Linear Algebra-A

Assignments - Week 15

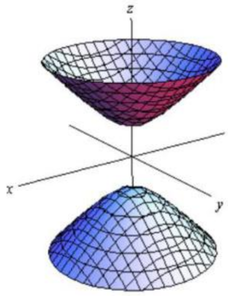
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Supplementary Problem Set

1. 【请写出运算过程】

(1) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,则$f(x_1,x_2,x_3)=2$在空间直角坐标系下表示的二次曲面为(B).

(A)单叶双曲面　(B)双叶双曲面　(C) 椭球面　(D) 柱面



(2) 设$\boldsymbol{A}$为三阶实对称矩阵，如果二次曲面方程$(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=1$

在正交变换下的标准方程的图形如图所示，

则$\boldsymbol{A}$的正特征值的个数为(1).

2. 已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可以经过正交变换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\xi^2=4$，求a,b的值和正交矩阵$\boldsymbol{P}$.

3.已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$下的标准形为$y_1^2+y_2^2$，且$\boldsymbol{Q}$的第三列为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(I) 求矩阵$\boldsymbol{A}$.　(II) 证明$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$为正定矩阵，其中$\boldsymbol{I}$为三阶单位矩阵.

4. 已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$的秩为2.

【注：实二次型的秩即指其相应的实对称矩阵的秩】

(I)　求a的值.

(II) 求正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，把$f(x_1,x_2,x_3)$化为标准形.

(III)求方程$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解.

5. 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

(I) 求二次型f的矩阵所有的特征值;

(II) 若二次型f的<u>规范形</u>为$y_1^2+y_2^2$, 求a的值.

【注: 对于二次型$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，存在变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 使得$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2$，则称右端的二次型为$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$的规范形.】