厦门大学《微积分 I-2》课程

补充习题

信息学院自律督导部整理

二重积分：直角坐标系（X 型区域、Y 型区域）；极坐标系。

例 1. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ ，其中 D: $x^2+y^2\le 2x$.

解：积分区域关于 x 轴对称，所以 $\iint\limits_D (x+y)dxdy=\iint\limits_D xdxdy$

极坐标系下：$x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$，$D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0\le r\le 2\cos\theta\end{cases}$

$$\iint\limits_D xdxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cos\theta\cdot rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2dr$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi$$

例 2. 设 D 是 $y=\sqrt{1-x^2}$ ， $y=0$ 围成， D_1 为 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (x^2+3xy^2)dxdy=$（ C ）。

（A） $2\iint\limits_{D_1}(x^2+3xy^2)dxdy$ （B） 0

（C） $2\iint\limits_{D_1}x^2dxdy$ （D） $4\iint\limits_{D_1}x^2dxdy$

例 3. 改变积分的顺序 $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x,y)dx$ 。

解：Y 型区域：$\begin{cases}0\le x\le y^2\\ 0\le y\le 1\end{cases}$ $\begin{cases}0\le x\le\sqrt{1-(y-1)^2}\\ 1\le y\le 2\end{cases}$，

积分域由 $x=y^2$, $x^2+(y-1)^2=1$, $x=0$ 围成。

$\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$ 的交点（0,0），(1,1).

X 型区域：$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} \le y \le 1 + \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

所以原积分换序后为 $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ 。

例 4. 积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y$ 的值等于____________。答案：$\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-4}\right)$。

解：$I = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}x = \int_0^2 y\mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$ 。

例 5. 求 $I = \iint\limits_D xydxdy$， D 是由 $x > 0,\ y \ge x$ 与 $x^2 + (y-b)^2 \le b^2$，

$x^2 + (y-a)^2 \ge a^2$ （$0 < a < b$）所围成的区域。

解：选用极坐标系，积分域的边界：

$r_1 = 2a\sin\theta,\quad r_2 = 2b\sin\theta$， $\theta = \frac{\pi}{4},\quad \theta = \frac{\pi}{2}$ 。

积分限：$2a\sin\theta \le r \le 2b\sin\theta$，$\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 。

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2a\sin\theta}^{2b\sin\theta} r^3 \cos\theta \sin\theta dr = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\left[(2b\sin\theta)^4 - (2a\sin\theta)^4\right]d\theta$$

$$= 4\left[b^4 - a^4\right]\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta d(\sin\theta) = \frac{2}{3}\left[b^4 - a^4\right]\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{12}\left[b^4 - a^4\right]$$

例 6. 求 $I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 y}dxdy$， D 是由 $y = x$，$y = -x$ 及 $y = 1$ 围成的区域。

解： 分析 积分区域关于 y 轴对称，被积函数是关于 x 的偶函数，

$$\therefore I = \iint\limits_D \sqrt{x^2 y}dxdy = 2\iint\limits_{D_1} x\sqrt{y}dxdy = 2\int_0^1 dx \int_x^1 x\sqrt{y}dy = \frac{2}{7}$$

例 7. 若函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 D： $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ 上连续，

且 $xy\left(\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right)^2 = f(x,y)-1$，则 $f(x,y)=$________.

解： 令 $\left(\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right)^2 = c$，则由题设知 $f(x,y)=cxy+1,$

于是 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\sqrt{c}$

$$\iint\limits_D (cxy+1)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^1 (cxy+1)dy$$

$$=\int_0^1 (\frac{1}{2}cx+1)dx=\frac{1}{4}c+1=\sqrt{c}$$

解得 $c=4$，所以 $f(x,y)=4xy+1$。

例 8. 计算 $\iint\limits_D \left(\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 D 为 $x^2+y^2=1$ 与 x 轴和 y 轴所围第一象限部分。

解： 用极坐标计算比较方便。

$$原式=\iint\limits_D \left(\frac{1-r^2}{1+r^2}\right)^{\frac{1}{2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint\limits_D \frac{1-r^2}{\sqrt{1-r^4}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{1-r^2}{2\sqrt{1-r^4}}\mathrm{d}r^2$$

令 $r^2=t$，

$$原式=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\left[\arcsin t\Big|_0^1+\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}\left(1-t^2\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}+\sqrt{1-t^2}\Big|_0^1\right]=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$$

三重积分：直角坐标系、柱坐标系（投影法、截面法）；球坐标系。

例 9. 由不等式 $z\le 6-x^2-y^2, z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $x^2+y^2\le 1$ 所表示的立体体积 V 等于（ A ）。

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^{6-r^2}\mathrm{d}z$；　　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\mathrm{d}r\int_r^{6-r^2}\mathrm{d}z$；

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{6-r^2}\mathrm{d}z$；　　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}} r\mathrm{d}r\int_0^{6-r^2}\mathrm{d}z$。

例 10. 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$ 所围成的四面体。

解：(投影法) 将积分区域投影到 XOY 坐标面上，先对 Z 积分，再对 Y、X 积分

$$原式=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{y}{4}+\frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{4}(1-x)+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$$

例 11. 在一个形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器内已经盛有 8π 立方厘米的水，现又倒入 120π 立方厘米的水。问水面比原来升高多少厘米？

解：（截面法） 设水深为 h，容器的容水量为 $V(h)$，则

$$V(h)=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h dz\iint_{D_z}dxdy=\pi\int_0^h zdz=\frac{1}{2}\pi h^2$$

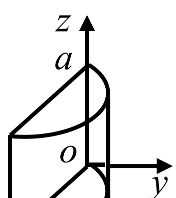
$V(h_1)=\frac{1}{2}\pi h^2=8\pi\quad\Rightarrow h=4$ 厘米，

$V(h_2)=\frac{1}{2}\pi h^2=128\pi\quad\Rightarrow h=16$ 厘米

所以水升高 $h_2-h_1=12$ 厘米。

例 12. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为由

柱面 $x^2+y^2=2x$ 及 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成的半圆柱体。



解： 在**柱坐标系**下：Ω 为 $\begin{cases} 0 \le r \le 2\cos\theta \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le z \le a \end{cases}$，

$$原式 = \iiint_\Omega z r^2 \,\mathrm{d} r \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^a z\mathrm{d}z \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 \,\mathrm{d} r = \frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{8}{9}a^2。$$

例 13. 计算三重积分 $I = \iiint\limits_\Omega (x+z) dxdydz$，

其中 Ω 是由锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 及上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成.

解： 因为 Ω 关于 YOZ 坐标面对称，所以 $\iiint\limits_\Omega (x+z) dxdydz = \iiint\limits_\Omega zdxdydz$

选用**球坐标**系 $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$，$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$，$z = \rho\cos\varphi$，

则 Ω: $0 \le \theta \le 2\pi$，$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$，$0 \le \rho \le 1$，

$$I = \iiint\limits_\Omega zdxdydz$$

$$= \iiint\limits_\Omega \rho\cos\varphi\rho^2 \sin\varphi d\theta d\varphi d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{2}\sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

例 14. 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是圆台，高为 h，上、下底半径分别为 $a,b(b>a)$，其下底面在 xOy 面上，圆心在原点 O。

解： 被积函数为 x^2+y^2，D_z 为圆域，故用**截面法（先二后一）**求解。

先求出圆台侧面的方程，易知该圆台为 yOz 面上直线 $z = \dfrac{h}{b-a}(b-y)$

绕 z 轴旋转得到，故其方程为 $z = \dfrac{h}{b-a}\left(b - \sqrt{x^2+y^2}\right)$，

则 $0\le z\le h$；$D_z:\begin{cases}0\le r\le b-\dfrac{b-a}{h}z\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$，

$$\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}v=\int_0^h \mathrm{d}z\iint_{D_z} r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^h \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{b-\frac{b-a}{h}z} r^3\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^h \frac{\pi}{2}\left(b-\frac{b-a}{h}z\right)^4\mathrm{d}z=-\frac{h}{(b-a)}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{5}\left(b-\frac{b-a}{h}z\right)^5\Bigg|_0^h$$

$$=-\frac{h}{(b-a)}\frac{\pi}{10}\cdot\left(a^5-b^5\right)=\frac{\pi h}{10}\left(a^4+a^3b+a^3b^2+ab^3+b^4\right)$$

例 15. 计算 $\displaystyle\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中 Ω 由 $x^2+y^2=4z$ 与 $z=h\,(h>0)$ 所围成。

解：投影法（先一后二）Ω：$\begin{cases}\dfrac{r^2}{4}\le z\le h\\ D_{xoy}:\begin{cases}0\le r\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}\end{cases}$ （柱坐标系）

$$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{rdr}{1+r^2}\int_{\frac{r^2}{4}}^{h}dz=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]。$$

截面法（先二后一） Ω：$\begin{cases}D_Z:\begin{cases}0\le r\le 2\sqrt{z}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases},\\ 0\le z\le h\end{cases}$.

$$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}=\int_0^h dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2\sqrt{z}}\frac{rdr}{1+r^2}=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]。$$

例 16. 计算 $\displaystyle\iiint_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 所围成的区域。

解：由对称性知 $\displaystyle\iiint_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=2z\\ x^2+y^2+z^2=3\end{cases}$，得 $2z+z^2=3$，则 $z=1,\ z=-3$（舍去）

交线在 XOY 面上的投影线 $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ z=0\end{cases}$

柱面坐标系下， Ω： $\begin{cases} \dfrac{r^2}{2} \le z \le \sqrt{3-r^2} \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{dxdydz}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}}dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2})dr=\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^2(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2})dr^2$$ 令 $r^2=u$，

$$=\pi\int_0^2u(\sqrt{3-u}-\frac{u}{2})du=\pi[\int_0^2u\sqrt{3-u}du-\frac{1}{2}\int_0^2u^2du]$$

$\int_0^2u\sqrt{3-u}du=$ 令 $\sqrt{3-u}=t$, $u=3-t^2$, $du=-2dt$，

$$u=0,t=\sqrt{3};\quad u=2,t=1$$

$$\int_0^2u\sqrt{3-u}du=\int_{\sqrt{3}}^1(3-t^2)t(-2tdt)=2\int_1^{\sqrt{3}}(3-t^2)t^2dt$$

$$=2(t^3-\frac{1}{5}t^5)\Big|_1^{\sqrt{3}}=2(3\sqrt{3}-1-\frac{9}{5}\sqrt{3}+\frac{1}{5})=(\frac{12}{5}\sqrt{3}-\frac{8}{5})$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2u^2du=\frac{1}{6}u^3\Big|_0^2=\frac{4}{3}$$

$$\therefore\ \iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{dxdydz}=(\frac{12}{5}\sqrt{3}-\frac{8}{5})\pi-\frac{4}{3}\pi=(\frac{12}{5}\sqrt{3}-\frac{44}{15})\pi$$

例 17. 利用球面坐标系计算 $\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5dv$，其中 Ω： $x^2+y^2+z^2\le 2z$。

解： Ω 是球体： $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$，选择球面坐标系： $\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le r\le 2\cos\varphi \end{cases}$。

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^5\cdot r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^7dr=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(2\cos\varphi)^8\sin\varphi d\varphi$$

$$=-\frac{1}{4}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2^8(\cos\varphi)^8\,d\cos\varphi=-\frac{2^8}{4\times 9}\pi\left(\cos^9\varphi\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{64}{9}\pi.$$

例 18 设二元函数

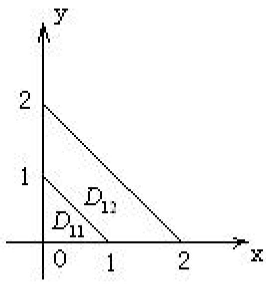
$$f(x,y)=\begin{cases}x^2, & |x|+|y|\le 1,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2,\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|\ \ |x|+|y|\le 2\}$。

解　由区域的对称性和被积函数的奇偶性有

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma,$$

其中 D_1 为 D 在第 I 象限的部分，而



$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)d\sigma\quad,$$

其中 $D_{11}=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1-x,0\le x\le 1\}$，

$D_{12}=\{(x,y)\,|\,1\le x+y\le 2,x\ge 0,y\ge 0\}$　（如图）。

因为 $\iint\limits_{D_{11}} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_{11}} x^2d\sigma=\int_0^1dx\int_0^{1-x}x^2dy=\int_0^1x^2(1-x)dx=\frac{1}{12}$

$$\iint\limits_{D_{12}} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_{12}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}dr\qquad=\qquad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$

$$=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

所以　$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=4\left[\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right]=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)$$

例 19 $\iint\limits_D|xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，平面区域 $D:\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\},a>0$.

解：设 D_1 为区域 D 在第一象限部分，由对称性

$$\iint\limits_D|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=4\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{a}=\frac{a^2}{2}.$$