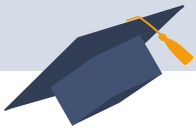


微积分不相信眼泪

2018级计算机类二班

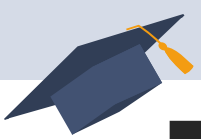
张逸辰



Part I

常微分方程





目录——常微分方程

基本概念

一阶微分方程
求解

可分离变量
型

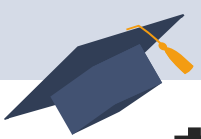
可化为线性

二阶微分方程
求解

可降阶型

二阶常系数
线性





基本概念

- 何为微分方程？

函数、导数、自变量之间的关系式。

- 何为解微分方程？

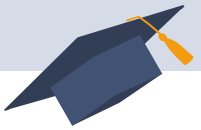
找出未知函数。

- 阶：方程中最高阶导数的阶数。

- 通解：任意常数（相互独立，不能通过合并而减少）的个数与微分方程的阶数相同。

- 特解：1. 利用初值条件确定通解中的任意常数；2. 特解不一定包含在通解里。





一阶微分方程的求解

(一) 可分离变量型

- 简单情况: $g(y)dy=f(x)dx$

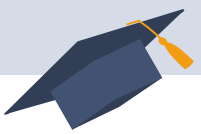
方法: 分离变量, 两端积分

- 齐次: $dy/dx=f(y/x)$

令 $u(x)=y/x$, $dy/dx=u+x(du/dx)$

- 特殊





一阶微分方程的求解——分离变量（简单情况）

求微分方程 $(xy^2+x)dx + (y-x^2y)dy = 0$ 的通解。

解： $x(y^2+1)dx + y(1-x^2)dy = 0$,

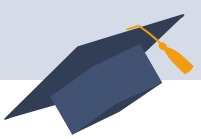
分离变量 $\frac{y}{(y^2+1)}dy = \frac{x}{(x^2-1)}dx$,

两边积分 $\int \frac{y}{(y^2+1)}dy = \int \frac{x}{(x^2-1)}dx$,

$$\frac{1}{2} \ln(y^2+1) = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + \frac{1}{2} \ln c,$$

$$(y^2+1) = c(x^2-1), \quad (c > 0).$$





一阶微分方程的求解——分离变量（简单情况）

求微分方程 $y' = \frac{\ln|x|}{4+y^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的特解。

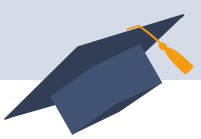
解： $\int (4+y^2) dy = \int \ln|x| dx$,

通解 $4y + \frac{1}{3}y^3 = x \ln|x| - x + c$,

由 $y(1)=0$, 有 $0 = -1 + c \Rightarrow c = 1$,

特解 $4y + \frac{1}{3}y^3 = x \ln|x| - x + 1$ 。





一阶微分方程的求解——分离变量（齐次型）

求微分方程 $xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ 满足 $y|_{x=e} = 2e$ 的特解。

解： $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ，（化为齐次方程） $\text{令 } u = \frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$

则原方程为 $x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$ ， $u du = \frac{1}{x} dx$ ，

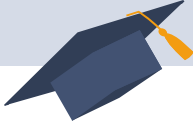
两侧积分 $\frac{1}{2} u^2 = \ln|x| + c$ ，将 $u = \frac{y}{x}$ 代回，

有通解 $y^2 = x^2 (2 \ln|x| + c)$ ，

已知 $y|_{x=e} = 2e$ ，即 $4e^2 = e^2 (2 \ln e + c) \Rightarrow c = 2$ ，

所以此方程的特解为 $y^2 = 2x^2 (\ln|x| + 1)$ 。





一阶微分方程的求解——分离变量法

不可直接分离变量，
也非齐次方程

求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y} \tan \frac{y^2}{x}$ 的通解。

解：令 $u = \frac{y^2}{x}$,

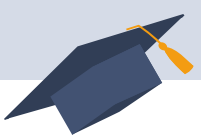
$$\text{则 } u' = \frac{2yy'}{x} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{2y}{x} \left(\frac{y}{2x} + \frac{1}{2y} \tan u \right) - \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x} \tan u ,$$

$$\text{分离变量 } \frac{du}{\tan u} = \frac{1}{x} dx , \quad \text{两侧积分 } \int \frac{d \sin u}{\sin u} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{得其通解 } \ln |\sin u| = \ln |x| + \ln |c| ,$$

$$\sin \frac{y^2}{x} = cx \quad (c \text{ 是不为零的任意常数}).$$





一阶微分方程的求解——分离变量

设可导函数 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t) dt = x + \int_0^x t f(x-t) dt$ ，求 $f(x)$ 。

解：令 $x-t=u$, $t=x-u$, $dt=-du$,

当 $t=0$ 时, $u=x$; 当 $t=x$ 时, $u=0$,

于是 原方程改写为

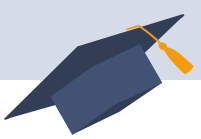
$$\int_0^x f(t) dt = x - \int_x^0 (x-u) f(u) du = x + x \int_0^x f(u) du - \int_0^x u f(u) du ,$$

方程两边求导 $f(x) = 1 + \int_0^x f(u) du$ ($\Rightarrow f(0) = 1$),

两侧再次求导 $f'(x) = f(x)$.

分离变量求解





一阶微分方程的求解

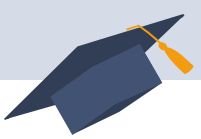
(二) 一阶线性微分方程

- $dy/dx + P(x)y = Q(x)$

公式解题：

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$$





一阶微分方程的求解 —— 一阶线性微分方程

求微分方程 $y' + y \cos x = (\ln x)e^{-\sin x}$ 的通解。

解： $p(x) = \cos x$, $Q(x) = (\ln x)e^{-\sin x}$

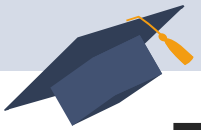
$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int Q(x)e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$$

$$y = e^{-\int \cos x dx} \left[\int (\ln x)e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx + c \right]$$

$$= e^{-\sin x} \left[\int (\ln x)e^{-\sin x} e^{\sin x} dx + c \right] = e^{-\sin x} \left[\int \ln x dx + c \right]$$

$$= e^{-\sin x} [x \ln x - x + c], \quad \text{其中 } c \text{ 为任意常数。}$$



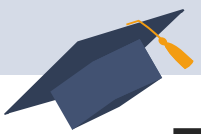


二阶微分方程的求解

(一) 可降阶型

- 之一 $y'' = f(x)$
- 之二 $y'' = f(x, y')$
- 之三 $y'' = f(y, y')$





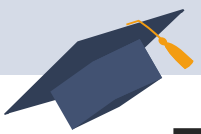
二阶微分方程的求解——可降阶型之一 $y'' = f(x)$

求方程 $y'' = e^{2x}$ 的通解。

解: $y' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + \boxed{c_1}$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c_1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + \boxed{c_1} x + \boxed{c_2}$$





二阶微分方程的求解——可降阶型之二 $y'' = f(x, y')$

求解
$$\begin{cases} xy'' + y' = 0, \\ y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 2 \end{cases}$$

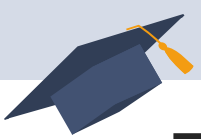
解：令 $y' = p(x)$, $xp' + p = 0$,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{x}, \quad p = y' = \frac{c_1}{x}, \quad \text{由 } y'|_{x=1} = 2, \text{ 推得 } c_1 = 2,$$

$$\therefore y = \int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x + c_2, \quad \text{由 } y|_{x=1} = 1, \text{ 推得 } c_2 = 1,$$

满足给定条件的特解 $y = 2 \ln x + 1$ 。





二阶微分方程的求解——可降阶型之三 $y'' = f(y, y')$

已知 $yy'' - (y')^2 = 0$ 的一条积分曲线通过 $(0,1)$ 点, 且在该点与 $y = 2x + 1$ 相切, 求这条曲线方程 $y = f(x)$ 。

解: $\begin{cases} yy'' - (y')^2 = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$, 令 $y' = p(y)$, $y'' = p \frac{dp}{dy}$,

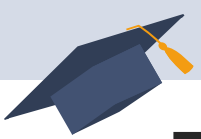
则原方程: $yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$, $\Rightarrow p = c_1 y$

由初条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2 \Rightarrow c_1 = 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2y$,

分离变量两侧积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 2dx$, $y = c_2 e^{2x}$

因为 $y(0) = 1$, $1 = c_2$, 故此曲线方程为 $y = e^{2x}$ 。





二阶微分方程的求解

(二) 常系数线性微分方程

常系数非齐次线性微分方程求解

一. 求解对应齐次方程

① 解特征方程

② 根据解的情况写出通解

二阶常系数齐次线性微分方程的通解

(1) 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, 特征方程有相异实根 $r_1 \neq r_2$, 则方程(1)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

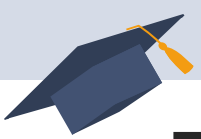
(2) 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, 特征方程有重实根 $r_1 = r_2$, 则方程(1)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}.$$

(3) 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特征方程有共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, 则方程(1)的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$





二阶微分方程的求解

(二) 常系数线性微分方程

二. 根据方程右侧表达式形式设出特解
将特解代入原方程求解特解中的
未知系数

三. 将通解和特解合并
四. 代入初值条件求出未知项

若 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$, 其中 $P_l(x)$ 与 $Q_n(x)$ 分别是 l 次与 n 次多项式, 则方程(2)有特解

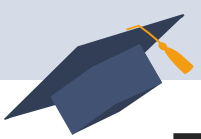
$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式(系数待定), $m = \max\{l, n\}$, 并且

(1) 当 $\lambda \pm \omega i$ 不是特征方程的根时, 取 $k = 0$;

(2) 当 $\lambda \pm \omega i$ 是特征方程的根时, 取 $k = 1$.





二阶微分方程的求解——常系数线性微分方程

例 求微分方程 $y'' - 4y' + 4y = (6x - 2)e^{2x}$ 的通解.

解 所给方程对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

特征根为 $r_1 = r_2 = 2$. 故对应的齐次方程的通解为

$$Y = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

因为 $\lambda = 2$ 是特征根, 故特解应设为

$$y^* = x^2(b_0x + b_1)e^{2x}.$$

代入原方程, 得

$$6b_0x + 2b_1 = 6x - 2,$$

$$6b_0x + 2b_1 = 6x - 2$$

比较两边同次幂的系数, 得

$$\begin{cases} 6b_0 = 6 \\ 2b_1 = -2 \end{cases}$$

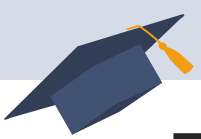
解之得 $b_0 = 1, b_1 = -1$. 于是求得一个特解为

$$y^* = x^2(x - 1)e^{2x}.$$

从而所求通解为

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + x^2(x - 1)e^{2x}.$$





二阶微分方程的求解——常系数线性微分方程

求 $y'' + 4y' + 4y = e^{ax}$ 的通解，其中 a 为常数。

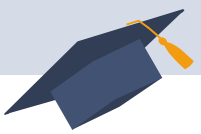
解：特征方程 $r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -2$

齐次的通解 $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$ ，

(1) 当 $a = -2$ 时，设非齐次方程特解 $y^* = bx^2 e^{2x}$ (b 是常数)；

(2) 当 $a \neq -2$ 时，设非齐次方程特解 $y^* = ce^{\alpha x}$ (c 是常数)。





二阶微分方程的求解——

已知解，求相应的二阶常系数线性微分方程

设 $y = e^x (C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ ，（ C_1, C_2 为任意常数）为某

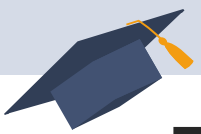
二阶常系数齐次线性方程的通解，则该方程为_____。

解： $r_{12} = 1 \pm i$ ，

$$\Rightarrow (r-1-i)(r-1+i) = (r-1)^2 - i^2 = (r-1)^2 + 1 = 0$$

$$r^2 - 2r + 2 = 0 \Rightarrow y'' - 2y' + 2y = 0。$$





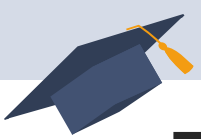
二阶微分方程的求解—— 已知解，求相应的二阶常系数线性微分方程

设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶常系非齐次数线性方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ 的特解， C_1, C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是

- A. $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$; B. $C_1y_1 + C_2y_2 - (C_1 + C_2)y_3$;
- C. $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$; D. $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$ 。





二阶微分方程的求解—— 已知解，求相应的二阶常系

显然 A 不正确；

B 改写成 $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3)$ ，可知是对应的齐次线性方程的通解；

C 改写成 $C_1(y_1 + y_3) + C_2(y_2 + y_3) - y_3$ 而 $(y_1 + y_3), (y_2 + y_3)$ 不是对应的齐次方程的解，故也不正确。

D 可写为 $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$ ，其中 $(y_1 - y_3), (y_2 - y_3)$ 是对应的齐次方程的两个解， y_3 是非齐次方程的一个特解。

下面证明： $(y_1 - y_3)$ 与 $(y_2 - y_3)$ 线性无关。

设 $k_1(y_1 - y_3) + k_2(y_2 - y_3) = 0$ ，

则有 $k_1 y_1 + k_2 y_2 - (k_1 + k_2) y_3 = 0$ ，由于 y_1, y_2, y_3 线性无关，

$$\Rightarrow k_1 = k_2 = (k_1 + k_2) = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0,$$

所以 $(y_1 - y_3)$ 与 $(y_2 - y_3)$ 线性无关。

