厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷

考试日期：2016　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、计算下列各题：（每小题 5 分，共 10 分）

（1）考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 的收敛性。

（2）将函数 $\frac{1}{(3-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛域.

二、计算下列各题：（每小题 5 分，共 10 分）

（1）计算曲线积分 $\int_\Gamma \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Γ 为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t$，$y=\mathrm{e}^t\sin t$，$z=\mathrm{e}^t$ 上对应于 t 从 0 到 2 的一段弧.

（2）计算 $\oint_L (2|x|+y)\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$.

三、计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2\,(a>0)$ 在 $z\geq 0$ 的部分.

四、计算 $\oiint\limits_{\Sigma} y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是正立方体 Ω：$0\leq x\leq a$，$0\leq y\leq a$，$0\leq z\leq a$ 的表面取外侧.（8 分）

五、求由曲面 $z=\sqrt{5-x^2-y^2}$ 及 $x^2+y^2=4z$ 所围成的立体图形的体积.（8 分）

六、讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]$的收敛性.（10 分）

七、求无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n(n+1)}$的和函数$S(x)$，指出其收敛域，并计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.（10 分）

八、计算$\oint_L\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{y-x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$，$L$为椭圆曲线$\frac{(x-a)^2}{4}+(y-a)^2=1$取正向, 其中参数$a$满足$a>0$且$a\neq\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

九、展开函数$f(x)=|x|\ (-\pi<x<\pi)$ 为傅里叶级数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$的值.（10 分）

十、 计算$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是抛物面$z=1-x^2-y^2$在第一卦限部分，方向取下侧.（8 分）

十一、设$u_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^n x\mathrm{d}x$，（1）求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(u_n+u_{n+2})$的值;（2） 证明: 对任意参数$\lambda>0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^{\lambda}}$收敛.