厦门大学《微积分 I-2》课程

期中试题·答案

考试日期：2013.4　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、（6 分）求初值问题 $y''+9y=6e^{3x}$，$y(0)=y'(0)=0$ 的解.

解：先求对应齐次线性方程的解. 特征方程为 $r^2+9=0$，特征根为 $r_{1,2}=\pm 3i$，从而齐次线性方程的通解为

$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$.

自由项 $f(x)=6e^{3x}$，可设非齐次特解为 $y*=Ae^{3x}$，其中 A 为待定常数,代入原方程,得 $18A=6$，从而 $A=\dfrac{1}{3}$.

原方程的通解为 $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\dfrac{1}{3}e^{3x}$.

将初值条件 $y(0)=y'(0)=0$ 代入上式，得 $C_1+\dfrac{1}{3}=0$，$,3C_2+1=0$，从而 $C_1=C_2=-\dfrac{1}{3}$，

即初值问题的解为 $y=-\dfrac{1}{3}\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{3}e^{3x}$

二、（6 分）已知二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'-y\cos^2 x=0$ 有两个互为倒数的特解，求 $p(x)$ 及此方程的通解.

解：设 $y=y(x)$ 是原方程的解，则 $1/y$ 也是原方程的解，代入方程，利用

$y''=-p(x)y'+y\cos^2 x$ 化简得：$y'=y\cos x$ 或 $y'=-y\cos x$

即　$(\ln y)'=\pm\cos x$，

解得　$y=e^{\sin x}$ 或 $y=e^{-\sin x}$，

代入原方程得　$p(x)=\tan x$，

以及通解为　$y=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}$.

三、（6 分）设函数 $y(x)$ 满足 $y'(x)=1+\int_0^x[6\sin^2 t-y(t)]dt$，$y(0)=1$，求 $y(x)$.

解：方程两边对 x 求导，得微分方程

$$y''+y=6\sin^2 x=3(1-\cos 2x)$$，

故特征方程是 $r^2+1=0$，特征根是 $\pm i$.

对应齐次方程的通解是 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

注意到方程右端 $f(x)=3-3\cos 2x = f_1(x)+f_2(x)$，且 $\pm 2i$ 不是特征根，因此可设特解

为　$y=a+b\cos 2x+c\sin 2x$

代入原方程得 $a=3,b=1,c=0$　从而原方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos 2x+3.$$

又令原方程两端 $x=0$，得 $y'(0)=1$，由 $y(0)=1,y'(0)=1$，得 $C_1=-3,C_2=1$

从而所求函数为 $y=-3\cos x+\sin x+\cos 2x+3$.

四、　（6 分）求曲线 $C:\begin{cases}x^3+y^3+z^3=3\\ z=xy\end{cases}$ 在 $(1,1,1)$ 处的法平面.

解一：因为曲面 $x^3+y^3+z^3=3$ 在 $(1,1,1)$ 处的法向量为

$$\overrightarrow{n_1}=(3x^2,3y^2,3z^2)\big|_{(1,1,1)}=(3,3,3).$$

故曲面 $x^3+y^3+z^3=3$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面方程方程为

$$3(x-1)+3(y-1)+3(z-1)=0.$$

曲面 $z=xy$ 在 $(1,1,1)$ 处的法向量为

$$\overrightarrow{n_2}=(y,x,-1)\big|_{(1,1,1)}=(1,1,-1).$$

故曲面 $z=xy$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面方程方程为

$$(x-1)+(y-1)-(z-1)=0.$$

因此，曲线 C 在 $(1,1,1)$ 处的切线方程为：$\begin{cases}3(x-1)+3(y-1)+3(z-1)=0\\ (x-1)+(y-1)-(z-1)-0\end{cases}$.

从而切向向量可取为 $\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-2,2,0)$，　法平面方程为 $(x-1)-(y-1)=0$.

解二：方程组 $\begin{cases}x^3+y^3+z^3=3\\ z=xy\end{cases}$ 两边对 x 求导，得

$$\begin{cases}3x^2+3y^2\dfrac{dy}{dx}+3z^2\dfrac{dz}{dx}=0\\ \dfrac{dz}{dx}=y+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\end{cases}$$

将$(1,1,1)$代入，$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1 \\ \dfrac{dz}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx} \end{cases}$，于是，可得$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=-1 \\ \dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases}$，所以，切向量可取成

$$\vec{T}=\left\{1,\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}\right\}_{(1,1,1)}=\{1,-1,0\}.$$

于是，法平面方程为$(x-1)-(y-1)=0$.

五、（6 分）求过直线$l:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$且垂直于平面$\pi: x-y+2z-1=0$的平面方程.

解一：直线l的方向向量为$s=\{1,1,-1\}$，平面π的法向量为$\vec{n}=\{1,-1,2\}$，经过l且垂直于平面π的平面法向量为

$$\vec{s}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$$

因为该平面经过l，所以经过l上的点(1,0,1). 故可得该平面方程为

$$(x-1)-3(y-0)-2(z-1)=0,$$

即　$x-3y-2z+1=0.$

解二：直线l的方程可写成$\begin{cases} x-y-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$，于是，过直线$l$的平面束方程为

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0，即\ x+(\lambda-1)y+\lambda z-1-\lambda=0.$$

由于所求平面与平面π垂直，故有$1\times1-1\times(\lambda-1)+2\times\lambda=0$，即$\lambda=-2$.

于是，所求平面方程为$x-3y-2z+1=0$.

解三、设所求平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$.

由直线方程可求得直线上两点$(1,0,1)$和$(2,1,0)$，显然这两点在所求平面上. 因此，

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ 2A+B+D=0 \end{cases},$$

又所求平面垂直于已知平面$\pi: x-y+2z-1=0$，故

$$A-B+2C=0.$$

解得$A=D, B=-3D, C=-2D$，于是，所求平面方程为

$$x-3y-2z+1=0.$$

六、（6 分）求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线方程.

解：设过已知直线L的平面束方程为$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$，即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z-1+\lambda=0$$

求λ，使其与已知平面垂直，即要求

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(\lambda-1)\cdot 1=0,$$

得$\lambda=-1$，因此投影直线方程按一般形式给出为：

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

七、（6 分）求过点$M_0(1,1,1)$，与平面$\pi: x+y+z+3=0$平行，且与直线$l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-2}{1}$相交的直线$l$的方程.

解：设l与l_1的交点为$M(x,y,z)$，则向量$\overrightarrow{M_0M}$与平面Π的法向量$\vec{n}=\{1,1,1\}$垂直，从而数量积为零，

即 $$x-1+y-1+z-1=0.$$

又因为点M在直线L_1上，故可设 $x=1+2t, y=3+3t, z=2+t$.

从而有$t=-\frac{1}{2}$，所以$M\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

因此直线L的方程为 $$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}}=\frac{z-1}{\frac{1}{2}}.$$

八、计算（8 分，每小题 4 分）

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}$

（2）设$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求$dz$.

解：（1）因

$$0\le\left|\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|xy|\cdot|x+y|}{x^2+y^2}\le\frac{|x+y|}{2}\to 0,(x,y)\to(0,0).$$

于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}=0.$

（2）对$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$两端求微分，得

$$\frac{1}{z}dx-\frac{x}{z^2}dz=\frac{y}{z}\left(-\frac{z}{y^2}\right)dy+\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}dz,$$

即 $$\frac{zdx-xdz}{z}=\frac{ydz-zdy}{y},$$

由此解得 $$dz=\frac{z(ydx-zdy)}{y(z+x)}.$$

九、（6 分）已知$f(x,y)=x^2+(\ln y)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x^2+y^2}}$,求$f_x'(2,1),\ f_y'(2,1).$

解: 因 $$f(x,1)=x^2,\ f(2,y)=4+(\ln y)\arcsin\sqrt{\frac{2}{4+y^2}},$$

于是

$$f_x'(2,1)=\left.\frac{df(x,1)}{dx}\right|_{x=2}=4,$$

$$f_y'(2,1)=\left.\frac{df(2,y)}{dy}\right|_{y=1}=\left.\left(\frac{1}{y}\arcsin\sqrt{\frac{2}{4+y^2}}+(\ln y)\cdot\left(\arcsin\sqrt{\frac{2}{4+y^2}}\right)'_y\right)\right|_{y=1}$$

$$=\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

十、（6 分）试讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性.

解：因$\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$有界，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0),$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 因为

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导. 下面考虑可微性. 令

$$\Delta f(0,0)=f(x,y)-f(0,0)=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y+\omega,$$

则 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0^+$ 时，$\dfrac{\omega}{\rho}=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

于是 $$0\le\left|\frac{\omega}{\rho}\right|\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to 0,\quad(\rho\to 0).$$

因此$\omega=o(\rho)$，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

十一、（6 分）设$f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}$，试证明: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=0.$

解法一：由

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}\cdot\frac{y}{z}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}-1}=\frac{yf}{xz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(e^{\frac{y}{z}\ln\frac{x}{y}}\right)'_y=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\cdot\left(\frac{1}{z}\ln\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\right)=\frac{f}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{z}}\ln\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{yf}{z^2}\ln\frac{x}{y},$$

得

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=x\cdot\frac{yf}{xz}+y\cdot\frac{f}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)-z\cdot\frac{yf}{z^2}\ln\frac{x}{y}=0.$$

解法二：由 $f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=f(x,y,z)$ 可得

$$f(u,v,w)=f(x,y,z),$$

其中$u=\lambda x,v=\lambda y,w=\lambda z$,将上式两端对 λ 求导数，得

$$\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u}\cdot x+\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial v}\cdot y+\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial w}\cdot z=0.$$

上式两端同乘以 λ，得

$$\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u}\cdot u+\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial v}\cdot v+\frac{\partial f(u,v,w)}{\partial w}\cdot w=0.$$

十二、(6 分) 求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

解: 设$F=x^2+y^2+z^2-1$,则球面上点(x,y,z)处的外法线向量为

$$\vec{n}=\{F'_x,F'_y,F'_z\}=2\{x,y,z\},$$

因点 P_0 在球面上，故 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$. 记球面在点 P_0 处的单位外法线方向为 $\overrightarrow{n_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$,则

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=x_0,\cos\beta=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=y_0,\cos\gamma=\frac{z_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}=z_0,$$

又因为 grad $f=2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})=2\{x,y,z\}$,故 grad $f\,|_{P_0}=2\{x_0,y_0,z_0\}$,因此

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n_0}}=2\{x_0,y_0,z_0\}\cdot\{x_0,y_0,z_0\}=2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=2.$$

十三、计算下面二重积分（8 分，每小题 4 分）

（1）$I=\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy$, 其中$D$由$x=1,y=0,y=x$围成 .

（2）$I=\iint\limits_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy$, 其中 $D:\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

解：（1）$I=\iint\limits_D e^{\frac{y}{x}}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x e^{\frac{y}{x}}dy=\int_0^1 x\cdot(e^{\frac{y}{x}}\,|_0^x)dx=\int_0^1 x\cdot(e-1)dx=\frac{e-1}{2}$.

（2）$I=\iint\limits_D \sin(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_\pi^{2\pi}r\sin rdr=-6\pi^2$.

十四、（6 分）计算二重积分 $\iint\limits_D[\cos(\pi\sqrt{x^2+y^2})+\sin(y\sqrt{x^2+y^2})]dxdy$ ，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0\}$.

解：$\because$ D 是关于 x 轴对称，而 $\cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)$关于 y 为偶函数，

$\sin\left(y\sqrt{x^2+y^2}\right)$关于 y 为奇函数，

$\therefore$ $\iint\limits_D \sin\left(y\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=0$,

$\iint\limits_D \cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=2\iint\limits_{D_1}\cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$,

其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,y\ge 0\right\}$。

于是，

$$\text{原式}=2\iint\limits_{D_1}\cos\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\cos(\pi r)rdr=\frac{2}{\pi}.$$

十五、(6 分）交换二重积分的次序$\int_{-1}^0 dx\int_{1-\sqrt{x+1}}^{1+\sqrt{x+1}}(2x+y)dy+\int_0^3 dx\int_x^{1+\sqrt{x+1}}(2x+y)dy$，并求其值.

解：积分区域 $D=D_1+D_2$,

其中 $D_1=\{(x,y)\mid -1\le x\le 0,\ 1-\sqrt{x+1}\le y\le 1+\sqrt{x+1}\}$，

$D_2=\{(x,y)\mid 0\le x\le 3,\ x\le y\le 1+\sqrt{x+1}\}$.

所以 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le 3,\ y^2-2y\le x\le y\}$，于是

$$原式=\int_0^3 dy\int_{y^2-2y}^{y}(2x+y)dx$$

$$=\int_0^3 dy\left[x^2+yx\right]_{y^2-2y}^{y}=\int_0^3(3y^3-y^4)dy=\frac{3^5}{20}=\frac{243}{20}=12\frac{3}{20}.$$

十六、（6 分）求曲线 $C:\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 上到 xoy 平面距离最近的点。

解：**解法一**：令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$，可得：

$$\begin{cases}\lambda+2\mu x=0\\\lambda+2\mu y=0\\2z+\lambda+2\mu z=0\\x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\end{cases}。$$

（1）$\mu=0$ 的情形，此时 $\lambda=0$，$z=0$，解得 $x=0,y=1$ 或者 $x=1,y=0$；因为 $z=0$，所以 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$ 为所求的点；

（2）$\mu\ne 0$ 的情形，则 $x=y$。代入后两个方程解得：

$(x,y,z)=(0,0,1)$ 或 $(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{-1}{3})$，但这两点距离 xoy 平面的距离分别为 1 和 $\frac{1}{3}$。

综上，距离 xoy 平面的距离的点应为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$.

解法二：题目求点 $(x,y,z)\in C$，使得 $|z|$ 最小. 因 $|z|\ge 0$，故若曲线 C 与平面 $z=0$ 有交点，则这些交点即为所求.

由 $\begin{cases}x+y+z=1\\x^2+y^2+z^2=1\\z=0\end{cases}$ 得所求点为 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$.

注：若所作拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=|z|+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$$

或

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=\sqrt{z^2}+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2+z^2-1)$$

则需注明 $z \neq 0$.否则 L_z' 在竖坐标 $z=0$ 的点处偏导数不存在,也就无法通过求 L 的驻点的方式得到本题的所求点(1,0,0)和(0,1,0). 但若考虑 $z=0$ 的情况, 则就是第二种解法,可直接求出所求的点，也就用不上拉格朗日乘数法了.