微积分不相信眼泪

2018级计算机类二班

张逸辰

Part Ⅰ
常微分方程

目录——常微分方程

基本概念

•何为微分方程?

函数、导数、自变量之间的关系式。

•何为解微分方程?

找出未知函数。

•阶：方程中最高阶导数的阶数。

•通解：任意常数（相互独立，不能通过合并而减少）的个数与微分方程的阶数相同。

•特解：1. 利用初值条件确定通解中的任意常数；2. 特解不一定包含在通解里。

一阶微分方程的求解

（一）可分离变量型

- 简单情况：$g(y)dy=f(x)dx$

  方法：分离变量，两端积分

- 齐次：$dy/dx=f(y/x)$

  令$u(x)=y/x$, $dy/dx=u+x(du/dx)$

- 特殊

一阶微分方程的求解——分离变量 （简单情况）

求微分方程$\left(xy^2+x\right)\mathrm{d}x+\left(y-x^2y\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解。

解： $x\left(y^2+1\right)\mathrm{d}x+y\left(1-x^2\right)\mathrm{d}y=0$，

分离变量 $\dfrac{y}{\left(y^2+1\right)}\mathrm{d}y=\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)}\mathrm{d}x$，

两边积分 $\displaystyle\int\frac{y}{\left(y^2+1\right)}\mathrm{d}y=\int\frac{x}{\left(x^2-1\right)}\mathrm{d}x$，

$$\frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)+\boxed{\frac{1}{2}\ln c},$$

$$\left(y^2+1\right)=c\left(x^2-1\right),\ \boxed{(\,c>0\,)}\,.$$

一阶微分方程的求解——分离变量（简单情况）

求微分方程 $\boxed{y'} = \frac{\ln|x|}{4+y^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的特解。

解：$\int(4+y^2)dy = \int \boxed{\ln|x|} dx$,

通解 $4y+\frac{1}{3}y^3 = \boxed{x\ln|x|-x}+c$,

由 $y(1)=0$，有 $0=-1+c \Rightarrow c=1$,

特解 $4y+\frac{1}{3}y^3 = x\ln|x|-x+1$。

一阶微分方程的求解——分离变量（齐次型）

求微分方程 $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足 $y|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 的特解。

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$，（化为齐次方程）　　$\boxed{令\ u=\dfrac{y}{x},\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{du}{dx}}$

则原方程为 $x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}$，　$udu=\dfrac{1}{x}dx$，

两侧积分 $\dfrac{1}{2}u^2=\ln|x|+c$，将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代回，

有通解 $y^2=x^2\left(2\ln|x|+c\right)$，

已知 $y|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$，　即 $4e^2=e^2\left(2\ln e+c\right)\ \Rightarrow c=2$，

所以此方程的特解为 $y^2=2x^2\left(\ln|x|+1\right)$。

一阶微分方程的求解——分离

不可直接分离变量，
也非齐次方程

求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\tan\boxed{\dfrac{y^2}{x}}$ 的通解。

解：$\boxed{令\ u=\dfrac{y^2}{x},}$

则 $u'=\dfrac{2yy'}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}=\boxed{\dfrac{2y}{x}\left(\dfrac{y}{2x}+\dfrac{1}{2y}\right.}\left.\tan u\right)-\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{1}{x}\tan u$,

分离变量 $\dfrac{du}{\tan u}=\dfrac{1}{x}dx$ ，　两侧积分 $\displaystyle\int\frac{d\sin u}{\sin u}=\int\frac{1}{x}dx$

得其通解 $\ln|\sin u|=\ln|x|+\ln|c|$ ，

$\sin\dfrac{y^2}{x}=cx$ （c 是不为零的任意常数）。

一阶微分方程的求解——分离变量

设可导函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x + \int_0^x tf\boxed{(x-t)}\mathrm{d}t$，求 $f(x)$。

解：$\boxed{令\quad x-t=u,}$ $\quad t=x-u,\quad dt=-du,$

$\boxed{当\ t=0\ 时，\ u=x;\ 当\ t=x\ 时，\ u=0,}$

于是 原方程改写为

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x - \int_x^0 (x-u)f(u)\mathrm{d}u = x + x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u\ ,$$

方程两边求导 $f(x) = 1 + \int_0^x f(u)\mathrm{d}u \quad (\Rightarrow f(0)=1\ ),$

两侧再次求导 $f'(x) = f(x).$ ⇐ 分离变量求解

一阶微分方程的求解

（二）一阶线性微分方程

- dy/dx+P(x)y=Q(x)

公式解题：

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c]$$

一阶微分方程的求解——一阶线性微分方程

求微分方程 $y' + y\cos x = (\ln x)\mathrm{e}^{-\sin x}$ 的通解。

解： $p(x) = \cos x,\quad Q(x) = (\ln x)\mathrm{e}^{-\sin x}$

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}[\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c]}$$

$$y = \mathrm{e}^{-\int \cos x dx}[\int (\ln x)\mathrm{e}^{-\sin x}e^{\int \cos x dx}dx + c]$$

$$= \mathrm{e}^{-\sin x}[\int (\ln x)\mathrm{e}^{-\sin x}e^{\sin x}dx + c] = \mathrm{e}^{-\sin x}[\int \ln x dx + c]$$

$$= \mathrm{e}^{-\sin x}[x\ln x - x + c],$$ 其中 c 为任意常数。

二阶微分方程的求解

（一）可降阶型

- 之一　$y'' = f(x)$
- 之二　$y'' = f(x, y')$
- 之三　$y'' = f(y, y')$

二阶微分方程的求解——可降阶型之一 $y'' = f(x)$

求方程 $y'' = \mathrm{e}^{2x}$ 的通解。

解： $y' = \int \mathrm{e}^{2x} dx = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \boxed{c_1}$

$$y = \int (\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c_1) dx = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \boxed{c_1} x + \boxed{c_2}$$

二阶微分方程的求解——可降阶型之二 $y''=f(x,y')$

求解 $\begin{cases} xy''+y'=0, \\ y\big|_{x=1}=1, y'\big|_{x=1}=2 \end{cases}$ 。

解：$\boxed{令\ y'=p(x)}$， $xp'+p=0$，

$\dfrac{dp}{p}=-\dfrac{dx}{x}$， $p=y'=\dfrac{c_1}{x}$， 由 $y'\big|_{x=1}=2$， 推得 $c_1=2$，

$\therefore\ y=\int\dfrac{2}{x}dx=2\ln x+c_2$， 由 $y\big|_{x=1}=1$， 推得 $c_2=1$，

满足给定条件的特解 $y=2\ln x+1$ 。

二阶微分方程的求解 —— 可降阶型之三 $y''=f(y,y')$

已知 $yy''-(y')^2=0$ 的一条积分曲线通过 $(0,1)$ 点，且在该点与 $y=2x+1$ 相切，求这条曲线方程 $y=f(x)$ 。

解： $\begin{cases} yy''-(y')^2=0 \\ y(0)=1, y'(0)=2 \end{cases}$， $\boxed{令\ y'=p(y)}$， $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，

则原方程： $yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=0$， $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dy}{y}$， $\Rightarrow \quad p=c_1y$

由初条件 $y(0)=1, y'(0)=2 \quad \Rightarrow \quad c_1=2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx}=2y$，

分离变量两侧积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int 2dx$， $y=c_2e^{2x}$

因为 $y(0)=1$， $1=c_2$， 故此曲线方程为 $y=e^{2x}$ 。

二阶微分方程的求解

（二）常系数线性微分方程

常系数非齐次线性微分方程求解

一. 求解对应齐次方程

① 解特征方程

② 根据解的情况写出通解

二阶常系数齐次线性微分方程的通解

(1) 当 $p^2-4q>0$ 时，特征方程有相异实根 $r_1\neq r_2$，则方程(1)的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}.$$

(2) 当 $P^2-4q=0$ 时，特征方程有重实根 $r_1=r_2$，则方程(1)的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}.$$

(3) 当 $p^2-4q<0$ 时，特征方程有共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则方程(1)的通解为

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

二阶微分方程的求解

（二）常系数线性微分方程

二. 根据方程右侧表达式形式设出特解

将特解代回原方程, 求解特解中的未知系数

三. 将通解和特解合并

四. 代入初值条件求出未知项

若 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x]$，其中 $P_l(x)$ 与 $Q_n(x)$ 分别是 l 次与 n 次多项式，则方程(2)有特解

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$，$R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式（系数待定），$m=\max\{l,n\}$，并且

(1) 当 $\lambda\pm\omega i$ 不是特征方程的根时，取 $k=0$；

(2) 当 $\lambda\pm\omega i$ 是特征方程的根时，取 $k=1$.

二阶微分方程的求解——常系数线性微分方程

例 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = (6x-2)e^{2x}$ 的通解.

解 所给方程对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

特征根为 $r_1 = r_2 = 2$．故对应的齐次方程的通解为

$$Y = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

因为 $\lambda = 2$ 是特征根，故特解应设为

$$y^* = x^2(b_0x + b_1)e^{2x}.$$

代入原方程，得

$$6b_0x + 2b_1 = 6x - 2,$$

$$6b_0x + 2b_1 = 6x - 2$$

比较两边同次幂的系数，得

$$\begin{cases} 6b_0 = 6 \\ 2b_1 = -2 \end{cases}$$

解之得 $b_0 = 1, b_1 = -1$．于是求得一个特解为

$$y^* = x^2(x-1)e^{2x}.$$

从而所求通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + x^2(x-1)e^{2x}.$$

二阶微分方程的求解——常系数线性微分方程

求 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$ 的通解，其中a 为常数。

解：特征方程 $r^2+4r+4=0 \quad \Rightarrow \boxed{r_1=r_2=-2}$

齐次的通解 $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{-2x}$ ，

（1）$\boxed{\text{当 } a=-2 \text{ 时}}$，设非齐次方程特解 $y^*=\boxed{bx^2}\mathrm{e}^{2x}$ $(b$ 是常数）；

（2）$\boxed{\text{当 } a\neq-2 \text{ 时}}$，设非齐次方程特解 $y^*=\boxed{c}\mathrm{e}^{\alpha x}$ $(c$ 是常数）。

二阶微分方程的求解——
已知解，求相应的二阶常系数线性微分方程

设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$，（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）为某二阶常系数齐次线性方程的通解，则该方程为________________。

解： $r_{12}=1\pm i$，

$$\Rightarrow (r-1-i)(r-1+i)=(r-1)^2-i^2=(r-1)^2+1=0$$

$$r^2-2r+2=0 \quad \Rightarrow y''-2y'+2y=0\text{。}$$

二阶微分方程的求解——
已知解，求相应的二阶常系数线性微分方程

设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶常系非齐次数线性方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ 的特解，C_1, C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是

A. $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$；

B. $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$；

C. $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$；

D. $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$。

二阶微分方程的求解 —
已知解，求相应的二阶常系

下面证明：(y_1-y_3)与(y_2-y_3)线性无关。

设 $k_1(y_1-y_3)+k_2(y_2-y_3)=0$，

则有 $k_1y_1+k_2y_2-(k_1+k_2)y_3=0$，由于$y_1$，$y_2$，$y_3$线性无关，

$\Rightarrow\ k_1=k_2=(k_1+k_2)=0\Rightarrow\ k_1=k_2=0$，

所以 (y_1-y_3)与(y_2-y_3)线性无关。

显然 A 不正确；

B 改写成$C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)$，可知是对应的齐次线性方程的通解；

C 改写成$C_1(y_1+y_3)+C_2(y_2+y_3)-y_3$ 而$(y_1+y_3),(y_2+y_3)$ 不是对应的齐次方程的解，故也不正确。

D 可写为 $C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$，其中$(y_1-y_3),(y_2-y_3)$ 是对应的齐次方程的两个解，y_3 是非齐次方程的一个特解。