厦门大学《微积分 I-2》课程
期末试题·答案

考试日期： 2014 信息学院自律督导部整理

一、（5 分）计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} zdv$. 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域.

解：$\Omega=\left\{x^2+y^2\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2},(x,y)\in D_{xy}\right\}$,

其中 $D_{xy}=\left\{(x,y): x^2+y^2\le 1\right\}$，用柱坐标系，得

$$I=\iiint\limits_{\Omega} zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}rzdz=\frac{7}{12}\pi.$$

二、（5 分）已知空间立体 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$，$z=0$，$x=\sqrt{1-y^2}$，

$x=0$ 所围成，其体密度 $\rho(x,y,z)=x$，求立体 Ω 的质量.

解一：依题意，

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|-1\le y\le 1,\ 0\le x\le\sqrt{1-y^2},0\le z\le x^2+y^2\right\},$$

所以立体 Ω 的质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dxdydz\quad=\int_{-1}^{1}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}dx\int_0^{x^2+y^2}xdz=\frac{2}{5}.$$

解二：依题意，

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\ 0\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le z\le x^2+y^2\right\},$$

所以立体 Ω 的质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dxdydz\qquad=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_0^{x^2+y^2}xdz=\frac{2}{5}.$$

解三：依题意，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\ (x,y)\in D_{xy},\ \ 0\le z\le x^2+y^2\right\}$,

其中 D_{xy} 为 xoy 平面上由曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$，$x=0$ 所围成的平面区域. 所以立体 Ω 的质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy\int_0^{x^2+y^2} xdz = \iint\limits_{D_{xy}} x(x^2+y^2)dxdy$$

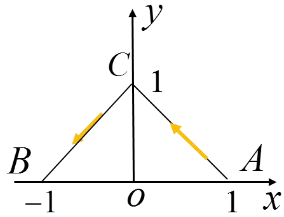
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 r^4\cos\theta dr=\frac{2}{5}.$$

解四：依题意，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\,(x,y)\in D_{xy},\ \ 0\le z\le x^2+y^2\right\}$，其中 D_{xy} 为 xoy 平面上由曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ ，$x=0$ 所围成的平面区域. 所以立体 Ω 的质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dxdydz \quad =\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 dr\int_0^{r^2} r^2\cos\theta dz=\frac{2}{5}.$$

三、(6 分）计算曲线积分 $\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$, 其中 L 为从 $A(1,0)$ 到 $C(0,1)$

再从 $C(0,1)$ 到 $B(-1,0)$ 的有向折线，如图所示。



解：有向线段 AC，CB 所满足的方程分别为：$y=1-x,\ y=1+x.$ -----------1 分

$$\int_L \frac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_{AC}\frac{dx+dy}{x+y}+\int_{CB}\frac{dx+dy}{-x+y}$$ ------------2 分

$$=\int_1^0 \frac{1+(-1)}{x+(1-x)}dx+\int_0^{-1}\frac{1+1}{-x+(1+x)}dx$$ -----------2 分

$$=0+\int_0^{-1}2dx=-2.$$ -----------1 分

四、(6 分) 设 $\int_L (x^3-\varphi(y))\mathrm{d}x+(y^3-6xy)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 φ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$. 求一个二元函数 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u(x,y)=(x^3-\varphi(y))\mathrm{d}x+(y^3-6xy)\mathrm{d}y,$ 并计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^3-\varphi(y))\mathrm{d}x+(y^3-6xy)\mathrm{d}y$.

解: 由题意知, $\frac{\partial(y^3-6xy)}{\partial x}=\frac{\partial(x^3-\varphi(y))}{\partial y}$,

即 $\varphi'(y)=6y$, 又 $\varphi(0)=0$,得 $\varphi(y)=3y^2$. --------3 分

$$u(x,y)=\int_0^x x^3\mathrm{d}x+\int_0^y(y^3-6xy)\mathrm{d}y=\frac{x^4}{4}+\frac{y^4}{4}-3xy^2+C,$$

取 $C=0$，得 $u(x,y)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{y^4}{4}-3xy^2$. ---------3 分

$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^3-\varphi(y))\mathrm{d}x+(y^3-6xy)\mathrm{d}y=u(1,1)-u(0,0)=-\dfrac{5}{2}$. ---------2 分

五、（5 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 为锥面 $z^2=(x^2+y^2)$ 被平面 $z=1$ 和 $z=0$ 所截得的部分.

解： $D_{xy}:\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\},z=0.$ ------------1 分

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$$ -----------2 分

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$ -----------2 分

六、（10 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+z)dydz+zdxdy$, 其中 Σ 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 的下侧.

解法 1：记 Σ_1 为法向量指向 z 轴正向的有向平面 $z=1(x^2+y^2\le 1),D$ 为 Σ_1 在 xoy 平面上的投影区域，则

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x+z)dydz+zdxdy=\iint\limits_{\Sigma_1}zdxdy=\iint\limits_{D}dxdy=\pi.$$

设 Ω 表示由 Σ 和 Σ_1 所围成的空间区域，则由 Gauss 公式，得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x+z)dydz+zdxdy&=\iiint\limits_{\Omega}(1+1)dv\\&=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 dz\quad(\text{用柱坐标计算})\\&=4\pi\int_0^1(1-r^2)rdr\\&=\pi.\end{aligned}$$

因此 $$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)dydz+zdxdy=\pi-\pi=0.$$

解法 2：设 D_{yz} 和 D_{xy} 分别为 Σ 在 yoz 平面、xoy 平面上的投影区域，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+z)dydz+zdxdy=\iint\limits_{D_{yz}}(\sqrt{z-y^2}+z)dydz+\iint\limits_{D_{yz}}(-\sqrt{z-y^2}+z)(-dydz)+\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)(-dxdy)$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,dydz-\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy,$$

其中 $\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}dydz = \int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} \sqrt{z-y^2 dz} = \frac{4}{3}\int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{\pi}{4},$

$$\iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot rdr = \frac{\pi}{2}.$$

所以 $\iint\limits_{\Sigma} (x+z)dydz + zdxdy = 2\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}dydz - \iint\limits_{D_{xy}} (x^2+y^2)dydz = 2\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 0.$

解法 3：设 D_{xy} 为 Σ 在 xoy 平面上的投影区域，则 $\Sigma: z = x^2+y^2 : (x,y) \in D_{xy} = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}.$

在曲面 Σ 上，$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$ 故曲面指定侧的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos\beta = \frac{-2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},$$

即 $dydz = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy = -2xdxdy,$ 故

$$\iint\limits_{\Sigma} (x+z)dydz + zdxdy = \iint\limits_{D_{xy}} \{[x+z(x,y)](-2x) + z(x,y)\}(-dxdy)$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} \{[x+(x^2+y^2)](-2x) + (x^2+y^2)\}dxdy$$

$$= -\iint\limits_{D_{xy}} \{(y^2-x^2) - 2x(x^2+y^2)\}dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (x^2-y^2)dxdy \quad (\text{积分区域关于}y\text{轴对称，被积表达式}x(x^2+y^2)\text{关于}x\text{为奇函数})$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta \int_0^1 r^2 \cdot rdr$$

$$= 0.$$

七、(10 分) 设 $F(x,y,z)$ 二阶连续可导，且满足 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$ 求证：

$$\iiint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] dv = \iint\limits_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}} dS\ ,$$

其中 Ω 是光滑封闭曲面 Σ 所围的区域，$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}$ 是 F 沿曲面 Σ 的单位外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

证明：记 $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 为曲面 Σ 的外法线的方向余弦，则有

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma,$$

于是

$$\iint_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}dS=\iint_{\Sigma} F\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$
$$=\iint_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial x}dydz+F\frac{\partial F}{\partial y}dzdx+F\frac{\partial F}{\partial z}dxdy,$$

应用奥-高公式，有

$$\iint_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}dS=\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F\frac{\partial F}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F\frac{\partial F}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(F\frac{\partial F}{\partial z}\right)\right]dv$$
$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)Fdv+\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]dv.$$

注意到$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$，故上式第一个积分为零，于是

$$\iint_{\Sigma} F\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{n}}dS=\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]dv.$$

八、(共 8 分，每小题 4 分）判断下列级数的敛散性. 如果收敛，请指出是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

解（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}$ 为交错级数，对其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}$ 利用根植判别法，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2\arctan n}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{3}{\pi}<1,$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}$ 绝对收敛.

（2） 因$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\frac{\pi^2}{2}$,

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故原级数绝对收敛.

九、(10 分）设 $f(x)=\frac{5x}{x^2+x-6}$，试求：

（1）将 $f(x)$ 展开成麦克劳林级数；（2）将 $f(x)$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

解：（1） $f(x)=\frac{5x}{x^2+x-6}=\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{1+\frac{x}{3}}-\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$.

于是，当 $|x|<2$ 时，

$$f(x)=\frac{1}{1+\frac{x}{3}}-\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{1}{2^n}]x^n .$$

（2） $f(x)=\frac{3}{x+3}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}-\frac{2}{1-(x-1)}$.

于是，当 $|x-1|<1$ 即 $0<x<2$ 时，

$$f(x)=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-1)^n-2\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{3(-1)^n}{4^{n+1}}-2](x-1)^n .$$

十、(10 分)证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 条件收敛.

解：设 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ ， $f'(x)=\frac{1-\ln(1+x)}{(1+x)^2}$ ，即当 $x\geq 2$ 时， $f'(x)<0$.

所以当 $n\geq 2$ 时， $\frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 单调减少，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{1+n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x}=0$ ，

由莱布尼茨判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 收敛.

又当 $n\geq 2$ 时， $\left|(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{1+n}\right|\geq\frac{1}{n+1}$ ，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{1+n}\right|$ 发散，

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 条件收敛.

十一、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$ 的和函数及常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}$ 的和.

解： $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n}}\right|=x^2<1$ ， $\Rightarrow|x|<1$ ，故 $R=1$.

$x=\pm 1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$ 发散，所以收敛域为 $x\in(-1,1)$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

而 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{1-x^2}$，

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

即 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}=\left(\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1).$$

十二、(10 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且当 $-\pi\le x<\pi$ 时，$f(x)=x^2+x$.将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

解：$f(x)$ 的傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2;$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}[x^2\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x]\\&=\frac{4}{n\pi}[x\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x]\\&=\frac{4}{n^2}(-1)^n;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}[-x\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x]\\&=\frac{2}{n}(-1)^{n-1},\end{aligned}$$

于是，$f(x)=x^2+x=\frac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n}\sin nx],\ x\ne\pm\pi,\pm3\pi,\pm5\pi,\cdots$.

十三、(5 分) 已知数列 $\{u_n\}$ 为单调增加且有界的正数数列，试证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^2\right]$ 是收敛的.

证明：因为数列 $\{u_n\}$ 单调增加且有界，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a>0$. 于是，

$$0 \le 1-(\frac{u_n}{u_{n+1}})^2 = \frac{(u_{n+1}+u_n)(u_{n+1}-u_n)}{(u_{n+1})^2} \le \frac{2a(u_{n+1}-u_n)}{(u_1)^2},$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(u_{n+1}-u_n)}{(u_1)^2}$的前$n$项和为

$$S_n = 2a[\frac{u_2-u_1}{(u_1)^2}+\frac{u_3-u_2}{(u_1)^2}+\cdots+\frac{u_{n+1}-u_n}{(u_1)^2}] = 2a[\frac{u_{n+1}}{(u_1)^2}-\frac{1}{u_1}],$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n = 2a\cdot\frac{a-u_1}{(u_1)^2}$，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(u_{n+1}-u_n)}{(u_1)^2}$收敛，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}[1-(\frac{u_n}{u_{n+1}})^2]$也收敛.