# 厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷解答

________学院________系________年级________专业

试卷类型:（理工类 A 卷）　　　　考试时间:2020.06.16

一、（每小题 6 分，共 12 分）判别下列级数的敛散性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$；

解：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2}/\frac{1}{n^{3/2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=0,$$

所以由比较审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ 收敛。

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)$。

解：用 Leibniz 判别法。因为 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{2}-1)=0$，

又 $\sqrt[n+1]{2}-1<\sqrt[n]{2}-1$，

由用 Leibniz 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1)$ 收敛。

二、（每小题 6 分，共 12 分）求解下列微分方程：

1. 求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解；

解：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。代入原微分方程，得 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u$，整理得

$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，从而 $\int\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，求得 $\ln|\ln u-1|=\ln|x|+\ln|C|$，整理得

$\ln u=Cx+1$，因此原微分方程的通解为 $y=xe^{Cx+1}$。

2. 求满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的微分方程 $y''+(y')^2=-1$ 的特解。

解：令 $P=y'$，则原微分方程转化为 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}+P^2=-1$，整理得 $\frac{\mathrm{d}P}{P^2+1}=-\mathrm{d}x$，从而 $\int\frac{\mathrm{d}P}{P^2+1}=-\int\mathrm{d}x$，解得 $\arctan P=-x+C_1$，因为 $P(0)=y'(0)=0$，得 $C_1=0$，所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P=-\tan x$，解得 $y=\ln|\cos x|+C_2$，又 $y(0)=0$，得 $C_2=0$，因此满足初始条件的特解为 $y=\ln|\cos x|$。

**三、（本题 8 分）**验证函数 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$，并求幂级数 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数。

解：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{(3n)!}}{\frac{1}{(3n+3)!}}}=+\infty$，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$。

$y'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!},y''(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$。从而

$$y''+y'+y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\text{。}$$

故 $y(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 为微分方程 $y''+y'+y=e^x$ 的解，且 $y(0)=1,y'(0)=0$。

为了求和函数，解微分方程 $y''+y'+y=e^x$，$y(0)=1,y'(0)=0$。其特征方程为 $r^2+r+1=0$，解得特征根为 $r=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。又因为 $\lambda=1$ 不是特征根，因此可设特解为 $y*=ae^x$，代入微分方程求得 $a=\frac{1}{3}$，从而微分方程的通解为 $y=\frac{1}{3}e^x+e^{-\frac{x}{2}}(C_1\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+C_2\sin\frac{\sqrt{3}x}{2})$，又由初始条件 $y(0)=1,y'(0)=0$，得到 $C_1=\frac{2}{3}$，$C_2=0$。因此所求的和函数为

$$y=\frac{1}{3}e^x+\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x),x\in(-\infty,+\infty)\text{。}$$

**四、（本题 8 分）**设二元函数 $u=u(x,y)$， $v=v(x,y)$ 由 $\begin{cases} x=e^u\cos v \\ y=e^u\sin v \end{cases}$ 所确定，证明：

$(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2=\frac{1}{x^2+y^2}$。

解：令 $F(x,y,u,v)=x-e^u\cos v$， $G(x,y,u,v)=y-e^u\sin v$，则

$\frac{\partial F}{\partial x}=1$， $\frac{\partial F}{\partial y}=0$， $\frac{\partial F}{\partial u}=-e^u\cos v$， $\frac{\partial F}{\partial v}=e^u\sin v$；

$\frac{\partial G}{\partial x}=0$， $\frac{\partial G}{\partial y}=1$， $\frac{\partial G}{\partial u}=-e^u\sin v$， $\frac{\partial G}{\partial v}=-e^u\cos v$。

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{e^u\sin v}{e^{2u}}=-\frac{\sin v}{e^u},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{-e^u\cos v}{e^{2u}}=\frac{\cos v}{e^u}。$$

从而 $(\frac{\partial v}{\partial x})^2+(\frac{\partial v}{\partial y})^2=\frac{1}{e^{2u}}=\frac{1}{x^2+y^2}$。

**五、（本题 12 分）**求函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 在有界闭区域 $x^2+y^2\le 9$ 上的极值和最值。

解：$f_x(x,y)=4-2x$，$f_y(x,y)=-4-2y$，$f_{xx}(x,y)=-2$，$f_{xy}(x,y)=0$，$f_{yy}(x,y)=-2$ 。

令 $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$，解得可疑极值点为 $x=2,\ y=-2$。又因为

$f_{xx}(2,-2)=-2<0$， $f_{xx}(2,-2)\cdot f_{yy}(2,-2)-f_{xy}(2,-2)\cdot f_{xy}(2,-2)=4>0$，

所以 $f(x,y)$ 在点 $(2,-2)$ 取得极大值 $f(2,-2)=8$。

最后求最值。先求 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 在 $x^2+y^2=9$ 的条件极值。

引入 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=4(x-y)-x^2-y^2-\lambda(x^2+y^2-9)$，由

$L_x(x,y,\lambda)=4-2x-2\lambda x=0$， $L_y(x,y,\lambda)=-4-2y-2\lambda y=0$，

$L_\lambda(x,y,\lambda)=x^2+y^2-9=0$， 解方程组得 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}$， $y=-\frac{3}{\sqrt{2}}$ 或者 $x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$， $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$。

$f(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}})=12\sqrt{2}-9$， $f(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})=-12\sqrt{2}-9$。又

$$f(2,-2)=8>f(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}})=12\sqrt{2}-9>f(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})=-12\sqrt{2}-9,$$

因此 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $x^2+y^2\le 9$ 上的最小值为 $-12\sqrt{2}-9$，最大值为 8。

**求边界最值的另外一种解法：**令 $x=3\cos\theta, y=3\sin\theta$，则

$$f(3\cos\theta,3\sin\theta)=4(\cos\theta-\sin\theta)-9=-12\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-9,$$

从而 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2=9$ 上的最小值为 $-12\sqrt{2}-9$，最大值为 $12\sqrt{2}-9$。又 $f(2,-2)=8$，因此 $f(x,y)$ 在区域 $x^2+y^2\le 9$ 上的最小值为 $-12\sqrt{2}-9$，最大值为 8。

**六、（本题 8 分）**计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega$ 是由旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围成的有界闭区域。

解法一：先一后二法。设 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{1}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1(1-\rho^2)\rho^3\mathrm{d}\rho=\pi(\frac{1}{2}\rho^4-\frac{1}{3}\rho^6)\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}。$$

解法二：先二后一法。设 $D_z:x^2+y^2\le z$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\int_0^1 z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{6}$$

**七、（本题 8 分）**计算第一类曲线积分 $I=\oint_L y\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为摆线的一拱 $x=3(t-\sin t)$，$y=3(1-\cos t)$，$0\le t\le 2\pi$。

解：$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=3\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=6\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$\therefore I=\oint_L y\,\mathrm{d}s=18\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t\quad=36\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t\overset{t=2u}{=}72\int_0^{\pi}\sin^3 u\mathrm{d}u$$

$$=-72\int_0^{\pi}(1-\cos^2 u)\mathrm{d}(\cos u)=-72(\cos u-\frac{1}{3}\cos^3 u)\Big|_0^{\pi}=96$$ 。

八、**（本题 8 分）** 计算第二类曲线积分

$$I=\oint_L (x^2 y\cos x+2xy\sin x-e^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2x)\mathrm{d}y,$$

其中 $L$ 是上半圆 $y=\sqrt{2x-x^2}$，取逆时针方向。

解：作辅助曲线 $l$： $y=0,\quad x:0\to 2$ 。设 $D$ 为曲线 $l$ 和 $L$ 所围成的平面区域。

由格林公式，

$$I=\oint_{L+l}(x^2 y\cos x+2xy\sin x-e^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2x)\mathrm{d}y$$

$$-\int_l (x^2 y\cos x+2xy\sin x-e^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2x)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 2x\sin x+x^2\cos x-2-(x^2\cos x+2x\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^2 e^x\mathrm{d}x$$

$$=-2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+e^x\Big|_0^2=-2\cdot\frac{\pi}{2}+e^2-1$$

$$=e^2-1-\pi$$

九、**（本题 8 分）** 计算第一类曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma$ 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分。

解：设 D 为 $\Sigma$ 在 $xoy$ 坐标面的投影。

$$I=\iint_D x(1-x-y)\sqrt{1+1+1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}x(1-x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1(x-1)^2 x\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\Big|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{24}$$ 。

十、**（本题 8 分）** 设曲面 $\Sigma$ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算第二类曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$$ 。

解：设 $\Omega$ 是单位球，则由高斯公式得

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=3\iiint_{\Omega}x^2+y^2+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r$$

$$=6\pi(-\cos\varphi)\big|_0^{\pi}\cdot\frac{r^5}{5}\big|_0^1=\frac{12}{5}\pi$$

**十一、（本题 8 分）**将函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。

解：先把 $g(x)=\ln(1+x)$ 展开成 $x$ 的幂级数。注意到当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\text{。}$$

又 $g(0)=0$，因此逐项积分得 $g(x)=\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$。

当 $x=-1$ 时，级数 $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散；当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛。因此 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ 的收敛域为 $(-1,1]$，即有 $g(x)=\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$， $x\in(-1,1]$。

故当 $x\in(-1,1]$ 时，

$$f(x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+2}\text{。}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^n=x+\sum_{n=2}^{\infty}[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n}{n-1}]x^n$$

$$=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n\text{。}$$