厦门大学《微积分 I-2》课程
期中试题·答案

考试日期：2015.4　信息学院自律督导部整理

一、计算下列各题：（每小题 5 分，20 分）

1. 求曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$在 zox 面上的投影曲线方程.

解：消去 y 可得 $3x^2+2z^2=16$，可得投影曲线方程为$\begin{cases}3x^2+2z^2=16\\ y=0\end{cases}$.

2. 将 $I=\int_0^{\frac{R}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为先对 x 后对 y 的二次积分.

解：$I=\int_0^{\frac{R}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\frac{R}{2}}^{R}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\sqrt{3}R}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{R^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

3. 曲线 $y=f(x)$ 通过原点，且在 $[0,x]$ 上的弧长等于终点函数值 $f(x)$ 的 2 倍，求 $f(x)$.

解：$\int_0^x\sqrt{1+[f'(t)]^2}\mathrm{d}t=2f(x)$，两边求导，可得 $\sqrt{1+[f'(x)]^2}=2f'(x)$，解得 $f'(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

于是，$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}x+C$.因为曲线 $y=f(x)$ 通过原点，故 $C=0$，所以 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

4. 求圆盘 $(x-2)^2+y^2\le 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积.

解一：$V=\pi\int_{-1}^{1}[(2+\sqrt{1-y^2})^2-(2-\sqrt{1-y^2})^2]\mathrm{d}y=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=8\pi\cdot\frac{1}{2}\pi=4\pi^2$.

或令 $y=\sin t$，则 $V=8\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=4\pi^2$.

解二：利用柱壳法，令 $t=x-2$，则

$$V=2\cdot 2\pi\int_1^3 x\sqrt{1-(x-2)^2}\mathrm{d}x=4\pi\int_{-1}^{1}(2+t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=4\pi^2.$$

二、（12 分）已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，（1）求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$，并说明函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否连续；（2）求在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 的偏导数；（3）问在 $(0,0)$ 处 $f(x,y)$ 是否

可微？

解：（1）因为 $0 \le \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \le \dfrac{1}{4}\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}$，因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}=0$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 = f(0,0),$$

故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

（2） $f_x(0,0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0-0}{\Delta x} = 0.$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y} = 0.$$

（3） $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right]^2$

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\left[\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right]^2 = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\dfrac{k(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2}\right]^2 = \dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$，与 k 有关，故

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right]^2$$

不存在，即 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0) \ne f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$.

所以，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $x=2,\ y=-1,\ y=1$，曲线 $x^2+y^2=1\ (x\ge 0)$ 所围成的平面区域.

解：由对称性，$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{1-y^2}}^{2} x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3+y^2)\mathrm{d}y = 3+\frac{1}{6}y^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{10}{3}.$$

2. 已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 和 $|2\vec{a}-\vec{b}|$.

解：$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 3.$

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = (2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16-12+9 = 13.$$

故$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{13}.$

3. 设 $y=y(x), z=z(x)$ 是由方程$\begin{cases} z=xf(x+y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$所确定的函数，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，$F(x,y,z)$ 具有连续的一阶偏导数，且 $F_y+xf'(x+y)F_z\neq 0$，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解一： 方程组$\begin{cases} z=xf(x+y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$两边对 x 求导，得$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x+y)+xf'(x+y)(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) \\ F_x+F_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$.

由
$$F_y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})$$
$$=f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y+xf'(x+y)(-F_x-F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})$$

即
$$[F_y+xf'(x+y)F_z]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y-xF_xf'(x+y)$$

所以，
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y-xF_xf'(x+y)}{F_y+xf'(x+y)F_z}.$$

解二：方程组$\begin{cases} z=xf(x+y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$两边求微分，得$\begin{cases} \mathrm{d}z=f(x+y)\mathrm{d}x+xf'(x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y) \\ F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z=0 \end{cases}$.

由
$$F_y\mathrm{d}z=f(x+y)F_y\mathrm{d}x+xf'(x+y)F_y(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$
$$=[f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y]\mathrm{d}x+xf'(x+y)(-F_x\mathrm{d}x-F_z\mathrm{d}z)$$

即
$$[F_y+xf'(x+y)F_z]\mathrm{d}z=[f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y-xF_xf'(x+y)]\mathrm{d}x$$

所以，
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{f(x+y)F_y+xf'(x+y)F_y-xF_xf'(x+y)}{F_y+xf'(x+y)F_z}.$$

4. 求由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分.

解：对 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 两边微分， $yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z+\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0$

故 $\mathrm{d}z=-\dfrac{(x+yz\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x+(y+zx\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}y}{z+xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，所以 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0,-1)}=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\mathrm{d}y.$

5. 求过点 $P(1,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都平行的直线方程.

解：平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 的法向量分别为 $\vec{n}_1=\{1,0,2\}$ 和 $\vec{n}_2=\{0,1,-3\}$.

设所求直线的方向向量为$\vec{l}$，则$\vec{l}\perp\vec{n}_1,\vec{l}\perp\vec{n}_2$. 故取

$$\vec{l}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=\{-2,3,1\}$$

则所求直线方程为$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

四、计算下列各题（每小题 8 分，共 32 分）

1. 设直线$L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$，平面$\Pi:2x-y+z-2=0$，求直线$L$与平面$\Pi$的夹角.

解：直线$L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$的方向向量为

$$\vec{s}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & -10\end{vmatrix}=\{-28,14,-7\}=7\{-4,2,-1\}$$

则
$$\sin\alpha=\frac{\left|\{-4,2,-1\}\cdot\{2,-1,1\}\right|}{\left|\{-4,2,-1\}\right|\cdot\left|\{2,-1,1\}\right|}=\frac{11}{\sqrt{21}\sqrt{6}}=\frac{11}{\sqrt{126}}$$

故所求夹角为$\arcsin\dfrac{11}{\sqrt{126}}$.

2. 在曲面$z=xy$上求出一点，使曲面$z=xy$在该点的法向量与函数$u=x^2+y^2+z^2$在点$P(1,2,1)$处的梯度平行，并写出过该点的切平面方程.

解：设所求点的坐标为(x_0,y_0,z_0)，则曲面$z=xy$在该点的法向量为$\vec{n}=\{y_0,x_0,-1\}$，函数$u=x^2+y^2+z^2$在点$P(1,2,1)$处的梯度为$\operatorname{grad}u\big|_{(1,2,1)}=\{2x,2y,2z\}\big|_{(1,2,1)}=\{2,4,2\}$.

由已知条件，$\vec{n}\parallel\operatorname{grad}u\big|_{(1,2,1)}$，则$\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{x_0}{4}=-\dfrac{1}{2}$，故$x_0=-2,y_0=-1,z_0=x_0y_0=2$.

于是，所求点的坐标为$(-2,-1,2)$，过该点的切平面方程为

$$1\cdot(x+2)+2(y+1)+(z-2)=0，即\ x+2y+z+2=0.$$

3. 计算$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-2y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D:x^2+y^2\le 4$.

解一：记$D_1:x^2+y^2\le 2y$. $D_2:2y\le x^2+y^2\le 4$. 则

$$\iint\limits_D\left|x^2+y^2-2y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D (x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint_{D_1}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r-2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}(r^2-2r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{16}{4}+\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=8\pi+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=8\pi+\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=9\pi.$$

解二：记 $D_1: x^2+y^2\le 2y$． $D_2: 2y\le x^2+y^2\le 4$. 则

$$\iint_D \left|x^2+y^2-2y\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1}(x^2+y^2-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^3-2r^2\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^2(r^3-2r^2\sin\theta)\,\mathrm{d}r-\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}(r^3-2r^2\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\pi}^{2\pi}(4-\frac{16\sin\theta}{3})\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi}(4-4\sin^4\theta-\frac{16}{3}\sin\theta+\frac{16}{3}\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta-\int_0^{\pi}(4\sin^4\theta-\frac{16}{3}\sin^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=4\pi+\frac{32}{3}+4\pi-\frac{32}{3}+\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=8\pi+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=8\pi+\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=9\pi.$$

4. 求点 $(1,1,\frac{1}{2})$ 到曲面 $z=x^2+y^2$ 的最短距离.

解：作拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-\frac{1}{2})^2+\lambda(x^2+y^2-z)$.

令 $\begin{cases} L_x=2(x-1)+2\lambda x=0 \\ L_y=2(y-1)+2\lambda y=0 \\ L_z=2(z-\frac{1}{2})-\lambda=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$，$x=y=\dfrac{1}{1+\lambda}$， $z=\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{1}{2x}$，由 $z=x^2+y^2$ 可知 $\dfrac{1}{2x}=2x^2$，即 $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$，

所以得到唯一驻点 $(\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{\sqrt[3]{4}},\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$，根据实际情况，最短距离一定存在，故该点为所求，最短距离为 $\sqrt{(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-1)^2+(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-1)^2+(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}}$.

五、证明题：（本题 6 分）

设 $F(u,v)$ 可微，试证明曲面 $F(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})=0$ 上任一点处的切平面都通过一定点.

证明：设 $G(x,y,z)=F(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})$， (x_0,y_0,z_0) 是曲面 $F(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c})=0$ 上任一点，则该点处

的法向量为

$$\vec{n}=\left\{G_x,G_y,G_z\right\}=\left\{\frac{1}{z_0-c}F_1',\frac{1}{z_0-c}F_2',-\frac{1}{(z_0-c)^2}[(x_0-a)F_1'+(y_0-b)F_2'\right\},$$

过该点的且平面方程为

$$\frac{1}{z_0-c}F_1'\cdot(x-x_0)+\frac{1}{z_0-c}F_2'\cdot(y-y_0)-\frac{1}{(z_0-c)^2}[(x_0-a)F_1'+(y_0-b)F_2'](z-z_0)=0$$

取 $x=a,\ y=b,\ z=c$，则有

$$\frac{1}{z_0-c}F_1'\cdot(a-x_0)+\frac{1}{z_0-c}F_2'\cdot(b-y_0)-\frac{1}{(z_0-c)^2}[(x_0-a)F_1'+(y_0-b)F_2'](c-z_0)$$

$$=\frac{1}{z_0-c}F_1'\cdot(a-x_0)+\frac{1}{z_0-c}F_2'\cdot(b-y_0)+\frac{1}{z_0-c}[(x_0-a)F_1'+(y_0-b)F_2']=0.$$

因此，(a,b,c) 在该切平面上.