SUSTECH2019高数上期末参考答案

WY

1. (判断题)

   (1) 对，无穷大分阶问题，参考quiz4中的判断题。

   (2) 对，简单的换元法，$u = a - x$。

   (3) 对，局部最小值问题及凹凸性，参考quiz2的第4题。

   (4) 对，复合函数的连续性，$(f(x))^2 = |f(x)|^2$。

   (5) 错，洛必达法则反过来对吗？有反例。比如，

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

   和$g(x) = x$。这个反例给出洛必达法则失效的情景。

2. (选择题)

   (1) A，反函数导数问题，参考quiz4中的选择题。

   (2) B，零点问题，简单作图，把方程写成$(x-3)^2 = -\frac{c}{x}$。

   (3) D，左右极限概念，注意当$x \to 0^-$时，有$x - \sin x \to 0^-$和$x^2 + x \to 0^-$。

   (4) A，不连续点（间断点）的分类，验证$x = 0$是可去不连续点，$x = 1$是跳跃不连续点。

   (5) C，奇偶性，注意到奇函数在0点的取值必为0，因此可以排除A和D，简单带入$f(x) \equiv 1$可以排除B，因此选C。

3. (参数的计算)

   可参考quiz1中的第7题。注意三点：1）可微性推出连续性；2）连续性能得到左极限=右极限；可微性可推出左导数=右导数。

4. (极限的计算)

   可参考quiz4中的第3题。

   第一题，重要考点：洛必达法则的应用。小技巧：1）$\tan x$和$\sin x$在0点和x同阶,可替换，方便使用洛必达法则。

   第二题，重要考点：指数、对数函数的性质，重要极限结果的应用。小技巧，简化整理成标准形式。

   $$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}.$$

5. (平面区域面积的计算，积分的简单应用)

$$2\int_0^4 \left(\frac{x^2}{2}+4-|x^2-4|\right)dx = 2\int_0^2 \left(\frac{x^2}{2}+4-(4-x^2)\right)dx + 2\int_2^4 \left(\frac{x^2}{2}+4-(x^2-4)\right)dx.$$

注意：如果被积函数中有绝对值函数，请注意分区间积分，去掉绝对值再计算积分。

6. (旋转体表面积的计算，积分的简单应用)

不记得相应的积分公式，请回忆推导过程，积分思想，不难。

$$S = 2\int_0^1 2\pi y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

这里

$$y(x) = (1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

注意：1）灵活运用几何体的对称性；2）需要先确定变量取值范围，这里x的取值范围是$[-1,1]$，由于对称性，最后积分中只需取$[0,1]$。

7. (求解参数问题，隐式求导和导数的几何意义–切线斜率)

首先，根据条件点在曲线上建立第一个方程：

$$(b-a)^3 = b+a.$$

其次，对曲线方程（隐式）求导，得出

$$3(y-x)^2\cdot(\frac{dy}{dx}-1) = \frac{dy}{dx}+1.$$

带入点的坐标和该点处切线斜率$\frac{dy}{dx}=3$，得到第二个方程：

$$3(b-a)^2\cdot 2 = 4.$$

注意：1）切线斜率跟导数的关系；2）隐式求导时注意链式法则；3）最后解方程时不要遗漏解，比如这里a,b有两组解。如果有时间，一定要检查下，特别是在会做的情况下的简单的计算类题型。

8. (链式法则，微积分基本定理的应用)

首先，由指数函数的性质和链式法则可以得到：

$$f'(2) = e^{g(2)}\cdot g'(2).$$

带入$x=2$，注意到$g(2)$中的积分上界=积分下界，因此$g(2)=0$。

其次，根据微积分基本定理，

$$g'(x)=\frac{\frac{x^2}{2}}{1+(\frac{x^2}{2})^4}\cdot x.$$

带入$x=2$可得$g'(2)=\frac{4}{17}$。

最后，结合上述计算结果，

$$f'(2)=e^{g(2)}\cdot g'(2)=\frac{4}{17}.$$

注意：1）链式法则的应用，指数函数的性质；2）当积分上界是x的函数时，怎么求导，可参考补充作业8的第8题；3）带入数字计算时一定要仔细。

9. (计算不定积分、定积分)

(1) 换元法，带有根号时可尝试的一种换元：$t=\sqrt{1+e^x}$。

(2) 有理函数的积分，熟悉有理函数化为部分分式之和的一般规律。

(3) 可以把被积函数改写成：

$$\tan^2 x\sec x=\frac{\tan^2 x}{\sec x}\cdot\sec^2 x=\frac{\tan^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}\cdot\sec^2 x.$$

注意这里常用的两个关系式：

$$\sec^2 x=1+\tan^2 x$$

和

$$d\tan x=\sec^2 xdx.$$

(4) 被积函数中包含绝对值函数的定积分计算。根据绝对值里面函数的性质，把积分区间分成$[\frac{1}{2},1]$和$[1,\frac{3}{2}]$。之后，对根号里面的二次多项式进行配方法，比如：

$$\sqrt{x(1-x)}=\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}.$$

再用相应的换元法。

10. (应用题，建模并求解)

首先，我们需要根据题意建立数学模型。由于问题跟时间有关，因此相关模型会是相应的微分方程。注意到，问题关注的是有多少盐，这提示我们

如何设未知函数。因此，我们设t时刻蓄水池的含盐量为$y(t)$。此时整个蓄水池混合液的容量为：

$$800 + 16t - 8t = 800 + 8t.$$

因此，此时盐水的溶度为：

$$\frac{y}{800 + 8t}.$$

从t到$t + dt$这段时间，蓄水池中的含盐量的改变量可近似为：

$$\begin{aligned} dy &= 0.0625 \cdot 16dt - \frac{y}{800 + 8t} \cdot 8dt \\ &= \left(1 - \frac{y}{100 + t}\right) dt. \end{aligned}$$

接着，第二步就是求解这个微分方程。首先，我们可以把微分方程改写成：

$$(100 + t)y' = 100 + t - y.$$

因此，

$$[(100 + t)y]' = y + (100 + t)y' = 100 + t.$$

令$f(t) = (100 + t)y(t)$，那么

$$f' = 100 + t.$$

这样，

$$f(t) = \frac{1}{2}t^2 + 100t + C.$$

注意到$f(0) = 100y(0) = 0$。那么我们很容易得到$C = 0$并且

$$y(t) = \frac{\frac{1}{2}t^2 + 100t}{100 + t}.$$

另外一方面，根据$800 + 16t - 8t = 1600$，得出蓄水池在$t = 100$时正好装满混合液。因此，在这个时刻，蓄水池含盐量(单位为公斤)为：

$$y(100) = 100.$$

注意：一般求解数学模型不会很复杂，多尝试改写方程，变换函数，换元法等。

11. (微积分基本定理的应用，变限积分求导，单调性，凹凸性)

首先，注意到在$F(x)$定义的第一个积分里面，u是变量，因此可以把积分里面的x放到第一个积分号外面，把$F(x)$改写成：

$$F(x) = x\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)du + \int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{f(u)}{u^2}du.$$

这样，根据微积分基本定理和链式法则，

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)du + \frac{f(\frac{1}{x})}{x} - f(\frac{1}{x}) \\ &= \int_{\frac{1}{x}}^{1} f(u)du - f(\frac{1}{x})\left(1 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

其次，根据条件，$f(u)$是严格单调增函数，因此：

(a) 如果$\frac{1}{x} < 1$，由于$f(u) > f(\frac{1}{x})$对所有$u > \frac{1}{x}$成立，因此，我们得到$F'(x) > 0$。

(b) 如果$\frac{1}{x} > 1$，改写

$$F'(x) = -\int_{1}^{\frac{1}{x}} f(u)du + f(\frac{1}{x})\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

由于$f(u) < f(\frac{1}{x})$对所有$u < \frac{1}{x}$成立，因此，我们依然得到$F'(x) > 0$。

综上所述，$F(x)$在整个区间$(0, \infty)$上单调增。

接着，根据微积分基本定理和链式法则，

$$\begin{aligned} F''(x) &= f(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2} + f'(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) \cdot (\frac{1}{x} - 1) + f(\frac{1}{x}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) \\ &= -\frac{1-x}{x^3} f'(\frac{1}{x}). \end{aligned}$$

因此，由于$f'(\cdot) > 0$，$F''(x) > 0$如果$x > 1$;$F''(x) < 0$如果$0 < x < 1$。回顾，$F'(0) = 0$，因此，F的图像在区间$(1, \infty)$上凹，在区间$(0, 1)$下凹。

注意：单调性算一阶导数，凹凸性算二阶导数。另外有时需要注意不可导的位置。

12. (如何建立未知函数的微分方程，导数定义，变量分离方程求解)

解答该题的关键是想到要建立未知函数的微分方程。

为了建立未知函数的微分方程，我们需要根据导数的定义，

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx} = g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)+g(h)}{1-g(x)g(h)}-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(h)}{h}\cdot\frac{1+g^2(x)}{1-g(x)g(h)}\right]\\ &= 1+g^2(x).\end{aligned}$$

因此，我们得到关于未知函数$g(x)$的微分方程：

$$\frac{dg}{dx} = 1+g^2.$$

改写一下，得到：

$$\frac{dg}{1+g^2} = dx.$$

因此，$\arctan g = x + C$，这里c是一个常数。由于条件(ii)给出$g(0)=0$，这样，$C=0$。因此，这样我们解出

$$g(x) = \tan x.$$