厦门大学《微积分 I-2》课程
期末试题・答案

考试日期： 2011　信息学院自律督导部整理

1. （10分）求位于两圆$(x-1)^2+y^2=1$，$(x-2)^2+y^2=4$之间的图形的形心。

解： 因为图形关于x轴对称，所以形心在x轴上，即有$\overline{y}=0$。

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\iint\limits_{D} x\,d\sigma,\qquad A=3\pi,$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D} x\,d\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r^2\cos\theta\,dr \\ &= \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{112}{3}\times\frac{3}{16}\pi = 7\pi\end{aligned}$$

因此$\overline{x}=\frac{7}{3}$，所以形心坐标为$(\frac{7}{3},0)$。

2. （5分）在一个形状为旋转抛物面$z=x^2+y^2$的容器内，已经盛有8π立方厘米的水，现又倒入120π立方厘米的水，问水面比原来升高多少厘米？

解： 设水高h时，容器可装水$V(h)$，则

$$V(h)=\int_0^h dz\iint\limits_{x^2+y^2=z} dxdy=\int_0^h \pi z\,dz=\frac{\pi}{2}h^2.$$

当盛8π立方厘米水时，由$V(h_1)=\frac{\pi}{2}h_1^2=8\pi$，知$h_1=4$厘米；
当盛120π立方厘米水时，由$V(h_2)=\frac{\pi}{2}h_2^2=128\pi$，知$h_2=16$厘米。
所以水升高了$h_2-h_1=12$厘米。

3. （10分）计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\,dxdydz$，其中$\Omega$为抛物面$x^2+y^2=2z$与球面$x^2+y^2+z^2=3$所围的区域。

解： $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，由对称性知$\iiint\limits_{\Omega} xy\,dxdydz=0$，所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdydz.$$

联立

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases} \Longrightarrow z^2+2z=3 \Longrightarrow z=1\text{或}-3\text{（舍去）}$$

由柱坐标

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\,dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}dr\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}}r^2\cdot r\,dz$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r^3\left(\sqrt{3-r^2}-\frac{r^2}{2}\right)dr=\pi\int_0^2 u\left(\sqrt{3-u}-\frac{u}{2}\right)du$$

$$= \pi\int_0^2 u\sqrt{3-u}\,du-\frac{\pi}{2}\int_0^2 u^2\,du$$

$$= 2\pi\int_1^{\sqrt{3}}t^2(3-t^2)\,dt-\frac{4}{3}\pi=\left(\frac{12}{5}\sqrt{3}-\frac{44}{15}\right)\pi.$$

4. （5分）计算$\oint_L(|x|+2|y|)\,ds$，其中L 为单位圆周$x^2+y^2=1$。

解：

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi),\quad ds=\sqrt{(-\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2}d\theta=d\theta.$$

由对称性，$\oint_L|x|\,ds=\oint_L|y|\,ds$，所以

$$\oint_L(|x|+2|y|)\,ds=3\oint_L|x|\,ds=3\int_0^{2\pi}|\cos\theta|\,d\theta=12.$$

5. （10分）计算$\oint_L\frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$，其中$L$为曲线$|x|+|y|=2$，方向为逆时针。

解：记L所围区域为D。设

$$P=\frac{y}{(x-1)^2+y^2},\quad Q=-\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}.$$

当$(x-1)^2+y^2\neq 0$时，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-1)^2-y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}.$$

作一位于D内的圆周l: $(x-1)^2+y^2=r^2$，方向为逆时针，记由L和l所围成的区域为D_1，则有Green公式，得

$$\oint_L \frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}-\oint_l \frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}=\iint\limits_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0,$$

所以

$$\begin{aligned}&\oint_L \frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}=\oint_l \frac{y\,dx-(x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}\\ =&\int_0^{2\pi}\frac{-r\sin t\cdot r\sin t-r\cos t\cdot r\cos t}{r^2}\,dt=-2\pi.\end{aligned}$$

6. （10分）计算$\iint\limits_{\Sigma} xz\,dydz+4\,dxdy$，其中$\Sigma$是抛物面$z=4-x^2-y^2$在$z\geq 0$部分，方向取下侧。

解：Σ在xOy面上的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 4\}$.

由于方向取下侧，设Σ的法向量为$(-2x,-2y,-1)$，则单位法向量为

$$\begin{aligned}&(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\\ =&\left(-\frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}},-\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\right).\end{aligned}$$

由$dydz=\cos\alpha\,dS$, $dxdy=\cos\gamma\,dS$得

$$dydz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,dxdy=2x\,dxdy.$$

于是

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma} xz\,dydz+4\,dxdy\\ =&\iint\limits_{\Sigma}(xz\cdot 2x+4)\,dxdy=-\iint\limits_{D_{xy}}[2x^2(4-x^2-y^2)+4]\,dxdy\\ =&-2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta(4-r^2)r\,dr-4\times 4\pi\\ =&-\int_0^{2\pi}\frac{32}{3}\cos^2\theta\,d\theta-16\pi=-\frac{80}{3}\pi.\end{aligned}$$

7. （10分）根据a的取值，讨论常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}(a>0)$的敛散性（绝对收敛，条件收敛或发散）。

解：

- 当$0<a<1$时，由于
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na^n}=+\infty,$$
所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$发散。
- 当$a=1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，条件收敛。
- 当$a>1$时，由于
$$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{1}{na^n}=0,$$
所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$绝对收敛。

8. （10分）求无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$的和函数$S(x)$，并指出其收敛域。

解：收敛半径$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$，显然当$x=\pm1$时，通项不趋于0，发散，所以收敛域为$(-1,1)$。

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(x^{n+1}\right)' \\
&= \left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n+1}\right]'=\left[x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}\right]' \\
&= \left[x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^n\right)'\right]'=\left[x^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n\right)'\right]' \\
&= \left[x^2\left(\frac{-x}{1+x}\right)'\right]'=\left[-\frac{x^2}{(1+x)^2}\right]'=-\frac{2x}{(1+x)^3}.
\end{aligned}$$

9. （10分）把函数$f(x)=-\ln\frac{1+x}{1-x}+x^2$展成关于$x$的幂级数。

解：记
$$u(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

则

$$u'(x)=\frac{2}{1-x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n},$$

从而

$$\begin{aligned}u(x) &= u(0)+\int_0^x u'(x)\,dx=2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\,dx\\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \qquad\qquad x\in(-1,1)\,.\end{aligned}$$

所以

$$f(x)=x^2-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in(-1,1)\,.$$

10. （10分）记

$$sgn\,x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases},$$

将$f(x)=sgn(\cos x)$展开成Fourier级数.

解：由于$f(x+2\pi)=sgn(\cos(x+2\pi))=sgn(\cos x)=f(x)$，故$f(x)$是以$2\pi$为周期的周期函数。又$f(x)$为偶函数，从而$b_n=0,\ \forall n$。

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}sgn(\cos x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1)\,dx\right)=0$$

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}sgn(\cos x)\cos nx\,dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\,dx\right)\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\\ &= \begin{cases}0, & \text{n为偶数}\\ (-1)^k\frac{4}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots\end{cases}\end{aligned}$$

因为$f(x)$的不连续点为$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})$，在这些点处

$$\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))=\frac{1-1}{2}=0=f(x).$$

所以，根据Dirichlet定理知

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)x,\quad (\forall x\in\mathbb{R}).$$

附加题：（两题任选一题，也可以不选）

1. 设$f(x)$在$[0,1]$上单调减少且$f(x)>0$，证明

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 xf(x)\,dx}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

证明：

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^1 xf(x)\,dx\cdot\int_0^1 f^2(y)\,dy-\int_0^1 yf^2(y)\,dy\cdot\int_0^1 f(x)\,dx\\
&= \int_0^1\int_0^1 xf(x)f^2(y)\,dxdy-\int_0^1\int_0^1 yf^2(y)f(x)\,dxdy\\
&= \int_0^1\int_0^1 f(x)f^2(y)(x-y)\,dxdy
\end{aligned}$$

由于积分区域关于$y=x$对称，又有

$$I=\int_0^1\int_0^1 f(y)f^2(x)(y-x)\,dxdy.$$

以上两式相加，得

$$2I=\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(x-y)[f(y)-f(x)]\,dxdy.$$

由于$f(x)$在$[0,1]$上单调减少且取正值，所以当$y\le x$时，$f(y)\ge f(x)$，因而

$$f(x)f(y)(x-y)[f(y)-f(x)]\ge 0;$$

当$y\ge x$时，$f(y)\le f(x)$，因而

$$f(x)f(y)(x-y)[f(y)-f(x)]\ge 0,$$

故$2I\ge 0$，或$I\ge 0$。由此，所证不等式成立。 □

2. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数。若$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = p$，证明：当$p > 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；当$p < 1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

证明： 已知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} = p, \quad u_n > 0,$$

则$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}^+$，当$n > N$时，有

$$\left| \frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n} - p \right| < \varepsilon,$$

即

$$\frac{1}{n^{p+\varepsilon}} < u_n < \frac{1}{n^{p-\varepsilon}}.$$

- 当$p > 1$时，取$\varepsilon_1 = \frac{p-1}{2} > 0$，记$r_1 = p - \varepsilon_1 = \frac{p+1}{2} > 1$，则$\exists\, N_1 \in \mathbb{N}^+$，当$n > N_1$时，有

$$u_n < \frac{1}{n^{p-\varepsilon_1}} = \frac{1}{n^{r_1}}.$$

  由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{r_1}}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

- 当$p < 1$时，取$\varepsilon_2 = \frac{1-p}{2} > 0$，记$r_2 = p + \varepsilon_2 = \frac{p+1}{2} < 1$，则$\exists\, N_2 \in \mathbb{N}^+$，当$n > N_2$时，有

$$u_n > \frac{1}{n^{p+\varepsilon_2}} = \frac{1}{n^{r_2}}.$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{r_2}}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。