厦门大学《微积分 I-2》课程

期中试题·答案

考试日期：2011.4　　信息学院自律督导部整理

1. （10 分）求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长。

解：$dx=(r'\cos\theta-r\sin\theta)d\theta$，　$dy=(r'\sin\theta+r\cos\theta)d\theta$，　$ds=\sqrt{r^2+r'^2}d\theta$。故，

$$S=\int_0^{2\pi}ds=\int_0^{2\pi}2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a\text{。}$$

2. （10 分）设 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为 2 阶线性微分方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解，令

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_1'(x)y_2(x),$$

并称之为 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 的 Wronsky 行列式。 试证明：

（1）　$W(x)$ 满足方程 $W'+p(x)W=0$ ；

（2）　$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$ 。

解：（1）　$W'=y_1'y_2'+y_1y_2''-y_1''y_2-y_1'y_2'=y_1y_2''-y_1''y_2$，故

$W'+p(x)W=y_1(y_2''+p(x)y_2')-y_2(y_1''+p(x)y_1')=q(x)(-y_1y_2+y_1y_2)=0$。

（2）　由（1）可得 $\dfrac{dW}{W}=-p(x)dx$，　两边积分则有 $\int_{x_0}^{x}\dfrac{dW}{W}=\ln\left|\dfrac{W(x)}{W(x_0)}\right|=-\int_{x_0}^{x}p(t)dt$，

从而可知 $W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$ 。

3. （10 分）设方程组 $\begin{cases}e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}=\dfrac{x}{\sqrt2}\\ e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}=\dfrac{y}{\sqrt2}\end{cases}$ 确定了函数 $u=u(x,y)$，　$v=v(x,y)$。 求在点 $x=1$，　$y=1$，

$u=0$， $v=\dfrac{\pi}{4}$ 处的du和dv。

解：方法一： 微分法。

将u,v,x,y看成独立变量，对原方程组取全微分得到相应的线性化方程：

$$\begin{cases}(\cos\dfrac{v}{y}e^{\frac{u}{x}}\dfrac{-u}{x^2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2})dx+e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}\dfrac{v}{y^2}dy+\cos\dfrac{v}{y}e^{\frac{u}{x}}\dfrac{1}{x}du+e^{\frac{u}{x}}\sin\dfrac{v}{y}\dfrac{-1}{y}dv=0\\ \sin\dfrac{v}{y}e^{\frac{u}{x}}\dfrac{-u}{x^2}dx+(e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}\cdot\dfrac{-v}{y^2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2})dy+\sin\dfrac{v}{y}e^{\frac{u}{x}}\dfrac{1}{x}du+e^{\frac{u}{x}}\cos\dfrac{v}{y}\dfrac{1}{y}dv=0\end{cases}$$

在$x=1$，$y=1$，$u=0$，$v=\dfrac{\pi}{4}$ 处取值则有：

$$\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}dx+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\pi}{4}dy+\dfrac{\sqrt{2}}{2}du-\dfrac{\sqrt{2}}{2}dv=0\\ (\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{-\pi}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2})dy+\dfrac{\sqrt{2}}{2}du+\dfrac{\sqrt{2}}{2}dv=0\end{cases}$$

容易解得：

$du=\dfrac{1}{2}(dx+dy)$， $dv=\dfrac{1}{2}(-dx+dy)+\dfrac{\pi}{4}dy$。

方法二： 通过求偏导数来得到微分。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{vmatrix}}=\frac{1}{2},$$ 其中F,G为将方程组右端项移至左端所得到的隐函数。

其余偏导数的计算从略。

4. （10 分）求曲线Γ：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\(x-1)^2+y^2=2\end{cases}$ 在点（2, 1，1）处的对称式切线方程。

解：将方程组在（2, 1，1）处直接微分便得到Γ在此处的一般式切线方程：

$$\begin{cases}4(x-2)+2(y-1)+2(z-1)=0\\ 2(x-2)+2(y-1)=0\end{cases}。$$

于是， 该切线的方向向量为：$v=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,1)$， 故切线的对称式方程为：

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}\ 。$$

5. （10 分）给定三维空间内一个平面$\sum$以及平面外一点P_0，再给定正实数e。 求到P_0的距离和到$\sum$的距离的比值为常数e的动点的轨迹。 选择适当的坐标系， 从而说明上述轨迹所对应的二次曲面的类型。

解： 设Σ的方程为：$Ax+By+Cz+D=0$， 其中(A,B,C)为Σ的单位法向量； 设$P_0=(x_0,y_0,z_0)$。则所求动点轨迹的方程为：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=e^2(Ax+By+Cz+D)^2。$$

以Σ为xoy平面， 以P_0到Σ的垂线为z轴建立坐标系， 则上述方程化简为：

$$x^2+y^2+(z-z_0)^2=e^2z^2。$$

当$0<e<1$时， 方程可整理为： $x^2+y^2+(1-e^2)(z-\frac{z_0}{1-e^2})^2=\frac{z_0^2}{1-e^2}-z_0^2$， 动点轨迹为中心在$(0,0,\frac{z_0}{1-e^2})$的椭球面。

当$e=1$时， 方程可整理为： $x^2+y^2=2z_0(z-\frac{z_0}{2})$， 动点轨迹为顶点在$(0,0,\frac{z_0}{2})$的旋转抛物面。

当$e>1$时，方程可整理为$x^2+y^2+(1-e^2)(z-\frac{z_0}{1-e^2})^2=\frac{z_0^2}{1-e^2}-z_0^2$，动点轨迹为中心在$(0,0,\frac{z_0}{1-e^2})$的双叶双曲面。

6. （10 分）设u为定义在平面上的二元函数， u在直角坐标和极坐标下的函数表达式分别为：$u=f(x,y)=g(r,\theta)$。 设u关于(r,θ)有连续的二阶偏导数。 试将二元函数$\frac{\partial u}{\partial x}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$表示成极坐标$(r,\theta)$下所对应的形式。

解：因为极坐标变换公式为：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$， $\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=acr\tan\frac{y}{x}\end{cases}$。故而 ：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}=\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial u}{\partial x})$$

$$=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta})-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta})$$

$$=\cos\theta(\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r})-\frac{\sin\theta}{r}(-\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2})$$

$$=\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\text{。}$$

7.（10 分）在第一卦限内做椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面使得该切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积最小。 求此切平面与椭球的切点， 并求此最小体积。

解：设切点为 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$， 则过 P_0 的切平面方程为：

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0\text{。}$$

因为 P_0 在椭球面上， 故上述方程可改写为截距式方程：

$$\frac{x}{a^2/x_0}+\frac{y}{b^2/y_0}+\frac{z}{a^2/z_0}=1\text{。}$$

故所求四面体体积为：$V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$。 欲使 V 最小， 即求目标函数 $L(x,y,z)=xyz$ 限制在椭球面上的最大值。利用 Lagrange 乘子， 构造新的无约束目标函数 $L_\lambda(x,y,z)=xyz+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$。 原目标函数的最大值点必满足如下方程：

$$\begin{cases} yz+\frac{2x}{a^2}\lambda=0 \\ xz+\frac{2y}{b^2}\lambda=0 \\ xy+\frac{2z}{c^2}\lambda=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}\text{。}$$

由前三个方程可得到： $\frac{a^2yz}{x}=\frac{b^2xz}{y}=\frac{c^2xy}{z}=-2\lambda$； 从而有： $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ 。

故，所求切点为 $P_0=(\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{3}}{3}c)$，对应的最小体积为 $V=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$。

8.（10 分）设 $f(x,y)$ 为平面上二元函数，$f(x,y)$ 在平面上任意一点 $P=(x,y)$ 处的梯度向量为 $\nabla f(x,y)=(2x,y)$。给定 $P_0=(1,1)$，试求 $f(x,y)$ 的过 P_0 点的等高线。

（注：等高线即为 $f(x,y)$ 取值为给定数值的点的轨迹。）

解：方法一：由等高线的定义 $f(x,y)\equiv c$ 可知，限制在等高线上 $f(x,y)$ 的全微分为 0。故，$f(x,y)$ 的过 P_0 的等高线满足如下微分方程：

$$2xdx+ydy=0。$$

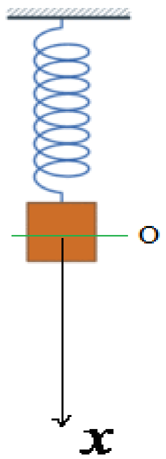
它的通解为：$2x^2+y^2=C$，$C\in R^+$。带入 P_0 点坐标，可知所求等高线为：$2x^2+y^2=3$。

方法二：设所求等高线的方程为 $y=y(x)$，则在等高线上任意一点 $P=(x,y)$ 处的切向量为 $(1,y^{'})$。由于等高线上任意一点的切向量和梯度向量垂直，故可得到如下微分方程：

$$\begin{cases}2x+yy^{'}=0\\ y(1)=1\end{cases}。$$

从中易知所求等高线为：$2x^2+y^2=3$。

9.（20 分）设有弹簧振子如右图。设弹簧的弹性系数为 $c=k^2$，k 为某正的常数，振子为单位质量。将重物向下拉至距离平衡位置 A 处然后无初速度地松开，假定整个运动过程中不考虑空气等产生的阻力。建立以平衡位置为原点，向下为正方向的坐标轴，并设初始时刻为 $t=0$，初始时刻振子恰好位于 A 处。试考察以下两种情形下振子的运动情况。



（1）写出振子不受外力影响下做简谐振动的运动方程，并求解之。

（2）假设振子受到 $F=B\sin pt$ 的周期外力影响，写出此时振子的运动方程并求解之。

解：（1）设在 t 时刻振子位于 $x(t)$ 处，此时振子受到的弹性恢复力为：

$F(t)=-k^2x(t)$。由 Newton 第二定律可知此时振子满足的运动方程为：

$$x^{''}+k^2x=0，$$

而初始条件为：$x(0)=A,x^{'}(0)=0$。

此二阶常系数微分方程的通解为：$x(t)=C\cos kt+D\sin kt$。带入初值，可知振子的位移函数

为：

$$x(t)=A\cos kt。$$

（2）在受周期外力影响下， 同样利用 Newton 第二定律可得到振子满足的运动方程为：

$$x''+k^2x=B\sin pt。$$

考虑对应的复化的方程 $x''+k^2x=Be^{ipt}$ 。下分两种情况考虑：

（a） $p=k$. 令 $x(t)=Cte^{ikt}$ ， 带入复化方程可得： $2ikCe^{ikt}=Be^{ikt}$ ，从而 $C=\frac{B}{2ik}=\frac{-Bi}{2k}$ 。故原方程的一个特解为： $x(t)=\frac{-B}{2k}t\cos kt$ 。从而原方程通解为： $x(t)=\frac{-B}{2k}t\cos kt+C\cos kt+D\sin kt$ 。带入初值， 可知振子的位移函数为： $x(t)=A\cos kt+\frac{B}{2k^2}\sin kt-\frac{B}{2k}t\cos kt$ 。

（b） $p\neq k$. 令 $x(t)=Ce^{ipt}$ ，带入复化方程可得： $C(k^2-p^2)e^{ipt}=Be^{ipt}$ ， 从而 $C=\frac{B}{k^2-p^2}$ 。故原

方程的一个特解为： $$x(t)=\frac{B}{k^2-p^2}\sin pt。$$

从而原方程通解为： $x(t)=\frac{B}{k^2-p^2}\sin pt+C\cos kt+D\sin kt$ 。带入初值， 可知振子的位移函数为：

$$x(t)=A\cos kt+\frac{B}{p^2-k^2}\cdot\frac{p}{k}\sin kt+\frac{B}{k^2-p^2}\sin pt。$$

附加题：

10. （10 分）设二元函数 $z=f(x,y)$ 在开区域 D 内的偏导数 f_x' 和 f_y' 均有界， 试

证明 $f(x,y)$ 在 D 连续。

证明： 设在 D 内恒有 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|<M,\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|<M$ ， 其中 M 为某固定常数。取定 D 内任意一点 $P_0=(x_0,y_0)$ ，

取 $\Delta x,\Delta y$ 充分小， 使得以 P_0 为中心半径为 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的小圆盘落在 D 中。令 $P=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ ， $Q=(x_0+\Delta x,y_0)$ 。使用 Lagrange 中值定理则有：

$$|f(P)-f(P_0)|\leq|f(P)-f(Q)|+|f(Q)-f(P_0)|=\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\xi_1)\cdot\Delta y\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_2)\cdot\Delta x\right|\leq 2M\rho,$$

其中 ξ_1 和 ξ_2 分别为线段 $\overline{PQ}$ ， $\overline{QP_0}$ 上的点。 从上式显然可知 $f(x,y)$ 在 P_0 连续。