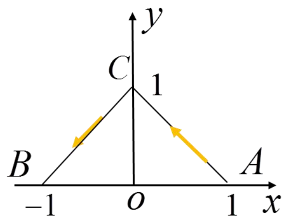
厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷

考试日期：2014　信息学院自律督导部整理

一、（5 分）计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} zdv$，其中$\Omega$是由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$及$z=x^2+y^2$所围成的闭区域.

二、（5 分）已知空间立体Ω是由曲面$z=x^2+y^2$，$z=0$，$x=\sqrt{1-y^2}$，$x=0$所围成，其体密度$\rho(x,y,z)=x$，求立体Ω的质量.

三、（6 分）计算曲线积分$\int_L \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$，其中 L 为从$A(1,0)$到$C(0,1)$再从$C(0,1)$到$B(-1,0)$的有向折线，如图所示。



四、（6 分）设$\int_L (x^3-\varphi(y))\mathrm{d}x+(y^3-6xy)\mathrm{d}y$与路径无关，其中$\varphi$具有连续的导数，且$\varphi(0)=0$. 求一个二元函数$u(x,y)$使得$\mathrm{d}u(x,y)=(x^3-\varphi(y))\mathrm{d}x+(y^3-6xy)\mathrm{d}y$，并计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^3-\varphi(y))\mathrm{d}x+(y^3-6xy)\mathrm{d}y$.

五、（5 分）计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$为锥面$z^2=(x^2+y^2)$被平面$z=1$和$z=0$所截得的部分.

六、（10 分）计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)dydz+zdxdy$，其中$\Sigma$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$的下侧.

七、(10 分) 设$F(x,y,z)$二阶连续可导，且满足$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0,$求证：

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]dv=\iint\limits_{\Sigma}F\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}dS,$$

其中Ω是光滑封闭曲面Σ所围的区域，$\dfrac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}$是$F$沿曲面$\Sigma$的单位外法线方向$\boldsymbol{n}$的方向导数.

八、(共 8 分，每小题 4 分) 判断下列级数的敛散性. 如果收敛，请指出是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}$　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

九、(10 分) 设$f(x)=\dfrac{5x}{x^2+x-6}$，试求：

(1) 将$f(x)$展开成麦克劳林级数；(2) 将$f(x)$展开成$x-1$的幂级数.

十、(10 分) 证明级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{1+n}$条件收敛.

十一、(10 分) 求幂级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$的和函数及常数项级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}$的和.

十二、(10 分) 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，且当$-\pi\le x<\pi$时，$f(x)=x^2+x$. 将$f(x)$展开成傅立叶级数.

十三、(5 分) 已知数列$\{u_n\}$为单调增加且有界的正数数列，试证明：级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^2\right]$是收敛的.