厦门大学《微积分 I-2》课程

补充习题

信息学院自律督导部整理

第十一章　习题课一 ：曲线积分部分

主要内容：

一、　对弧长的曲线积分

曲线 $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt\text{；}$$

曲线 $L:\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases} \quad (a \le x \le b)$

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[x,y(x),z(x)]\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}dx\text{；}$$

曲线 $L:r=r(\theta) \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[r\cos\theta,r\sin\theta]\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta\text{。}$$

二、　对坐标的曲线积分、格林公式、积分与路径无关

向量 $\vec{A}=P(x,y)\,\vec{i}+Q(x,y)\,\vec{j}$ 在分段光滑的有向曲线 L 上连续，

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$$

曲线 $L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$，

$$\int_\alpha^\beta \{P[x(t),y(t)\,]x'(t)+Q[x(t),y(t)\,]\,y'(t)\}dt\text{；}$$

曲线 $L:\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \end{cases} \quad (a \le x \le b)$，

$$\int_a^b \{P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]\,y'(x)\}dx \text{。}$$

将 $\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ 化成一重积分，注意积分的起始点和终点，即积分的方向！

格林公式：

（1）L 为封闭曲线，且 L 所围的内部区域 无奇点，则

$$\oint_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\text{；}$$

（2）L 为封闭曲线，且 L 所围的内部区域 有奇点，需作闭合曲线 L_1 “挖掉”奇点后再用格林公式

$$\begin{aligned}\text{原积分式}&=\oint_{L+L_1} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy-\oint_{L_1} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\\ &=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\oint_{L_1} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\end{aligned}$$

（3）若 L 为不封闭曲线，须添加辅助线 L_1，使 $L+L_1$ 封闭，在利用格林公式，则

$$\begin{aligned}\text{原积分式}&=\oint_{L+L_1} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy-\int_{L_1} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\\ &=\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy-\int_{L_1} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy.\end{aligned}$$

对 $\int_L P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz$，还可利用 Stoke 公式计算

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial z})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

$$=\oint_{\Gamma} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

当 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在单连通区域 D 内有一阶连续偏导数时，

下列命题等价：

1. 积分 $\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ 与路径无关；

2. $du(x,y)=P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ ；

3. $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$；

4. 闭合路径积分为零。

三、 利用积分与路径无关求全微分的原函数：

对于 $\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ ，当有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 时，

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ （仅与起止点有关，与路径无关！）

求解原函数 $u(x,y)$：

方法 1. 可选择走折线进行积分：

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy\,,$$

或

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx\,.$$

方法 2. 原函数法：

第一步 $u(x,y)=\int\dfrac{\partial u}{\partial x}dx=\int P(x,y)dx=\varphi(x,y)+c(y)$；

第二步 $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}+c'(y)=Q(x,y)\Rightarrow c(y)$；

第三步 将$c(y)$代入第一步的结果，即得全微分函数 $u(x,y)$。

方法 3．凑全微分法：

四、 求解全微分方程：$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$，其中$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$。

求解方法：利用上述三种方法之一求出等式左侧的$u(x,y)$，然后写出

$u(x,y)=C$，即得到全微分方程的通解。

归纳“计算对坐标的曲线积分”的思路：

当面对 $\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ 时，

首先，判断是否有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，若有，选取折线积分；

其次，若 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}\neq\dfrac{\partial P}{\partial y}$，可先考虑利用格林公式；

再次，若不能利用格林公式，直接将曲线积分化为定积分。

典型例题：

例 1 求 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 L 为 $x^2+y^2=4x$。

解：圆周 $x^2+y^2=4x$ 的参数方程为$\begin{cases} x=2+2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$，

则 $ds=\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt=2dt$

因此，$\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds=\oint\limits_L \sqrt{4x}\,ds$

$$=\int_0^{2\pi}4\sqrt{2+2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi}4\sqrt{4\frac{1+\cos t}{2}}\,dt=8\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt$$

令$\frac{t}{2}=\theta$，则$t=2d\theta$，当$t=0,\to\theta=0$；当$t=2\pi,\to\theta=\pi$，于是有

$$=8\int_0^{\pi}|\cos\theta|\cdot 2d\theta=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=32$$

例 2. 求曲线积分$\int_L y^2ds$，其中L：$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi.$

解： $ds=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}dt=a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$

故 $\int_L y^2ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=8a^3\int_0^{2\pi}(\frac{1-\cos t}{2})^2\left|\sin\frac{t}{2}\right|d$

$$=8a^3\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^5 dt\ \underline{\underline{\ u=\frac{t}{2}\ }}\ 16a^3\int_0^{\pi}|\sin u|^5du=32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 udu$$

$$=32a^3\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{256}{15}a^3.$$

例 3. 求曲线积分$\oint_L xydx+yzdy+xzdz$，L为椭圆$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x+y+z=1\end{cases}$的逆时针方向.

解 1： L：$x=\cos\theta, y=\sin\theta,\quad z=1-\cos\theta-\sin\theta, (0\le\theta\le 2\pi).$

$$\oint_L xydx+yzdy+xzdz$$
$$=\int_0^{2\pi}[-\cos\theta\sin^2\theta+\cos\theta\sin\theta(1-\cos\theta-\sin\theta)+\cos\theta(1-\cos\theta-\sin\theta)(\sin\theta-\cos\theta)]d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}[-3\cos\theta\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta-\cos^2\theta\sin\theta-\cos^2\theta+\cos^3\theta]d\theta$$

$$=-\sin^3\theta\Big|_0^{2\pi}+\sin^2\theta\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta+\int_0^{2\pi}\cos^3\theta d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)d\theta-\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)d\sin\theta=-\pi$$

解 2： 利用斯托克斯公式：$P(x,y,z)=xy,\quad Q(x,y,z)=yz,\quad R(x,y,z)=xz$，

$$\oint_L xydx + yzdy + xzdz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} ds ,$$

其中Σ为空间闭曲线L：$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$所围的平面$x+y+z=1$上的面积。

Σ：$x+y+z=1$的单位法向量：$\overrightarrow{n^0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$，于是

$$\oint_L xydx + yzdy + xzdz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} ds = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma (-y-z-x) ds$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma (y+z+x) ds = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma ds \quad (\Sigma : z = 1-x-y)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dxdy = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{D_{xy}} \sqrt{3}\, rdrd\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rdr = -\pi \text{ 。}$$

例 4．设曲线Γ是菱形之边界，方向为逆时针方向，其顶点分别为

$(2,0),(0,3),(-2,0),(0,-3)$，求曲线积分$\oint_\Gamma \frac{5y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{3|x|+2|y|}$之值。

解：由图可知在Γ上，$3|x|+2|y|=6$，所以

$$\oint_\Gamma \frac{5y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{3|x|+2|y|} = \frac{1}{6}\oint_\Gamma 5y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y$$（其中$P=5y$，$Q=-x$，利用格林公式）

$$= \frac{1}{6}\iint_D [\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(5y)}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{6}\iint_D -6\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -12.$$

例 5．计算$\oint_L \frac{y\,\mathrm{d}x - (x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2 + y^2}$，其中$L$为曲线$|x|+|y|=2$，方向为逆时针。

解：$P(x,y) = \frac{y}{(x-1)^2+y^2}$，$Q(x,y) = -\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$

当$(x-1)^2+y^2\neq 0$时， $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=\frac{(x-1)^2-y^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

作一位于 D 内的圆周l: $(x-1)^2+y^2=r^2$，方向为逆时针，记由L和l所围成的区域为 D, 则由格林（Green）公式,得

$$\oint_L \frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}-\oint_l \frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

所以

$$\oint_L \frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\oint_l \frac{y\,\mathrm{d}x-(x-1)\,\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{-r\sin t\cdot r\sin t-r\cos t\cdot r\cos t}{r^2}dt=-2\pi$$

例 6 设在xoy平面上，有力$\vec{F}=(x^2+xy)\vec{i}+(y^2+\frac{x^2}{2})\vec{j}$构成力场，求质点沿抛物线$y^2=x$从点$O(0,0)$移动到点$B(1,1)$时，场力所做的功。

解： $P=(x^2+xy),Q=(y^2+\frac{x^2}{2})$在$xoy$平面上具有一阶连续偏导数，且有

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=x$，即在$xoy$平面上，力$\vec{F}$做功与路径无关。

$$W=\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x^2+xy)dx+(y^2+\frac{x^2}{2})dy$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(y^2+\frac{1}{2})dy=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}.$$

例 7 试确定λ的值，使在右半平面（$x>0$）上的曲线积分

$\int_L 2xy(x^4+y^2)^\lambda dx-x^2(x^4+y^2)^\lambda dy$与路径无关，并确定函数$u(x,y)$的表达式。

解： 依题意 $\frac{\partial}{\partial y}\left(2xy(x^4+y^2)^\lambda\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2(x^4+y^2)^\lambda\right)$，

$$2x(x^4+y^2)^\lambda+\lambda 4xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1}$$

整理上式：$4x(x^4+y^2)^\lambda+\lambda 4x(x^4+y^2)^\lambda=0$，

（注意 $x>0$）得 $(x^4+y^2)^{\lambda}+\lambda(y^2+x^4)^{\lambda}=0 \ \Rightarrow \ \lambda=-1$。

于是，令 $du(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}dx-\dfrac{x^2}{x^4+y^2}dy$

方法 1：（特殊路径法）在右半平面取点（1,0）为积分路径的起点，走折线至

(x,y)， $u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\dfrac{2xy}{x^4+y^2}dx-\dfrac{x^2}{x^4+y^2}dy$

$$=\int_1^x 0dx-\int_0^y \frac{x^2}{x^4+y^2}dy=-\int_0^y \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}d\left(\frac{y}{x^2}\right)=-\arctan\frac{y}{x^2}.$$

或全体原函数 $u(x,y)=-\arctan\dfrac{y}{x^2}+C.$

方法 2：（原函数法） 由 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$

$$\Rightarrow \ u(x,y)=\int\frac{2xy}{x^4+y^2}dx=\int\frac{ydx^2}{x^4+y^2}=\int\frac{1}{x^4}\frac{ydx^2}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}=\int\frac{1}{(x^2)^2}\frac{ydx^2}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}$$

$$=-\int\frac{yd\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}=-\int\frac{d\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x^2}\right)^2}=-\arctan\frac{y}{x^2}+c(y)，$$

又 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[-\arctan\dfrac{y}{x^2}+c(y)\right]=-\dfrac{x^2}{x^4+y^2}+c'(y)=-\dfrac{x^2}{x^4+y^2}$

$\Rightarrow \ c'(y)=0$，即 $c(y)=C$（C 为任意常数）。

所以 $u(x,y)=-\arctan\dfrac{y}{x^2}+C.$

例 8 计算 $\int_L(3xy+\sin x)\,dx+(x^2-ye^y)\,dy$，其中 L 是 $y=x^2-2x$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(4,8)$ 的曲线弧段。

解 1：$P=3xy+\sin x$， $Q=x^2-ye^y$ 在整个 xoy 面上具有连续一阶偏导数。但 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=3x\neq 2x=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，积分与路径有关。

原式$=\left[\int_L (2xy+\sin x)\,dx+(x^2-ye^y)\,dy\right]+\int_L xy\,dx=I_1+I_2$

$I_1=\int_L (2xy+\sin x)\,dx+(x^2-ye^y)\,dy$ 与路径无关，

选择折线：从(0,0)到（4,8）

$$I_1=\int_0^4(\sin x)dx+\int_0^8(16-ye^y)\,dy$$

$$=-\cos x\Big|_0^4+[16y-ye^y+e^y]_0^8=-\cos 4+128-7e^8$$

$$I_2=\int_L xy\,dx=\int_0^4 x(x^2-2x)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right)_0^4=\frac{64}{3}$$

所以 $\int_L (3xy+\sin x)\,dx+(x^2-ye^y)\,dy=I_1+I_2$

$$=\frac{448}{3}-7e^8-\cos 4\text{。}$$

解 2：$\int_L (3xy+\sin x)\,dx+(x^2-ye^y)\,dy$（一投二代）

$$=\int_0^4[3x(x^2-2x)+\sin x+(x^2-(x^2-2x)e^{(x^2-2x)})(2x-2)]\,dx$$

$$=\int_0^4[5x^3-8x^2+\sin x-(x^2-2x)e^{(x^2-2x)})(2x-2)]\,dx$$

$$=[\frac{5}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3-\cos x]_0^4-\int_0^4(x^2-2x)e^{(x^2-2x)})(2x-2)]\,dx$$

$$=[320-\frac{512}{3}-\cos 4+1]-\int_0^8 ye^y\,dy$$

$$=[320-\frac{512}{3}-\cos 4+1]-[ye^y-e^y]_0^8$$

$$=[320-\frac{512}{3}-\cos 4+1]-[8e^8-e^8+1]=\frac{448}{3}-7e^8-\cos 4\text{。}$$

解 3：利用格林公式 （加辅助线：$A(4,8)\to B(0,8)$，$B(0,8)\to O(0,0)$）

$$\int_L (3xy+\sin x)\,dx+(x^2-ye^y)\,dy$$

$$=\oint_{L+\overline{AB}+\overline{BO}}(3xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)\,dy-\int_{\overline{AB}+\overline{BO}}(3xy+\sin x)\,dx+(x^2-ye^y)\,dy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}[2x-3x]dxdy+\int_{\overline{BA}}(24x+\sin x)\,dx+\int_{\overline{OB}}(-ye^{y})\,dy$$

$$=-\int_0^4 xdx\int_{x^2-2x}^{8}dy+\int_0^4(24x+\sin x)dx-\int_0^8 ye^{y}\,dy$$

$$=-\int_0^4 x(8-x^2+2x)dx+12x^2\Big|_0^4-\cos x\Big|_0^4-[ye^{y}-e^{y}]_0^8$$

$$=-[4x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3]_0^4+192-\cos 4+1-7e^8-1$$

$$=-\frac{128}{3}+192-\cos 4-7e^8=\frac{448}{3}-7e^8-\cos 4.$$

例 9. 验证：在整个 xOy 面内，xy^2dx+x^2ydy 是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数.

证 1　$P=xy^2,\ Q=x^2y$, 且 $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy=\frac{\partial Q}{\partial x},\ x\in R.$

故在整个 xOy 面内，xy^2dx+x^2ydy 是某个函数的全微分. 走折线线，

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}xy^2dx+x^2ydy=\int_{\overline{OA}}xy^2dx+x^2ydy+\int_{\overline{AB}}xy^2dx+x^2ydy$$

$$=0+\int_0^y x^2ydy=x^2\int_0^y ydy=\frac{x^2y^2}{2}.$$

证 2　利用原函数法求全微分函数 $u(x,y)$.

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=xy^2$　　$u=\int xy^2dx=\frac{x^2y^2}{2}+\varphi(y),$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的待定函数. 由此得　$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y+\varphi'(y).$

又 u 必须满足 $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2y$，故有 $x^2y+\varphi'(y)=x^2y$，

$$\varphi'(y)=0,\qquad \varphi(y)=C,$$

即，所求函数为 $u=x^2y^2/2+C.$

证 3　凑全微分：$du(x,y)=\frac{1}{2}y^2dx^2+\frac{1}{2}x^2dy^2=\frac{1}{2}d(x^2y^2)=d(\frac{1}{2}x^2y^2)$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2.$$

例 10. 试确定 a，b 使 $\left(ax\cos y+y^2\cos x\right)dx+\left(by\sin x-x^2\sin y\right)dy$

为某一函数的全微分，并求这样一个函数 $u(x,y)$。

解：$P=\left(ax\cos y+y^2\cos x\right)$，$Q=\left(by\sin x-x^2\sin y\right)$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\left(-ax\sin y+2y\cos x\right),\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\left(by\cos x-2x\sin y\right)$$

由 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad a=2,b=2$。

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)}\left(2x\cos y+y^2\cos x\right)dx+\left(2y\sin x-x^2\sin y\right)dy$$

$$=\int_0^x 2xdx+\int_0^y\left(2y\sin x-x^2\sin y\right)dy$$

$$=x^2+\left(y^2\sin x+x^2\cos y\right)_0^y$$

$$=x^2+y^2\sin x+x^2\cos y-x^2=y^2\sin x+x^2\cos y.$$

例 11 验证方程 $(\sin x+2y)dx+\left(2x+e^y\right)dy=0$ 是全微分方程，并求其通解。

解：$P(x,y)=\sin x+2y$，$Q(x,y)=2x+e^y$

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$，所以 $(\sin x+2y)dx+\left(2x+e^y\right)dy=0$ 是全微分方程。

走折线积分：

$$u(x,y)=\int_0^x\sin xdx+\int_0^y\left(2x+e^y\right)dy=-\cos x+2xy+e^y$$

则方程的通解为 $e^y+2xy-\cos x=C$，C 为任意常数。

凑全微分：

$(\sin x+2y)dx+\left(2x+e^y\right)dy=0$，$d\left(-\cos x+2xy+e^y\right)=du(x,y)=0$，

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = -\cos x + 2xy + e^{y} = C\text{.}$$

例 12. 求 $\int_{ABO}(e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy$，其中 ABO 为由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$ （$a > 0$）

解： 在 Ox 轴作连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(a,0)$ 的辅助线, 它与上半圆周便构成封闭的半圆形 $ABOA$, 于是

$$\int_{ABO弧} = \oint_{ABOA} - \int_{OA} \ ,$$

根据格林公式

$$\oint_{ABOA}(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = \iint_D [e^x\cos y - (e^x\cos y - m)]dxdy$$

$$= \iint_D m dxdy = m\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

由于 $\overline{OA}$ 的方程为 $y = 0$, 所以

$$\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = 0$$

综上所述, 得

$$\int_{ABO}(e^x\sin y - my)dx + (e^x\cos y - m)dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$