南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(上) A　　**开课单位:** 数 学 系

考试时长: 120 分钟　　**命题教师:** 高等数学出题组

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9
分 值	15 分	15 分	10 分	10 分	10 分	12 分	12 分	10 分	6 分

本试卷共 9 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (15pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

   (1) The number of real roots for $x^3 - 12x + 19 = 0$ is B
   (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

   (2) Let $f(x)$, $g(x)$ be differentiable functions that are always greater than zero. If $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$, then _____ for $a < x < b$. A
   (A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ (B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$
   (C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$ (D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

   (3) If a function $f(x)$ is continuous at $x = 0$ and $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ then C
   (A) $f(0) = 1$ and $f'(0) = 2$. (B) $f(0) = 0$ and $f'(0) = 0$.
   (C) $f(0) = 0$ and $f'(0) = 2$. (D) None of (A), (B) and (C) is correct.

   (4) If $f(x)$ is differentiable, and $\alpha = f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$, then A
   (A) $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 0$. (B) $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = 1$.
   (C) $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} = 1$. (D) $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{\alpha} = 0$.

   (5) If $f(x) = |x|\, g(x)$ is differentiable at $x = 0$, then we must have C
   (A) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x)$. (B) $\lim_{x\to 0} g'(x) = g'(0)$.
   (C) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = -\lim_{x\to 0^-} g(x)$. (D) $\lim_{x\to 0} g'(x) = g(0)$.

2. (15 pts) Fill in the blanks.

   (1) If $(-1, 0)$ is an inflection point on the curve $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$, then $b =$ 3.

(2) Let $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, then $f'(0) =$ _____.

(3) If $f(x) = \sqrt{x\sqrt{\sin x}}$, then $f'(x) =$ _____.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^5}{n^6}+\dfrac{2^5}{n^6}+\cdots+\dfrac{(n-1)^5}{n^6}\right) =$ _____.

(5) The asymptotes of the graph of function $f(x) = x + x\sin\frac{1}{x}$ are _____.

3. (10 pts) You are planning to close off a corner of the first quadrant with a line segment 20 units long running from $P(a,0)$ to $Q(0,b)$. what is the largest area that $\triangle OPQ$ (O is the origin) can have, and what are its dimensions ?

4. (10 pts) Let $y^3 + y = 2\cos x$, find $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ and $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

5. (10 pts) The region is bounded by the x-axis, the curve $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, and the line $x = \frac{\pi}{4}$. Find the volume of the solid generated by revolving the region about the y-axis.

6. (12 pts) Compute the following integrals:

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx.$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{4} \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\, dx.$

7. (12 pts) Find the limits (**Do not use the L'Hopital's rule**):

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x^2)^2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{\sin(x^3)}$

8. (10 pts) Find the equation for the tangent line for the curve $y = 1 + x + \displaystyle\int_0^x \cos\left((x-t)^2\right) dt$ at the point $(0,1)$.

9. (6 pts) Find the absolute minimum value for $f(x) = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$.

一、 （15分）**单项选择题：**

(1) 方程 $x^3-12x+19=0$ 的实根的个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2　　(D) 3.

(2) 函数 $f(x)$, $g(x)$ 为恒正可微函数，且满足 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$, $\forall x\in[a,b]$. 则当 $a<x<b$ 时，必有

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(3) 函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且满足 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$. 则

(A) $f(0)=1$，且 $f'(0)=2$.　　(B) $f(0)=0$，且 $f'(0)=0$.

(C) $f(0)=0$，且 $f'(0)=2$.　　(D) 前面 3 个选项都不对.

(4) 设函数 $f(x)$ 可导，$\alpha=f(x+\Delta x)-f(x)-f'(x)\Delta x$，则

(A) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$.　　(B) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=1$.

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\alpha}{(\Delta x)^2}=1$.　　(D) $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta x}{\alpha}=0$.

(5) 若函数 $f(x)=|x|\,g(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有

(A) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}g(x)$.　　(B) $\lim\limits_{x\to0}g'(x)=g'(0)$.

(C) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\lim\limits_{x\to0^-}g(x)$.　　(D) $\lim\limits_{x\to0}g'(x)=g(0)$.

二、 （15分）**填空题：**

(1) 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点$(-1,0)$，则 $b=$ _____.

(2) 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=$ _____.

(3) 若 $f(x)=\sqrt{x\sqrt{\sin x}}$, 则 $f'(x)=$ _____.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^5}{n^6}+\dfrac{2^5}{n^6}+\cdots+\dfrac{(n-1)^5}{n^6}\right)=$ _____.

(5) 曲线 $f(x)=x+x\sin\frac{1}{x}$ 的（所有）渐近线为 _____.

三、 （10分）两个点 $P(a,0)$ 和 $Q(0,b)$ 与原点 $O(0,0)$ 组成一个三角形. 若线段 PQ 的长度为 20，则 $\triangle OPQ$ 的最大面积为多少? 此时 a 和 b 的值分别是多少?

四、 （10分）已知曲线方程为 $y^3+y=2\cos x$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ 和 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

五、 （10分）已知区域 R 由 x 轴, 直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 和曲线$f(x)=\begin{cases}\frac{\tan^2x}{x}, & 0<x\le\frac{\pi}{4}\\ 0, & x=0\end{cases}$ 所围成. 把区域 R 绕 y 轴旋转，求此旋转体的体积.

六、 （12分）计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3x}\,dx$.

(2) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{4}\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}\,dx$.

七、 （12分）求极限(**不准使用洛必达法则**):

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}{(1-x^2)^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin(x^3)}$.

八、 （10分）求曲线 $y=1+x+\displaystyle\int_0^x \cos\left((x-t)^2\right)\,dt$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

九、 （6分）求函数 $f(x)=|\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x|$ 的全局极小值（即最小值）.