微积分不相信眼泪

2018级计算机类二班

张逸辰

Part Ⅱ

向量代数
与空间解析几何

目录

向量代数与空间解析几何

- 数量积、向量积、混合积

定义、几何应用

- 空间平面及其方程

1. 一般式、点法式、三点式、截距式
2. 一些特殊平面对应方程

- 空间直线及其方程

一般式、两点式、对称式、参数方程

- 点、直线、平面的位置关系

1. 点到平面的距离
2. 平面和平面的位置关系
3. 两直线的位置关系
4. 点到直线的距离
5. 平面与直线的关系
6. 平面束方程

- 曲面及其方程

1. 旋转曲面
2. 柱面
3. 常见标准曲面及其方程

（球面、椭球面、双曲面、抛物面、二次锥面）

- 空间曲线及其方程

1. 一般方程、参数方程
2. 空间曲线在坐标面上的投影

基本概念

- 何为向量？

既有大小又有方向的量。

模：向量的大小

方向角：与三条坐标轴的夹角。（方向余弦）

投影

- 加减法遵循三角形/平行四边形法则（交换律、结合律）
- 向量与数的乘法
- 利用坐标做向量线性运算

数量积

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}$$
$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

几何应用

(1)向量垂直关系的判定

(2)向量的投影：

$$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=(\vec{a})_{\vec{b}}=|\vec{a}|\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

数量积

已知 $\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{b}\right|=3$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 和 $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$.

解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3.$

$$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=4\left|\vec{a}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=16-12+9=13.$$

故 $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{13}.$

数量积

设$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$，$|\mathbf{a}|=5$，$|\mathbf{b}|=2$，$|\mathbf{c}|=3$，求 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ 的值。

解：$\begin{cases}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{0}\\ \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}^2+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{0}\\ \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{c}^2=\mathbf{0}\end{cases}$，三式相加，

$$\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=0\text{，}$$

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=-\frac{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2}{2}=-19\text{。}$$

向量积

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

(1) a x b与a，b分别垂直；
(2) a，b与a x b服从右手法则；
(3) |a x b|=|a||b|sin θ，其中θ为向量a，b间的夹角.

【注】:两向量的数量积为一个数量，而两向量的向量积为一个向量.

几何应用

(1) $\mathbf{a}//\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

$\Leftrightarrow\exists\lambda,\mu\in\mathbf{R}(\lambda\mu\neq0),\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}=\mathbf{0}.$

【注】: 零向量与任何向量平行.

(2) 三点A,B,C共线$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\vec{0}$；

(3) $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$；

(4) $S_{\square ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$.

向量积

设α与β均为单位向量，其夹角为$\frac{\pi}{4}$，求以$\alpha+2\beta$与$2\alpha-\beta$为邻边的平行四边形的面积.

解：$(\alpha+2\beta)\times(2\alpha-\beta)=\alpha\times(2\alpha)-\alpha\times\beta+(2\beta)\times(2\alpha)-(2\beta)\times\beta=-5(\alpha\times\beta)$，

故所求的平行四边形的面积为 $|(\alpha+2\beta)\times(2\alpha-\beta)|=5|\alpha||\beta|\sin\frac{\pi}{4}=\frac{5}{2}\sqrt{2}.$

求以$A(4,7,-1)$、$B(5,5,1)$和$C(3,7,-2)$为顶点的三角形的面积.

解：$\because$ $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,-1)$

$$\therefore \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\left(2,-1,-2\right),$$

于是三角形的面积$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=\frac{3}{2}$.

混合积

向量(a x b)·c 为向量 a,b,c 的混合积，记作[abc]，并有

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

几何应用

(1) a,b,c共面⇔[abc]=0存在不全零的数λ,μ,γ，使得λa +μb +γc=0.

(2) 空间四点A,B,C,D共面

(3) 以a,b,c为棱的四面体体积

(4) 以a,b,c为棱的平行六面体体积

混合积

证明如下结论：

（1）若$\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$，则矢量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$共面；

（2）若$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times d$，$\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times d$，则矢量$\mathbf{a}-d$与$\mathbf{b}-\mathbf{c}$共线。

证：（1）已知$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$共面的充分必要条件是$\boxed{(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=0}$，

由题设条件知 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{0}$，

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}+\boxed{\underbrace{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{c}}_{=0}}+\boxed{\underbrace{(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c}}_{=0}}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{0},$$

可见，若$\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$，则矢量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$共面。

混合积

证明如下结论：

（1）若$\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$，则矢量$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$共面；

（2）若$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times d,\ \mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times d$，则矢量$\mathbf{a}-d$与$\mathbf{b}-\mathbf{c}$共线。

（2）若$\mathbf{a}-d$与$\mathbf{b}-\mathbf{c}$共线，则应有$(\mathbf{a}-d)\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$，所以我们只要关注

$(\mathbf{a}-d)\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$是否为零即可。

$(\mathbf{a}-d)\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}-d\times\mathbf{b}-\mathbf{a}\times\mathbf{c}+d\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times d-\mathbf{a}\times\mathbf{c}-\mathbf{c}\times d$

，

因为$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times d,\ \mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times d$，所以上式计算结果为

$(\mathbf{a}-d)\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$，

即 $\mathbf{a}-d$与$\mathbf{b}-\mathbf{c}$共线。

混合积

判断直线 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 与 $L_2:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ 是否在同一平面内，若是，则求其交点；若不是，试求它们之间的最短距离。

解：直线 L_1 与 L_2 的方向向量为 $\vec{s}_1=(2,3,4),\vec{s}_2=(1,1,2)$,

它们分别过点 $P=(0,-3,0)$, $Q=(1,-2,2)$, $\overrightarrow{PQ}=(1,1,2)$.

直线 L_1 、 L_2 共面的充分必要条件是 L_1 、 L_2 、 $\overrightarrow{PQ}=(1,1,2)$ 共

面，即它们的混合积为零，因为 $(\vec{s}_1\times\vec{s}_2)\cdot\overrightarrow{PQ}=\begin{vmatrix}2&3&4\\1&1&2\\1&1&2\end{vmatrix}=0$, 所

以 L_1 与 L_2 共面。

将 L_1 写成参数方程 $\begin{cases}x=2t\\y=3t-3\\z=4t\end{cases}$，代入 L_2，得 $\dfrac{2t-1}{1}=\dfrac{3t-1}{1}=\dfrac{4t-2}{2}$,

解得 $t=0$，代回到 L_1 的参数方程 $\begin{cases}x=2t\\y=3t-3\\z=4t\end{cases}$，可得两直线的交点

$(0,-3,0)$ 。

平面及其方程

1．平面的点法式方程

设 M(x0,y0,z0)为平面上的已知点，n=(A,B,C)为法向量，M(x,y,z)为平面上的任一点，则平面的点法式方程为：

A(x-x0)+B(y-y0)+C(z-z0)=0.

2．平面的三点式方程

设 M1 (x1,y1,z1)，M2 (x2,y2,z2)，M3 (x3,y3,z3)是某平面上不共线的三点，则由四点共面，四点构成的三个向量的混合积为零，可得平面的三点式方程：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

平面及其方程

3．平面的截距式方程

如果三点取为坐标轴上的点(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)，其中 abc≠0，或者已知平面在三坐标轴上的截距为 a,b,c，则平面的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

4．平面的一般式方程

三元一次方程描述的图形为空间平面，即平面的一般式方程为：

Ax+By+Cz+D=0(A2+B2+C2≠0).

并且平面的法向量为 n=(A,B,C)，任何满足方程的 x,y,z 的值构成在有序对(x,y,z)对应的点都为该方程描述的平面上的点。

平面及其方程

一些特殊平面对应的方程结构

(1) 过原点的平面：$Ax+By+Cz=0$；

(2) 平行于 x 轴的平面：$By+Cz+D=0$；

平行于 y 轴的平面：$Ax+Cz+D=0$；

平行于 z 轴的平面：$Ax+By+D=0$；

【注】：法向量的哪个分量为零，

则该平面平行于该分量对应的坐标轴。

(3) 过 x 轴的平面：$By+Cz=0$；

过 y 轴的平面：$Ax+Cz=0$；

过 z 轴的平面：$Ax+By=0$；

(4) 行于 xOy 坐标面的平面：$Cz+D=0$；

平行于 zOx 坐标面的平面：$By+D=0$；

平行于 yOz 坐标面的平面：$Ax+D=0$；

【注】：法向量的哪两个分量为零，

则该平面平行于这两个分量对应的坐标轴构成的坐标面。

平面及其方程

设点 $P(2,8,-1)$ 为从原点到一平面的垂足，求该平面的方程.

解：法向量为 $\overrightarrow{OP}=\{2,8,-1\}$，故所求的平面方程为

$$2(x-2)+8(y-8)-(z+1)=0\text{，即}\quad 2x+8y-z-69=0.$$

空间直线及其方程

空间直线的一般式方程

两平面的交线的一般式方程为

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

空间中，过点(a，b，c)且方向向量为(A，B，C)的直线方程为

$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C}$，由于它是由定点及方向向量写出的，

因此叫点向式方程。

同时，方程式关于 x、y、z 的结构相似，将 x、y、z 分别换成 y、z、x，

同时将 a、b、c 分别换成 b、c、a，A、B、C 分别换成 B、C、A，

方程不变，这叫轮换对称性。

所以上述方程又叫对称式方程。

空间直线及其方程

空间直线的坐标式参数方程

过点 M0(x0,y0,z0)，方向向量为 s=(m,n,p)的直线的坐标式参数方程为

$$
\begin{cases}
x = x_0 + mt, \\
y = y_0 + nt, \quad -\infty < t < +\infty. \\
z = z_0 + pt,
\end{cases}
$$

空间直线的两点式方程

已知空间直线 L 上的相异的两点 A(x1,y1,z1)，B(x2,y2,z2)

空间直线及其方程

求点 $M(3,2,1)$ 关于平面 $x+2y-z=0$ 的对称点坐标

解：设对称点坐标为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则 $\overrightarrow{M_0M}$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的法向量平行，

即

$$\frac{3-x_0}{1}=\frac{2-y_0}{2}=\frac{1-z_0}{-1}$$

故 $y_0=2x_0-4,\ z_0=4-x_0$.

又因为 M_0 与 M 连线的中点 $(\frac{3+x_0}{2},\frac{2+2x_0-4}{2},\frac{1+4-x_0}{2})$ 位于平面上，故有

$$\frac{3+x_0}{2}+2\times\frac{2+2x_0-4}{2}-\frac{1+4-x_0}{2}=0$$

解得 $x_0=1$， $y_0=-2,\ z_0=3$.

于是，点 $M(3,2,1)$ 关于平面 $x+2y-z=0$ 的对称点坐标为 $M_0(1,-2,3)$.

点、直线、平面的位置关系

1．点到平面的距离

如果点 P0 不在平面π上，则点 P0 到平面π的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2．平面与平面的位置关系

设两平面的方程为

π1：A1x+B1y+C1z+D1=0，

π2：A2x+B2y+C2z+D2=0.

(1) 两平面平行，有

$$\mathbf{n}_1//\mathbf{n}_2\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

(2) 两平面垂直，有

$$\mathbf{n}_1\perp\mathbf{n}_2\Leftrightarrow\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2=0$$
$$\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

(3) 两平面夹角θ定义为两法向量相交的锐角，即

$$\cos\theta=\frac{|\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|}$$
$$=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

点、直线、平面的位置关系

3．两直线的位置关系

设两直线的标准式方程分别为：

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

并设 M1(x1,y1,z1)是直线 L1 上的点，s1=(m1,n1,p1)是它的一个方向向量；M2(x2,y2,z2)是直线 L2 上的点，s2=(m2,n2,p2)是它的一个方向向量，则有：

$$(1)\ L_1\perp L_2\Leftrightarrow \mathbf{s}_1\perp\mathbf{s}_2$$

$$\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

$$(2)\ L_1//L_2\Leftrightarrow \vec{s}_1//\vec{s}_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

$\vec{s}_1//\vec{s}_2//\overrightarrow{M_1M_2}\Leftrightarrow$ 两直线重合.

【注】：如果两直线仅仅是平行，则有

$$\vec{s}_1//\vec{s}_2 \not\parallel \overrightarrow{M_1M_2}.$$

(3) 两直线相交：直线 L_1 和 L_2 相交⇔

$$[\mathbf{s}_2\ \mathbf{s}_2\ \overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix}m_1&n_1&p_1\\m_2&n_2&p_2\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\end{vmatrix}=0$$

且 $\mathbf{s}_1\not\parallel\mathbf{s}_2$.

(4)两直线异面⇔

$$[\mathbf{s}_2\ \mathbf{s}_2\ \overrightarrow{M_1M_2}]=\begin{vmatrix}m_1&n_1&p_1\\m_2&n_2&p_2\\x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\end{vmatrix}\neq0.$$

点、直线、平面的位置关系

【注】：两条平行直线可以位于不同的平面上，但由于它们可以位于一个平面上，所以它们也表示共面直线。

(5) 不管是共面的直线还是异面的直线，规定两直线的夹角θ为两直线的方向向量间的夹角，即有

$$\cos\theta = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

【注】：若两直线平行或重合，则它们的夹角可看成是 0 或π；如果两直线垂直，则它们的夹角为π/2.

4．点到直线的距离

设点 M1(x1,y1,z1)是直线

上的一点，s=(m,n,p)是直线的方向向量，则点 M0(x0,y0,z0)到直线 L 的距离为由方向向量 s 与 M1 和 M0 构成的向量为邻边构成的平行四边形，在方向向量所在边上的高，即由平行四边形的面积公式可得

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ m & n & p \end{matrix} \right\|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

点、直线、平面的位置关系

5．直线间的距离

平行直线之间的距离归结为一直线上的任一点到另一直线之间的距离，即平行直线之间的距离可以直接使用点到直线的距离公式计算得到。

如果两条直线为异面直线，即已知两直线的标准式方程分别为：

$$L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$
$$L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

并设 M1(x1,y1,z1)是直线 L1 上的点，s1=(m1,n1,p1)是它的一个方向向量；M2(x2,y2,z2)是直线 L2 上的点，s2=(m2,n2,p2)是它的一个方向向量，则两异面直线之间距离等于向量 M1, M2 构成的向量在向量 s1 x s2 上的投影的绝对值，即

$$d=\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right)_{\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2}\right|=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\frac{\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2}{|\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2|}\right|.$$

6．平面与直线的位置关系

设平面和直线的方程分别为：

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0,$$
$$L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

并设 n=(A,B,C)是平面π的法向量，s=(m,n,p)是直线 L 的方向向量，M0(x0,y0,z0)是直线 L 上的一点，则有：

$$(1)\ L\perp\pi\Leftrightarrow\vec{n}//\vec{s}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

$$(2)\ L//\pi\Leftrightarrow\vec{n}\perp\vec{s}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0.$$

点、直线、平面的位置关系

直线 L 在平面π上⇔n⊥s 且

Ax0+By0+Cz0+D=0.

(3) 直线 L 与平面π相交⇔Am+Bn+Cp≠0.

(4) 规定直线 L 与它在平面π上的投影线的夹角θ为直线与平面的夹角，即

$$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

7．平面束方程

空间中通过同一条直线的所有平面的集合叫做有轴平面束，直线叫做平面束的轴

如果两个平面

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

交于一条直线 L，那么以直线 L 为轴的平面束的所有平面方程可以表示为

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

其中λ,μ是不全为零的任意实数。

当λ=1,μ=0 时，则表示平面π1 的方程；λ=0,μ=1 时，则表示平面π2 的方程。

点、直线、平面的位置关系

求过点 $(-1,0,4)$，平行于平面 $3x-4y+z=10$，且与直线 $x+1=y-3=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程

解：设所求直线方程为 $\frac{x+1}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-4}{p}\Rightarrow\begin{cases}x=mt-1\\y=nt\\z=pt+4\end{cases}$，$\vec{s}=(m,n,p)$。

平面的法向量 $\vec{n}=(3,-4,1)$，由直线与平面平行，可知 $\vec{n}\perp\vec{s}$，所以

$\vec{n}\cdot\vec{s}=3m-4n+p=0$ （1）

又因为两直线相交，将 $\begin{cases}x=mt-1\\y=nt\\z=pt+4\end{cases}$ 代入 $x+1=y-3=\frac{z}{2}$，得

$$mt=nt-3=\frac{pt+4}{2}\Rightarrow\begin{cases}(n-m)t=3\\(2m-p)t=4\end{cases}\Rightarrow 10m-4n-3p=0$$

联立（1），（2）：$\begin{cases}3m-4n+p=0\\10m-4n-3p=0\end{cases}$。解得 $m=\frac{4}{7}p,\quad n=\frac{19}{28}p$，

令 $p=28$，得 $m=16,\quad n=19$，故 所求直线为 $\begin{cases}x=16t-1\\y=19t\\z=28t+4\end{cases}$。

点、直线、平面的位置关系

求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面$x+y+z=0$上的投影直线方程.

解：设过已知直线L的平面束方程为$x+y-z-1+\lambda(x-y+z+1)=0$，即

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z-1+\lambda=0$$

求λ，使其与已知平面垂直，即要求

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(\lambda-1)\cdot 1=0,$$

得$\lambda=-1$，因此投影直线方程按一般形式给出为：

$$\begin{cases} y-z-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}.$$

曲面及其方程

旋转曲面

空间中，一条曲线绕一定直线旋转一周所得的曲面称为旋转曲面，定直线称为旋转曲面的旋转轴，曲线称为旋转曲面的母线.

比如，yOz 坐标面上的曲线 C:f(y,z)=0 绕 z 轴旋转一周所成的旋转曲面方程为

绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面的方程为

空间曲线

绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\cos\theta, \\ y = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\sin\theta, \\ z = z(t). \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a \le t \le b \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{pmatrix}$$

曲面及其方程

柱面

在空间中，由平行于定方向且与一条定曲线相交的一族平行直线所构成的曲面叫做柱面；直观地讲，柱面就是由平行于一定直线沿曲线移动时所形成的曲面，或者说是由一条直线连续平移而形成的。其中曲线叫做柱面的准线，直线叫做柱面的母线.

圆柱面：准线为圆，母线为垂直于圆所在平面的直线所形成的曲面。

比如准线为 xOy 面上的圆 x2+y2=R2，母线垂直于 xOy 面，或平行于 z 轴的圆柱面方程为

x2+y2=R2。

类似有中心轴为 y,x 轴为中心轴的圆柱面方程

z2+x2=R2，y2+z2=R2。

椭圆柱面：准线为椭圆，母线为垂直于椭圆所在平面的直线所形成的曲面。比如准线取为 xOy,yOz,zOx 面上的椭圆，母线分别垂直三个坐标面的椭圆柱面方程分别为

为 xOy,yOz,zOx 面上的、实轴分别为 x 轴、y 轴、z 轴的双曲线，母线分别垂直三个坐标面的双曲柱面方程分别为

抛物柱面：准线为抛物线，母线为垂直于抛物线所在平面的直线所形成的曲面。比如，比如准线取为 xOy 面上的抛物线，母线为垂直 xOy 面的抛物柱面方程为

y^2=2px 或 x^2=2py。

曲面及其方程

1．球面

方程(x-x0)2+(y-y0)2+(z-z0)2=R2 所表示的曲面为球心在(x0,y0,z0)球面，半径为 R 的球面。借助三角恒等式，cos2t+sin2t=1，可将椭球面的方程(x-x0)2+(y-y0)2+(z-z0)2=R2 转为参数方程描述，即

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\sin\varphi, \\ y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi. \\ z = R\cos\varphi, \end{cases}$$

特别有 x2+y2+z2=1 表示球心在原点，半径为 1 的球面。

曲面及其方程

2．椭球面

方程 x2/a2+ y2/b2+ z2/c2=1 所表示的曲面称为椭球面，其中 a,b 和 c 均为正常数。借助三角恒等式，cos2t+sin2t=1，可将椭球面的方程 x2/a2+ y2/b2+ z2/c2=1 转为参数方程描述，即

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi, \\ y = b\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\cos\varphi, \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi.$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta\sec\varphi, \\ y = b\sin\theta\sec\varphi, \\ z = c\tan\varphi, \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta\tan\varphi, \\ y = b\sin\theta\tan\varphi, \\ z = c\sec\varphi, \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

曲面及其方程

3．双曲面

双曲面分为单叶双曲面和双叶双曲面。

l 单叶双曲面：平方项两正一负的和等于 1 的方程描述的曲面。即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ ,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ ,$$

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1。$$

其负向变量所对应的坐标轴为对称轴.

曲面及其方程

- 双叶双曲面：平方项一正两负的和等于 1 的方程描述的曲面。即

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1。$$

其正向变量所对应的坐标轴为对称轴.

借助三角恒等式 cos2t+sin2t=1 及 sec2t-tan2t=1，可将对称轴为 z 的单叶双曲面方程，双叶双曲面方程转换为参数方程描述，有

曲面及其方程

4．抛物面

抛物面包括椭圆抛物面和双曲抛物面。

l 椭圆抛物面：具有 1 次方项等于两个平方项的和结构的方程所表示的曲面。即

如果 a=b，则为旋转抛物面。

借助三角恒等式 cos2t+sin2t=1，可将方程转换为参数方程描述，如

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=au\cos\theta,\\ y=bu\sin\theta, & 0\le\theta\le 2\pi,\ u\ge 0.\\ z=u^2,\end{cases}$$

曲面及其方程

l 双曲抛物面：1 次方项等于两个平方项的差结构的方程所表示的曲面。如

由于双曲抛物面的形状像马鞍，所以它又称为马鞍面.

二次锥面

在空间，通过一定点且与定曲线相交的一族直线所生成的曲面叫做锥面。直线称为锥面的母线，定点称为锥面的顶点，定曲线称为锥面的准线。

空间曲线及其方程

1．空间曲线的一般方程

空间曲线总可以看成是某两个曲面的交线．设两曲面的方程为 F(x,y,z)=0 和 G(x,y,z)=0，则两个曲面的交线Γ可以用方程组描述为

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

该方程组也称为空间曲线 C 的一般方程．

【注 1】空间曲线的一般方程不唯一。可以用任意两个过空间曲线的曲面的方程构成的方程组来描述；并且空间曲线也位于描述空间曲线的一般方程中两个方程的线性组合构成的方程

$\lambda F(x,y,z)+\mu G(x,y,z)=0$

（其中λ,μ为不全为零的实数）描述的曲面图形上。这样就可以用相对简单的曲面方程来描述曲线。

空间曲线及其方程

2．空间曲线的参数方程

一般地，空间运动的质点的轨迹对应一条空间曲线。曲线 C 上动点 M 的坐标 x,y,z 可以用一个参数 t 的函数表示为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), a \le t \le b \\ z = z(t), \end{cases}$$

【注 1】空间曲线参数方程参数的意义可以为运动时间，也可以是转动角度、弧度，或者为坐标变量等。

空间曲线及其方程

般方程描述的空间曲线在坐标面上的投影方程

设空间曲线Γ的一般方程为

$$\Gamma:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0,\\F_2(x,y,z)=0.\end{cases}$$

则Γ关于 xOy、yOz、zOx 坐标面的投影柱面方程可以通过方程组分别消去 z,x,y 变量得到。假设方程组消去变量 z,x,y 后得到的方程分别描述为

F(x,y)=0,G(y,z)=0,H(z,x)=0，

则以上三个方程分别描述了空间曲线关于坐标面 xOy、yOz、zOx 的投影柱面；并且空间曲线在三个坐标面上的投影曲线分别为

$$\begin{cases}H(z,x)=0,\\y=0.\end{cases}\quad\begin{cases}F(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}\quad\begin{cases}G(y,z)=0,\\x=0.\end{cases}$$

空间曲线及其方程

求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 在 zox 面上的投影曲线方程.

解：消去 y 可得 $3x^2 + 2z^2 = 16$，可得投影曲线方程为 $\begin{cases} 3x^2 + 2z^2 = 16 \\ y = 0 \end{cases}$.

求曲线 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ 在 yoz 坐标面上的投影柱面和投影曲线方程.

解:消去 x 得曲线在 yoz 坐标面上的投影柱面方程是 $y^2 + z^2 + z - 1 = 0$，

从而得

投影曲线方程 $\begin{cases} y^2 + z^2 + z - 1 = 0, \\ x = 0 \end{cases}$

空间曲线及其方程

【注 1】空间曲面或立体图形在坐标面上的投影为空间曲面或围成立体的所有曲面上的点在坐标面上的投影点构成的平面区域，可以用投影区域的边界曲线为准线，垂直于坐标面的直线为母线形成的投影柱面与坐标面方程来描述。

【注 2】空间直角坐标系中立体图形简图的绘制方法：在掌握基本立体几何形状，比如长方体、球体、柱体、平面、直线绘制的基础上，一般通过绘制一些关键性的曲线，比如围成立体图形的曲面的交线，平行于坐标面的平面截取空间图形所得的交线等，来描述图形的大致轮廓，帮助我们更好地理解和解决问题。

谢谢大家
愿大家笑口常开不流泪

2018级计算机类二班

张逸辰