2017-2018 学年第二学期《微积分 I-2》期中试卷解答

一、（每小题 8 分,共 16 分）求下列微分方程的通解：

1. $yy''+(y')^2=0$；

解一：令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是，$yp\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0$，即 $y\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p=0$，也即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$.

两边积分，可得 $\ln|p|=-\ln|y|+\ln|C_1'|$，即 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{C_1'}{y}$.

分离变量，得 $y\mathrm{d}y=C_1'\mathrm{d}x$，两边积分后，得 $\dfrac{1}{2}y^2=C_1'x+C_2'$.

故原方程的通解为 $y^2=C_1x+C_2$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

解二：因为 $(yy')'=yy''+(y')^2=0$，故 $yy'=C$.

于是，$y\mathrm{d}y=C_1'\mathrm{d}x$. 两边积分后，得 $\dfrac{1}{2}y^2=C_1'x+C_2'$.

故原方程的通解为 $y^2=C_1x+C_2$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

2. $y''+3y'+2y=3\mathrm{e}^x+6\sin x$。

解： 由 $r^2+3r+2=0$，解得 $r_1=-1,\ r_2=-2$.对应的齐次方程的通解是 $Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.

设 $y''+3y'+2y=3\mathrm{e}^x$ 的特解为 $y_1^*=A\mathrm{e}^x$，代入方程 $y''+3y'+2y=3\mathrm{e}^x$，解得 $A=\dfrac{1}{2}$.

故得 $y_1^*=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

设 $y''+3y'+2y=6\sin x$ 的特解为 $y_2^*=A\cos x+B\sin x$，代入方程 $y''+3y'+2y=6\sin x$，得

$$(A+3B)\cos x+(B-3A)\sin x=6\sin x,$$

故 $\begin{cases}A+3B=0\\B-3A=6\end{cases}$，解得 $\begin{cases}A=-\dfrac{9}{5}\\B=\dfrac{3}{5}\end{cases}$. 于是，$y_2^*=-\dfrac{9}{5}\cos x+\dfrac{3}{5}\sin x$.

故所求微分方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x-\dfrac{9}{5}\cos x+\dfrac{3}{5}\sin x$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

二、（本题 8 分）设函数$\boldsymbol{f(x)}$可微，且满足以下关系式$\int_0^x [3f(t)-1]\mathrm{d}t = f(x)-5$，求 $f(x)$。

解：对$\int_0^x [3f(t)-1]\mathrm{d}t = f(x)-5$两边求导，得$3f(x)-1 = f'(x)$，即

$$f'(x)-3f(x) = -1.$$

解得 $f(x) = \mathrm{e}^{\int 3\mathrm{d}x}[\int (-1)\mathrm{e}^{-\int 3\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C] = C\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{3}$.

由$\int_0^x [3f(t)-1]\mathrm{d}t = f(x)-5$令 $x=0$，得 $f(0)=5$.

则$C = 5-\dfrac{1}{3} = \dfrac{14}{3}$. 故 $f(x) = \dfrac{14}{3}\mathrm{e}^{3x} + \dfrac{1}{3}$.

三、（本题 8 分）设$\vec{a} = (-1,3,2)$，$\vec{b} = (2,-4,3)$，$\vec{c} = (4,-6,13)$，试证明这三个向量在同一平面上，并求$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影。

解：作向量$\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 17\vec{i} + 7\vec{j} - 2\vec{k}$，因为$\vec{c}\cdot\vec{n} = 17\times 4 + 7\times(-6) + (-2)\times 13 = 0$，故

$\vec{c}\perp\vec{n}$，因此，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$在同一平面上.

$\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影$\mathrm{prj}_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{-8}{\sqrt{14}}$.

四、（本题 8 分）设$w = f(x+\varphi(y), xy)$，其中函数φ可微，函数f具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial w}{\partial y}$以及$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$。

解：$\dfrac{\partial w}{\partial y} = f_1'\cdot\varphi'(y) + f_2'\cdot x$，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} = (f_{11}\cdot 1 + f_{12}\cdot y)\cdot\varphi'(y) + f_2' + x(f_{21}\cdot 1 + f_{22}\cdot y)$$

$$= (f_{11} + yf_{12})\cdot\varphi'(y) + f_2' + x(f_{21} + yf_{22}).$$

五、（本题 8 分）求曲线$\begin{cases}(x+1)^2-z^2=1\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}$在 yoz 平面上的投影曲线方程。

解：两个式子相减，得 $4x-y^2-x^2=0$，即 $x=\frac{1}{4}(y^2+z^2)$，代入第一个方程，得

$$(y^2+z^2+4)^2-16z^2=16,$$

即 $(y^2+z^2)^2+8y^2-8z^2=0$，因此，所求投影曲线方程为

$$\begin{cases}(y^2+z^2)^2+8y^2-8z^2=0\\x=0\end{cases}.$$

六、（本题 8 分）求直线$\begin{cases}x+y-z=1\\-x+y-z=1\end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影方程。

解：过直线$\begin{cases}x+y-z=1\\-x+y-z=1\end{cases}$作一平面，使其垂直于平面 $x+y+z=0$.

设所求平面的方程为 $x+y-z-1+\lambda(-x+y-z-1)=0$，即 $(1-\lambda)x+(1+\lambda)y-(1+\lambda)z-1-\lambda=0$.

由 $(1-\lambda,1+\lambda,-1-\lambda)\perp(1,1,1)$，得 $1-\lambda+1+\lambda-1-\lambda=0$，即 $\lambda=1$。

故所求平面方程为 $y-z-1=0$. 所求投影方程为$\begin{cases}y-z=1\\x+y+z=0\end{cases}$.

七、（本题 8 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 确定，证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$ 。

证明：方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 两边对 x 求导，得 $F_1'(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x})+F_2'\cdot(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x})=0$，

解得 $(\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2')\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x^2}F_2'-F_1'$，所以，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{zyF_2'-x^2yF_1'}{x(xF_1'+yF_2')}$.

同理，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zxF_1'-y^2xF_2'}{y(xF_1'+yF_2')}$.

于是，$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{zyF_2'-x^2yF_1'}{xF_1'+yF_2'}+\frac{zxF_1'-xy^2F_2'}{xF_1'+yF_2'}$

$$=\frac{z(xF_1'+yF')-xy(xF_1'+yF_2')}{xF_1'+yF_2'}=z-xy.$$

八、（本题 12 分）讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在 $(0,0)$ 点处的连续性、可偏导性、可微性。

解： $|f(x,y)|\le(x^2+y^2)$，因为 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)=0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处连续.

$$f_x(0,0)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2\cos\frac{1}{|x|}}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{y^2\cos\frac{1}{|y|}}{y}=0,$$

则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可偏导.

又 $$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f_x'(0,0)\Delta x-f'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cos\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

所以， $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微.

九、（本题 8 分）设$\begin{cases} xu+yv=2 \\ yu-xv=0 \end{cases}$,求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$。

解：对方程组关于 x 求偏导数，可得$\begin{cases} u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & (1) \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x}-v-x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 & (2) \end{cases}$

(1)*y-(2)*x 得 $uy+xv+(x^2+y^2)\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$， 因而有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{uy+xv}{x^2+y^2}$.

将该结果代入(1)式可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{yv-ux}{x^2+y^2}$.

十、（本题 8 分）设有曲面 $S:\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$，平面 $\Pi:2x+2y+z-5=0$， (1)在 S 上求一点，使其切平面与 Π 平行；(2)求曲面 S 与 Π 的最短距离。

解：(1) 在点 (x,y,z) 处曲面 S 的法线方向为 $(x,2y,\dfrac{z}{2})$.

由于所求切平面平行于已知平面 Π，即两个法向平行，因而有 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{2y}{2}=\dfrac{z}{2}$，即 $x=2y=z$.

由于点 (x,y,z) 在曲面上，因而满足曲面方程，因此有 $x=z=\pm1,\ y=\pm\dfrac{1}{2}$,

即 S 上的点 $(1,\dfrac{1}{2},1)$ 和点 $(-1,-\dfrac{1}{2},-1)$ 处的切平面与平面 Π 平行

(2)曲面 S 与Π的最短距离为 $(1,\dfrac{1}{2},1)$ 和点 $(-1,-\dfrac{1}{2},-1)$ 与 Π 之间距离较小者

$$d=\frac{\left|2\times1+2\times\frac{1}{2}+1-5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{1}{3}.$$

十一、（本题 8 分）抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=4$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值。

解：设椭圆上点 M 的坐标为 $(x,\ y,\ z)$，要求点 M 到原点距离的最大值和最小值，可以转化为求 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值。

引入辅助函数 $L=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$。

令 $\begin{cases} L_x=2x+2\lambda x+\mu=0 \\ L_y=2y+2\lambda y+\mu=0 \\ L_z=2z-\lambda+\mu=0 \\ L_\lambda=x^2+y^2-z=0 \\ L_\mu=x+y+z-4=0 \end{cases}$ ，由第一、第二式得 $x=y$，代入后两式得 $\begin{cases} z=2x^2 \\ z=4-2x \end{cases}$.

于是，$\begin{cases} x=y=-2或1 \\ z=8或2 \end{cases}$，即得 $M_1(-2,-2,8)$ 和 $M_2(1,1,2)$.

因为 $g(M_1)=72$，$g(M_2)=6$，所以,点 M_1 到原点距离最大，值为 $6\sqrt{2}$，点 M_2 到原点距离最小，值为 $\sqrt{6}$.