厦门大学《微积分 I-2》课程
期末试题·答案

考试日期： 2010　信息学院自律督导部整理

一、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 C　2、 A　3、 A　4、 C　5、 C

二、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 $\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$　2、$3x^2$　3、36π　4、$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2(-2)^n+1)x^n$， $\frac{1}{2}$　5、 $\frac{2}{3}\pi$

三、计算题（每题 10 分，共 60 分）

1．求 $\int_{ABO}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$，其中 ABO 为由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$ （$a>0$）

解　在 Ox 轴作连接点 $O(0,0)$ 与点 $A(a,0)$ 的辅助线,它与上半圆周便构成封闭的半圆形 $ABOA$, 于是

$$\int_{\overset{\frown}{ABO}} = \oint_{ABOA} - \int_{OA},$$

根据格林公式

$$\oint_{ABOA}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\iint_D[e^x\cos y-(e^x\cos y-m)]dxdy$$

$$=\iint_D mdxdy = m\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

由于 $\overline{OA}$ 的方程为 $y=0$, 所以

$$\int_{\overline{OA}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0$$

综上所述,得

$$\int_{\overset{\frown}{ABO}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\frac{\pi ma^2}{8}.$$

2．验证：在整个 xOy 面内，$xy^2dx + x^2ydy$ 是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数.

证 1 $P = xy^2,\ Q = x^2y$, 且 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x},\ x \in R.$

故在整个 xOy 面内，$xy^2dx + x^2ydy$ 是某个函数的全微分.取积分路线如图,则

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2dx + x^2ydy = \int_{\overline{OA}} xy^2dx + x^2ydy + \int_{\overline{AB}} xy^2dx + x^2ydy$$

$$= 0 + \int_0^y x^2ydy = x^2\int_0^y ydy = \frac{x^2y^2}{2}.$$

证 2 利用原函数法求全微分函数 $u(x,y)$.

由 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xy^2 \Longrightarrow u = \displaystyle\int xy^2dx = \frac{x^2y^2}{2} + \varphi(y),$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的待定函数.由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + \varphi'(y).$$

又 u 必须满足

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2y \Longrightarrow x^2y + \varphi'(y) = x^2y \Longrightarrow \varphi'(y) = 0 \Longrightarrow \varphi(y) = C,$$

所求函数为 $u = x^2y^2/2 + C.$

3．求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的和函数.

解 级数的收敛域为 $(-1,1]$, 设其和函数为 $s(x)$, 即

$$s(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

显然 $s(0) = 0$, 且 $s'(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \cdots = \dfrac{1}{1+x}\ (-1 < x < 1),$

由积分公式 $\displaystyle\int_0^x s'(x)dx = s(x) - s(0)$, 得

$$s(x) = s(0) + \int_0^x s'(x)dx = \int_0^x \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x),$$

因题设级数在 $x=1$ 时收敛，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)\ (-1 < x \le 1).$

4. 设 $\sum$ 是 yoz 平面上的圆域 $z^2 + y^2 \le 1$，求 $I = \iint_{\Sigma}(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}S$.

解 注意到 $x = 0$，$\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2} = 0$，所以 $I = \iint(y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\,ydz = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr = \dfrac{\pi}{2}$

5．计算 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{(x^2+y^2)}{2}$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=2$ 之间的部分的下侧。

解 1 $\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha \mathrm{dS}=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}dxdy.$

在曲面 Σ 上，有 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=\dfrac{z_x}{-1}=\dfrac{x}{-1}=-x.$

$$\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)dydz-zdxdy=\iint\limits_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]dxdy$$

$$=-\iint\limits_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)+x\right]\cdot(-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\left(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2\right)rdr=8\pi.$$

解 2 利用高斯公式只需计算 $\{(x,y,z):z=2,x^2+y^2\le 4\}$ 下侧上的积分可得 8π

6．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ ，将 $f(x)$ 展成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解：$\because \quad \dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,1)$

$\therefore \quad \arctan x=\int\limits_0^x\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$

于是 $\quad f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$

$$\begin{aligned}f(x)&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]x^{2n}\\&=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in[-1,1]\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

附加证明题（10 分）

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且$e^{a_n}=a_n+e^{a_n+b_n}$， $(n=1,2,\cdots)$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛。

附加证明题（10 分）

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，且$e^{a_n}=a_n+e^{a_n+b_n}$， $(n=1,2,\cdots)$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛。

证：由于$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，得$\lim_{n\to\infty} a_n=0$，由于 $b_n=\ln(e^{a_n}-a_n)-a_n$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(e^{a_n}-a_n)-\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

因为 $\because a_n>0,\ e^{a_n}>1+a_n, \therefore \ln(e^{a_n}-a_n)>0$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(e^{a_n}-a_n)$是正项级数。

又因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^{a_n}-a_n)}{a_n}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-x}=0$

由比较判别法得，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(e^{a_n}-a_n)$收敛，从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$收敛。　　证毕。