讲义:

Theorem:设 f 是 $[a,b]\times[c,d]$ 上的连续函数, 则有

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

对称性在积分计算中的应用

积分区域 D 关于 x 轴对称:
(1) 若 $f(x,y)=-f(x,-y)$, 则 $\iint_D f(x,y)dxdy=0$
(2) 若 $f(x,y)=f(x,-y)$, 则 $\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D\cap\{y\geq 0\}} f(x,y)dxdy$
积分区域 D 关于 y 轴对称:
(1) 若 $f(x,y)=-f(-x,y)$, 则 $\iint_D f(x,y)dxdy=0$
(2) 若 $f(x,y)=f(-x,y)$, 则 $\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D\cap\{x\geq 0\}} f(x,y)dxdy$
积分区域 D 关于原点对称:
(1) 若 $f(x,y)=-f(-x,-y)$, 则 $\iint_D f(x,y)dxdy=0$
(2) 若 $f(x,y)=f(-x,-y)$, 则 $\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$,
其中 D_1 是区域 D 的一半。

极坐标变换

当积分区域是圆域或圆域的一部分, 或者被积函数的形式为 $f\left(x^2+y^2\right)$ 时, 采用极坐 标变换

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}, 0\leq r<+\infty, 0\leq\theta\leq 2\pi$$

往往能达到简化积分区域或被积函数的目的。此时,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

极坐标变换把 $r\theta$ 平面上的矩形 $[0,R]\times[0,2\pi]$ 变换成 xy 平面上的圆域
$D: x^2+y^2\leq R^2$ 。 但此对应不是一对一的。例如: xy 平面上原点与 $r\theta$ 平面上的直线
$r=0$ 相对应。但变 换公式仍成立。

定边界: 若原点是 D 的外点, 且 xy 平面上射线 $\theta=$ 常数, 与 D 的边界至多交于两点, 则 Δ 必可表示成

$$r_1(\theta)\leq r\leq r_2(\theta), \alpha\leq\theta\leq\beta$$

于是有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

- 若原点是 D 的内点, D 的边界的极坐标方程为 $r=r(\theta)$, 则 Δ 必可表示成

$$0\leq r\leq r(\theta), 0\leq\theta\leq 2\pi$$

于是有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

- 若原点是 D 的边界点, 则 Δ 必可表示成

$$0\leq r\leq r(\theta),\alpha\leq\theta\leq\beta$$

于是有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^{\beta}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

广义极坐标变换

- 坐标变换公式 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases},0\leq r<+\infty,0\leq\theta\leq 2\pi,$

  其中

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$$

题目

1 设 $I=[0,\pi]\times[0,1]$. 计算二重积分

$$\iint_I y\sin xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

2 令 $I=[0,1]^2$. 计算二重积分

$$A=\iint_I xy^3\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$f(x,y)=\begin{cases}1-x-y, & x+y\leqslant 1,\\ 0, & x+y>1.\end{cases}$$

3 计算 $\int_1 f\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $I=[0,1]^2$.

4 计算下列积分:
(1) $\iint_I\frac{x^2}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,I=[0,1]^2$;
(2) $\iint_I x\cos xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,I=[0,\pi/2]\times[0,1]$;
(3) $\iint_I\sin(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,I=[0,\pi]^2$.

5 设函数 f 在矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续的二阶偏导数.计算积分

$$\iint_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

6 计算积分 $\int_I f\,\mathrm{d}\sigma\left(I=[0,1]^2\right)$:

(1) $f(x,y)=\begin{cases}1, y\leqslant x^2,\\ 0, y>x^2;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x^2\leqslant y\leqslant 2x^2,\\ 0, & y<x^2 \text{ 或 } y>2x^2.\end{cases}$

(3)计算积分

$$A=\iint_B\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y,$$

其中 B 是由两组平行直线

$$y=a, y=3a;\quad y=x, y=x+a$$

所围成的平行四边形.

7 计算积分

$$A=\iint_B xy^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

其中 $B=\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$.

8 计算下列积分:

(1) $\iint_D\cos(x+y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, D$ 由 $x=0, y=x, y=\pi$ 围成;

(2) $\iint_D xy^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, D$ 由 $y^2=4x$ 和 $x=1$ 围成;

(3) $\iint_D \mathrm{e}^{x+y}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, D=\{(x,y):|x|+|y|\leqslant 1\}$;

(4) $\iint_D|xy|\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$;

(5) $\iint_D x\cos xy\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$;

9 求 $\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, D$ 为由 $ay=bx, ay=cx$ 及 $x=a$ 围成的三角形

10 计算积分 $\iint_D\frac{x^2}{y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, D$ 是由直线 $x=2$,$y=x$ 及 $xy=1$ 所围成的区域

11 求积分 $I=\iint_D y^2\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y, D$ 是由直线 $y=x, y=-x$ 和 $x^2+y^2=1$ 所围成位于第一、第四象限内的区域.

12 用极坐标计算下列二重积分

(1) $\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, 其中 $D=\{(x,y)\}\mid \pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2$;

(2) $\iint_D(x+y)dxdy$, 其中 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y\right\}$;

(3) $\iint_D f'\left(x^2+y^2\right)dxdy$, 其中 D 为圆域 $x^2+y^2\leqslant R^2$.

13 试作适当变换,计算下列积分:

(1) $\iint_D(x+y)\sin(x-y)dxdy, D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x+y\leqslant\pi, 0\leqslant x-y\leqslant\pi\}$;

(2) $\iint_D\frac{y}{x+y}dxdy, D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

14 求由下列曲面所围立体 V 的体积:

(1) V 由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=x+y$ 所围的立体;

(2) V 由曲面 $z^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 和 $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ 所围的立体;

15 求由下列曲线所围的平面图形面积:

(1) $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x(a<b, \alpha<\beta)$;

(2) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$;

(3) $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right),\left(x^2+y^2 \geqslant a^2\right)$