厦门大学《高等数学》课程期末试卷

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2012.6.14

高等数学 A 类教学组

1. （10 分）设函数$u = x^2 + y^2 + xz^2$，

（1）　求函数u沿着点$A(1,1,1)$指向点$B(2,0,1)$方向的方向导数；

（2）　求$div(grad\, u)$，$rot(grad\, u)$.

2. （10 分）计算二重积分 $I = \iint\limits_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le \pi\}$.

3. （10 分）计算三重积分 $I = \iiint\limits_\Omega z(x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由锥面$z = \sqrt{x^2 + y^2}$及平面$z = 1, z = 2$所围区域.

4. （5 分）设L为圆周$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \end{cases}$，计算$\int_L \sqrt{z^2 + 2y^2}\mathrm{d}s$

5. （5 分）计算曲线积分$\oint\limits_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}x + \frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\mathrm{d}y$，式中$L$是由$x^2 + y^2 = 1$，$x^2 + y^2 = 4$，$y = x$及$y = \sqrt{3}x$在第一象限所围成区域$D$的正向边界。

6. （10 分）已知空间物体Ω由锥面$z^2 = x^2 + y^2, z = 1, 0 \le z \le 1$所围成，其上每一点的密度与该点到顶点的距离成正比（比例系数为k），（1）求该空间物体的质量m；（2）求该空间物体的重心。

7. （10 分）计算$I = \iint\limits_\Sigma \frac{axdydz + (z+a)^2 dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$的上侧，$a$为大于零的常数。

8.（10 分）设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，若存在正数$b$，使得$a_{n+1} \le b(a_n - a_{n+1}), (n = 1,2,\cdots)$，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。

9. （10 分）求幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$的收敛域及它的和函数$S(x)$，并求$S(x)$的极值.

10. （10 分）将函数$f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数。

11. （10 分）将函数$f(x)=2+|x|,(-1\le x\le 1)$展开成周期为 2 的傅里叶级数，并由此计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$的和。

附加题 （10 分）设有级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}[e-(1+\frac{1}{n})^n]$，

（1）该级数是否条件收敛？（2）该级数是否绝对收敛，请给出你的证明。