厦门大学《微积分 I-2》课程

补充习题

信息学院自律督导部整理

第十一章　习题课二 ：曲面积分部分

主要内容：

一、　对面积的曲面积分（第一类曲面积分）

1. 曲面 Σ： $z=z(x,y)$ 具有连续偏导数，在 xoy 面上的投影范围：D_{xy}，

函数 $f(x,y,z)$ 是定义在曲面 Σ 上的连续函数，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,ds=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy\text{。}$$

化为平面 D_{xy} 上的二重积分（直角或极坐标系）。

2. 曲面 Σ： $y=y(x,z)$，在 zox 面上的投影范围：D_{zx}，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,ds=\iint_{D_{zx}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x^2(x,z)+y_z^2(x,z)}\,dxdz\text{。}$$

3. 曲面 Σ： $x=x(y,z)$，在 yoz 面上的投影范围：D_{yz}，

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,ds=\iint_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}\,dydz\text{。}$$

二、　对坐标的曲面积分（第二类曲面积分）、高斯公式

连续向量函数 $\vec{A}=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$ 定义在分片光滑的

有向 曲面 Σ： $z=z(x,y)$ 上，

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

$$\overrightarrow{n^{\circ}}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=(\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}})$$

由于 $\cos\gamma dS=\begin{cases} dxdy, & \gamma<\frac{\pi}{2} \\ -dxdy, & \gamma>\frac{\pi}{2} \\ 0, & \gamma=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 所以 $\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy=\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy\\&\iint_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy=-\iint_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]dxdy\\&\iint_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy=0\end{aligned}$ 。

同理： 若曲面 Σ： $x=x(y,z)$，

由于 $\cos\alpha dS=\begin{cases} dydz, & \alpha<\frac{\pi}{2} \\ -dydz, & \alpha>\frac{\pi}{2} \\ 0, & \alpha=\frac{\pi}{2}\end{cases}$，所以 $\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz=\iint_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]dydz\\&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz=-\iint_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]dydz\\&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz=0\end{aligned}$ 。

同理： 若曲面 Σ： $y=y(x,z)$，

由于 $\cos\beta dS=\begin{cases} dzdx, & \beta<\frac{\pi}{2} \\ -dzdx, & \beta>\frac{\pi}{2} \\ 0, & \beta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$，所以 $\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dzdx=\iint_{D_{zx}}P[x,y(x,z),z]dzdx\\&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dzdx=-\iint_{D_{zx}}P[x,y(x,z),z]dzdx\\&\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dzdx=0\end{aligned}$ 。

三、 高斯公式、通量与散度

Σ 为分片光滑的闭合曲面，取外侧，所围区域记作 Ω，

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，

$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[P(x,y,z)\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\lambda]dS\text{ 。}$$

通量： 向量场 $\vec{A}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 关于曲面 Σ 的通量：

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{ds} = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy.$$

散度：（向量 $\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ 的散度）

$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.　源：$div\vec{A} > 0$；汇：$div\vec{A} < 0$。

由高斯公式知：若 Ω 内 $div\vec{A} = 0$，闭合曲面 $\sum$ 的通量 $\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{ds} = 0$。

四、　斯托克斯公式、环流量与旋度

Γ 为分段光滑的空间闭合曲线，$\sum$ 是以 Γ 为边界分片光滑的有向曲面。

$\sum$ 的侧向与 Γ 的绕行方向服从右手系。

向量 $\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ 的三个分量函数

$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在包含曲面 $\sum$ 在内的一个空间区域内

具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z})dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$= \oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

$$\iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \iint_{\Sigma} [(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma]dS$$

$$= \oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

斯托克斯公式的向量形式：

环流量：向量场 $\vec{A} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ 中某一 有向

闭曲线 Γ 沿所取方向的线积分

$$\oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\text{，}$$

称为向量场$\vec{A}$沿曲线Γ所取方向的环流量。

旋度：向量函数

$$rot\vec{A} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial z})\vec{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

斯托克斯公式的向量形式： $\iint_{\Sigma} rot\vec{A}\cdot\vec{n^{\circ}}dS = \oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{t^{\circ}}ds$，

或 $\iint_{\Sigma}\left(rot\vec{A}\right)_n dS = \oint_{\Gamma}\left(\vec{A}\right)_t ds$。

其中 $\vec{n^{\circ}}$：曲面的单位法向量；$\vec{t^{\circ}}$：曲线的单位切向量。

典型例题：

例 1. 设$\sum$ 是yoz平面上的圆域$z^2+y^2\le 1$，求$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$.

解： 注意到$x=0$，$\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}=0$，

所以$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}ydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}$

例 2. 计算$I=\iint_{\Sigma}2xz^2dydz+y\left(z^2+1\right)dzdx+\left(9-z^3\right)dxdy$，

其中Σ为曲面$z=x^2+y^2+1\quad(1\le z\le 2)$，取下侧.

解：取平面Σ_1： $z=2$，取上侧．则Σ与Σ_1构成封闭

曲面，取外侧．令Σ与Σ_1所围空间区域为Ω，

由 Gauss 公式，得

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=\iiint_{\Omega}dxdydz-\iint_{x^2+y^2\le1}\left(9-2^3\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{1+r^2}^{2}dz-\iint_{x^2+y^2\le1}dxdy=-\frac{\pi}{2}$$

例 3. 设Σ是由圆$x^2+(y-2)^2=1$绕 X 轴旋转所成之环面，

$\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是$\Sigma$上单位外法向矢量，而$V$是$\Sigma$所围之体积。

则$\oiint_{\Sigma}(x^2yz\cos\alpha+yz\cos\beta+z\cos\gamma)ds=$（ B ）

（A）0 （B）V （C）$2V$ （D）$3V$

解： 利用 Gauss 公式可得

$$\text{原式}=\iiint_V(2xyz+z+1)dV=V$$

因为区域V关于三个坐标面对称，前两项之积分为 0。

例 4. 计算 $I=\iint_{\Sigma}-ydzdx+(z+1)dxdy$，其中$\Sigma$是圆柱面$x^2+y^2=4$被平面

$x+z=2$和$z=0$所截出部分的外侧。

解： 补充$\Sigma_1:x+z=2$取上侧，补充$\Sigma_2:z=0$取下侧，

在xoy面上的投影范围均为：D_{xy}：$x^2+y^2\le4$，

$$I=\iint_{\Sigma}-ydzdx+(z+1)dxdy=\iint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}[-ydzdx+(z+1)dxdy]$$

$$=\iiint_{\Omega}(-1+1)dv-\iint_{D_{xy}}[(2-x)+1]dxdy+\iint_{D_{xy}}dxdy$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(3-x)dxdy+\iint_{D_{xy}}dxdy$$ 注意到对称性，得

$$=-3\iint_{D_{xy}}dxdy+\iint_{D_{xy}}dxdy=-2\iint_{D_{xy}}dxdy=-2\cdot4\pi=-8\pi$$

例 5. 计算曲面积分：$I=\oiint_{\Sigma}[(x+1)^2+(y+z)^2]dS$，其中$\Sigma$是球面

$x^2+y^2+z^2=2x+2y$。

解：$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[(x+1)^2+(y+z)^2]dS$，

$$=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[x^2+2x+1+y^2+z^2+2yz]dS=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}[4x+2y^2+1+2yz]dS$$

利用重心公式，$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}xdS=\overline{x}\cdot S=S=4\pi\cdot 2=8\pi$，

$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}ydS=\overline{y}\cdot S=S=4\pi\cdot 2=8\pi$，

又　$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}dS=4\pi\cdot 2=8\pi$，$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}2yzdS=0$（对称性）

故　$I=56\pi$。

例 6. 计算　$I=\iint_{\Sigma}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$，其中$\Sigma$是中心在原点，半径为$a$的上半圆的上侧。

解：作辅助面$\Sigma_1: z=0$, $x^2+y^2\le a^2$，取下侧。

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$

$$-\iint_{\Sigma_1}xz^2dydz+(x^2y-z^3)dzdx+(2xy+y^2z)dxdy$$（利用高斯公式）

$$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz+\iint_{D}2xydxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2}r^4\sin\varphi dr+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a}2\rho^3\cos\theta\sin\theta d\rho=\frac{2}{5}\pi a^5$$。

例 7. 计算$\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{dydz}+4\mathrm{dxdy}$，其中$\Sigma$是抛物面$z=4-x^2-y^2$在$z\ge 0$部分，方向取下侧。

解：Σ在xoy面上的投影区域$D_{xy}=\{(x,y)x^2+y^2\le 4\}$。

由于方向取下侧，设Σ的方向为$\{-2x,-2y,-1\}$，则单位法向量为

$$\{\cos\alpha,\cos\gamma,\cos\beta\}=\left\{-\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right\}$$。

由 $\mathrm{dydz}=\cos\alpha dS$,　$\mathrm{dxdy}=\cos\gamma dS$ 得

$$\mathrm{dydz}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\mathrm{dxdy}=2x\mathrm{dxdy}$$

于是 $\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{dydz}+4\mathrm{dxdy}=\iint\limits_{\Sigma}(xz\cdot 2x+4)\mathrm{dxdy}=-\iint\limits_{D_{xy}}[2x^2(z+4)\mathrm{dxdy}$

例 8. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{(x^2+y^2)}{2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧。

解 1 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\mathrm{dS}=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy.$

在曲面 Σ 上，有 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\dfrac{z_x}{-1}=\dfrac{x}{-1}=-x.$

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint\limits_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)+x\right]\cdot(-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2\right)rdr=8\pi.$$

解 2 利用高斯公式只需计算 $\{(x,y,z):z=2,x^2+y^2\le 4\}$ 下侧上的积分可得 8π

例 9 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 利用 Gauss 公式计算曲面积分

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$$ $\iint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$，

其中 Σ 为任意不经过原点的闭曲面, 取外侧。(10 分)

解：当 $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ 时，

$\dfrac{\partial\left(\dfrac{x}{r^3}\right)}{\partial x}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3x^2}{r^5}$, $\dfrac{\partial\left(\dfrac{y}{r^3}\right)}{\partial y}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3y^2}{r^5}$, $\dfrac{\partial\left(\dfrac{z}{r^3}\right)}{\partial z}=\dfrac{1}{r^3}-\dfrac{3z^2}{r^5}$，有

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{r^3}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{r^3}\right)}{\partial z}=0.$$

设Σ围成的空间区域为Ω.

如 果 Ω 不 包 含 原 点 ， 则 利 用 Gauss 公 式 ， 可 得 $\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy=0$.

如果Ω包含原点，在椭球面内作辅助小球面$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$，取内侧，由高斯公式，可得

$$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy-\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$$

$$=0-\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint\limits_{\Sigma_1^-}xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega}3dv=4\pi.$$

例 10 计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a$为大于零的常数。

解： $I=\iint\limits_{\Sigma}xdydz+\frac{(z+a)^2}{a}dxdy$

记$\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2)\le a^2$，取下侧，Ω为下半球，根据高斯公式有

$$I=\iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma}xdydz+\frac{(z+a)^2}{a}dxdy-\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+\frac{(z+a)^2}{a}dxdy^3$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(3+\frac{2z}{a})dv+\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}adxdy=-2\pi a^3-\frac{2}{a}\iiint\limits_{\Omega}zdv+\pi a^3$$

$$=-\pi a^3-\frac{2}{a}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^a r^3dr=-\pi a^3+\frac{\pi}{2}a^3=-\frac{\pi}{2}a^3$$