得，该方程的通解为$u=Cx^4$。因此，原方程的通解为:

$$u(x)=\frac{2}{5x}+Cx^4.$$

这样，我们得到：

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x}+Cx^4}}.$$

注意：如果有提示，应尽快根据提示作答因为提示的方法是可行的。如果还有兴趣，之后再想其他办法。

18. (根据未知函数的性质建立未知函数的微分方程，最终求解未知函数)

解答该题的关键是根据导数的定义建立未知函数的微分方程。可参考quiz2的第8题。

为了建立未知函数的微分方程，我们需要根据导数的定义，

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dx} = f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)\cdot f(h)-f(x)}{h} \\
&= f(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} \\
&= f(x)\cdot f'(0).
\end{aligned}
$$

实际上，我们之后可以根据这个微分方程求出未知函数的通解形式。类似的题型，可参考2019年的第12题。