厦门大学《微积分 I-2》课程

补充习题

信息学院自律督导部整理

数项级数的敛散性

例 1. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，若存在正数b，使得$a_{n+1}\le b(a_n-a_{n+1})$，$(n=1,2,\cdots)$，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.（2011-2012 学年）

证明：因为$b(a_n-a_{n+1})\ge a_{n+1}\ge 0$，故正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}b(a_n-a_{n+1})$的前$n$项和为

$$s_n=b(a_1-a_2)+b(a_2-a_3)+\cdots+b(a_n-a_{n+1})=b(a_1-a_{n+1})\le ba_1，$$

即正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}b(a_n-a_{n+1})$的前$n$项和有界，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}b(a_n-a_{n+1})$收敛.

又$a_{n+1}\le b(a_n-a_{n+1})$，由正项级数的比较判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

相关知识点：

正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列$\{s_n\}$有界.

正项级数的比较判别法： 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，若存在常数$c>0$，$\exists N>0$，使得对于$\forall n>N$都有$u_n\le cv_n$，$n=N+1,N+2,N+3,\cdots$，则

（1） 当级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

（2）当级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

例 2. 已知数列$\{u_n\}$为单调增加且有界的正数数列，试证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^2\right]$是收敛的.（2013—2014 学年）

证明：因为数列$\{u_n\}$为单调增加且有界的正数数列，故存在$M>0$，使得$u_n\le M,n=1,2,\cdots$，且

$$0 \le 1-\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^2 = \frac{u_{n+1}^2-u_n^2}{u_{n+1}^2} \le \frac{1}{u_1}(u_{n+1}^2-u_n^2)$$

又因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_1}(u_{n+1}^2-u_n^2)$ 的前 n 项和为 $\frac{1}{u_1}(u_{n+1}-u_1) \le \frac{M}{u_1}$，即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_1}(u_{n+1}^2-u_n^2)$ 的

前 n 项和有界，故正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_1}(u_{n+1}^2-u_n^2)$ 收敛.

由正项级数的比较判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)^2\right]$ 收敛.

例 3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.（2013−2014 学年）

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}(1-\cos\frac{\pi}{n})}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}\cdot\frac{1}{2}(\frac{\pi}{n})^2}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \dfrac{\pi^2}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{\pi^2}{2}$.

因此，$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 有相同的敛散性.

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

相关知识点：

比较判别法的极限形式：

给定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$，则

（1）如果 $0<l<+\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 具有相同的敛散性；

（2）如果 $l=0$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（3）当 $l=+\infty$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}$ 绝对收敛.(2005−2006 学年)

证明：由已知条件知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=+\infty$.

因为 $a_n=S_n-S_{n-1}$，所以 $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}\right|=\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}\le\dfrac{S_n-S_{n-1}}{S_n\cdot S_{n-1}}=\dfrac{1}{S_{n-1}}-\dfrac{1}{S_n}$.

又因为正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\dfrac{1}{S_{n-1}}-\dfrac{1}{S_n})$ 的部分和

$$\sigma_n=(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2})+(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3})+\cdots+(\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}})=\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}.$$

于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\dfrac{1}{S_1}$. 故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\dfrac{1}{S_{n-1}}-\dfrac{1}{S_n})$ 收敛.

由正项级数的比较判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}\right|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}a_n}{S_n^2}$ 绝对收敛.

注： $a_n=S_n-S_{n-1}$.

相关知识点：

绝对收敛： 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛；

条件收敛： 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

例 5. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{2^n\arctan^n n}$ 的敛散性. 如果收敛，请指出是绝对收敛还是条件收敛.（2013-2014 学年）

解：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{2^n\arctan^n n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2\arctan n}=\dfrac{3}{2\cdot\frac{\pi}{2}}=\dfrac{3}{\pi}<1$.

由根值判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{2^n\arctan^n n}\right|$ 收敛，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{2^n\arctan^n n}$ 绝对收敛.

相关知识点：

柯西判别法（根值判别法）

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，

（1）如果 $l<1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）如果 $l>1$ 或 $l=+\infty$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3）如果 $l=1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散.

例 6. 根据 a 的取值，讨论常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$ （$a>0$）的敛散性（绝对收敛，条件收敛或发散）.（2010-2011 学年）

解：(1) 当 $0<a<1$ 时，记 $b=\frac{1}{a}$，则 $b>1$.

因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{b^x\ln b}{1}=+\infty$，故 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}\neq 0$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$ 发散.

(2) 当 $a=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，由于 $\frac{1}{n}$ 单调减少，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，故交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数，故发散，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$ 条件收敛.

（3）当 $a>1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{na^n}\right|}=\frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{a}<1$，由比值判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{na^n}\right|$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$ 绝对收敛.

相关知识点：

比值判别法（达朗贝尔判别法）

若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，

（1）如果 $l<1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

（2）如果 $l>1$ 或 $l=+\infty$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（3）如果 $l=1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散.

级数收敛的必要条件： 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

例 7.讨论正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin n|}{2^n}$的敛散性.（2014-2015 学年）

解：因为$\frac{n|\sin n|}{2^n}\le\frac{n}{2^n}$，记$u_n=\frac{n}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}<1\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

由比值判别法或根值判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛.

由比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin n|}{2^n}$收敛.

例 8. 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛.（2014-2015 学年）

证明：因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$的前$n$项和为$a_n-a_0$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛就意味着$\lim_{n\to\infty}a_n$存在，于是数列$\{a_n\}$有界，即存在常数$C>0$，使得$|a_n|\le C, n=1,2,\cdots$.

因此，$|a_nb_n|\le C|b_n|$, $n=1,2,\cdots$. 因为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛.

例 9.判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]$的收敛性，是绝对收敛还是条件收敛？（2008-2009 学年）

解：记$u_n=n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})$，为判断数列$u_n$的单调性和收敛性，设$f(x)=x-\ln(1+x)$.

当$x>0$时，$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加，且$f(x)>f(0)=0$.

故数列u_n恒正，且单调减少. 于是该级数为交错级数..

又$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]=0$，由 Leibniz 判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]$收敛.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]\right|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\dfrac{1}{2}$，由调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散知

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]\right|$ 发散.

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[n^{-\frac{1}{2}}-\ln(1+n^{-\frac{1}{2}})]$ 条件收敛.

相关知识点：

Leibniz 判别法：若交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$（$u_n>0$），满足下述条件：（i）数列 $\{u_n\}$ 单调递减；（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数收敛.

注：用 Leibniz 判别法判定 $u_n>u_{n+1}$ 时，可以用以下几种方法：①**比值法**：考察是否有 $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}>1$；②**差值法**：考察是否有 $u_n-u_{n+1}>0$；③**导数法**：即建立一个连续可导的函数 $f(x)$，使 $f(n)=u_n(n=1,2,\ldots)$，考察是否有 $f'(n)<0$.

例 10. 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$ 的收敛性，是绝对收敛还是条件收敛？(2008-2009 学年)

解：该级数为交错级数.

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0$. 即当 $n>2$ 时，$\dfrac{\ln n}{n}$ 单调减少，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

由莱布尼茨判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$ 收敛.

又因为 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\ln^2 x=+\infty$，故由积分判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n}$ 发散.

因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$ 条件收敛.

相关知识点：

积分判别法：对于给定的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，若存在 $[1,+\infty)$ 上单调减少的连续函数 $f(x)$，使得

$a_n = f(n)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是对应的广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

例 11.证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 条件收敛. （2013—2014 学年）

类似例 10.

例 12. (1) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+4}$ 的收敛性；(2) 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n \frac{n}{n^2+4}+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 的敛散性.
(2014-2015 学年)

解：（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+4}$ 为交错级数.

设 $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$, $f'(x)=\frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$. 因此，当 $n>2$ 时，$\frac{n}{n^2+4}$ 单调减少，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+4}=0,$$

由莱布尼茨判别法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+4}$ 收敛.

当 $n>2$ 时，$\left|(-1)^n \frac{n}{n^2+4}\right| \ge \frac{n}{n^2+n^2}=\frac{1}{2n}$，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n}{n^2+4}\right|$ 发散.

所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+4}$ 条件收敛.

（2）因为 $\frac{n}{n^2+4} \le \frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n \frac{n}{n^2+4}+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 为正项级数，因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^2+4}$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. 所以，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n \frac{n}{n^2+4}+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ 发散.

注：如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散.

讨论一般项级数的敛散性需要考虑是条件收敛还是绝对收敛.

幂级数的收敛域与求和

例 1. 求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ 的收敛域及它的和函数 $S(x)$，并求 $S(x)$ 的极值. （2011—2012 学年）

解：设 $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}x^2=x^2$.

故 $|x|<1$ 时级数绝对收敛，当 $|x|>1$ 时级数发散. 因此，该级数的收敛半径为 1.

当 $x=\pm1$ 时，交错级数收敛，所以收敛域为[-1,1]

记 $S(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n}$，两边求导得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=\dfrac{-x}{1+x^2}$.

两边积分有 $\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\dfrac{-x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，即 $S(x)-S(0)=-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$，所以

$$S(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].$$

$S'(x)=\dfrac{-x}{1+x^2}$，令 $S'(x)=0$，得唯一驻点 $x=0$，$S''(x)=-\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

$S''(0)=-1<0$，故 $S(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为 $S(x)=1$.

例 2． 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n-1}$ 的和函数及常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n(2n-1)}$ 的和. （2013—2014 学年）

解：$u_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{2n-1}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$.

故 $|x|<1$ 时级数绝对收敛，当 $|x|>1$ 时级数发散. 因此，该级数的收敛半径为 1.

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$，故级数发散，所以级数的收敛域为(-1,1).

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$，两边求导得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1-x^2}$.

两边积分有 $\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\dfrac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$，即 $S(x)-S(0)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，所以

$$S(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n-1}=xS(x)=\dfrac{1}{2}x\ln\dfrac{1+x}{1-x}$，$x\in(-1,1)$.

取 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(2n-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$

例 3. 求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$ 的和函数 $S(x)$，并指出其收敛域。（2010—2011 学年）

解：设 $a_n=(-1)^n n(n+1)$，则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$，故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$ 的收敛半径为 1.

当 $x=\pm1$ 时，当 $n\to\infty$ 时，幂级数的通项为 $(-1)^n n(n+1)(\pm1)^n$ 趋于无穷大，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)(\pm1)^n$ 发散，故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

当 $|x|<1$ 时，

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^{n-1}$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x^{n+1})''=x[-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n+1}]''=-x(\frac{x^2}{1+x})''$$

$$=-x(x-1+\frac{1}{1+x})''=-\frac{2x}{(1+x)^3}.$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n=-\frac{2x}{(1+x)^3},-1<x<1.$

例 4. 设 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列 $(a_0\neq0)$，试求：（1）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径；（2）数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 的和。（2008—2009 学年）

解：因为 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 为等差数列，故 $a_n=a_0+nb$，其中 b 为公差.

则 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_0+(n+1)b|}{|a_0+nb|}=1$，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

当 $x=\pm1$ 时，当 $n\to\infty$ 时，幂级数的通项为 $(a_0+nb)(\pm1)^n$ 不趋于 0，所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+nb)(\pm1)^n$ 发散，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+nb)x^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

当$|x|<1$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_0x^n+b\sum\limits_{n=0}^{\infty}nx^n=\dfrac{a_0}{1-x}+bx\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$

$$=\frac{a_0}{1-x}+bx(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=\frac{a_0}{1-x}+bx(\frac{x}{1-x})'$$

$$=\frac{a_0}{1-x}+\frac{bx}{(1-x)^2}.$$

故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=2a_0+2b.$

例 5． 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$的收敛域以及和函数；（2008—2009 学年）

解：设$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$，故幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$的收敛半径为 1.

当$x=\pm1$时，因为$\left|\dfrac{(\pm1)^n}{n(n+1)}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$，由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$收敛．故幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$的收敛域为$[-1,1]$.

记$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})x^n$.

首先考虑$s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots$．当$|x|<1$时，$s_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$.

所以，$s_1(x)=\int\dfrac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x)+C$. 由于$s_1(0)=0$，因此$C=0$.

故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x),-1\le x<1$.

当$x=0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^n=0$；当$|x|<1$且$x\neq0$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\frac{1}{x}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-x)=\frac{1}{x}[-\ln(1-x)-x].$$

当$|x|<1$时，$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^n=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1, & |x|<1\text{且}x\neq0\end{cases}$.

注意到幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的收敛域为$[-1,1]$，故

$$s(1)=\lim_{x\to 1^-}s(x)=\lim_{x\to 1^-}[\frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1]=\lim_{x\to 1^-}(1-x)\ln(1-x)+1=1;$$

$$s(-1)=\lim_{x\to -1^+}s(x)=-2\ln 2+1.$$

综上，$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}0, & x=0\\ 1, & x=1\\ \frac{1-x}{x}\ln(1-x)+1 & x\in[-1,0)\cup(0,1)\end{cases}.$$

例 6．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$在内的和函数.（2014—2015 学年）

解：令$t=x^2$，则$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)}$，可以用例 5 的方法求得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n(n+1)}=\begin{cases}0, & t=0\\ t & t=1\\ (1-t)\ln(1-t)+t, & t\in[-1,0)\cup(0,1)\end{cases}.$$

因此，当$x\in(-1,1)$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}=(1-x^2)\ln(1-x^2)+x^2$.

相关知识点：

收敛半径 R 及其求法：对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，如果$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$　或　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$；则收敛半径$R=\frac{1}{\rho}$.　收敛区间$(-R,R)$.

注：

（1）　在讨论收敛域时，需讨论收敛区间中端点的收敛情况；

（2）如果幂级数有缺项，如缺少奇数次幂的项等，则应将幂级数视为函数项级数并利用比值判别法或根值判别法其收敛域；

幂级数的分析性质：设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$，收敛域为$I$，和函数为$S(x)$，则

（1） $\forall x_0 \in I$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x_0^n$，即 $S(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}S(x)$；

（2） $\forall x \in I$，则 $\int_0^x \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n t^n \mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$；

（3） $\forall x \in (-R,R)$，则 $(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n)'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}$.

注：（1）在求和函数时，先得求出收敛域；

（2）在收敛区间上，求出和函数；

（3）如果收敛域包含端点，和函数在端点的值可以通过求极限获得.

在收敛区间上求和函数：

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=(\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n \mathrm{d}t)'=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1})'$$

或 $\quad S(x)=S(0)+\int_0^x(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n t^n)'\mathrm{d}t=S(0)+\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n t^{n-1}\mathrm{d}t$

幂级数的展开

例 1. 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数.（2011—2012 学年）

解：因为 $f'(x)=\dfrac{1}{1+(\frac{1-2x}{1+2x})^2}\cdot\dfrac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2}$

$$=-\frac{4}{(1+2x)^2+(1-2x)^2}=-\frac{2}{1+4x^2}$$

当 $4x^2<1$ 即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{2n+1}x^{2n}$，两边积分，可得

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1},$$

即 $f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$.

当 $x=\pm\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}=\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1}$ 收敛.

故 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$，$-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$.

例 2. 把函数 $f(x)=-\ln\frac{1+x}{1-x}+x^2$ 展成关于 x 的幂级数。（2010—2011 学年）

解：$f(x)=-\ln\frac{1+x}{1-x}+x^2=\ln(1-x)-\ln(1+x)+x^2$.

当 $-1<x\le 1$ 时，$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$；当 $-1\le x<1$ 时，$\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，

因此，当 $-1<x<1$ 时，有 $f(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+x^2$，即

$$f(x)=-2x+x^2-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad -1<x<1.$$

例 3. 设 $f(x)=\frac{5x}{x^2+x-6}$，试求：（1）将 $f(x)$ 展开成麦克劳林级数；（2）将 $f(x)$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.（2013-2014 学年）

解：$f(x)=\frac{5x}{x^2+x-6}=\frac{5x}{(x+3)(x-2)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+3}$.

（1）当 $|x|<2$ 时，$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$；

当 $|x|<3$ 时，$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{3})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n$.

故 $f(x)=\frac{5x}{x^2+x-6}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}]x^n$，$|x|<2$.

（2）当 $|x-1|<1$ 时，$\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{1-(x-1)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-1)^n$；

当 $|x-1|<4$ 时，$\frac{1}{x+3}=\frac{1}{4+x-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{4}}=\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-1}{4})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-1)^n$.

因此， $\dfrac{5x}{x^2+x-6}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[-1-\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}](x-1)^n$ ， $|x-1|<1$.

例 4. 将 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数. （2014—2015 学年）

解： $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$. 当 $|x-2|<2$ 时，

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2+x-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x-2}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n .$$

将上式两边求导，得 $-\dfrac{1}{x^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+2}}(x-2)^n$.

则 $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}+\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+2}}](x-2)^n$.

因此， $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1-n}{2^{n+2}}(x-2)^n$ ， $|x-2|<2$.

例 5. 函数 $f(x)=\arctan x$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式为__________，其收敛域为________。（2008—2009 学年）

解：当 $|x|<1$ 时， $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ ，两边积分，得

$$f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} ,$$

即 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$.

当 $x=\pm1$ 时， $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 为收敛的交错级数，故收敛域为 $[-1,1]$.

相关知识点：

常用的幂级数展开式：

$\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\ -1<x<1$ ；

$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ -1<x<1$ ；

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty\ ;$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty\ ;$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty\ ;$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots,\ -1<x\le 1$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,-1<x<1.$$

傅里叶展开

例 1.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且当 $-\pi\le x<\pi$ 时， $f(x)=x^2+x$.将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数. （2013—2014 学年）

解： $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2$.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}[\frac{1}{n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx]$$

$$=-\frac{4}{n\pi}[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx]$$

$$=-\frac{4}{n\pi}[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}]=\frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n\ .$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\sin nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}[-\frac{1}{n}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx]$$

$$=\frac{2}{\pi}[-\frac{1}{n}\pi\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}]$$

$$=\frac{2}{n}(-1)^{n-1}.$$

因为 $f(x)$ 在 $x=\pm\pi,\pm 3\pi,\pm 5\pi,\cdots$ 处不连续，在其他点都连续，因此

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n}\sin nx]，\quad x\neq\pm\pi,\pm 3\pi,\pm 5\pi,\cdots$$

例 2. 将函数 $f(x)=2+|x|,(-1\le x\le 1)$ 展开成周期为 2 的傅里叶级数，并由此计算级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$ 的和。（2011—2012 学年）

解：将 $f(x)=2+|x|,(-1\le x\le 1)$ 作周期延拓为 $F(x)$，易知 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

因为 $f(x)$ 为偶函数，则 $b_n=0,n=1,2,3,\cdots$.

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5\,.$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x\\
&=2[\frac{2+x}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x]\\
&=\frac{2}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\\
&=\begin{cases}0, & n=2k\\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases},k=1,2,3,\cdots
\end{aligned}$$

因为 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以，

$$f(x)=2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{(2n-1)^2}，\quad -1\le x\le 1.$$

令 $x=0$，则 $f(0)=2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

例3. 记 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，将 $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ 展开成Fourier级数。（2010—2011学年）

解：$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$ 是周期为 2π 的周期函数. 在 $[-\pi,\pi]$ 上

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=\pm\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}),\\ -1, & x\in[-\pi,-\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi]\end{cases},$$

易知 $f(x)$ 在 $\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\pm\dfrac{5\pi}{2},\cdots$ 处不连续，在其余点上都连续.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos nx\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^{k-1}\dfrac{4}{(2k-1)\pi}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k\end{cases}.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\sin nx\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=0.$$

故 $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$， $x\neq\pm\dfrac{\pi}{2},\pm\dfrac{3\pi}{2},\pm\dfrac{5\pi}{2},\cdots$.

例 4.设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，$-\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$，则在 $[-\pi,\pi]$ 上，$S(x)=$______。（2008—2009 学年）

解：取 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且在 $-\pi\le x<\pi$ 上， $f(x)=x$.

易知， $f(x)$ 的傅里叶级数就是 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$.

由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上除 $x=-\pi$ 和 $x=\pi$ 处不连续外，在其余点都连续.

所以，在 $(-\pi,\pi)$ 上， $S(x)=x$， 且 $S(\pi)=S(-\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\dfrac{-\pi+\pi}{2}=0$.

于是，在 $[-\pi,\pi]$ 上， $S(x)=\begin{cases}0, & x=\pm\pi\\ x, & -\pi<x<\pi\end{cases}$.

例 5.将函数 $f(x)=1+x\ (0<x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的正弦级数，并指出该级数在 $x=1$ 处的值.（2014—2015 学年）

解：将函数 $f(x)=1+x\ (0<x\le 1)$ 延拓成以 2 为周期的奇函数 $F(x)$，则

$$a_n=0,\ n=0,1,2,\cdots$$

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1(1+x)\sin n\pi x\mathrm{d}x\\ &=-\frac{2(1+x)}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x\mathrm{d}x\\ &=-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi+\frac{2}{n\pi}+\frac{2}{(n\pi)^2}\sin n\pi x\Big|_0^1\\ &=\frac{2}{n\pi}[1-2(-1)^n]\end{aligned}$$

因此，我们得到 $f(x)=1+x\ (0<x\le 1)$ 的正弦级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}[1-2(-1)^n]\sin n\pi x\ .$$

根据收敛性定理，在函数间断点 $x=1$ 处，该级数收敛于 $\dfrac{F(1+0)+F(1-0)}{2}=\dfrac{(-2)+2}{2}=0$.

例 6.将函数 $f(x)=2+x\quad(0\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和。（2008—2009 学年）

解：将函数 $f(x)=2+x\ (0<x\le 1)$ 延拓成以 2 为周期的偶函数 $F(x)$，则

$$b_n=0,\ n=1,2,\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5$$

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\\ &=\frac{2(2+x)}{n\pi}\sin n\pi x\Big|_0^1-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\mathrm{d}x\\ &=\frac{2}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\Big|_0^1\\ &=\frac{2}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n=2k-1\end{cases},\ k=1,2,3,\cdots\end{aligned}$$

因此，我们得到 $f(x)=2+x\ (0<x\le 1)$ 的余弦级数

$$f(x) \sim -\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

因为 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，根据收敛性定理，该级数收敛于 $F(x)$.

于是，$f(x)=2+x=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}, 0\le x\le 1$.

令 $x=0$，得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{4}{3}\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

例7.将函数 $f(x)=x^2\ (0\le x\le\pi)$ 展开成以 2π 为周期的余弦级数。（2008—2009学年）

解：将函数 $f(x)=x^2\ (0\le x\le\pi)$ 偶周期延拓为 $F(x)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^3}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}[\frac{1}{n}x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x]$$

$$=-\frac{4}{n\pi}[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x]$$

$$=-\frac{4}{n\pi}[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}]=\frac{4}{n^2}\cdot(-1)^n.$$

$$b_n=0.$$

因为 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，因此

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad 0\le x\le\pi.$$

相关知识点：

周期为 2π的傅里叶级数： $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

其中
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, & (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, & (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

特别情形：

（1）如果 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 展开成**余弦级数**，系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, & (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = 0, & (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

（2）如果 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 展开成**正弦级数**，系数

$$\begin{cases} a_n = 0, & (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, & (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

周期为 $2l$ 的傅里叶级数： $\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{l}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{l})$

其中
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos \dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, & (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin \dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, & (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

特别情形：

（1）如果 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 展开成**余弦级数**，系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\cos \dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, & (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = 0, & (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

（2）如果 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 展开成**正弦级数**，系数

$$\begin{cases} a_n = 0, & (n=0,1,2,\cdots), \\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\sin \dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, & (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

狄利克雷收敛定理：设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数. 如果 $f(x)$ 满足在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，并且至多只有有限个极值点. 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的**连续点**时，级数收敛于 $f(x)$；

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的**间断点**时，收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.