#1.

(a) F

(b) F $\dim \operatorname{range} T = \dim \operatorname{null} T = \frac{5}{2}$

(c) T $Tu=\lambda u$, $Tv=\mu v$, $T(u+v)=\lambda u+\mu v=c(u+v)$

假设 $\lambda\neq\mu$, 则有 u与v无关 $\Rightarrow (\lambda-c)u+(\mu-c)v=0 \Rightarrow \lambda=c, \mu=c$

$\therefore \lambda=\mu$, 矛盾!

故 $\lambda=\mu$

(d) T 构造 $T: V\to U\times V/U$: $T(v)=(w,\tilde{v}+U)$, 其中 $v=w+\tilde{v}$, $w\in U$, $\tilde{v}\in V-U$.

(e) T 假设存在T单, 则有 $\dim \operatorname{null} T=0$

$\therefore \dim \operatorname{range} T=\dim V\leq \dim W$ 与 $\dim V>\dim W$ 矛盾!

$\therefore$ 不存在T单!

#2.

$\forall u\in V$, $u=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$

则 $T(u)=a_1Tv_1+\cdots+a_nTv_n=a_1Sv_1+\cdots+a_nSv_n=S(u)$

$\therefore T=S$

#3.

(a) 零, 加法, 数乘 封闭

(b) ~~$\dim U_1=3$, $\dim U_2=6$.~~

~~$\dim U_1+\dim U_2=9=\dim R^{3\times3}$~~.

$\therefore$ ~~$U_1\oplus U_2$~~

$U_1\cap U_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow U_1\oplus U_2$.

$\forall A\in R^{3\times3} \Rightarrow A=u_1+u_2$, $u_1\in U_1$, $u_2\in U_2$

$\therefore R^{3\times3}\subseteq U_1+U_2$.

$\therefore R^{3\times3}=U_1+U_2$.

$\therefore R^{3\times3}=U_1\oplus U_2$.

#4. 略.

#5. (a) 零，加法，数乘.

(b) $\Rightarrow$: 若 $f(x)\in V$，则有 $\begin{cases} f(2)=a_0+2a_1+4a_2+8a_3+16a_4=0 \\ f(1)=f(-1) \Leftrightarrow 2a_1+2a_4=0 \end{cases}$.

$\therefore [a_0,\cdots,a_4]^T\in N(A)$

$\Rightarrow$ 成立.

$\Leftarrow$ 若 $[a_0,\cdots,a_4]^T\in N(A)$

则有 $f(2)=0$ 且 $f(1)=f(-1)$

$\therefore f(x)\in V$.

$\Leftarrow$ 成立

综上，$\Leftrightarrow$

(c) ~~对~~ 解 $N(A)$ 的基为 $\begin{bmatrix}-4\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-6\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}-16\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore V$ 的一组基为 $-4+x^2,\ -6-x+x^3,\ -16+x^4$

$\therefore$ ~~故~~ $\dim V=3$.

#6. $\Rightarrow$ 若A是V的仿射子集，则 $A=$ ~~[illegible]~~ $\alpha+U$.

$\forall v,w\in A$，则有 $v=\alpha+u_1$，$w=\alpha+u_2$

$\therefore \lambda v+(1-\lambda)w = \lambda(\alpha+u_1)+(1-\lambda)(\alpha+u_2)=\alpha+[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]\in\alpha+U$.

$\therefore \lambda v+(1-\lambda)w\in A$

$\Rightarrow$ 成立.

$\Leftarrow$: 若 $\forall v,w\in A,\ \lambda\in F,\ \lambda v+(1-\lambda)w\in A$,

$\because$ A非空 $\therefore \exists\,\alpha\in A$.

$\therefore \lambda v+(1-\lambda)w=\lambda[\alpha+(v-\alpha)]+(1-\lambda)[\alpha+(w-\alpha)]=\alpha+[\lambda(v-\alpha)+(1-\lambda)(w-\alpha)]\in A$

设 $U_\alpha=\{\lambda(v-\alpha)+(1-\lambda)(w-\alpha)\mid \forall\lambda, v, w\}$.

#6.

$\Leftarrow$: 若 $\forall v,w\in A$, $\lambda\in F$, 都有 $\lambda v+(1-\lambda)w\in A$,

$\because$ A非空.

$\therefore \exists\, \alpha\in A$, 记 $U=\{v-\alpha \mid v\in A\}$.

下证U是子空间

① $\because \alpha\in A \quad \therefore \alpha-\alpha=\vec{0}\in U \quad \therefore$ 零元存在

② $\forall (v-\alpha)\in U$, $\lambda\in F$, $\lambda(v-\alpha)=(\lambda v-(\lambda-1)\alpha)-\alpha=(\lambda v+(1-\lambda)\alpha)-\alpha$

$\because \lambda v+(1-\lambda)\alpha\in A$

$\therefore (\lambda v+(1-\lambda)\alpha)-\alpha\in U$ 即 $\lambda(v-\alpha)\in U$.

$\therefore$ 数乘封闭

③ $\forall v,w\in A$, $v-\alpha,\ w-\alpha\in U$.

$(v-\alpha)+(w-\alpha)=(v+w)-2\alpha=\cancel{\quad}\ 2\left(\frac{v+w}{2}-\alpha\right)$

~~并~~由②得, 若验证 $v+w-2\alpha\in U$, 则只需证 $\frac{v+w}{2}-\alpha\in U$,

即证 $\frac{v+w}{2}\in A$.

$\because \lambda v+(1-\lambda)w\in A$, 令 $\lambda=\frac{1}{2}$, 则有 $\frac{v+w}{2}\in A$.

$\therefore \frac{v+w}{2}-\alpha\in U, \quad v+w-2\alpha\in U$

$\therefore$ 加法封闭

$\therefore$ U是子空间

$\therefore A=\alpha+U$ 是仿射子集

$\Rightarrow$: 若A是仿射子集, 则 $A=\alpha+U$, U是子空间

$\forall v,w\in A$, 有 $v=\alpha+u_1$, $w=\alpha+u_2$,

$\therefore \lambda v+(1-\lambda)w=\lambda(\alpha+u_1)+(1-\lambda)(\alpha+u_2)=\alpha+[\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]\in\alpha+U$.

即 $\lambda v+(1-\lambda)w\in A$.

综上, $\Longleftrightarrow$

#8.

$\because T^2=I$

$\therefore (T+I)(T-I)=0$

设 $m(T)=A$,

则有 $(A+I)(A-I)=0_{n\times n}$

$\therefore \operatorname{rank}(A+I)+\operatorname{rank}(A-I)\le n$

$\therefore \dim N(A+I)+\dim N(A-I)\ge 2n-n=n$

$\therefore$ A的特征值GM之和 $\ge$ AM之和

又$\because$ 每个特征值 GM $\le$ AM

$\therefore$ 只有每个特征值 GM = AM

$\therefore$ A可对角化

$\therefore$ T 可对角化.