



# 厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷

考试日期：2012 信息学院自律督导部整理



1. (10 分) 设函数  $u = x^2 + y^2 + xz^2$ ,

(1) 求函数  $u$  沿着点  $A(1,1,1)$  指向点  $B(2,0,1)$  方向的方向导数;

(2) 求  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$ ,  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$ .

2. (10 分) 计算二重积分  $I = \iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)} \sin(x^2 + y^2) dx dy$ , 其中积分区域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \pi\}.$$

3. (10 分) 计算三重积分  $I = \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  及平面  $z = 1, z = 2$  所围区域.

4. (5 分) 设  $L$  为圆周  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ y = x \end{cases}$ , 计算  $\int_L \sqrt{z^2 + 2y^2} ds$

5. (5 分) 计算曲线积分  $\oint_L \frac{1}{x} \arctan \frac{y}{x} dx + \frac{2}{y} \arctan \frac{x}{y} dy$ , 式中  $L$  是由  $x^2 + y^2 = 1$ ,

$x^2 + y^2 = 4$ ,  $y = x$  及  $y = \sqrt{3}x$  在第一象限所围成区域  $D$  的正向边界.

6. (10 分) 已知空间物体  $\Omega$  由锥面  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  所围成, 其上每一点的密度与该点到顶点的距离成正比 (比例系数为  $k$ ), (1) 求该空间物体的质量  $m$ ; (2) 求该空间物体的重心.

7. (10 分) 计算  $I = \iint_{\Sigma} \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$ , 其中  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧,  $a$  为大于零的常数。

8. (10 分) 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 若存在正数  $b$ , 使得  $a_{n+1} \leq b(a_n - a_{n+1}), (n=1, 2, \dots)$ , 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛。

9. (10 分) 求幂级数  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$  的收敛域及它的和函数  $S(x)$ , 并求  $S(x)$  的极值。

10. (10 分) 将函数  $f(x) = \arctan \frac{1-2x}{1+2x}$  展开成  $x$  的幂级数。

11. (10 分) 将函数  $f(x) = 2 + |x|, (-1 \leq x \leq 1)$  展开成周期为 2 的傅里叶级数, 并由此计算级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  的和。

附加题 (10 分)

设有级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [e - (1 + \frac{1}{n})^n]$ ,

(1) 该级数是否条件收敛?

(2) 该级数是否绝对收敛, 请给出你的证明。