2016

六、（9 分）求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 的通解。

解：原微分方程整理为 $y'+\frac{1}{x\ln x}y=\frac{1}{x}$，因此其通解为

$$y=e^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}(C+\int\frac{1}{x}e^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)=\frac{1}{\ln x}(C+\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x)=\frac{1}{\ln x}[C+\frac{1}{2}(\ln x)^2]=\frac{1}{2}\ln x+\frac{C}{\ln x}$$

七、（10 分）求微分方程 $y''-y=2(e^x+\cos x)$ 满足初始条件 $y(0)=0,y'(0)=2$ 的特解。

解：原微分方程的特征方程为 $r^2-1=0$，解得特征根 $r_1=-1,r_2=-1$，因此可令微分方程的一个特解为 $y^*=axe^x+b\cos x+c\sin x$，代入原微分方程求得 $a=1,b=-1,c=0$。故微分方程的特解为 $y=xe^x-\cos x+C_1e^{-x}+C_2e^x$。又 $y(0)=0,y'(0)=2$，从而 $y(0)=-1+C_1+C_2=0,y'(0)=1-C_1+C_2=2$，解得 $C_1=0,C_2=1$，因此满足初始条件微分方程的特解为 $y=xe^x-\cos x+e^x$。

2015

四、求下列微分方程的通解（每小题 8 分,共 16 分）.

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+y^4}$　　　　2. $xy''=y'\ln y'$

解：1. 原方程等价于 $\frac{dx}{dy}=\frac{x+y^4}{y}$　即　$\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y^3$

这是一阶线性非齐次微分方程，代入公式得

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}(\int y^3e^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+\mathrm{C})=y(\int y^3\frac{1}{y}\mathrm{d}y+C)=\frac{y^4}{3}+Cy$$

2. 注意到原方程不显含 x，　令 $y'=p(x)$，原方程可降阶为

$x\frac{dp}{dx}=p\ln p$

分离变量得$\frac{dp}{p\ln p}=\frac{1}{x}dx$

两边积分得　$\ln|\ln p|=\ln|x|+\ln|C_1|$

整理得　$p=e^{C_1x}$

再积分一次，得到原方程的通解为$y=\frac{1}{C_1}e^{C_1x}+C_2$.

六、（10 分）设函数$y=y(x)$满足微分方程：$y''-4y'+3y=xe^x$，且其图形在点$(0,1)$处的切线与曲线：$y=x^2-\frac{1}{4}x+1$在该点的切线重合，求函数$y=y(x)$。

解：特征方程$r^2-4r+3=0$，特征根$r_1=1$，$r_2=3$，齐次方程通解$Y(x)=c_1e^x+c_2e^{3x}$

特解形式$y^*(x)=x^k\cdot Q_m(x)\cdot e^{\lambda x}=x(ax+b)e^x$

将　$y^*(x)$代入原方程并整理得：$-4ax+2a-2b=x$，所以有$-4a=1,2a-2b=0$，解得$a=b=-\frac{1}{4}$，∴通解$y(x)=c_1e^x+c_2e^{3x}+(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x)e^x$。

又已知有公切线，得：$y(0)=1,y'(0)=-\frac{1}{4}$，即$c_1+c_2=1,c_1+3c_2-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$，

解得$c_1=\frac{3}{2},c_2=-\frac{1}{2}$，所以$y(x)=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{3x}+(-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x)e^x$。

2014

一、

6．求方程$\frac{dy}{dx}=2^{x+y}$的通解。

解一：$\frac{dy}{dx}=2^{x+y}$，$2^{-y}dy=2^{x}dx$，$\int 2^{-y}dy=\int 2^{x}dx$，

得原方程的通解：$-\frac{2^{-y}}{\ln 2}=\frac{2^{x}}{\ln 2}+C_1$， 即$2^{-y}+2^{x}+C=0$，其中$C,C_1$为任意常数。

解二：令$u=x+y$，则$y'=u'-1$，从而原方程化为$u'=2^{u}+1$，

分离变量积分：$\int\frac{1}{2^{u}+1}du=\int dx$，$\ln 2^{u}-\ln(2^{u}+1)=\ln 2^{x}+C_1$，把$u=x+y$代入

得原方程的通解：$2^{-y}+2^{x}+C=0$，其中C,C_1为任意常数。

8．求方程$y'-\frac{1}{x}y=x$的通解。

解：$\because P(x)=-\frac{1}{x}$，$Q(x)=x$，$\therefore$原方程的通解是

$$y=\left[\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}dx+C\right]\cdot e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\left[\int xe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}=\left[\int xe^{-\ln x}dx+C\right]\cdot e^{\ln x}=(x+C)x=x^{2}+Cx\ 。$$

9．已知$y_1=1$，$y_2=1+x$，$y_3=1+x^2$都是微分方程$x^2y''-2xy'+2y=2$的解，求此方程的通解。

解：$\because y_1=1$，$y_2=1+x$，$y_3=1+x^2$是原方程的解，$\therefore y_2-y_1=x$，$y_3-y_1=x^2$是其对应的齐次方程的两个线性无关的特解，于是原方程的通解是

$$y=y_1+C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)=1+C_1x+C_2x^{2}，$$

其中C_1,C_2为任意常数。

二、

4. 求微分方程$y''=2y^3$满足初始条件$y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$的特解。

解：令$p(y)=y'$，则$y''=pp'$。于是原方程化为 $pp'=2y^3$，

对该方程分离变量积分得 $\frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^4+C_1$，其中$C_1$为待定常数。

$\because y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=1$，即$y|_{x=0}=1$，$p|_{y=1}=y'|_{x=0}=1>0$，

$\therefore C_1=0$，从而 $p=y^2$，即$y'=y^2$。

解方程$y'=y^2$， 得其解 $-y^{-1}=x+C$，其中C为待定常数。

$\because y|_{x=0}=1$，$\therefore C=-1$。所以原方程满足初始条件的特解是$x+y^{-1}-1=0$。

三、

1．求微分方程$\frac{dy}{dx}+x(x+y)-x^3(x+y)^2=-1$的通解。

解：令$u=x+y$，则$y'=u'-1$，代入原方程得伯努利方程

$$u'+xu=x^3u^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{①}$$

又当$u\neq 0$时，令$z=u^{-1}$，则$z'=-u^{-2}u'$，即$u^{-2}u'=-z'$。于是方程①化为

$$z'-xz=-x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{②}$$

解方程②得其通解 $z=\left[\int -x^3e^{-\int xdx}dx+C\right]e^{\int xdx}=\left[\int -x^3e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+C\right]e^{\frac{1}{2}x^2}$

$$=\left[\int -x^3e^{-\frac{1}{2}x^2}dx+C\right]e^{\frac{1}{2}x^2}=x^2+2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}\text{。}$$

所以原方程的通解是

$(x+y)^{-1}=x^2+2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}$，即$y=\frac{1}{x^2+2+Ce^{\frac{1}{2}x^2}}-x$，其中$C$为任意常数。

显然当$u=0$时，即$y=-x$是原方程的解。

3. 设二阶常系数线性微分方程$y''+\alpha y'+\beta y=\gamma\sin x$的一个特解为

$y=e^x+2e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$, 试确定$\alpha,\beta,\gamma$，并求出该方程的通解。

解： $y=e^x+2e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$, $y'=e^x+4e^{2x}-\frac{3}{5}\sin x+\frac{1}{5}\cos x$,

$$y''=e^x+8e^{2x}-\frac{3}{5}\cos x-\frac{1}{5}\sin x,$$

把y,y',y''代入原方程，比较恒等式中$e^x,e^{2x},\cos x,\sin x$系数得方程组：

$$\begin{cases}1+\alpha+\beta=0,\\ 8+4\alpha+2\beta=0,\\ -\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\alpha+\frac{3}{5}\beta=0,\\ -\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\alpha+\frac{1}{5}\beta=\gamma,\end{cases}$$ 解此方程组得$\alpha=-3$， $\beta=2$， $\gamma=2$。

所以原方程为$y''-3y'+2y=2\sin x$，其对应的齐次方程的特征方程为$r^2-3r+2=0$，解得其特征根$r_1=1,r_2=2$，于是该方程的通解是$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{3}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x$。

2013

一、

2、求解下列微分方程：（每小题 6 分，共 12 分）

（1）求微分方程$xy'-2y=x^4\mathrm{e}^x$的通解；

解： 原方程化为$y'-\frac{2}{x}y=x^3\mathrm{e}^x$，其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}[\int x^3\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=x^2[\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+C],$$

即 $y=Cx^2+(x^3-x^2)\mathrm{e}^x$，其中$C$为任意常数.

（2）求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+2y^2}{xy}$满足$y|_{x=1}=1$的特解.

解一： 令$u=\frac{y}{x}$，则原方程化为$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}+2u$，即$\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分，得 $\ln(1+u^2)=\ln\left|Cx^2\right|$，于是，$1+u^2=Cx^2$，即 $x^2+y^2=Cx^4$.

由 $y|_{x=1}=1$ 可得 $C=2$，所求方程的特解为 $x^2+y^2=2x^4$.

解二：原方程改写为 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}y^2=2x$，即 $\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x}-\frac{4}{x}y^2=2x$，于是，原方程

的通解为

$$y^2=\mathrm{e}^{\int\frac{4}{x}\mathrm{d}x}[\int 2x\mathrm{e}^{-\int\frac{4}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=x^4[\int\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x+C]$$

即 $x^2+y^2=Cx^4$，其中 C 为任意常数。

由 $y|_{x=1}=1$ 可得 $C=2$，所求方程的特解为 $x^2+y^2=2x^4$.

4、（8 分）求微分方程 $yy''=2[(y')^2-y']$ 满足 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 的特解.

解：令 $p=y'$，则原方程化为 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=2[p^2-p]$，即 $\frac{1}{p-1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=\frac{2}{y}\mathrm{d}y$，

两边积分，可得 $\ln|p-1|=\ln\left|C_1y^2\right|$，即 $p=1+C_1y^2$.

由 $y(0)=1$，$y'(0)=2$，可得 $C_1=1$，故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$，移项后可得

$$\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$$

两边积分，可得 $\arctan y=x+C_2$，即 $y=\tan(x+C_2)$

由 $y(0)=1$ 可得 $C_2=\frac{\pi}{4}$，从而原方程的特解为 $y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$.