一、

1. 解：$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{\frac{2}{\cos\theta}}\frac{1}{r^4}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{4\cos^2\theta}-\frac{\cos^2\theta}{4})\mathrm{d}\theta$

$$=\frac{1}{8}(\tan\theta-\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{8}(1-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4})=\frac{3}{32}-\frac{\pi}{64}.$$

2. 解：$I=\int_0^2 x\sqrt{1+1^2}\mathrm{d}x+\int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=2\sqrt{2}+\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=2\sqrt{2}+\frac{5}{3}\sqrt{5}-\frac{1}{3}。$$

3. 解：L 的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$，$t=0\to\pi$.

$$I=\int_0^{\pi}(a^2\cos^2 t+2ab\cos t\sin t)(-a\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=-a^3\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t-2a^2b\int_0^{\pi}\cos t\sin^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^3}{3}\cos^3 t\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{3}a^2b\sin^3 t\Big|_0^{\pi}=-\frac{2a^3}{3}$$

4．解：$I=\iint\limits_{\Sigma}[(x-1+y)y+z]\mathrm{d}S$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(1-y)z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}}(1-y)z\sqrt{1+1^2+1^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y)z\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(1-y)^3\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

5. 解：$V=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1(x^3-x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^6)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{12}-\frac{1}{21}=\frac{3}{35}.$$

6. 解：$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

$$=2\pi\times\frac{1}{5}R^5\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2}{5}\pi R^5\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15}\pi R^5。$$

二、解：作辅助线 $L_1: y=0, x: 0 \to \pi$，则

$$I=\oint_{L+L_1}[\cos(x+y^2)+2y]\mathrm{d}x+[2y\cos(x+y^2)+3x]\mathrm{d}y$$

$$-\int_{L_1}[\cos(x+y^2)+2y]\mathrm{d}x+[2y\cos(x+y^2)+3x]\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D(3-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^\pi\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y=\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x=2.$$

三、解一：$\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\iint_{D_z}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_z:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}$.

故 $\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}z^2\cdot\pi ab(1-\dfrac{z^2}{c^2})\mathrm{d}z=\pi ab(\dfrac{2}{3}c^3-\dfrac{2}{5}c^3)=\dfrac{4}{15}\pi abc^3$.

同理，$\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{4}{15}\pi a^3bc$，$\iiint_\Omega y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{4}{15}\pi ab^3c$.

故 $I=3\times\dfrac{4}{15}\pi abc=\dfrac{4}{5}\pi abc$.

解二：利用广义球坐标变换 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\sin\varphi\\ y=br\sin\theta\sin\varphi\\ z=cr\cos\varphi\end{cases}$，

于是，$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\dfrac{4}{5}\pi abc$.

四、解：$I=\iint_\Sigma(x^2+y^2+z^2-2xy-2yz)\mathrm{d}S$.

由对称性，$I=\iint_\Sigma(2xy+2yz)\mathrm{d}S=\iint_\Sigma y(2x+2z)\mathrm{d}S=0$.

则 $I=\iint_\Sigma(x+z)\mathrm{d}S=(\bar{x}+\bar{z})\cdot S_\Sigma$，

其中 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2})$ 为形心坐标，S_Σ 为 Σ 的面积，则 $S_\Sigma=4\pi\times\dfrac{1}{2}=2\pi$.

故 $I=2\pi$.

五、解：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}$，

因为 $p>0$，$\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}$ 单调减少，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}=0$，由莱布尼茨判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p$ 收敛的.

又因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p\right|}{\frac{1}{n^{p/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)^p}=\frac{1}{2^p}$，

由 p 级数的敛散性知，当 $p/2>1$，即 $p>2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p$ 绝对收敛；当 $0<p\le 2$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p$ 条件收敛.

六、解：做辅助面 $\Sigma_1: z=0,\ x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$，取下侧.

于是 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ -\iint\limits_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(z+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D}3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0 \quad \text{（由对称性）}$$

$$=3\int_0^1 z2\pi(1-z)\mathrm{d}z=\pi.$$

七、解：$f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数，且在不连续点处满足 $f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.

因此 $b_n=0$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\cos nx\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k\frac{4}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1\end{cases},\quad k=0,1,2,\cdots$$

于是，$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(2k+1)x}{2k+1},-\infty<x<+\infty$.

特别，令 $x=0$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$.

八、解：记 $a_n=(-1)^n\frac{n^2+1}{n}$，易知 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，故收敛半径为 1.

又因为 $x=\pm1$ 时，通项不趋于 0，故级数发散。因此，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n}x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

当 $|x|<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$.

记 $s_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^n)'=x(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n)'$

$$=x(\frac{-x}{1+x})'=x\frac{-1-x+x}{(1+x)^2}=-\frac{x}{(1+x)^2};$$

$s_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$，则 $s_2'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}=-\frac{1}{1+x}$,

于是，$s_2(x)=-\int_0^x\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=-\ln(1+x)$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n}x^n=-\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$，$-1<x<1$.

九、解：曲面 $\Sigma: z=\sqrt{2Rx-x^2-y^2}$ 在 xy 平面投影区域为 $x^2+y^2\le 2rx$，且

$z_x=-\frac{x-R}{z},\ z_y=-\frac{y}{z}$

则 $I=\iint\limits_{\Sigma}[(y-z)\dfrac{x-R}{z}+(z-x)\dfrac{y}{z}+(x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint\limits_{D}[R-\frac{Ry}{z}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi Rr^{2}.$$