厦门大学《微积分 I-2》期中参考答案

考试日期：2012.4　信息学院自律督导部整理

一、求下列微分方程的通解：（每小题 6 分，共 12 分）

（1）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$；　　　　（2）$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-2x}{2y+x}$。

解：（1）原方程改写为 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{2}{y}x=-y$，原方程的通解为

$$x=e^{-\int(-\frac{2}{y})dy}[\int(-y)e^{\int(-\frac{2}{y})dy}dy+C]=y^2[-\int\frac{1}{y}dy+C]=y^2[-\ln|y|+C],$$

故原方程的通解为 $x=y^2[-\ln|y|+C]$，其中 C 为任意常数。

（2）原方程可改写为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{y}{x}-2}{2\frac{y}{x}+1}$.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，于是原方程化为

$$u+x\frac{dy}{dx}=\frac{u-2}{2u+1}\quad 或\quad \frac{2u+1}{1+u^2}du=-\frac{2}{x}dx.$$

两边积分，可得

$$\ln(1+u^2)+\arctan u=-\ln x^2+C,$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入，可得原方程的通解为

$$\ln(x^2+y^2)+\arctan\frac{y}{x}=C.$$

二、求微分方程 $yy''=2[(y')^2-y']$ 满足 $y(0)=1$，$y'(0)=2$ 的特解。（12 分）

解：令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\dfrac{dp}{dy}$，于是原方程化为

$$yp\frac{dp}{dy}=2p(p-1)$$　（因为 $y'(0)=2$，故 $p=0$ 不是方程的解）

或　$$\frac{dp}{p-1}=\frac{2}{y}dy.$$

两边积分，可得$\ln|p-1|=\ln y^2+\ln|C|$，即 $p=1+Cy^2$.

由 $y(0)=1$，$y'(0)=2$可得$2=1+C$，即$C=1$. 故

$$p=1+y^2 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\mathrm{d}x .$$

两边积分，可得$\arctan y=x+C$.

由 $y(0)=1$知，$C=\frac{\pi}{4}$，从而所求特解为$\arctan y=x+\frac{\pi}{4}$或$y=\tan(x+\frac{\pi}{4})$.

三、证明：$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$在点$(0,0)$处连续，可导，但不可微。（12 分）

证明：当$x^2+y^2\neq 0$时，$\left|\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right|\le\frac{1}{2}$，从而$|f(x,y)|\le|x|+|y|+\frac{1}{2}|x|$. 于是，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y+\frac{x^3y}{x^4+y^2})=0=f(0,0),$$

所以，$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta y-0}{\Delta y}=1,$$

故 $f(x,y)$在点$(0,0)$处的偏导数存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=1,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=1.$$

因为$\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_x(0,0)\Delta y}{\rho}=\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\Delta x-\Delta y}{\rho}=\frac{(\Delta x)^3\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}[(\Delta x)^4+(\Delta y)^2]}$，

而$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=(\Delta x)^2}}\frac{(\Delta x)^3\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}[(\Delta x)^4+(\Delta y)^2]}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2|\Delta x|\sqrt{1+(\Delta x)^2}}$不存在，即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_x(0,0)\Delta y}{\rho}$$

不存在，所以$\Delta z-f_x(0,0)\Delta x-f_x(0,0)\Delta y\neq o(\rho)$.

故 $f\left(x,y\right)$ 在在点 $\left(0,0\right)$ 处不可微.

四、设 $f(x)=x\mathrm{e}^{x}-\int_{0}^{x}tf(x-t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 连续，求 $f(x)$。（10 分）

解　令 $u=x-t$，则

$$f(x)=x\mathrm{e}^{x}-\int_{0}^{x}(x-u)f(u)\mathrm{d}u=x\mathrm{e}^{x}-x\int_{0}^{x}f(u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{x}uf(u)\mathrm{d}u\,. \tag{1}$$

两边求导，得

$$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^{x}-\int_{0}^{x}f(u)\mathrm{d}u\,. \tag{2}$$

两边求导，得

$$f''(x)+f(x)=(x+2)\mathrm{e}^{x}. \tag{3}$$

该方程对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$，C_1，C_2 为任意常数.

设（3）的一个特解为 $y^{*}=(ax+b)\mathrm{e}^{x}$，代入方程（3），可得

$$2ax+2a+2b=x+2,$$

比较系数，可得 $a=b=\dfrac{1}{2}$，所以，方程（3）的通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{x}，\ C_1，C_2\text{ 为任意常数}.$$

令 $x=0$，由（1）和（2），可得 $f(0)=0$，$f'(0)=1$.从而 $C_1=-\dfrac{1}{2}$，$C_2=0$.

故 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}(x+1)\mathrm{e}^{x}$.

五、设方程组 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{u}+u\sin v\\ y=\mathrm{e}^{u}-u\cos v\end{cases}$ 确定反函数组 $u=u(x,y)$ 和 $v=v(x,y)$，$z=u^2+v^2$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$。（12 分）

解一：方程组 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{u}+u\sin v\\ y=\mathrm{e}^{u}-u\cos v\end{cases}$ 两边对 x 求导，可得

$$\begin{cases}1=(\mathrm{e}^{u}+\sin v)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex] 0=(\mathrm{e}^{u}-\cos v)\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin v}{\mathrm{e}^{u}(\sin v-\cos v)+1}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\cos v-\mathrm{e}^{u}}{u[\mathrm{e}^{u}(\sin v-\cos v)+1]}\end{cases}.$$

方程组 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^{u}+u\sin v\\ y=\mathrm{e}^{u}-u\cos v\end{cases}$ 两边对 y 求导，可得

$$\begin{cases} 0=(\mathrm{e}^u+\sin v)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 1=(\mathrm{e}^u-\cos v)\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]} \end{cases}.$$

故 $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2u^2\sin v+2v\cos v-2v\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{-2u^2\cos v+2v\sin v+2v\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]} \end{cases}.$$

解二：方程组$\begin{cases} x=\mathrm{e}^u+u\sin v \\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v \end{cases}$两边微分，得

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=(\mathrm{e}^u+\sin v)\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}y=(\mathrm{e}^u-\cos v)\mathrm{d}u+u\sin v\mathrm{d}v \end{cases},$$

解得 $$\begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1}\mathrm{d}x-\dfrac{\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v=\dfrac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}\mathrm{d}x+\dfrac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}\mathrm{d}y \end{cases},$$

于是， $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]} \end{cases}$$

故 $$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2u^2\sin v+2v\cos v-2v\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{-2u^2\cos v+2v\sin v+2v\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]} \end{cases}.$$

解三：令$F(x,y,u,v)=x-(\mathrm{e}^u+u\sin v)$， $G(x,y,u,v)=y-(\mathrm{e}^u-u\cos v)$.

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\mathrm{e}^u-\sin v & -u\cos v \\ -\mathrm{e}^u+\cos v & -u\sin v \end{vmatrix}=u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1],$$

故 $$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}1 & -u\cos v\\ 0 & -u\sin v\end{vmatrix}=\frac{u\sin v}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}0 & -u\cos v\\ 1 & -u\sin v\end{vmatrix}=\frac{-u\cos v}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-\mathrm{e}^u-\sin v & 1\\ -\mathrm{e}^u+\cos v & 0\end{vmatrix}=\frac{-\mathrm{e}^u+\cos v}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}-\mathrm{e}^u-\sin v & 0\\ \mathrm{e}^u-\cos v & 1\end{vmatrix}=\frac{\mathrm{e}^u+\sin v}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

于是，$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2u^2\sin v+2v\cos v-2v\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=2u\dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{-2u^2\cos v+2v\sin v+2v\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}\end{cases}.$$

六、过直线$L:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{2}$作平面$\Pi$，使它垂直于平面$\Pi_1:x+y+z=1$，求平面$\Pi$的方程。（10分）

解一：因为所求平面Π过直线L，故平面Π的法向量$\vec{n}$垂直于直线L的方向向量，也垂直于平面Π_1的法向量，故取

$$\vec{n}=\{-1,3,2\}\times\{1,1,1\}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k},$$

又直线L在平面上，则平面Π经过点$(1,1,1)$，因此所求平面方程为

$$1\cdot(x-1)+3(y-1)-4(z-1)=0,$$

即 $$x+3y-4z=0.$$

解二：直线L的方程可改写成

$$\begin{cases}3x+y-4=0\\ 2y-3z+1=0\end{cases},$$

过直线L的平面束方程为$3x+y-4+\lambda(2y-3z+1)=0$，法向量为$\vec{n}=\{3,1+2\lambda,-3\lambda\}$.

由于$\Pi\perp\Pi_1$，故$\vec{n}\cdot\{1,1,1\}=3+1+2\lambda-3\lambda=0$，解得$\lambda=4$.

故所求的平面方程为$3x+y-4+4(2y-3z+1)=0$，即

$$x+3y-4z=0.$$

七、求直线$\begin{cases}x+y+2z=1\\x-2y-z=2\end{cases}$与平面$x-y+2z=1$的夹角。（10 分）

解：直线$\begin{cases}x+y+2z=1\\x-2y-z=2\end{cases}$的方向向量可取为

$$\vec{l}=\{1,1,2\}\times\{1,-2,-1\}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&2\\1&-2&-1\end{vmatrix}=3\vec{i}+3\vec{j}-3\vec{k}.$$

故直线$\begin{cases}x+y+2z=1\\x-2y-z=2\end{cases}$与平面$x-y+2z=1$的夹角正弦为

$$\sin\varphi=\left|\frac{\{3,3,-3\}\cdot\{1,-1,2\}}{|\{3,3,-3\}|\cdot|\{1,-1,2\}|}\right|=\left|\frac{-2}{\sqrt{3}\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{3},$$

故所求的夹角为$\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

八、设$z=f(2x-y,y\sin x)$，其中f具有连续的二阶偏导数，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。（12 分）

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot y\cos x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2[f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot\sin x]+f_2'\cos x+y\cos x\cdot[f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\cdot\sin x]$$

$$=-2f_{11}''+f_{12}''\cdot(2\sin x-y\cos x)+f_2'\cos x+f_{22}''\cdot y\cos x\sin x.$$

九、求曲线$\begin{cases}x^2+3y^2+z^2=8\\z^2=2x^2+2y^2\end{cases}$在点$(-1,1,-2)$处的切线方程与法平面方程。(10 分)

解一：方程组$\begin{cases}x^2+3y^2+z^2=8\\z^2=2x^2+2y^2\end{cases}$两边对$x$求导，得

$$\begin{cases}2x+6y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\\2z\dfrac{dz}{dx}=4x+4y\dfrac{dy}{dx}\end{cases}，解得\begin{cases}2x+6y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0\\2z\dfrac{dz}{dx}=4x+4y\dfrac{dy}{dx}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{3x}{5y}\\\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{4x}{5z}\end{cases},$$

于是所求的切向量为$\vec{T}=\left\{1,\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\right\}\Big|_{(-1,1,-2)}=\{1,\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5}\}$，故所求的切线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{\frac{3}{5}}=\frac{z+2}{\frac{2}{5}}\quad 或\ \frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}$$

法平面方程为$5(x+1)+3(y-1)+2(z+2)=0$，即$5x+3y+2z+6=0$.

解二：对方程组$\begin{cases} x^2+3y^2+z^2=8 \\ z^2=2x^2+2y^2 \end{cases}$两边微分，可得

$$\begin{cases} 2x\mathrm{d}x+6y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0 \\ 2z\mathrm{d}z=4x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y \end{cases},$$

解得 $\begin{cases} \mathrm{d}y=-\dfrac{3x}{5y}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}z=\dfrac{4x}{5z}\mathrm{d}x \end{cases}$，即$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{3x}{5y} \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{4x}{5z} \end{cases}$.

于是所求的切向量为$\vec{T}=\left\{1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right\}\Big|_{(-1,1,-2)}=\{1,\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5}\}$，故所求的切线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{\frac{3}{5}}=\frac{z+2}{\frac{2}{5}} \quad 或 \frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}$$

法平面方程为$5(x+1)+3(y-1)+2(z+2)=0$，即$5x+3y+2z+6=0$.

解三：记$F(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2-8$，$G(x,y,z)=z^2-2x^2-2y^2$

所求切线的切向量为

$$\vec{T}=\{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\}\Bigg|_{(-1,1,-2)}$$

$$=\{\begin{vmatrix} 6y & 2z \\ -4y & 2z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 2z & -4x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 2x & 6y \\ -4x & -4y \end{vmatrix}\}\Bigg|_{(-1,1,-2)}$$

$$=\{20yz,-12xz,16xy\}\big|_{(-1,1,-2)}$$

$$=\{-40,-24,-16\}$$

故所求的切线方程为

$$\frac{x+1}{-40}=\frac{y-1}{-24}=\frac{z+2}{-16}，即\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}.$$

法平面方程为$5(x+1)+3(y-1)+2(z+2)=0$，即$5x+3y+2z+6=0$.