厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷

________学院________系________年级________专业

试卷类型:(理工类A卷)　　　　考试时间:2021.06.18

一、判别下列级数的敛散性:(第一小题 6 分,第二小题 8 分,共 14 分)

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$;

解:因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(2n+2)!}{3^{n+1}((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{3^n(n!)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{3(n+1)}=\frac{4}{3}>1$$

,由比值审敛法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{3^n(n!)^2}$发散。

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\ln\dfrac{n+1}{n}+\dfrac{\sin n}{n^2})$。

解:先考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$,用 Leibniz 判别法。因为$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}=0$,

又$\ln\dfrac{n+2}{n+1}=\ln(1+\dfrac{1}{n+1})<\ln(1+\dfrac{1}{n})=\ln\dfrac{n+1}{n}$,由 Leibniz 判别法,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$收敛。

再考察级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin n}{n^2}$,因为$|(-1)^n\dfrac{\sin n}{n^2}|\le\dfrac{1}{n^2}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin n}{n^2}$为绝对收敛。由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin n}{n^2}$都收敛,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\ln\dfrac{n+1}{n}+\dfrac{\sin n}{n^2})$也收敛。

二、(每小题 8 分,共 16 分)求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

1. $y''+y=2\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

解:这是二阶非齐次常系数线性微分方程。其特征方程为$r^2+1=0$,解得特征根为$r_{1,2}=\pm i$。

又因为$\lambda+i\omega=i$是一重特征根,因此可设特解为$y^*=x(a\cos x+b\sin x)$,代入微分方程求得

$a=-1,\ b=0$,从而微分方程的通解为$y=-x\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x$。

又由初始条件$y(0)=0$, $y'(0)=1$,解得$C_1=0, C_2=2$。因此满足初始条件的特解为

$y=-x\cos x+2\sin x$。

2. $y^2y''+(y')^3=y(y')^2$ ， $y(0)=1$， $y'(0)=1$。

解：这是二阶可降阶微分方程。 令 $P(y)=y'(x)$，则原微分方程转化为 $y^2P\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}+P^3=yP^2$，

整理得 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y}=\dfrac{P}{y}-\dfrac{P^2}{y^2}$，这是一阶齐次方程。再令 $u(y)=\dfrac{P}{y}$，从而 $u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=u-u^2$，进而有

$-\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y}$，解得 $\dfrac{1}{u}=\ln|y|+C_1$，即有 $\dfrac{y}{P}=\ln|y|+C_1$。因为 $P(1)=P(y(0))=y'(0)=1$，得 $C_1=1$

且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P=\dfrac{y}{\ln|y|+1}$，整理得 $\dfrac{(\ln|y|+1)\mathrm{d}y}{y}=\mathrm{d}x$，解得 $\dfrac{1}{2}(\ln|y|)^2+\ln|y|=x+C_2$，又 $y(0)=1$，

得 $C_2=0$，因此满足初始条件的特解为 $\dfrac{1}{2}(\ln|y|)^2+\ln|y|=x$。

三、(**本题 8 分**)计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由球面 $z=x^2+y^2+z^2$ 所围成的有界闭区域。

解：此球面在球坐标下为 $r=\cos\varphi$， $\varphi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$。因此

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r\ r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\ \mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\ \mathrm{d}r=\frac{\pi}{10}(-\cos^5\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}。$$

四、(**本题 8 分**)计算第一类曲线积分 $I=\oint_L(y^2+xy^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$。

解：设 L_1 星形线在第一卦限的部分，其参数化方程为 $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$， $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$。由奇偶对称性，有 $\oint_L xy^2\,\mathrm{d}s=0$， $\oint_L y^2\,\mathrm{d}s=4\int_{L_1}y^2\,\mathrm{d}s$。从而

$$I=4\int_{L_1}y^2\,\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\cdot\sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)}\ \mathrm{d}t$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\cdot\cos t\ \mathrm{d}t=-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\ \mathrm{d}\sin t=\frac{3}{2}\sin^8 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}。$$

五、（本题 10 分）计算第二类曲线积分 $I=\int_L \frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 是曲线 $y=\frac{\pi}{2}\cos x$ 从点 $(0,\frac{\pi}{2})$ 到点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 的一段有向弧。

解：作有向曲线 L_1: $x=\frac{\pi}{2}\cos\theta, y=\frac{\pi}{2}\sin\theta$，$\theta:0\to\frac{\pi}{2}$。设 D 为 L 和 L_1 所围成的有界区域。则由格林公式，得

$$I=\int_L \frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{L+L_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}-\int_{L_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\iint_D \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L_1}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=0-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}\cos\theta)-\frac{\pi}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}(\frac{\pi}{2}\sin\theta)}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}。$$

六、（本题 8 分）计算第一类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz+yz+z^2\,\mathrm{d}S$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分。

解：$I=\iint\limits_{\Sigma} xz+yz+z^2\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_D 1-x-y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}1-x-y\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(1-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{6}(x-1)^3\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{6}。$$

七、（本题 10 分）计算第二类曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$ 的上侧。

解：用高斯公式。作辅助曲面 $\Sigma_1: z=1, (x,y)\in D_{xy}=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$，取上侧。设 Ω 是由 Σ 和 Σ_1 所围成的有界区域。又设 $D_z=\{(x,y): x^2+y^2\le z^2\}$。由高斯公式得

$$I=-\iint\limits_{\Sigma^-+\Sigma_1}(y^2+z^2)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$+\iint_{\Sigma_1}(y^2+z^2)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\iiint_{\Omega}x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_1}(y^2+z^2)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2+z^2)y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}x^2+y^2+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z(\rho^2+z^2)\rho\mathrm{d}\rho+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=-4\pi\int_0^1(\frac{1}{4}\rho^4+\frac{1}{2}\rho^2z^2)|_0^z\mathrm{d}z+2\pi\cdot\frac{1}{4}\rho^4\,|_0^1$$

$$=-3\pi\int_0^1 z^4\mathrm{d}z+2\pi\cdot\frac{1}{4}=-\frac{3\pi}{5}z^5\,|_0^1+\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{5}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{10}\text{。}$$

三重积分部分的另外一种解法（球面坐标）：

$$-2\iiint_{\Omega}x^2+y^2+z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^2\ r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=-4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{r^5}{5}|_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=-\frac{4\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\varphi}{\cos^5\varphi}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^5\varphi}\,\mathrm{d}\cos\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{5}\frac{1}{\cos^4\varphi}|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{3\pi}{5}$$

八、（本题 10 分）求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$的和函数。

解： $u_n=|(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}|=\frac{2n+2}{(2n+1)\,!}|x|^{2n+1}$，由 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+4}{(2n+3)\,!}|x|^{2n+3}}{\frac{2n+2}{(2n+1)\,!}|x|^{2n+1}}=0<1$， 知

收敛半径 $R=+\infty$ 。令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)\,!}x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty)$， 则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+2}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!}x^{2n+2}]'=[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!}x^{2n+2}]'$$

$$=[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}]'=[x\sin x]'=\sin x+x\cos x$$

九、（本题 10 分）将函数 $f(x)=\ln(2-x-x^2)$ 展开成 x 的幂级数。

解：注意到当 $x\in(-1,1)$，

$$f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$$

$$=-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1)x^n,$$

$$\therefore f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t+f(0)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1)t^n\,\mathrm{d}t+\ln 2$$

$$=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-1]x^{n+1}=\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}x^{n+1}\text{。}$$

又注意到当 $x=-1$时，$\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{(-1)^n}{n+1}-\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}]$收敛，$f(x)$ 也连续。因此

$$f(x)==\ln 2+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n-2^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}x^{n+1},\quad x\in[-1,1)\text{。}$$

十、（本题 6 分）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项都不为零，且满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$。

证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_n})$ 为条件收敛。

证明：因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，所以由数列极限的保号性，存在某个正整数 N，使得 $n\geq N$ 时，$u_n>0$。

又因 $\lim_{n\to\infty}n(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}})=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_{n+1}}=2$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_n}|$ 是发散的。

另一方面，注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_n})$ 的部分和 $s_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(\frac{1}{u_{k+1}}+\frac{1}{u_k})=-\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^n}{u_{n+1}}$，

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=-\frac{1}{u_1}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{u_{n+1}}=-\frac{1}{u_1}$，因此

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_n})$收敛。综上所述，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_n})$为条件收敛。