# 2016-2017 学年第二学期《微积分 I-2》期末试卷解答

一、讨论下列级数的敛散性. 如果收敛，说明是条件收敛，还是绝对收敛？（每小题 4 分，共 12 分）

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$；　　2. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}+n\sin\frac{1}{n}\right)$；　　3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2[1+2(-1)^n]^n}{6^n}$.

解：1. 由于$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}$发散。　-----(1 分)

设 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}, f'(x)=\frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0,(x>1)$，数列$\left\{\frac{\sqrt{n}}{n-1}\right\}_2^{\infty}$单调递减，

又$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$，由莱布尼兹判别法，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$收敛。　-----(3 分)

因此，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$条件收敛。　-----(4 分)

2. 由于$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1\neq 0$，级数$\sum_{n=2}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$发散，　-----(2 分)

因此，级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}+n\sin\frac{1}{n}\right)$发散。　-----(4 分)

3. $\frac{n^2\left|1+2(-1)^n\right|^n}{6^n}\le\frac{n^2}{2^n}$，　-----(1 分)

由比值判别法$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2}=\frac{1}{2}<1$得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$收敛，　-----(3 分)\

由比较判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$绝对收敛。　-----(4 分)

二、计算下列各题：（每小题 6 分，共 12 分）

1. $\iint_D |xy|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，平面区域$D:\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\},a>0$.

解：设 $D_1$ 为区域 $D$ 在第一象限部分，由对称性

$$\iint_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$ -----------(2 分)

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\rho = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho^3\mathrm{d}\rho$$ -----------(4 分)

$$= 4\left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^2}{2}.$$ ----------(6 分)

2. $\iiint_\Omega x^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ,其中 $\Omega$ 为 $z=1$， $z=4$ 和 $z=y^2+x^2$ 所围区域.

解一: 利用柱坐标截面法, $\Omega:\begin{cases} 1\le z\le 4; \\ (x,y)\in D_z : 0\le\rho\le\sqrt{z}, 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$

$$\iiint_\Omega x^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^4\mathrm{d}z\iint_{D_z} x^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$ ---------(4 分)

$$= 2\pi\int_1^4\frac{z^2}{4}\mathrm{d}z = \frac{21\pi}{2}.$$ ---------(6 分)

解二: 利用柱坐标投影法:

$$\Omega:\begin{cases} 1\le z\le 4, \quad (x,y)\in D_1 : 0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi; \\ x^2+y^2\le z\le 4, \quad (x,y)\in D_2 : 1\le\rho\le 2, 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$$

$$\iiint_\Omega x^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_1} x^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_1^4\mathrm{d}z + \iint_{D_2} x^2 + y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^4\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_1^4\mathrm{d}z + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4\mathrm{d}z$$ --------(4 分)

$$= \frac{3\pi}{2} + 9\pi = \frac{21\pi}{2}.$$ --------(6 分)

三、计算下列各题：（每小题 6 分，共 12 分）

(1) $\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ , 其中Ω：$x^2+y^2+z^2\le 1$.

解：令 $\Omega_1$：$x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0$,利用球坐标，

$$\Omega_1\text{：}x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi,\ 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 1,$$

由三重积分的对称性可得：

$$\iiint\limits_{\Omega} e^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iiint\limits_{\Omega_1} e^{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 e^{r\cos\varphi}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$ --------(4 分)

$$=-4\pi\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{r\cos\varphi}r\mathrm{d}(r\cos\varphi)$$

$$=4\pi\int_0^1 r\left(e^r-1\right)\mathrm{d}r=4\pi\left(re^r-e^r-\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=2\pi.$$ --------(6 分)

(2) $\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s$，曲线Γ为$x^2+y^2+z^2=1$与$y=x$的交线.

答案：$\Gamma: x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, z=\sin t\quad(0\le t\le 2\pi),$ -----------(1 分)

$$\int_\Gamma z^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)^2+\left(\cos t\right)^2}\mathrm{d}t$$ ----------(4 分)

$$=\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi.$$ ----------(6 分)

四、(1)确定常数$a,b$, 使得$\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$为某个二元函数$u(x,y)$的全微分;

(2)求该二元函数$u(x,y)$。（8 分）

解：1. 设$P(x,y)=\frac{ax+y}{x^2+y^2}, Q(x,y)=-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}$

则$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-2xy+2xb}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2-2axy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ --------(2 分)

由于$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，我们有$-2xy+2xb=-2axy\Rightarrow a=1, b=0.$ --------(4 分)

2. 解一：

$$u(x,y)=\int_1^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_1^x \frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^y\left(\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y$$ -----(2 分)

$$=\ln|x|+\int_0^y\left(\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y=\ln|x|+\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\arctan\frac{y}{x}\right)\Bigg|_0^y$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\arctan\frac{y}{x}.$$ -----(4 分)

解二： $u(x,y)=\int\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x=\int\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{x}{y}+C(y)$

--------(2 分)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{x}{x^2+y^2}+C'(y)=Q(x,y)\Rightarrow C'(y)=0$$

因此，取 $C(y)=0$，则 $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{x}{y}.$ --------(4 分)

五、用格林公式计算曲线积分 $I=\int_L(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是点 A(0,0)到点 B(2,0)的上半圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ .（8 分）

解: 设从 A(0,0)到 B(2,0)的有向线段为 $l$ .则 $L^-+l$ 为上半球面 $D: y\le\sqrt{2x-x^2}$ 的正向边界，由格林公式 ------(2 分)

$$I=-\int_{L^-}(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=-\left[\int_{L^-+l}(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y-\int_l(x^2-2y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=-\left(\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\right)$$ --------(6 分)

$$=-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}.$$ --------(8 分)

六、将函数$\frac{1}{x^2-1}$展开成$(x-3)$的幂级数。（8 分）

解：$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2+x-3}-\frac{1}{4+x-3})$$

$$=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{x-3}{2}}-\frac{1}{8}\frac{1}{1+\frac{x-3}{4}}$$ -----(4 分)

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-3}{2})^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-3}{4})^n,\left(\left|\frac{x-3}{2}\right|<1\text{且}\left|\frac{x-3}{4}\right|<1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}})(x-3)^n,(1<x<5).$$ -----(8 分)

七、设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,利用 Gauss 公式计算曲面积分

$$\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy,$$

其中$\Sigma$为任意不经过原点的闭曲面, 取外侧。(10 分)

解：当$(x,y,z)\neq(0,0,0)$时，$\frac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5},\frac{\partial\left(\frac{y}{r^3}\right)}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5},\frac{\partial\left(\frac{z}{r^3}\right)}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}$，有

$$\frac{\partial\left(\frac{x}{r^3}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{y}{r^3}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{z}{r^3}\right)}{\partial z}=0.$$ -----(2 分)

设$\Sigma$围成的空间区域为$\Omega$.

如果$\Omega$不包含原点，则利用 Gauss 公式，可得$\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy=0$.

-----(5 分)

如果$\Omega$包含原点，在椭球面内作辅助小球面

$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$，取内侧， -----(7 分)

由高斯公式，可得

$$\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy-\oiint_{\Sigma_1}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy$$

$$=0-\oiint_{\Sigma_1}\frac{x}{r^3}dydz+\frac{y}{r^3}dzdx+\frac{z}{r^3}dxdy=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma_1^-}xdydz+ydzdx+zdxdy$$ ------(8 分)

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint_{\Omega}3dv=4\pi.$$ ------(10 分)

八、设$\Sigma$是四面体$x+y+z\le 1, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$的表面，

计算$I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$.（10 分）

解：设四面体的四个面分别为

$$\Sigma_1: x+y+z=1, \Sigma_2: z=0, \Sigma_3: x=0, \Sigma_4: y=0,$$

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{(1+x+y)^2}\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma_2}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{(1+x+y)^2}\sqrt{1+0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma_3}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S=\iint_{D_{yz}}\frac{1}{(1+y)^2}\sqrt{1+0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma_4}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xz}}\frac{1}{(1+x)^2}\sqrt{1+0}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$ --------(6 分)

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S=(\sqrt{3}+1)\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}y+2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2.$$ ------(10 分)

九、求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!}$的收敛域以及和函数$S(x)$，并由此求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)4^{n}}{(n+1)!}$（10分）

解：设$u_n=\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!},\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)x^2}{(n+2)(2n+1)}=0,$

因此幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. ------(2 分)

$x\in(-\infty,+\infty)$时，设$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!},$

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n+1)x^{2n}}{(n+1)!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{(n+1)!},(x\neq 0)$$

$$=\frac{1}{x}(e^{x^2}-1),(x\neq 0).$$ ------(6 分)

等式两边同时求导，得$S(x)=-\dfrac{1}{x^2}(e^{x^2}-1)+2e^{x^2},(x\neq 0).$

由幂级数的表达式得$S(0)=1.$ ------(8 分)

令$x=2$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)4^n}{(n+1)!}=S(2)=-\dfrac{1}{4}(e^4-1)+2e^4=\dfrac{7}{4}e^4+\dfrac{1}{4}.$ ------(10 分)

十、将函数$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\dfrac{\pi}{2})\\ 0, & x\in[\dfrac{\pi}{2},\pi]\end{cases}$在$[0,\pi]$上展开成正弦级数，并求该级数在$[0,\pi]$上的和函数$S(x)$.（10 分）

解：将$f(x)$奇周期延拓为以$2\pi$为周期的周期函数$F(x)$，$F(x)$满足收敛定理的条件，当$x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2},k\in ¢$时，$F(x)$的傅立叶级数收敛于$F(x)$。-----(1 分)

由于$F(x)$为奇函数，$a_n=0,n=0,1,2,\mathrm{L}$ ------(2 分)

$b_1=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2},$ ------(3 分)

当$n\neq 1$时，$b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin nx\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[(n-1)x\right]-\cos\left[(n+1)x\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left[(n-1)x\right]}{n-1}-\frac{\sin\left[(n+1)x\right]}{n+1}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left[(n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{n-1}-\frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{n+1}\right)=\begin{cases}0, & n=2k+1,k\in \text{¢}^{+};\\ \dfrac{(-1)^{k-1}4k}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k,k\in \text{¢}^{+},\end{cases}$$ ------(7 分)

当 $x\in[0,\pi],x\neq\frac{\pi}{2}$ 时， $f(x)=F(x)\big|_{[0,\pi]}=\frac{1}{2}\sin x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}4k}{\pi(4k^2-1)}\sin 2kx.$------(8 分)

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时， $F(x)$ 的傅立叶级数收敛于 $\frac{f(\frac{\pi}{2}+0)+f(\frac{\pi}{2}-0)}{2}=\frac{1}{2}.$

因此，在 $[0,\pi]$ 上和函数为 $S(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[0,\frac{\pi}{2});\\ \frac{1}{2}, & x=\frac{\pi}{2};\\ 0, & x\in(\frac{\pi}{2},\pi].\end{cases}$ ------(10 分)