



厦门大学《微积分 I-2》课程 期末试题·答案



考试日期： 2016 信息学院自律督学部整理

一、计算下列各题：（每小题 5 分，共 10 分）

(1) 考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ 的收敛性。

解：级数为正项级数，采用根值判别法，

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3} < 1. \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

故所求级数收敛. \dots\dots\dots(5 \text{ 分})

(2) 将函数 $\frac{1}{(3-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛域。

解：注意到 $\frac{1}{(3-x)^2} = \left(\frac{1}{3-x} \right)'$,

$$\text{因为 } \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n, (-3 < x < 3), \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\text{逐项求导，可得 } \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{3} \right)^{n-1}, \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

其收敛域为 $-3 < x < 3$. \dots\dots\dots(5 \text{ 分})

二、计算下列各题：（每小题 5 分，共 10 分）

(1) 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} \frac{-ydx + xdy + dz}{x^2 + y^2 + z^2}$ ，其中 Γ 为曲线 $x = e^t \cos t$ ， $y = e^t \sin t$ ， $z = e^t$ 上对应于 t 从 0 到 2 的一段弧。

$$\text{解：原式} = \int_0^2 \frac{-e^t \sin t (e^t \cos t - e^t \sin t) + e^t \cos t (e^t \sin t + e^t \cos t) + e^t}{e^{2t} \cos^2 t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t}} dt \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$= \int_0^2 \frac{e^{2t} + e^t}{2e^{2t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (1 + e^{-t}) dt \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{2}(t - e^{-t}) \Big|_0^2 = \frac{1}{2}(3 - e^{-2}) \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

(2) 计算 $\oint_L (2|x| + y)ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$.

解: 由 L 的对称性和被积函数的奇偶性可知,

$$\oint_L (2|x| + y)ds = \oint_L (2|x|)ds. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\text{设 } x = 2\cos\theta, y = 2\sin\theta, \text{ 则 } ds = \sqrt{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}d\theta = 2d\theta.$$

$\dots\dots\dots(3 \text{ 分})$

$$\text{因此, } \oint_L (2|x| + y)ds = 4 \int_0^{2\pi} 2(2\cos\theta)2d\theta = 32.$$

$\dots\dots\dots(5 \text{ 分})$

注: 算对 $\oint_L 2|x|ds$ 得 3 分, 算对 $\oint_L yds = 0$ 得 2 分.

三、计算 $\iint_{\Sigma} (x + y + z)dS$, 其中 Σ 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 在 $z \geq 0$ 的部分.

$$\text{解一: 由于 } \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z)dS = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$= \int_{-a}^a (\pi ax + 2a\sqrt{a^2 - x^2})dx \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= 2a \int_{-a}^a (\sqrt{a^2 - x^2})dx \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$= 2a \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \pi a^3 \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

解二: 利用对称性,

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z)dS = \iint_{\Sigma} zdS \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$= \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$= a \cdot \pi a^2 = \pi a^3 \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

注: (1) $\iint_{\Sigma} x dS$, $\iint_{\Sigma} y dS$, $\iint_{\Sigma} z dS$ 三个积分算对各得 2 分, 包括利用对称性得到 $\iint_{\Sigma} x dS$,

$\iint_{\Sigma} y dS$; (2) 写对曲面积分转换成二重积分的公式得 2 分.

四、计算 $\oiint_{\Sigma} y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$, 其中 Σ 是正立方体 Ω :

$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ 的表面取外侧. (8 分)

解一: 应用高斯公式, 所求曲面积分

$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma} y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(yx-yz) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2+xz) \right] dxdydz \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分}) \\ &= \iiint_{\Omega} (y+x)dxdydz \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分}) \\ &= \int_0^a dz \int_0^a dy \int_0^a (y+x)dx \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分}) \\ &= a \int_0^a (ay + \frac{1}{2}a^2)dy \quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分}) \\ &= a^4 \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分}) \end{aligned}$$

解二: 应用高斯公式, 所求曲面积分

$$\begin{aligned} & \oiint_{\Sigma} y(x-z)dydz + x^2dzdx + (y^2+xz)dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}(yx-yz) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2+xz) \right] dxdydz \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分}) \\ &= \iiint_{\Omega} (y+x)dxdydz \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分}) \end{aligned}$$

利用形心公式

$$\bar{x} = \frac{a}{2} = \frac{\iiint_{\Omega} x dxdydz}{a^3}, \quad \bar{y} = \frac{a}{2} = \frac{\iiint_{\Omega} y dxdydz}{a^3} \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$\text{则} \quad \iiint_{\Omega} (y+x)dxdydz = \frac{a}{2} \cdot a^3 + \frac{a}{2} \cdot a^3 = a^4. \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

五、求由曲面 $z = \sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$ 所围成的立体图形的体积. (8 分)

解：所求的体积 $V = \iiint_{\Omega} dv$(1 分)

两曲面的交线为 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ ，故在 xOy 面上的投影区域为

$$D_{xy}: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ z = 0 \end{cases}. \quad \text{.....(3 分)}$$

作柱面坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$(4 分)

则 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 2$.

$$\frac{x^2 + y^2}{4} \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{r^2}{4} \leq z \leq \sqrt{5 - r^2}.$$

所求的体积 $V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r dr \int_{\frac{r^2}{4}}^{\sqrt{5-r^2}} dz$ (6 分)

$$= 2\pi \int_0^2 r \left(\sqrt{5 - r^2} - \frac{r^2}{4} \right) dr \quad \text{.....(7 分)}$$

$$= \pi \int_0^2 \left(\sqrt{5 - r^2} - \frac{r^2}{4} \right) d(r^2) \\ = \frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 4). \quad \text{.....(8 分)}$$

六、讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ 的收敛性. (10 分)

解：因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$,(1 分)

且 $u_n - u_{n+1} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} > 0 \quad \text{.....(2 分)}$$

即 $u_n > u_{n+1}$.

由莱布尼兹判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ 收敛.(4 分)

$$\text{又 } \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]| = \sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}].$$

$$\text{因为 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, \therefore 由比较判别法的极限形式, $\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ 发散.(8 分)

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ 为条件收敛.(10 分)

另解: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ 的收敛性也可以如下证明:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 发散, 得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}]$ 发散.(8 分)

七、求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数 $S(x)$, 指出其收敛域, 并计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$. (10 分)

解: 记 $u_n = \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$, 因此原级数的收敛半径为 1.(1 分)

注意到 $x = \pm 1$ 时, 级数也收敛, 因此其收敛域为 $[-1, 1]$(2 分)

$$\text{当 } x \in (-1, 1) \text{ 时, } \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} = \frac{-1}{1+x},$$

$$\text{因此, } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} = -\ln(1+x). \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

当 $x = 0$ 时, 原级数和为 0;(5 分)

当 $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n} + x\right).\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

因此, 原级数的和函数 $S(x) = 1 - (1 + \frac{1}{x})\ln(1+x)$. \dots\dots\dots(8 \text{ 分})

当 $x = -1$ 时, 级数和为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$. \dots\dots\dots(9 \text{ 分})

因此本问题级数的和函数为

$$S(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{1}{x})\ln(1+x), & x \in (-1, 0) \cup (0, 1], \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = -1. \end{cases}$$

当 $x = 1$ 时, 可求得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln 2$. \dots\dots\dots(10 \text{ 分})

八、计算 $\oint_L \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy$, L 为椭圆曲线 $\frac{(x-a)^2}{4} + (y-a)^2 = 1$ 取正向, 其中参数 a 满足 $a > 0$ 且 $a \neq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

解: 设 $P = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{y-x}{x^2+y^2}$. 易知当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.\quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$$

(1) 当 $a > \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 原点 $(0, 0)$ 不在椭圆曲线 L 所包含的区域内, 因此由 Green 公

式即得原积分 $I = \oint_L \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = 0$.

\dots\dots\dots(4 \text{ 分})

(2) 当 $0 < a < \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 原点 $(0, 0)$ 在椭圆曲线 L 所包含的区域内.

作辅助曲线为中心在原点、半径为 ε 的圆周

$$L_\varepsilon: x = \varepsilon \cos \theta, \quad y = \varepsilon \sin \theta$$

方向取负向（顺时针方向）.(6 分)

则在 L 与 L_ε 所围成的区域 Ω_ε 内，由格林公式可得 $\iint_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$.

$$\begin{aligned} \text{于是, } I &= \oint_{L+L_\varepsilon} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy - \oint_{L_\varepsilon} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy \\ &= \iint_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \oint_{L_\varepsilon} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy \\ &= - \oint_{L_\varepsilon} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx + \frac{y-x}{x^2+y^2} dy \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分}) \\ &= - \int_{2\pi}^0 (\cos \theta + \sin \theta)(-\sin \theta) d\theta + (\sin \theta - \cos \theta) \cos \theta d\theta = -2\pi. \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

九、展开函数 $f(x) = |x|$ ($-\pi < x < \pi$) 为傅里叶级数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$ 的值.
(10 分)

解：将函数 $f(x) = |x|$ ($-\pi < x < \pi$) 做周期延拓.

因为 $f(x) = |x|$ 是偶函数，所以 $b_n = 0$(1 分)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\text{于是有 } f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 中连续，因此

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x. \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$\text{令 } x=0, \quad 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

设 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$, 由于

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} (S_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}) = \frac{1}{4} (S_1 + \frac{\pi^2}{8}),$$

解得 $S_1 = \frac{\pi^2}{24}$(10 分)

十、 计算 $\iint_{\Sigma} yzdydz + xzdzdx + dx dy$, 其中 Σ 是抛物面 $z = 1 - x^2 - y^2$ 在第一卦限部分, 方

向取下侧. (8 分)

解一: Σ 在 xoy 平面的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

由于曲面 Σ 的方向取下侧, 其上一点的单位法向量可取为

$$\bar{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, -\frac{2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}, -\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right). \quad \text{.....(2 分)}$$

原积分可按如下计算:

$$I = \iint_{\Sigma} \left(yz \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} + xz \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} + 1 \right) \cos \gamma dS = \iint_{\Sigma} (4xyz + 1) dx dy \quad \text{.....(4 分)}$$

$$= - \iint_{D_{xy}} (4xy(1 - x^2 - y^2) + 1) dx dy \quad \text{.....(6 分)}$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 (4r^2 \cos \theta \sin \theta (1 - r^2) + 1) r dr$$

$$= -\frac{1}{6} - \frac{\pi}{4}. \quad \text{.....(8 分)}$$

解二: Σ 在 $yo z$ 平面的投影区域为 $D_{yz} = \{(y, z) : 0 \leq z \leq 1 - y^2, 0 \leq y \leq 1\}$.

$$\iint_{\Sigma} yz dy dz = - \iint_{D_{yz}} yz dy dz$$

$$= - \int_0^1 dy \int_0^{1-y^2} yz dz = -\frac{1}{2} \int_0^1 y(1 - y^2)^2 dy$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 (1 - y^2)^2 d(1 - y^2) = \frac{1}{12} (1 - y^2)^3 = -\frac{1}{12}. \quad \text{.....(2 分)}$$

Σ 在 zox 平面的投影区域为 $D_{zx} = \{(z, x) : 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq x \leq 1\}$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} zxdzdx &= -\iint_{D_{zx}} zxdzdx \\ &= -\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} xzdz = -\frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1-x^2)^2 d(1-x^2) = \frac{1}{12} (1-x^2)^3 = -\frac{1}{12}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

Σ 在 xoy 平面的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

$$\iint_{\Sigma} dx dy = -\iint_{D_{xy}} dx dy = -\frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \iint_{\Sigma} yzdydz + xzdzdx + dx dy = -\frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{6} - \frac{\pi}{4}. \quad \dots\dots\dots(8 \text{ 分})$$

注: $\iint_{\Sigma} yzdydz$, $\iint_{\Sigma} xzdzdx$, $\iint_{\Sigma} dx dy$ 每个积分两分, 最后结果 2 分.

十一、设 $u_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^n x dx$, (1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(u_n + u_{n+2})$ 的值; (2) 证明: 对任意参数 $\lambda > 0$,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^\lambda}$ 收敛.

解: (1) 首先, 可求得

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+2} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^n x (1 + \cot^2 x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^n x \csc^2 x dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^n x d \cot x = -\frac{\cot x}{n+1} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\text{因此 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(u_n + u_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \quad \dots\dots\dots(4 \text{ 分})$$

(2) 设 $\cot x = t$, 可得 $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$, 且成立如下不等式:

$$0 < u_n = \int_1^0 (-t^n) \frac{dt}{1+t^2} \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}, \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

因此成立 $0 < \frac{u_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^{1+\lambda}}.$ \dots\dots\dots(7 分)

当 $\lambda > 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛.

利用比较判别法即证得结论. \dots\dots\dots(8 分)