



厦门大学《微积分 I-2》课程 期末试题·答案



考试日期： 2015 信息学院自律督学部整理

1. (1)(5分) 设函数 $u(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$, 求 $\text{grad}u$ 、 $\text{div}(\text{grad}u)$ 和 $\text{rot}(\text{grad}u)$ 。

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy + z^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2yz + x^2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2zx + y^2$ 。

$\text{grad}u = \{2xy + z^2, 2yz + x^2, 2zx + y^2\}$;

$\text{div}(\text{grad}u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2x + 2y + 2z$;

$$\text{rot}(\text{grad}u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & 2yz + x^2 & 2zx + y^2 \end{vmatrix} = \{0, 0, 0\}$$

(2)(5分) 计算 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, L 为 $x^2 + y^2 = 4$ 上半圆周与 x 轴围成的封闭曲线。

解:

$$\begin{aligned} \int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds &= \int_0^\pi e^2 \sqrt{(-2\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2} d\theta + \int_{-2}^2 e^{\sqrt{x^2}} \sqrt{1+0} dx \\ &= \int_0^\pi 2e^2 d\theta + 2 \int_0^2 e^x dx = 2e^2\pi + 2(e^2 - 1) \end{aligned}$$

(3) (5分) 计算 $\int_L xy dx$, L 为曲线 $y^2 = x$ 由 $(1, -1)$ 到 $(1, 1)$ 。

解: 方法一: 以 y 为参数, $dx = 2y dy$, 则

$$\int_L xy dx = \int_{-1}^1 y^2 \cdot y \cdot 2y dy = \frac{2}{5} y^5 \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{5}.$$

方法二: 以 x 为参数, 将曲线分成上下段 $y = \pm\sqrt{x}$, 则

$$\int_L xy dx = \int_0^1 x\sqrt{x} dx + \int_1^0 x(-\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{5}.$$

(4) (5分) 讨论正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\sin n|}{2^n}$ 的敛散性。

解: 方法一: 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}$, 根据根植判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛, (2分)

由于 $\frac{n|\sin n|}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\sin n|}{2^n}$ 收敛。(3分)

方法二: 因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2}$, 根据比值判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛, 由于 $\frac{n|\sin n|}{2^n} \leq \frac{n}{2^n}$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|\sin n|}{2^n}$ 收敛。

2. (8分) 计算 $\iint_{\Sigma} (x+z)dS$, Σ 是由平面 $z=x+1$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分。

解:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} (x+z)dS &= \iint_{D_{xy}} (2x+1)\sqrt{2}dxdy = 2\sqrt{2} \iint_{D_{xy}} x dxdy + \sqrt{2} \iint_{D_{xy}} 1 dxdy \\ &= 0 + \sqrt{2}\pi = \sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

注: 平面 $z=x+1$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分在 xOy 面上的投影是轴对称的。

3. (10分) 计算 $\oint_L \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$, L 为 $(x-1)^2+y^2=2$, 逆时针方向。

解: 令 $P = \frac{y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{-x}{x^2+y^2}$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 但是被积函数在 $(0,0)$ 无意义, 不能直接用格林公式。加一封闭曲线 $\bar{L}: x^2+y^2=R^2$, 其中 R 充分小使得 \bar{L} 包含在 L 内, 取顺时针方向。

$$\begin{aligned}\int_L Pdx + Qdy &= \int_{L+\bar{L}} Pdx + Qdy - \int_{\bar{L}} Pdx + Qdy \\ &= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + \int_{\bar{L}-} Pdx + Qdy \\ &= 0 + \int_{\bar{L}-} \frac{ydx-xdy}{R^2} = \int_0^{2\pi} \frac{R\sin\theta(-R\sin\theta) - R\cos\theta R\cos\theta}{R^2} d\theta \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

4. (10分)

(1) (2分) 证明: 在整个 xOy 平面内, $(x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分;

(2) (5分) 求解全微分方程 $(x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy = 0$;

(3) (3分) 求 $\int_L (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy$, 其中 $L: (x-1)^2+y^2=4, y \geq 0$, L 方向为逆时针方向。

解:

(1) 由于在整个 xOy 平面内, $\frac{\partial(x+y+1)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(x-y^2+3)}{\partial x}$, 所以 $(x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分。(2分)

(2)

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy \\ &= \int_0^x (x+1)dx + \int_0^y (x-y^2+3)dy \quad (3分) \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x + xy - \frac{1}{3}y^3 + 3y. \quad (1分)\end{aligned}$$

全微分方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2 + x + xy - \frac{1}{3}y^3 + 3y = C$. (1分)

(3)

$$\begin{aligned}\int_L (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy &= \int_{(3,0)}^{(-1,0)} (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy \quad (2分) \\ &= u(-1,0) - u(3,0) = -8. \quad (1分)\end{aligned}$$

或者补充从 $(-1,0)$ 到 $(3,0)$ 的直线段 L_1 , 根据格林公式计算得

$$\begin{aligned}\int_L (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy &= \left(\int_{L+L_1} - \int_{L_1} \right) (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy \\ &= - \int_{L_1} (x+y+1)dx + (x-y^2+3)dy \\ &= - \int_{-1}^3 (x+1)dx = -8.\end{aligned}$$

5. (10分) 求向量场 $(x, 0, 0)$ 经过曲面 Σ 指定侧的流量, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 位于 $z = 0$ 上方及平面 $z = y$ 下方的部分, 取外侧。

解: 方法一: 设 $\Sigma_1: x = \sqrt{1-y^2}$, 取前侧, $\Sigma_2: x = -\sqrt{1-y^2}$, 取后侧。(2分)

Σ_1, Σ_2 在 yOz 面的投影区域为三角形 $D_{yz} = \{(y, z) | y \leq z, 0 \leq y \leq 1, x = 0\}$ 。(2分)

流量

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} x dy dz \quad (2分) \\ &= \iint_{\Sigma_1} x dy dz + \iint_{\Sigma_2} x dy dz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2} dy dz - \iint_{D_{yz}} (-\sqrt{1-y^2}) dy dz \quad (2分) \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{1-y^2} dy dz = 2 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy \int_0^y dz = \frac{2}{3} \quad (2分)\end{aligned}$$

方法二: 利用高斯公式, 设 $\Sigma_1: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, & y \geq 0 \\ y = z \end{cases}$, 取上侧, Σ_1 的法向量与 x 轴正

向夹角 $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $\Sigma_2: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, z = 0$, 取下侧。(2分)

流量

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} x dy dz \quad (2分) \\ &= \iint_{\Sigma \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2} x dy dz - \iint_{\Sigma_1} x dy dz - \int_{\Sigma_2} x dy dz = \iiint_{\Omega} dV - 0 - 0 \quad (4分) \\ &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{\sin \theta} dz = \frac{2}{3} \quad (2分)\end{aligned}$$

方法三: Σ 指定侧的一个法向量为 $\vec{n} = (2x, 2y, 0)$, 方向余弦为 $\cos \alpha = x$ 。(2分)

设 L 为柱面与平面 $y = z$ 交线在 xOy 面的投影曲线, $L: x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ 。(2分)

通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} x \cos \alpha dS \quad (2分) \\ &= \iint_{\Sigma} x^2 dS = \int_L x^2 y ds \quad (2分) \\ &= \int_0^{\pi} r^3 \cos^2 t \sin t dt = \frac{2}{3} \quad (2分)\end{aligned}$$

方法四: Σ 指定侧的一个法向量为 $\vec{n} = (2x, 2y, 0)$, 方向余旋为 $\cos \alpha = x$ 。(2分)

设 D_{zx} 为曲面 Σ 在 zOx 面的投影区域, $D_{zx} = \{(z, x) | x^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ 。(2分)

通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} x \cos \alpha dS = \iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} x^2 \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} dx dz \quad (2分) \\ &= \iint_{D_{zx}} x^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx dz = \iint_{D_{zx}} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx dz \quad (2分) \\ &= \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx \int_0^{\sqrt{1 - x^2}} dz = \frac{2}{3} \quad (2分)\end{aligned}$$

6. (10分)

(1) (8分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$ 的收敛性。

(2) (2分) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ 的敛散性。

解:

(1) 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n}{n^2+4}}{\frac{1}{n}} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 根据比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$ 发散。(3分)

设 $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, $f'(x) = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2} < 0$ ($x > 2$), 因此当 $n \geq 3$ 时, $\frac{n}{n^2+4}$ 为单调减数列;
又 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+4} = 0$, 由Liberitz判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$ 收敛。(4分)

综上, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$ 条件收敛。(1分)

(2) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 根据收敛级数的性质得

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ 发散。(2分, 写出发散即给2分)

7. (8分) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$ 在 $(-1, 1)$ 内的和函数。

解: 方法一:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+2}}{n} - \frac{x^{2n+2}}{n+1} \right) = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1},$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1-x^2) \quad (-1 < x < 1)$$

所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = -\ln(1-x^2) - x^2 \quad (-1 < x < 1),$$

因而所求的幂级数在 $(-1 < x < 1)$ 内的和函数是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)} = -x^2 \ln(1-x^2) + \ln(1-x^2) + x^2.$$

方法二:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)} &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^{2n+2})'}{n(n+1)} dx = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)x^{2n+1}}{n(n+1)} dx \\ &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{n} dx = \int_0^x 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n} dx \\ &= - \int_0^x 2x \ln(1-x^2) dx = \int_0^x \ln(1-x^2) d(1-x^2) \\ &= \int_1^{1-x^2} \ln u du = u \ln u \Big|_1^{1-x^2} - \int_1^{1-x^2} u d \ln u \\ &= (1-x^2) \ln(1-x^2) - (1-x^2-1) \\ &= -x^2 \ln(1-x^2) + \ln(1-x^2) + x^2 \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

8. (8分) 将 $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数。

解: 注意到 $f(x) = \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$. 而

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2+x-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n \quad (0 < x < 4)$$

对上式两边求导, 得

$$-\frac{1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} (x-2)^n \quad (0 < x < 4)$$

于是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-2)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-n)(-1)^n}{2^{n+2}} (x-2)^n \quad (0 < x < 4).$$

9. (10分) 将函数 $f(x) = 1+x$ ($0 < x \leq 1$) 展开成以2为周期的正弦级数, 并指出该级数在 $x=1$ 处的值。

解: (2分) 对 $f(x)$ 进行奇周期延拓, 则有

$$\begin{aligned}a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2\text{分}) \\b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx \\&= 2 \int_0^1 (1+x) \sin n\pi x dx = -\frac{2}{n\pi} \left[\int_0^1 (1+x) d \cos(n\pi x) \right] \\&= -\frac{2}{n\pi} \left[(1+x) \cos n\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos n\pi x dx \right] \\&= -\frac{2}{n\pi} [2 \cos n\pi - 1 + 0] = \frac{2}{n\pi} [1 - 2(-1)^n] \quad (2\text{分})\end{aligned}$$

因此, 我们得到 $f(x) = 1+x$ 在 $(0 < x \leq 1)$ 的正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - 2(-1)^n) \sin n\pi x. \quad (2\text{分})$$

根据收敛定理, 在函数间断点 $x=1$ 处, 该级数收敛于

$$\frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} = 0. \quad (2\text{分})$$

10. (6分) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.
证明: 令 $S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1})$, 则 $S_n = a_n - a_0$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = S + a_0$. 所以存在 $M > 0$, 对于一切的自然数 n 有 $|a_n| \leq M$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛. 又 $0 \leq |a_n b_n| < M |b_n|$, 于是由比较判别法, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.