Linear Algebra-A

Assignments - Week 2

Supplementary Problem Set

1. Let $\boldsymbol{A}$ be an $n \times n$ *skew-symmetric* matrix. Please find the value of $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ for any vector $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^{\mathrm{T}}$.

2. (1) Let $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$. Find $\boldsymbol{A}^k$, where k is a positive integer.

   $A = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}$

   (2) Let $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix}$, find $\boldsymbol{A}^4$.

   $A = \lambda I + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Let $\boldsymbol{\alpha} = (1,2,3)$, $\boldsymbol{\beta} = \left(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

   (1) Let $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$. Find $\boldsymbol{A}^n$, where n is a positive integer.
   (2) Let $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$. Find $\boldsymbol{B}^n$, where n is a positive integer.

4. Please compute:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{2020} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{2021}.$$

   [Hint: Please use the properties of elementary matrices.]

5. Let $\boldsymbol{\alpha}$ be a 3-dimensional column vector, and $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ is the transpose of $\boldsymbol{\alpha}$. If $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, find $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

说明：本次作业涉及多个方阵的次方幂的计算。一般说来，方阵的任意次方幂计算是一件困难的事，没有一种通用的方法能直接找到矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}^n$的关系，但对一些特殊矩阵或满足一定条件的矩阵，也有一些方法可行，比如：

- 用归纳法，通过低次幂计算能找到A^n与n的关系，导出通项公式后，用数学归纳法加以证明。

- 将矩阵拆分为两个矩阵的和：$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B}$，其中$\boldsymbol{B}$的方幂较容易计算，而且由于$a\boldsymbol{I}$与$\boldsymbol{B}$满足乘法交换律，因此可以用二项展开式加以计算。如第 2 题。
- 将矩阵拆分为：$\boldsymbol{A} =$ 列向量 $\times$ 行向量（思考：什么样的矩阵可以这样拆？）而后计算$\boldsymbol{A}^n$，如第 3 题。
- 对于初等矩阵，由于其与初等变换之间的关系非常明确，因此初等矩阵的方幂相当于单位矩阵重复做了多次相同的初等变换，因此容易得出答案。如第 4 题。
- …… 后续大家还可以继续总结（比如第五章中的做法）。

关于“方阵的幂”的应用，这里有一个例子，感兴趣的同学可以点击查看：
https://mp.weixin.qq.com/s/t3wmIzqHfatmmypqPgYU9g