

Step-1

Consider the following matrix:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 14 & 9 \\ -16 & -10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= MJM^{-1} \end{aligned}$$

Compute A^{10} and e^A .

Step-2

Recall the following:

$$A^k = MJ^k M^{-1}$$

$$e^{At} = Me^{Jt} M^{-1}$$

Also,

$$\begin{aligned} (J_i)^k &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^k \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{1}{2}k(k-1)\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix} \\ e^{J_i t} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Step-3

Compute first J^{10} :

$$\begin{aligned}
J &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
(J)^{10} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{10} \\
&= \begin{bmatrix} 2^{10} & 10 \cdot 2^{10-1} \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \\
&= 2^{10} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Step-4

Therefore, A^{10} is:

$$\begin{aligned}
A^{10} &= MJ^{10}M^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} 2^{10} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= 2^{10} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= 2^{10} \begin{bmatrix} 3 & 13 \\ -4 & -17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{A^{10} = 2^{10} \begin{bmatrix} 61 & 45 \\ -80 & -59 \end{bmatrix}}$$

Step-5

And e^A is:

$$\begin{aligned}
e^A &= Me^J M^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= e^2 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{e^A = e^2 \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ -16 & -11 \end{bmatrix}}$$