厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷

考试日期：2010 信息学院自律督导部整理

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1.、设 D 是 $y=\sqrt{1-x^2}$， $y=0$ 围成，D_1 为 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D (x^2+3xy^2)dxdy=$（　　）。

（A）$2\iint\limits_{D_1}(x^2+3xy^2)dxdy$　　（B）0　　（C）$2\iint\limits_{D_1}x^2dxdy$　　（D）$4\iint\limits_{D_1}x^2dxdy$

2．设 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D=$\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le x\}$则 $f(x,y)=$（　　）。

（A）$xy+\frac{1}{4}$　（B）$xy+4$　（C）$xy+\frac{1}{2}$　（D）$xy+2$

3．设 $\Omega=\{(x,y,z):z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)},x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则三重积分 $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$（　　）.

（A）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$　　（B）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$

（C）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$　　（D）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$

4．若有级数 $\sum_{n=1}^{100}n^2+\sum_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n}$ 与级数 $\sum_{n=1}^{100}n+\sum_{n=101}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，则下列结论成立的是（　　）。

（A）两个都收敛　（B）两个都发散　（C）一个收敛一个发散　（D）以上结论都不对

5. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则其在 $x=2$ 处（　　）.

（A）发散；　　（B）条件收敛；

（C）绝对收敛；　　（D）敛散性不能确定.

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1．设 L 为沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的一段，则 $\int_L\sqrt{y}\,\mathrm{d}s=$__________。

2．已知曲线积分 $\int_L[e^x\cos y+yf(x)]dx+(x^3-e^x\sin y)dy$ 与路径无关，则 $f(x)=$__________。

3．设 Σ 是整个球面 $x^2+y^2+z^2=9$，取外侧，则 $\oiint\limits_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值是 ________。

4. $\dfrac{1}{1+x-2x^2}$ 的幂级数展开式为____________________________，收敛半径为______。

5. 函数 $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$ 的傅里叶级数展式为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中系数

$b_3=$ __________。

三、计算题（每题 10 分，共 60 分）

1. 求 $\int_{ABO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中 ABO 为由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周

$x^2+y^2=ax$ （$a>0$）

2. 验证: 在整个 xOy 面内, xy^2dx+x^2ydy 是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ 的和函数.

4. 设 $\sum$ 是 yoz 平面上的圆域 $z^2+y^2\le 1$，求 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$.

5. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{(x^2+y^2)}{2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧。

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$, 将 $f(x)$ 展成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

附加证明题（10 分）

设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $e^{a_n}=a_n+e^{a_n+b_n}$， $(n=1,2,\cdots)$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛。