Daily Practice

Learning center on Calculus I, SUSTech

September 26, 2022

Problem 1(a). Use the fact that every nonempty interval of real numbers contains both rational and irrationally numbers to show that the function:

$$D(x) = \begin{cases} 1. & \text{if x is rational} \\ 0. & \text{if x is irrational} \end{cases} \tag{1}$$

is discontinuous at every point.(*Note D(X) as Dirichlet function.*)
And is D right-continuous or left-continuous at any point?Give your statement please.

Problem 1(b). Let $F(x) = xD(x)$, D is what we have defined in 1(a).Show that F is discontinuous at any points except for x=0.

Problem 1(c). Please give the analysis to the continuity of the function:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{P}. & \text{if x is rational and } x = \frac{q}{p}, p \in \mathbb{N}^{+}, \text{and } q \in \mathbb{Z} \text{ with} (p,q) = 1 \\ 1. & \text{if x =0} \\ 0. & \text{others} \end{cases} \tag{2}$$

(Note R(X) as Riemann function.)

每日一题

互助课堂 · 高数上

2022 年 9 月 26 日

Problem 1(a). 利用每一个实数的非空区间同时包含有理数和无理数这一事实来说明函数在定义域上任何一点都是不连续的:

$$D(x)=\begin{cases}1. & 若\ \mathrm{x}\ 是有理数\\ 0. & 若\ \mathrm{x}\ 是无理数\end{cases} \tag{1}$$

(D(X) 即赫赫有名的狄里克雷函数)

D 在任一点左连续或者右连续? 请给出判断。

Problem 1(b). 设 $F(x)=xD(x)$, D 是 1(a) 中定义的函数。证明 F 在任一点都不连续，在 0 处连续。

Problem 1(c). 请给出下列函数连续性的分析:

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{P}. & 若\ \mathrm{x}\ 是有理数\ x=\frac{q}{p}, p\in\mathbb{N}^{+},\ 且\ q\in\mathbb{Z}\ (p,q)=1\ 即二者互质\\ 1. & 若\ \mathrm{x}=0\\ 0. & 若\ \mathrm{x}\ 是无理数\end{cases} \tag{2}$$

(R(X) 即大名鼎鼎的黎曼函数)

每日一题

互助课堂 · 高数上

2022 年 9 月 27 日

Problem 1(a). 利用每一个实数的非空区间同时包含有理数和无理数这一事实来说明函数在定义域上任何一点都是不连续的:

$$D(x) = \begin{cases} 1. & \text{若 x 是有理数} \\ 0. & \text{若 x 是无理数} \end{cases} \tag{1}$$

(D(X) 即赫赫有名的狄里克雷函数)

D 在任一点左连续或者右连续? 请给出判断。

解.

证明: 对任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 一定存在全由有理数组成的数列 $\{S_n\}$ 和全由有理数组成的数列 $\{r_n\}$, 使它们都趋于 x_0, 这样就有:

$$lim_{n\to\infty} D(S_n) = 1, lim_{n\to\infty} D(r_n) = 0 \tag{2}$$

根据极限存在必唯一, 结合 x_0 的任意性, 在定义域的任何一点上极限不存在。(不理解为什么取数列 ?: 函数趋近于一点有很多种方式, 这些都能用数列描述)

判断: 左不连续, 且右不连续。(偶函数) 仅需将上述 $\{S_n\}$ $\{r_n\}$ 在趋向于该点时候加以限制 (从左端趋近或从右端趋近), 系取法问题。

说人话版本: 狄里克雷函数, 这玩意肯定画不出来图像。请读者开动聪明的小脑筋, 抛开这个题目想象一下, 拿一个正弦函数, 从左右无穷往中间挤, 非常稠密。然后咱们就知道振荡那一块就没有极限 (振荡间断点)。那再把值为 1 的点和值为 0 的点保留下来, 离散化处理之后, 这个东西在哪个地方都还是没有极限呀!

Problem 1(b). 设 $F(x) = xD(x)$, D 是 1(a) 中定义的函数。证明 F 在任一点都不连续, 在 0 处连续。

解.

证明：先证 F 在 $x_0=0$ 处连续。此时，$F(0)=0$。考虑极限精确定义，对任意给定的 $\epsilon>0$，取 $=\epsilon$，当 $|x-0|=|x|\leq\delta$ 时，有：

$$|F(x)-F(0)|=|xD(x)|\leq|x|<\delta=\epsilon \tag{3}$$

因此 F 在 $x=0$ 处是连续的。
现在设 $x\neq 0$，这时，$F(x)/x=D(x)$。如果 F 在 $x_0\neq 0$ 处连续，那么：

$$lim_{x\to x_0}D(x)=lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{x}=\frac{lim_{x\to x_0}F(x)}{x_0}=\frac{F(x_0)}{x_0}=D(x_0) \tag{4}$$

这个结果说明 D 在 x_0 处连续，此为矛盾。证毕。
说人话版本：如果抛开实数集构造，就认为有理点都是孤立的，一个有理点和周围最近的有理点中间塞着好多无理点。那么在 x=0 左右肯定都是无理数，那么这些点的函数值正好和 0 处函数值相等，都为 0。那么 $x=0$ 就这么从苦海中脱离出来了，真好!

Problem 1(c)* 不要求掌握. 请给出下列函数连续性的分析：

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{P}. & \text{若 x 是有理数 } x=\frac{q}{p}, p\in\mathbb{N}^+, \text{且 } q\in\mathbb{Z}\ (p,q)=1 \text{ 即二者互质}\\ 1. & \text{若 x =0}\\ 0. & \text{若 x 是无理数}\end{cases} \tag{5}$$

(R(X) 即大名鼎鼎的黎曼函数)

解.

黎曼函数在数轴上一切无理点连续，有理点不连续。
说明：$lim_{x\to x_0}R(x)=0, \forall x_0\in\mathbb{R}$.
对任意给定的 $\epsilon>0$，取一个很大的正整数 q_0，使得 $1/q_0<\epsilon$。容易知道，在开区间 (x_0-1,x_0+1) 中，满足 $0<q\leq q_0$ 的分数 p/q 只有有限个。因此总能找到充分小的 $\delta>0$，使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中的有理数分母 $q>q_0$。所以当无理数 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$R(x)=0$；当有理数 $x=p/q$ 满足足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，必定有 $q>q_0$。所以：

$$0\leq R(x)=\frac{1}{q}<\frac{1}{q_0}<\epsilon \tag{6}$$

这就说明了任意一点极限存在，且为 0。考虑连续性的定义，所以无理点处处连续。
说人话版本：这个证明好像没说人话，算了，第二页到底了，不说了，反正考试不会考...算了还有两行，再多说一点。很多连续性问题都要归结为极限问题，而 $\epsilon-\delta$ 是一种很精确的刻画极限的方式，不会这种技巧没关系，但是要掌握这种思想。

Daily Practice

Learning center on Calculus I, SUSTech

September 27, 2022

Problem 1. The number of asymptotes of Curve $y = \frac{1}{x} + ln(1 + e^x)$ is?

Problem 2. The number of asymptotes of Curve $y = e^{\frac{1}{x^2}} arctan \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ is?

Problem 3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{cosx}}{x(1-cos\sqrt{x})} =$

Problem 4. If $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{e^x-a}(cosx - b) = 5$,then determine the value of a, b.

(The questions are from the final exam of a 985 college.Try to enjoy it !)

每日一题

互助课堂 · 高数上

2022 年 9 月 27 日

Problem 1. 曲线 $y = \frac{1}{x} + ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为?

Problem 2. 曲线 $y = e^{\frac{1}{x^2}} arctan \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 渐近线的条数为?

Problem 3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{cosx}}{x(1-cos\sqrt{x})} =$

Problem 4. 若 $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{e^x-a}(cosx - b) = 5$, 确定 a, b 的值。

(题目来自于某不愿意透露姓名的 985 高校的期末试题。)

每日一题

互助课堂 · 高数上

2022 年 9 月 28 日

Problem 1. 曲线 $y=\frac{1}{x}+ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为?

解. 由图可知，共计三条渐近线，分别为：$x=0; y=0; y=x$。

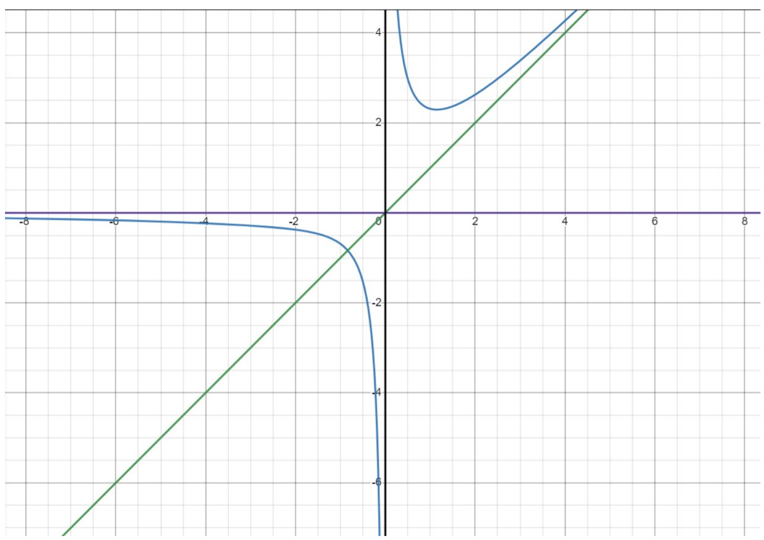

图 1: 看图写话

要是会画草图的话，就很好猜出来了。但是大家现在还不能这么做（逃）。首先看一下左右无穷，这个趋势还是很好看的，左是 0，右是无限。然后 x=0 没定义，然后左右趋于零的时候，得到正负无穷。现在就剩一个斜的渐近线了：设为 y=ax+b，然后曲线减去这个直线方程（就叫高度函数吧）在 x 趋于正无穷的时候极限为 0 就好了，解出来 a，b。

Problem 2. 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 渐近线的条数为?

解. 由图可知，共计俩条渐近线，分别为：$x=0; y=\frac{\pi}{4}$。这个函数图像奇丑无比，但是并不影响你解出来正确答案。把 e 指数和后面的反正切拆开观察一下，呕吼，发现现在的知识储备好像不太能做得出来。那这题就别管了，先把它晾在这，等我学成归来再写。(选题目的时候没注意，有点超纲，给大家鞠一个)

给大家附一个在极限计算器：https://mathdf.com/lim/cn/

给大家附一个在线函数画图网站：https://www.desmos.com/calculator?lang=zh-CN

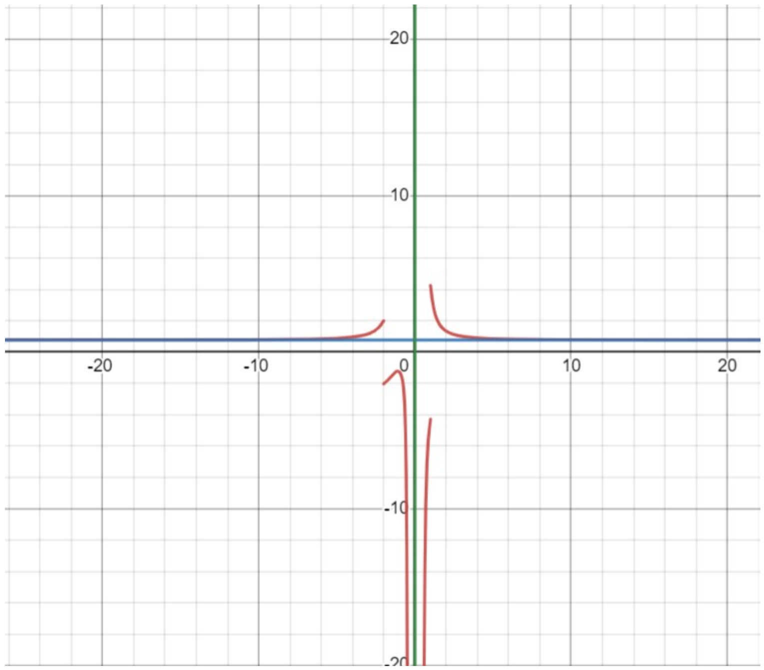

图 2: 再看图再写话

Problem 3. $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{cosx}}{x(1-cos\sqrt{x})} =$

分子有理化:

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{cosx})(1+\sqrt{cosx})}{2sin^2(\frac{\sqrt{x}}{2})x(1+\sqrt{cosx})} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-cosx}{2sin^2(\frac{\sqrt{x}}{2})x(1+\sqrt{cosx})} \quad (1)$$

再次二倍角:

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2sin^2(\frac{x}{2})}{2sin^2(\frac{\sqrt{x}}{2})x(1+\sqrt{cosx})} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\frac{x}{2})^2}{(\frac{\sqrt{x}}{2})^2x(1+\sqrt{cosx})} = \frac{1}{2}$$

(2)

when $x\to 0$, $sin x \sim x$ $\quad 1-cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

批注: 对于 "$1-\sqrt{}$" 形式以及 "$1-cos()$" 要敏感，就算失忆了也要对这种代数结构有肌肉记忆!!! 不要想着用什么高端的做法来借题，根本不需要炫技，最朴素的化简得到最优雅的结果，nice。

Problem 4. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{e^x-a}(cosx-b) = 5$, 确定 a, b 的值。

解. 显然 a=1,b=-4。
(我选题的时候没太注意，不好意思，再给大家鞠一个) 不想详细写了。这个严谨来说是需要洛的，但是同学们还没学到，所以不能洛（装死）。但其实大家高中数学肯定知道切线放缩啦啦啦，就是 $x+1 \le e^x$, 这个东西，高考选手都很熟，然后大家就知道了 $\frac{sinx}{e^x-1}$ 在 x 趋于 0 的时候是 1。over。

图 3: nice

（题目来自于某不愿意透露姓名的 985 高校的期末试题。）

群里有同学讨论这种极限，等大家学了 e 的重要极限后就明白了，先附上：
幂指类型：$u(x)^{v(x)}$，且 $u(x)>0$。在定义域之内，有等式：

$$u(x)^{v(x)} = e^{v(x)lnu(x)} \tag{3}$$

显然，u v 连续，那么 $u(x)^{v(x)}$ 也连续。
所谓 1^{∞} 型，即 $limu(x)=1, limv(x)=\infty$。
固定步骤为 $u^v=((1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}})^{(u-1)v}$。如果 $u\to 1$,$u-1\to 0$。令 $A=u-1$，即 $\lim_{A\to 0}(1+A)^{\frac{1}{A}})^{Av}=e^{Av}$。所以只需要 $limAv$ 存在，值为 B，答案得到 e^B。
秒杀：对于 $u(x)^{v(x)}$，当把极限点带进去，发现符合 1^{∞} 型，答案一定是 $e^B, B=lim(u(x)-1)v(x)$

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

September 28, 2022

Problem 1. Try to solve (Kinda hard)

$$\lim_{x\to\infty} cos(\sqrt{x+1} - cos\sqrt{x}) \tag{1}$$

and

$$\lim_{x\to\infty} x^2[arctan(2x+1) - arctan(2x)] \tag{2}$$

Problem 2. Let$f(x) = x(b^2 - x^2)$for $x \in [0, 1)$, and $f(x) = af(x+1)$when $x \in [-1, 0)$.Find a and b such that $f(x)$is differentiable at x=0 and find f'(0).

Problem 3. Try to solve

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x + tan^2x - 3x^3}{sinx + 5x^2} \tag{3}$$

每日一些题

互助课堂 · 高数上

2022 年 9 月 28 日

Problem 1.（此题有一定难度，慎做）求极限

$$\lim_{x\to\infty} cos(\sqrt{x+1} - cos\sqrt{x}) \tag{1}$$

和

$$\lim_{x\to\infty} x^2[arctan(2x+1) - arctan(2x)] \tag{2}$$

Problem 2. 设 $f(x) = x(b^2 - x^2)$ 对于 $x \in [0,1)$, 当 $x \in [-1,0)$ 有 $f(x) = af(x+1)$。求 a 和 b 使得 $f(x)$ 在 0 处可微，并求出 f'(0)。

Problem 3. 求极限：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x + tan^2x - 3x^3}{sinx + 5x^2} \tag{3}$$

图 1: 距国庆还有 2 天

每日一些题

互助课堂 · 高数上

2022 年 9 月 30 日

Problem 1. (此题有一定难度，慎做）求极限

$$\lim_{x\to\infty} cos(\sqrt{x+1}) - cos(\sqrt{x}) \tag{1}$$

和

$$\lim_{x\to\infty} x^2[arctan(2x+1) - arctan(2x)] \tag{2}$$

解.

1. 和差化积。$cos\alpha - cos\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$。运用后，化简得到：

$$\lim_{x\to\infty} -2sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2} \tag{3}$$

无穷小乘有界量，答案为 0。

2. 由于 $arctan(\alpha) - arctan(\beta) = arctan(\frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta+1}), 1 \leq \alpha\beta$，得到 $\lim_{x\to\infty} x^2 arctan(\frac{1}{4x^2+2x+1})$，运用极限 $\lim_{x\to} \frac{arctanx}{x} = 1$，得到最终结果为 $\frac{1}{4}$。

~~**Problem 2.**~~ 设 $f(x) = x(b^2 - x^2)$ 对于 $x \in [0,1)$，当 $x \in [-1,0)$ 有 $f(x) = af(x+1)$。求 a 和 b 使得 $f(x)$ 在 0 处可微，并求出 f'(0)。

解.

一元函数中可导与可微等价。所以考虑在 0 处的导数:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \tag{4}$$

由于左右函数表达式不同，则利用左右极限存在且相等条件，确定出: $a = -\frac{1}{2}, b = 1, f'(0) = 1$.

Problem 3. 求极限:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x + tan^2x - 3x^3}{sinx + 5x^2} \tag{5}$$

解.

将 tanx 打开，出现 sinx 的地方考虑配凑 $x \cdot \frac{1}{x}$，容易发现结果是 5。

每日一些题

互助课堂 · 高数上

2022 年 9 月 30 日

Problem 1. 已知函数

$$e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

确定，则 $y''(0) =?$

Problem 2. 设 $y = x^2 cos 2x$ 则 $y^{(50)} =?$

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

September 30, 2022

Problem 1. Let $y = \Re(x)$ is determined by

$$e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

,then $y''(0) =$?

Problem 2. Considering $y = x^2 cos2x$,try to solve$y^{(50)} =$?

每日一些题

互助课堂 · 高数上

2022 年 9 月 30 日

Problem 1. 已知函数

$$e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

确定，则 $y''(0) = ?$

$$* \frac{dy}{dx} = -\frac{f'x}{f'y}$$

解.-2

考虑:

$$f(x, y) = e^y + 6xy + x^2 - 1 \tag{2}$$

$$f'_x = 2x + 6y; f'_y = e^y + 6x; \tag{3}$$

则:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x + 6y}{e^y + 6x} \tag{4}$$

$$\cancel{\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{2x + 6y}{e^y + 6x}} \tag{5}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = \frac{(-2 - 6y')(e^y + 6x) + (2x + 6y)(e^y \cdot y' + 6)}{(e^y + 6x)^2} \tag{6}$$

把 x=0 带入 (5)(6) 式中，得到答案。

Problem 2. 设 $y = x^2 cos2x$ 则 $y^{(50)} = ?$

解.

$$-2^{50}x^2cos2x - 100x2^{49}sin2x + 2450 \cdot 2^{48}cos2x \tag{7}$$

利用 Leibniz 公式。设 $u = cos2x, v = x^2$, 由 $(uv)^{(n)} = \Sigma_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^k$, 得到答案。

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 1 日

Problem 1. 如果函数

$$f(x) = \begin{cases} asinx, & x \le \frac{\pi}{4} \\ 1 + btanx, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处可微，求 a 和 b。

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 1, 2022

Problem 1. If the function:

$$f(x) = \begin{cases} asinx, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 + btanx, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

is differentiable at $x = \frac{\pi}{4}$, find the values of a and b.

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 1 日

Problem 1. 如果函数

$$f(x) = \begin{cases} asinx, & x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 + btanx, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处可微，求 a 和 b。

解. 利用可微的等价条件:

$$f(\frac{\pi}{4}-) = f(\frac{\pi}{4}+) \tag{1}$$

$$f'(\frac{\pi}{4}-) = f'(\frac{\pi}{4}+) \tag{2}$$

解二元一次方程组，答案为:$a = 2\sqrt{2}, b = 1.$

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 1 日

Problem 1. 给定函数 f, 如果有:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m, \tag{1}$$

m 为一有限数。那么 $f'(0)=m$ 这一论断是否成立？如果在给定一个条件——“函数 f 在 0 处连续”，结论是否成立？请简单说明。

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 1, 2022

Problem 1. Given f, if it satisfy:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m, \tag{1}$$

m is finite. So is the conclusion $f'(0)=m$ true? And what if we add one more condition that the function f is continuous at 0,is it true? Give ur reason please.

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 2 日

Problem 1. 给定函数 f, 如果有:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=m, \tag{1}$$

m 为一有限数。那么 $f'(0)=m$ 这一论断是否成立? 如果在给定一个条件—— "函数 f 在 0 处连续", 结论是否成立? 请简单说明。

解. 定义函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>0 \\ 0, x=0 \\ x-1 & x<0 \end{cases} \tag{2}$$

$$m=1 \tag{3}$$

符合条件, 但显然论断不成立。

若添加条件则结论成立。严格证明省略之, 只做简单说明: 在 0 处连续说明, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$, 回归到导数定义, 那么自然有可导且导函数值为 m。换言之, 读者可以在连续前提下可以把 2x 中的一个 x 当作 0, 一个 x 当作变量。

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 1 日

Problem 1. 石油泄漏 · 位于海湾水域的石油钻井平台发生爆炸，导致椭圆形浮油从钻井平台表面扩散到表面。浮油是恒定的 20 厘米厚。几天后，当浮油的长轴长 2 km，短轴宽 3/4 km 时，确定其长度以 9 m/h 的速度增加，其宽度以 3 m/h 的速度增加。在此时石油以什么速率（立方米每小时）从钻井平台现场流出?

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 3, 2022

Problem 1. Oil spill An explosion at an oil rig located in gulf waters causes an elliptical oil slick to spread on the surface from the rig. The slick is a constant 20 cm thick. After several days, when the major axis of the slick is 2 km long and the minor axis is 3/4 km wide, it is determined that its length is increasing at the rate of 9 m/h, and its width is increasing at the rate of 3 m/h. At what rate (in cubic meters per hour) is oil flowing from the site of the rig at that time?

From ur textbook,it is worth a shot.

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 3 日

Problem 1. 石油泄漏 · 位于海湾水域的石油钻井平台发生爆炸，导致椭圆形浮油从钻井平台表面扩散到表面。浮油是恒定的 20 厘米厚。几天后，当浮油的长轴长 2 km，短轴宽 3/4 km 时，确定其长度以 9 m/h 的速度增加，其宽度以 3 m/h 的速度增加。在此时石油以什么速率（立方米每小时）从钻井平台现场流出?

解.

此题是近似下的理想模型。(有点懒，不想画图)。我们知道椭圆的面积为（$S = \pi ab$），根据 Related Rates Problem Strategy，则考虑在 dt 时间内：

$$dS = S_{final} - S_{initial} = \pi(\frac{2}{2} + \frac{9}{2}dt)(\frac{3/4}{2} + \frac{3}{2}dt) - \pi(\frac{2}{2})(\frac{3/4}{2}) \tag{1}$$

整理得到

$$\frac{dV}{dt} = \frac{ds \cdot 20cm}{dt} = \frac{51}{80}\pi \tag{2}$$

需要说明的是，某一直线上应具有各向同性，所以速度要分为两半。Check 量纲也正确。

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 4 日

Problem 1. 利用微分做近似计算。

$$1)(80)^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

$$2)lg11 \tag{2}$$

$$3)sin29^{\circ} \tag{3}$$

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 4, 2022

Problem 1. Use linearization to compute:

$$1)(80)^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

$$2)lg11 \tag{2}$$

$$3)sin29 \tag{3}$$

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 3 日

Problem 1. 利用微分做近似计算。

$$1)(80)^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

$$2)lg11 \tag{2}$$

$$3)sin29° \tag{3}$$

解.

1)$3 = (81)^{\frac{1}{4}}$. 涉及两个变量，自然地，考虑函数 $y = (x)^{\frac{1}{4}}$，在 $x = 81$ 处的切线为

$$L(x) = \frac{1}{108}(x - 81) + 3 = \frac{1}{108}x + \frac{243}{108} \tag{4}$$

而 $L(80) = \frac{323}{108} = 2.99074074$, 利用 $CASIO - fx - 991CNX$ 计算出原式为 2.990687562, 误差在百分之 0.00144 内。甚好。

如法炮制:

2)$1 + ln10 = 3.302585093$.

3)0.4848850053.

屡试不爽。

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 5 日

Problem 1. 设参数方程

$$x = e^{2t}cos^2(t), y = e^{2t}sin^2(t) \tag{1}$$

试求$y'(x)$.

Problem 2. 对下列曲线求导数
心形线 (Cardioid) (de Castillon named it at 1741):

$$r = a(1 + cos\varphi); r = \sqrt{x^2 + y^2}; \varphi = arctan\frac{y}{x} \tag{2}$$

Problem 3. 对下列曲线求导数
双纽线 Lemniscate of Gerono:

$$y^4 = y^2 - x^2; \tag{3}$$

Problem 4. 对下列曲线求导数
对数螺线 logarithmic spiral (Descartes, 1638; Jacob Bernoulli2 refounded at 1691):

$$arctan\frac{y}{x} = ln\sqrt{x^2 + y^2}; \tag{4}$$

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 5, 2022

Problem 1. Let

$$x = e^{2t}cos^2(t), y = e^{2t}sin^2(t) \tag{1}$$

Try to compute $y^{'}(x)$.

Problem 2. Take the derivative of this equation
Heart line(Cardioid) (de Castillon named it at 1741):

$$r = a(1 + cos\varphi); r = \sqrt{x^2 + y^2}; \varphi = arctan\frac{y}{x} \tag{2}$$

Problem 3. Take the derivative of this equation
Lemniscate of Gerono:

$$y^4 = y^2 - x^2; \tag{3}$$

Problem 4. Take the derivative of this equation
logarithmic spiral (Descartes, 1638; Jacob Bernoulli2 refounded at 1691):

$$arctan\frac{y}{x} = ln\sqrt{x^2 + y^2}; \tag{4}$$

解: 直接计算得到

$$\frac{dy}{dx} = \tan t \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \quad t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}), \quad t \neq n\pi + \frac{\pi}{2}\ (n \in \mathbb{N}). \quad \square$$

对心脏线有 $F(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} - a(1+\cos(\arctan(y/x)))$, 所以

$$F_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ay}{x^2+y^2}\sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right),$$

$$F_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{ax}{x^2+y^2}\sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right),$$

$$y' = \frac{ay\sin(\arctan(y/x)) - x\sqrt{x^2+y^2}}{ax\sin(\arctan(y/x)) + y\sqrt{x^2+y^2}}.$$

对 Gerono 双扭线有 $F(x,y) = y^4 - y^2 + x^2$, 所以

$$F_x = 2x, \quad F_y = 4y^3 - 2y, \quad y' = \frac{x}{y-2y^3}.$$

对 Bernoulli 双扭线有 $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$, 所以

$$F_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \quad F_y = 4y(x^2+y^2) + 4y, \quad y' = \frac{x - x(x^2+y^2)}{y + y(x^2+y^2)}.$$

对对数螺线有 $F(x,y) = \arctan(y/x) - \ln\sqrt{x^2+y^2}$, 所以

$$F_x = \frac{-x-y}{x^2+y^2}, \quad F_y = \frac{x+y}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 8 日

Problem 1. 证明: 假设函数 y = y(x) 满足条件

$$\sum_{0\le k\le n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \tag{1}$$

如果 $x = e^t$, 则必有

$$0 = \sum_{0\le k\le n} a_k D(D-1)\dots(D-k+1)y \tag{2}$$

其中 $D = d/dt$.

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 8, 2022

Problem 1. If y = y(x) satisfy:

$$\sum_{0 \le k \le n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \tag{1}$$

with $x = e^t$,then try to show

$$0 = \sum_{0 \le k \le n} a_k D(D-1)\dots(D-k+1)y \tag{2}$$

,which $D = d/dt$.

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 8 日

Problem 1. 证明: 假设函数 y = y(x) 满足条件

$$\sum_{0\le k\le n} a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0 \tag{1}$$

如果 $x = e^t$, 则必有

$$0 = \sum_{0\le k\le n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)y \tag{2}$$

其中 $D = d/dt$.

证: 引入 $\delta := d/dx$ 得到 $\mathbf{D}y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = x\delta y$. 即 $\delta = e^{-t}\mathbf{D}$ 或 $\mathbf{D} = e^t\delta$. 进一步

$\delta^2 y = e^{-t}\mathbf{D}[e^{-t}\mathbf{D}y] = e^{-t}[-e^{-t}\mathbf{D}y + e^{-t}\mathbf{D}^2 y] = -e^{-2t}\mathbf{D}y + e^{-2t}\mathbf{D}^2 y = e^{-2t}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)y.$

断言

$$\delta^{(k)}y = e^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y.$$

事实上, 根据归纳假设得到

$$\begin{aligned} \delta^{(k+1)}y &= \delta(\delta^{(k)}y) = e^{-t}\mathbf{D}\left[e^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+2)y\right] \\ &= e^{-t}\left[-ke^{-kt}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y + e^{-kt}\mathbf{D}^2(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)y\right] \\ &= e^{-(k+1)t}\mathbf{D}(\mathbf{D}-1)\cdots(\mathbf{D}-k+1)(\mathbf{D}-k)y. \quad \square \end{aligned}$$

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 9, 2022

Problem 1. Let $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = -1$,then at x=a,the following assertions,which one is correct:

A.Derivative existence,and $f'(a) \neq 0$.

B.f(x) maximum.

C.f(x) minimum.

D.Derivative nonexistence.

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 9 日

Problem 1. 设 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 那么在 x=a 处下列说法正确的是:

A. 导数存在且 $f'(a)\neq 0$.

B.f(x) 取到极大值.

C.f(x) 取到极小值.

D. 导数不存在.

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 9 日

Problem 1. 设 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\substack{\cancel{(x-a^2)}\\(x-a)^2}}=-1$, 那么在 x=a 处下列说法正确的是:

A. 导数存在且 $f'(a)\neq 0$.

B.f(x) 取到极大值.

C.f(x) 取到极小值.

D. 导数不存在.

解.B

~~It is obvious. 一眼看穿选 B~~

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1 \tag{1}$$

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))}{(x-a)} \tag{2}$$

由条件知 $f(x)-f(a)=O(x-a)$ 即 $f'(a)=0$(或者可以把分母因式分解然后移项理解，此处为无穷小记号，国内教材常用)

又因为 $(x-a)^2>0$, 则 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1<0$.

当 $x\to a+$ 时, $f(x)<f(a)$; 当 $x\to a-$ 时, $f(x)<f(a)$; 所以 f(a) 是极大值。

注：

这里不能用二阶导数判断，只能用定义判定，因为题目并未阐明函数二阶导数存在，否则可由凹凸性判定。

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 10, 2022

Problem 1. Let function $f(x)$ is countinuous in $[0,1]$ is differential in$(0,1)$ and:

$$f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1. \tag{1}$$

Show that :

(1)there exists $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$such that $f(\xi) = (\xi)$;
(2)there exists $\eta \in (0, \xi)$such that $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

Construct $h(x) = e^{-x}(f(x) - x)$

for $h(0) = h(\xi) = 0$

$h'(x) = e^{-x}(x - f(x) + f'(x) - 1)$

Rolle's Theorem $\Rightarrow \exists\, h'(\eta) = 0$

So $\exists\, f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 10 日

Problem 1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内可微，且:

$$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1. \tag{1}$$

证明:

(1) 存在 $\xi \in (\frac{1}{2},1)$ 使得 $f(\xi)=(\xi)$;
(2) 存在 $\eta \in (0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 10 日

Problem 1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内可微，且:

$$f(0) = f(1) = 0, f(\frac{1}{2}) = 1. \tag{1}$$

证明:

(1) 存在 $\xi \in (\frac{1}{2}, 1)$ 使得 $f(\xi) = (\xi)$;

(2) 存在 $\eta \in (0, \xi)$ 使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

解.

证明:

(1) 设函数 g(x)=f(x)−x，容易得到 g(x) 在 [0,1] 连续,

$$g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, g(1) = f(1) - 1 = -1 \tag{2}$$

由零点存在性定理得到:

$$\exists\xi \in (\frac{1}{2}, 1) \tag{3}$$

使得

$$f() = f(\xi) = (\xi) = \xi; \tag{4}$$

"e^{-x} construction"

(2) 考虑函数 $h(x) = \mathrm{e}^{-x}, g(x) = \mathrm{e}^{-x}(f(x) - x)$

我们有 $h(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$ ，$h'(x) = \mathrm{e}^{-x}[-f(x) + x + f'(x) - 1]$，而 $h(0) = h(\xi) = 0$

由 Rolle 定理得到:

$\exists\eta \in (0, \xi)$ 使得 $h'(\eta) = 0$ 即 $\mathrm{e}^{-\eta}[-f(\eta) + \eta + f'(\eta) - 1] = 0$, 也即 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

(不要求掌握构造技巧，可以看明白即可)

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 11, 2022

Problem 1. Let $f(x)$ has two order continuous derivative on [0,1] and

$$f(1) > 0, \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0,$$

:

(1)Equation f(x)=0 has at least one root in (0,1). $f(\xi)=0$ $f(0)=0$

(2)Equation

$$(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = 0$$

$\exists\ \eta \in (0,\xi)$ st. $f'(\eta)=0$

has at least two different roots in (0,1).

$g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ $\Rightarrow g(\eta)=0$

$g'(x)=(f'(x))^2+f(x)f''(x)=0$

$$\begin{cases} g(0)=0 \xleftarrow{\text{root}} \text{Rolle's} \\ g(\eta)=0 \xleftarrow{\text{root}} \text{Rolle's} \\ g(\xi)=0 \end{cases}$$

✓

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 11 日

Problem 1. 设 $f(x)$ 在区间 [0,1] 上有二阶连续导数，且

$$f(1) > 0, \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0,$$

证明:

(1) 方程 f(x)=0 在 (0,1) 内至少有一个根.

(2) 方程

$$(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = 0$$

在 (0,1) 内至少存在两个不同的根.

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 11 日

Problem 1. 设 $f(x)$ 在区间 [0,1] 上有二阶连续导数，且

$$f(1) > 0, \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0,$$

证明:
(1) 方程 f(x)=0 在 (0,1) 内至少有一个根.
(2) 方程

$$(f'(x))^2 + f(x)f''(x) = 0$$

在 (0,1) 内至少存在两个不同的根.

解. 证明:
(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.当 $0 < x < \delta$ 时,$-\varepsilon < \dfrac{f(x)}{x} < 0$，即 $-\varepsilon x < f(x) < 0$，故 $f(\frac{\varepsilon}{2}) < 0$ $f(1) > 0$，由零点存在性定理得 $\exists \xi \in (\dfrac{\varepsilon}{2}, 1)$ 使得 $f(\xi) = 0$，故 $f(x)$ 在 (0,1) 至少有一个根.
(2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} x = 0$，$f(x) \in C[0,1]$
所以 $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
考虑函数 $g(x) = f(x)f'(x)$, 有 $g(x) \in D(0,1), g'(x) = f(x)f''(x) + [f'(x)]^2$, 我们有 $f(0) = f(\xi) = 0$，由 Rolle 定理得

$$\exists \lambda \in (0,1) \quad \text{s.t.} \quad f'(\lambda) = 0,$$

于是设 $g(x) = f(x)f'(x)$ 有 $g(0) = g(\lambda) = g(\xi) = 0$,
由 Rolle 定理:

$$\text{存在 } \eta_1 \in (0,\lambda) \quad \text{s.t.} \quad g'(\eta_1) = 0,$$
$$\text{存在 } \eta_2 \in (\lambda,\xi) \quad \text{s.t.} \quad g'(\eta_2) = 0,$$

而 $g'(x) = (f'(x))^2 + f(x)f''(x)$，证毕.
(s.t. 为 such that 使得之意。本题不要求掌握构造技巧，可以看明白即可）

每日一些题

互助课堂 · 高数上

10 月 12 日

Problem 1. 考虑函数:

$$f(x) = \begin{cases} x^n sin(1/x), x \neq 0, \\ 0, \qquad\qquad\quad x = 0. \end{cases} \quad (n > 1) \tag{1}$$

试说明: 当 n > 2 时, f(x) 的导函数 f'(x) 是连续的; 当 n=2 时, f(x) 的导函数 f'(x) 是不连续的。

Daily Practices

Learning center on Calculus I, SUSTech

October 11, 2022

Problem 1. Considering function

$$f(x) = \begin{cases} x^n sin(1/x), x \neq 0, \\ 0, \qquad\qquad x = 0. \end{cases} \quad (n > 1) \tag{1}$$

then try to show:
when n is equal to or lager than 2,f'(x)is continuous, when n=2,f'(x) is not continuous.