南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(下) A　　　开课单位: 数 学 系

考试时长: 120 分钟　　　命题教师:

| 题 号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 分 值 | 15 分 | 15 分 | 10 分 | 10 分 | 10 分 | 10 分 | 10 分 | 10 分 | 10 分 |

本试卷共 9 大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (15 pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

(1) The interval of convergence for the power series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n3^n}$ is

(A) $[-1/3, 1/3]$.　　(B) $[-1/3, 1/3)$.

(C) $[-3, 3]$.　　(D) $[-3, 3)$.

(2) Let $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Which of the following statements is **wrong** ?

(A) $f(x,y)$ is continuous at $(0,0)$.

(B) $f_x(0,0)$ exists.

(C) $f_y(0,0)$ exists.

(D) $f_x(x,y)$ is continuous at $(0,0)$.

(3) If $f(x,y)$ has partial derivatives at $(x_0, y_0)$, then

(A) $f(x,y)$ is bounded around $(x_0, y_0)$.

(B) $f(x,y)$ is continuous around $(x_0, y_0)$.

(C) $f(x, y_0)$ is continuous at $x_0$, $f(x_0, y)$ is continuous at $y_0$.

(D) $f(x,y)$ is continuous at $(x_0, y_0)$.

(4) Let $a$ be a constant. Then the series $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin(an)}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$

(A) converges absolutely.

(B) converges conditionally.

(C) diverges.

(D) the convergence depends on the value of $a$.

(5) $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\cos x}{x}\, dxdy =$

(A) $\cos 1$. (B) $\sin 1$.

(C) $1 - \cos 1$. (D) $1 - \sin 1$.

2. (15 pts) Please fill in the blank for the questions below.

(1) If the function $z = z(x, y)$ is determined by $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$, then $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(5,2,2)} =$ ________________.

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^2} =$ ________________.

(3) If the region $D = \{(x, y)|\, x^2 + y^2 \le 1\}$, then $\iint_D e^{-x^2-y^2}\, dxdy =$ ________________.

(4) Let $\mathbf{F} = (z + e^{\sin y})\,\mathbf{i} + (\cos z - y)\,\mathbf{j} + (2z + \ln(1 + y^2))\,\mathbf{k}$. $D$ is the upper semi-sphere $0 \le z \le \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,(a \ge 0)$, and $S$ is the boundary of the region $D$. Then the outward flux of $\mathbf{F}$ across $S$; i.e., $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma =$ ________________.

(5) $\int_C yze^{xz}dx + e^{xz}dy + xye^{xz}dz =$ ________________, where $C$ is a path from $(2, 1, 0)$ to $(0, 4, 5)$.

3. (10 pts) Find the equation for the plane through the origin parallel to the following lines:

$$l_1 = \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, \quad l_2 = \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

4. (10 pts) Use Taylor series to evaluate $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^3 \sin \frac{2}{n} - 2n^2\right)$.

5. (10 pts) In what directions is the directional derivative of $f(x, y) = xy + y^2$ at $P(3, 2)$ equal to zero ?

6. (10 pts) Compute $\iint_D xy\, dxdy$, here $D$ is the disk enclosed by the curve $x^2 + y^2 = 2x + 2y$. (Hint: use substitution. )

7. (10 pts) Find the centroid of the region $D = \left\{(x, y, z)|\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$.

8. (10 pts) Calculate the line integral $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, where $\mathbf{F} = (y^2 + e^{e^x})\,\mathbf{i} + (xy + \cos y)\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$, and $C$ is the curve of intersection of the cylinder $x^2 + y^2 = 4y$ and the plane $y = z$, counterclockwise when viewed from above.

9. (10 pts) Find the absolute maximum and minimum values of the function $f(x, y) = 3x^2 + 4xy$ on the region $R$: $x^2 + y^2 \le 1$.

一、　(15分) **单项选择题:**

(1) 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n3^n}$ 的收敛域是

(A) $[-1/3, 1/3]$.　　(B) $[-1/3, 1/3)$.

(C) $[-3, 3]$.　　(D) $[-3, 3)$.

(2) 设 $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$. 下列叙述中**错误**的是?

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(B) $f_x(0,0)$ 存在.

(C) $f_y(0,0)$ 存在.

(D) $f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(3) 若函数 $f(x,y)$ 在点$(x_0,y_0)$ 处的偏导数都存在. 则

(A) $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 附近有界.

(B) $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 附近连续.

(C) $f(x,y_0)$ 在 $x_0$ 处连续, $f(x_0,y)$ 在$y_0$ 处连续.

(D) $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续.

(4) 设 $a$ 是一个常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(an)}{n^2}+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$

(A) 绝对收敛.

(B) 条件收敛.

(C) 发散.

(D) 收敛性依赖于 $a$ 的值.

(5) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\frac{\cos x}{x}\,dxdy=$

(A) $\cos 1$.　　(B) $\sin 1$.

(C) $1-\cos 1$.　　(D) $1-\sin 1$.

二、　(15分) **填空题:**

(1) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(5,2,2)}=$ ________.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}=$ ________.

(3) 设区域 $D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$，则 $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy=$ ________.

(4) 设向量场 $\mathbf{F}=(z+e^{\sin y})\,\mathbf{i}+(\cos z-y)\,\mathbf{j}+(2z+\ln(1+y^2))\,\mathbf{k}$. 区域 $D$ 为上半球 $0\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,(a\ge 0)$，闭合曲面 $S$ 是 $D$ 的边界. 则向量场 $\mathbf{F}$ 通过曲面 $S$ 从内向外的通量 $\displaystyle\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma=$ ________.

(5) $\displaystyle\int_C yze^{xz}dx+e^{xz}dy+xye^{xz}dz=$ ________, 其中$C$为从$(2,1,0)$到$(0,4,5)$的一条路径.

三、 （10分）求经过原点且平行于下面两条直线的平面方程

$$l_1=\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases},\quad l_2=\begin{cases}x=-1+t\\ y=-2+2t\\ z=1+t\end{cases}.$$

四、 （10分）使用泰勒级数来计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3\sin\dfrac{2}{n}-2n^2\right)$.

五、 （10分）函数 $f(x,y)=xy+y^2$ 在 $P(3,2)$ 沿着哪些方向的方向导数为 $0$？

六、 （10分）计算 $\iint_D xy\,dxdy$, 这里 $D$ 是由闭合曲线 $x^2+y^2=2x+2y$ 围成的区域. （提示: 用换元法）

七、 （10分）求图形 $D$ 的形心, 这里 $D$ 是闭区域 $\left\{(x,y,z)|\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$.

八、 （10分）计算曲线积分 $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, 这里$\mathbf{F}=(y^2+e^{e^x})\,\mathbf{i}+(xy+\cos y)\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$, 曲线$C$ 为圆柱面 $x^2+y^2=4y$ 与平面 $y=z$ 的交线，从上往下看， $C$ 是逆时针方向.

九、 （10分）求函数 $f(x,y)=3x^2+4xy$ 在闭区域 $R$: $x^2+y^2\le 1$ 的最大值和最小值（即全局极大和全局极小值）.