厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷解答

试卷类型：（理工类 A 卷）　　　　考试时间：2019.06.12

一、（本题 8 分） 交换积分顺序并计算二次积分 $\int_0^{\pi} \mathrm{d}y\int_y^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$。

解：$\int_0^{\pi} \mathrm{d}y\int_y^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} \mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\,|_0^{\pi}=2$$

二、（本题 8 分） 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=3$ 所围成的有界闭区域。

解法一：先二后一法。设 $D_z: x^2+y^2\le z$，

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^3 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^3 z^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}z^3\,|_0^3=9\pi$$

解法二：先二后一法。$D: x^2+y^2\le 3$，

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{3} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{3} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}} 9\rho-\rho^5\,\mathrm{d}\rho=\pi\left(\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^6}{6}\right)|_0^{\sqrt{3}}=9\pi$$

三、（**本题 8 分**）计算第一类曲线积分 $I=\oint_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=4$。

解法一：曲线参数化为 x=1+2$\cos\theta$, y=2$\sin\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=2\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=2\,\mathrm{d}\theta,$$

$$\therefore I=\oint_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=\oint_L (2x+3)\mathrm{d}s=2\int_0^{2\pi}(4\cos\theta+5)\mathrm{d}\theta$$

$$=20\pi$$

解法二：用形心公式。

$$I=\oint_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=\oint_L (2x+3)\mathrm{d}s$$

$$=2\oint_L x\mathrm{d}s+3\oint_L \mathrm{d}s$$

$$=(2\cdot 1+3)\oint_L x\mathrm{d}s$$

$$=(2\cdot 1+3)\cdot 4\pi=20\pi$$

四、（本题 8 分）设曲面 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧，试将第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化成第一类曲面积分，并计算其值。

解：Σ 的单位法向量 $n=(x,y,z)$，$D: x^2+y^2\le 1$，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}(1,1,z)\cdot(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}x+y+z^2\,\mathrm{d}S$$

由奇偶对称性，$I=\iint\limits_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S$

$$=\iint_D (1-x^2-y^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho=-\frac{2\pi}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}$$

五、（本题 10 分）计算第二类曲线积分 $I=\oint_L \frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 是椭圆 $x^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1$，取逆时针方向。

解：作辅助曲线 l： $x^2+y^2=\frac{1}{4}$，取顺时针方向，其参数化方程 $x=\frac{1}{2}\cos\theta$， $y=\frac{1}{2}\sin\theta$，$\theta:2\pi\to 0$。设 D 为曲线 l 和 L 所围成的平面区域。

令 $P=\frac{y}{x^2+y^2}, Q=\frac{-x}{x^2+y^2}$， 则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时， $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 。

由格林公式，得

$$I=\oint_{L+l}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\oint_l\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\oint_l\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=-4(\oint_l y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\mathrm{d}\theta=-2\pi$$

或者再次用格林公式 (设 D_1 为曲线 l 围成的内部平面区域)，

$$=-4(\oint_l y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$

$$=-8\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi$$

六、（本题 10 分）计算第二类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} y^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 Σ 是由三个坐标面和平面 $x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面，取外侧。

解：设 Ω 是由三个坐标面和平面 $x+y+z=1$ 所围成的空间区域，则由高斯公式得

$$I=2\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^1 zdz\iint_{D_z}dxdy$$

$$=\int_0^1 z(1-z)^2\,dz=\frac{1}{12}$$

七、（**每小题 6 分，共 12 分**）判别下列级数的敛散性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$；

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ 是收敛的。

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(1-\cos\frac{1}{n})$。

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(1-\cos\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{1}{2n^2}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(1-\cos\frac{1}{n})$ 是发散的。

八、（**本题 10 分**）判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 是否收敛。如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？请说明理由。

解： 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 为交错级数，

$\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})>\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}})$，（1 分）$\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})=0$，

所以由 Leibniz 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 收敛。

又因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 是发散的。综上所述，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ 是条件收敛。

九、（本题 10 分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{4^n}x^{2n-1}$的和函数。

解：收敛半径为$R=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{4^n}}{\frac{2(n+1)}{4^{n+1}}}}=\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}}=2$。

又当$x=\pm 2$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{4^n}(\pm 2)^{2n-1}=\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$发散，所以其收敛域为$(-2,2)$。

令和函数$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{4^n}x^{2n-1}$， $x\in(-2,2)$。则

$$s(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^{2n}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n\right)'$$

$$=\left(\frac{\frac{x^2}{4}}{1-\frac{x^2}{4}}\right)'=\left(\frac{x^2}{4-x^2}\right)'$$

$$=\frac{8x}{(4-x^2)^2},\qquad x\in(-2,2)$$

十、（本题 10 分）将函数$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x) & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$展开成$x$的幂级数。

解：先把$g(x)=\ln(1-x)$展开成x的幂级数。注意到当$x\in(-1,1)$

$$g'(x)=-\frac{1}{1-x}=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

又$g(0)=0$，因此逐项积分得$g(x)=\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$。

当$x=1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散；当$x=-1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$收敛。因此$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$的收敛域为$[-1,1)$，即有$g(x)=\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$， $x\in[-1,1)$。

故当$x\in[-1,1)$， $x\neq 0$时， $f(x)=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$。

又当$x=0$时，因为$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{x} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{x} = 1 = f(0)$，而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$也在$x=0$处收敛于$f(0)=1$。因此$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$，$x\in[-1,1)$。

十一、（本题 6 分）设一元函数$f(x)$和$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且在定义域内都具有连续的一阶导数。若存在二元函数$u=u(x,y)$，使得对于任意的$x>0$，$y>0$，都有$\mathrm{d}u = y f(xy)\,\mathrm{d}x + xg(xy)\,\mathrm{d}y$，试求$f(x)-g(x)$。

解：由题意得，$\frac{\partial}{\partial y}(y f(xy)) = \frac{\partial}{\partial x}(xg(xy))$，整理得

$f(xy)+xyf'(xy) = g(xy)+xyg'(xy)$

令$t=xy$，$h(t)=f(t)-g(t)$，则有

$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{t}h=0$ ， 解得$h(t)=Ce^{-\int\frac{1}{t}\mathrm{d}t}=\frac{C}{t}$。

故$f(x)-g(x)=\frac{C}{x}$。