厦门大学《微积分 I-2》课程期中试卷解答

一、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

（1）设 $\vec{a}=(2,1,-1)$，$\vec{b}=(1,2,2)$，求 $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})$ 和 $(2\vec{a}-\vec{b})$ 与 $\vec{a}$ 的夹角 θ.

解：$\because (2\vec{a}-\vec{b})=(3,0,-4)$，

$$\therefore \mathrm{Prj}_{\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})=\frac{(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{3\cdot1+0\cdot2+(-4)\cdot2}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=-\frac{5}{3},$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot(2\vec{a}-\vec{b})}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|(2\vec{a}-\vec{b})\right|}=\frac{2\cdot3+1\cdot0+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \theta=\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

（2）求以 $A(4,7,-1)$、$B(5,5,1)$ 和 $C(3,7,-2)$ 为顶点的三角形的面积.

解：$\because$ $\overrightarrow{AB}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,0,-1)$

$$\therefore \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -2 & 2\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=\left(2,-1,-2\right),$$

于是三角形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=\dfrac{3}{2}$.

二、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

（1）设 $u=y^x\ln(xz)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{z}\cdot y^x$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=\dfrac{1}{z}\cdot y^x\ln y$.

（2）设 $u=xyz^2$，点 $P(1,1,1)$，求 u 在点 P 处的最大的方向导数和它的方向（以单位向量表示）.

解：$\mathrm{grad}\,u\big|_P=(yz^2,xz^2,2xyz)\big|_P=(1,1,2)$，$\left|\mathrm{grad}\,u\big|_P\right|=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$，

$$\vec{n}=\operatorname{grad}u\big|_P/\left|\operatorname{grad}u\big|_P\right|=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right),$$

因为u在点P处的最大的方向导数就是在点P处的梯度的模，其方向与梯度方向相同，所以u在点P处的最大的方向导数为$\sqrt{6}$，其方向为$\vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

三、计算下列各题：（共 10 分）

（1）求曲线段$L:\begin{cases}x=\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}},\\ y=t-\frac{1}{2}t^2,\end{cases}$ $t\in[0,1]$的弧长.（4 分）

解：弧微分$\mathrm{d}s=\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}t=(1+t)\mathrm{d}t$，弧长$L=\int_0^1\mathrm{d}s=\int_0^1(1+t)\mathrm{d}t=\frac{3}{2}$.

（2）求曲线$\rho=2+\sin\theta$所围成的图形的面积.（6 分）

解：图形的面积$S=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(2+\sin\theta\right)^2\mathrm{d}\theta=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(2+\sin\theta\right)^2\mathrm{d}\theta$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(4+4\sin\theta+\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta=4\pi+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=4\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi}{2}.$$

四、计算下列各题：（每小题 4 分，共 8 分）

（1）求极限$\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{y\sqrt{x^2+y^2}}$.

解：$\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{y\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{xy}$

$$=\lim_{(x,y)\to(3,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\lim_{(x,y)\to(3,0)}\frac{\mathrm{e}^{xy}-1}{xy}=\frac{3}{\sqrt{3^2+0^2}}\cdot\lim_{u\to0}\frac{\mathrm{e}^u-1}{u}=1.$$

（2）求曲线$\begin{cases}x^2+2y^2+z-1=0,\\ x^2+y^2-z^2=0\end{cases}$在$yoz$坐标面上的投影柱面和投影曲线方程.

解：消去x得曲线在yoz坐标面上的投影柱面方程是$y^2+z^2+z-1=0$，从而得投影曲线方程$\begin{cases}y^2+z^2+z-1=0,\\ x=0\end{cases}$.

五、设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2}, & (x-1)^2+y^2\neq 0,\\ 0, & (x-1)^2+y^2=0,\end{cases}$ ，（8 分）

① 计算 $f_x(1,0)$ 和 $f_y(1,0)$. ② 问 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处是否可微？请说明理由.

解：① $f_x(1,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x,0)-f(1,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=0$ ，

类似得 $f_y(1,0)=0$.

② 答一：

$\because \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\ y=k(x-1)}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot k(x-1)}{(x-1)^2+\left[k(x-1)\right]^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{k}{1+k^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$,

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}f(x,y)$ 极限不存在，由此可知 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处不连续，进而得 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处不可微.

② 答二：$\Delta z=f(1+\Delta x,\Delta y)-f(1,0)$ ，$\Delta z-\left[f_x(1,0)\Delta x+f_y(1,0)\Delta y\right]=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$,

考虑 $\lim\limits_{\rho\to 0}=\dfrac{\Delta z-\left[f_x(1,0)\Delta x+f_y(1,0)\Delta y\right]}{\rho}$ ，其中 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$,

取 $\Delta y=\Delta x$ ，则

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}=\frac{\Delta z-\left[f_x(1,0)\Delta x+f_y(1,0)\Delta y\right]}{\rho}=\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{2\sqrt{2}\left|\Delta x\right|}=\infty$ ， $\therefore \lim\limits_{\rho\to 0}=\dfrac{\Delta z-\left[f_x(1,0)\Delta x+f_y(1,0)\Delta y\right]}{\rho}\neq 0$ ，即

$\Delta z-\left[f_x(1,0)\Delta x+f_y(1,0)\Delta y\right]\neq o(\rho)$ ，所以 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处不可微.

六、设 $z=f\left(y,\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$、$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.（8 分）

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f_2'\left(y,\dfrac{y}{x}\right)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{x^2}f_2'\left(y,\frac{y}{x}\right)+\left(-\frac{y}{x^2}\right)\left[f_{21}''\left(y,\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}f_{22}''\left(y,\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{x^2}f_2'-\frac{y}{x^2}f_{21}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{2y}{x^3}f_2'\left(y,\frac{y}{x}\right)+\left(-\frac{y}{x^2}\right)\left[-\frac{y}{x^2}f_{22}''\left(y,\frac{y}{x}\right)\right]$$

$$=\frac{2y}{x^3}f_2'+\frac{y^2}{x^4}f_{22}''.$$

七、求过点 $M(1,3,1)$，且平行于平面 $\pi:2x+y-2z+6=0$，又与直线 $L:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$ 相交的直线的方程.（8 分）

解一：过点 $M(1,3,1)$，与平面 $\pi:2x+y-2z+6=0$ 相平行的平面方程为 $\pi_1:2(x-1)+(y-3)-2(z-1)=0$，即 $\pi_1:2x+y-2z-3=0$.

又令 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}=t$，则 $\begin{cases}x=2t,\\ y=t+1,\\ z=t+2,\end{cases}$ 把它们代入 $\pi_1:2x+y-2z-3=0$，解得 $t=2$，所以直线 L 与平面 π_1 的交点为 $N(4,3,4)$. 于是所求的直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}=(3,0,3)$，从而得所求的直线方程为 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-1}{1}$ 或 $\begin{cases}x-z=0,\\ y=3.\end{cases}$

解二：过点 $M(1,3,1)$，与平面 $\pi:2x+y-2z+6=0$ 相平行的平面方程为 $\pi_1:2(x-1)+(y-3)-2(z-1)=0$，即 $\pi_1:2x+y-2z-3=0$.

又直线 $L:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$ 过点 $P(0,1,2)$，其方向向量 $\vec{s}=(2,1,1)$，所以过点 $M(1,3,1)$ 和直线 $L:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$ 的平面 π_2 的法向量为

$$\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{MP}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&1\\-1&-2&1\end{vmatrix}=(3,-3,-3)=3(1,-1,-1),$$

所以平面π_2的方程为$\pi_2:(x-1)-(y-3)-(z-1)=0$，即$\pi_2:x-y-z+3=0$.

于是所求的直线方程为$\begin{cases}2x+y-2z-3=0,\\x-y-z+3=0\end{cases}$.

八、求曲线$\begin{cases}x^2+2y^2+z^2-x-1=0,\\2x+6y+z-3=0\end{cases}$在点$(1,0,1)$处的切线方程和法平面方程.（8分）

解：对方程两边关于x求导得：$\begin{cases}2x+4yy'+2zz'-1=0,\\2+6y'+z'=0,\end{cases}$

把点的坐标$x=1,y=0,z=1$代入上面的方程组得 $\begin{cases}2z'+1=0,\\6y'+z'+2=0,\end{cases}$

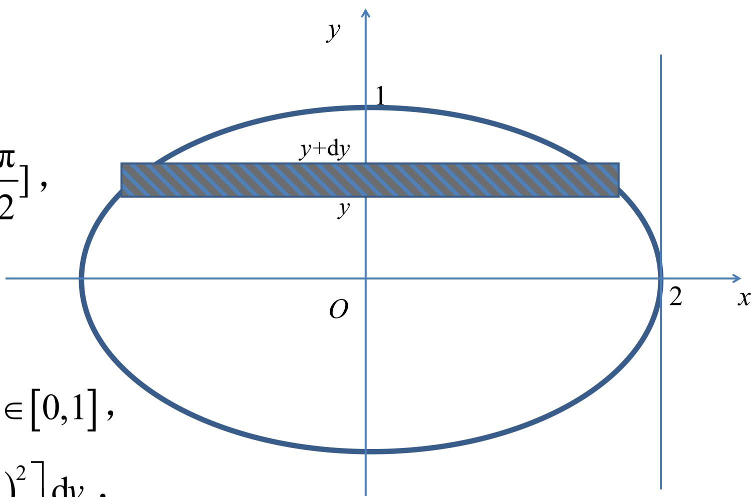
解方程得$y'|_{x=1}=-\dfrac{1}{4}$，$z'|_{x=1}=-\dfrac{1}{2}$，所以在点$(1,0,1)$处的切向量为

$$\vec{T}=(1,-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(4,-1,-2),$$

所以点$(1,0,1)$处的切线方程为$\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{-2}$,

法平面方程为$4(x-1)-y-2(z-1)=0$，即$4x-y-2z-2=0$.

九、求曲线$\begin{cases}x=2\cos t,\\y=\sin t,\end{cases}$ $t\in[0,\pi]$与x轴围成的图形绕直线$x=2$旋转所产生的旋转体的体积.（8分）



解一：记$\begin{cases}x=x_1(t)=2\cos t,\\y=y(t)=\sin t,\end{cases}$ $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

$\begin{cases}x=x_2(t)=2\cos t,\\y=y(t)=\sin t,\end{cases}$ $t\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

如图所示，以y为积分变量，则$y\in[0,1]$，

体积元素$\mathrm{d}v=\left[\pi(2-x_2)^2-\pi(2-x_1)^2\right]\mathrm{d}y$，

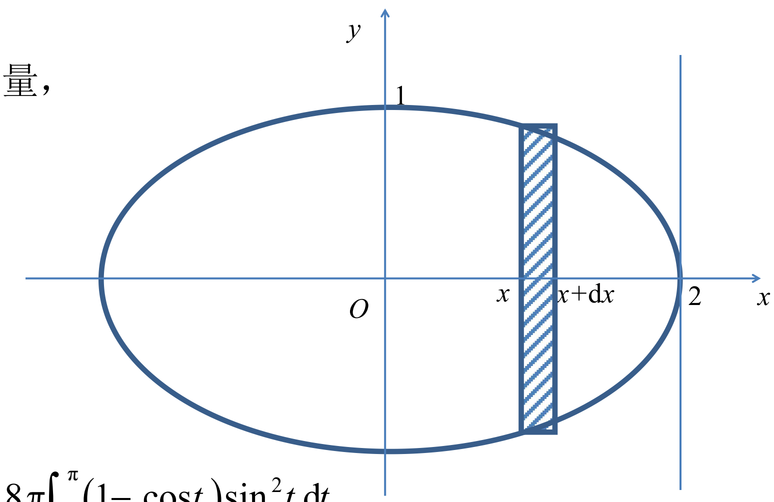
于是旋转体的体积

$$V=\int_0^1\mathrm{d}v=\int_0^1\left[\pi(2-x_2)^2-\pi(2-x_1)^2\right]\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(2-x_2)^2\,\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(2-x_1)^2\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}(2-2\cos t)^2\,\mathrm{d}(\sin t)-\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2-2\cos t)^2\,\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=4\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos t)^2\cos t\,\mathrm{d}t-4\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos t)^2\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=16\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=16\pi\cdot\frac{\pi}{4}=4\pi^2 .$$



解二：如图所示，以 x 为积分变量，

则 $x\in[-2,2]$，

体积元素 $\mathrm{d}v=2\pi(2-x)y\mathrm{d}x$，

于是旋转体的体积

$$V=\int_{-2}^{2}2\pi(2-x)y\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\pi}^{0}2\pi(2-2\cos t)\sin t\,\mathrm{d}(2\cos t)=8\pi\int_{0}^{\pi}(1-\cos t)\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=8\pi\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=4\pi^2 .$$

十、设 $x=f(u,t,y)$， $g(u,t,y)=0$，其中 $f(u,t,y)$， $g(u,t,y)$ 在 R^3 具有一阶连续偏导数，且在点 (u_0,t_0,y_0) 处有 $g(u_0,t_0,y_0)=0$， $\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,t)}\right|_{(u_0,t_0,y_0)}\neq 0$，① 证明：方程组 $x=f(u,t,y)$， $g(u,t,y)=0$ 可以确定一对具有连续偏导数的隐函数 $u=u(x,y),t=t(x,y)$。②设 $z=\varphi(x^2,u,t)$ （函数 φ 具有一阶连续偏导数），而 $u=u(x,y),t=t(x,y)$ 为①中由方程组所确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.（10 分）

证明①： 已知 $f(u,t,y)$，$g(u,t,y)$ 在 R^3 上具有一阶连续偏导数，所以 $f(u,t,y)$ 在 R^3 上有定义.

于是 记 $x_0=f(u_0,t_0,y_0)$. 又令 $F(u,t,x,y)=f(u,t,y)-x$， $G(u,t,x,y)=g(u,t,y)$，

现考虑方程组 $\begin{cases}F(u,t,x,y)=f(u,t,y)-x=0,\\ G(u,t,x,y)=g(u,t,y)=0,\end{cases}$

1） $F_u=f_u$, $F_t=f_t$, $F_x=-1$, $F_y=f_y$ ， $G_u=g_u$, $G_t=g_t$, $G_x=0$, $G_y=g_y$ ， 在

R^4 上连续.

2）$F(u_0,t_0,x_0,y_0)=f(u_0,t_0,y_0)-x_0=0$，$G(u_0,t_0,x_0,y_0)=g(u_0,t_0,y_0)=0$.

3）$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,t)}\right|_{(u_0,t_0,x_0,y_0)}=\left.\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,t)}\right|_{(u_0,t_0,y_0)}\neq 0$.

由隐函数存在定理，方程组$\begin{cases}F(u,t,x,y)=f(u,t,y)-x=0,\\ G(u,t,x,y)=g(u,t,y)=0,\end{cases}$在点$(u_0,t_0,x_0,y_0)$的某一邻域内确定一对具有连续偏导数的隐函数$u=u(x,y),t=t(x,y)$.

解②：对方程组$\begin{cases}f(u,t,y)-x=0,\\ g(u,t,y)=0,\end{cases}$两边关于$x$求导得：

$\begin{cases}f_1'\cdot u_x+f_2'\cdot t_x-1=0,\\ g_1'\cdot u_x+g_2'\cdot t_x=0,\end{cases}$ 解此方程组得$u_x=\dfrac{g_2'}{f_1'\cdot g_2'-f_2'\cdot g_1'}$，$t_x=\dfrac{-g_1'}{f_1'\cdot g_2'-f_2'\cdot g_1'}$，

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\varphi_1'+\varphi_2'\cdot u_x+\varphi_3'\cdot t_x=2x\varphi_1'+\dfrac{\varphi_2'\cdot g_2'}{f_1'\cdot g_2'-f_2'\cdot g_1'}-\dfrac{\varphi_3'\cdot g_1'}{f_1'\cdot g_2'-f_2'\cdot g_1'}$.

十一、① 证明旋转抛物面$\Sigma: x^2+y^2-2z=0$的任意切平面与该抛物面只有一个交点（即切点）. ② 求通过直线$L:\begin{cases}x-y-1=0,\\ 4y-8z-9=0\end{cases}$的旋转抛物面$\Sigma$的切平面方程.（8 分）

证明①：设点$P(x_0,y_0,z_0)$为旋转抛物面Σ上的任意点，那么在点P处的法向量是$\vec{n}|_P=(2x,2y,-2)|_P=(2x_0,2y_0,-2)$，所以在点$P$处切平面方程是

$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2(z-z_0)=0$，即$2x_0x+2y_0y-2z-2x_0^2-2y_0^2+2z_0=0$，

注意到$P(x_0,y_0,z_0)$在Σ上，有$2z_0=x_0^2+y_0^2$，

于是切平面方程是 $2x_0x+2y_0y-2z-x_0^2-y_0^2=0$，

联立得方程组：$\begin{cases}x^2+y^2-2z=0,\\ 2x_0x+2y_0y-2z-x_0^2-y_0^2=0,\end{cases}$ 解方程组得唯一解$x=x_0,y=y_0,z=z_0$，所以旋转抛物面Σ的任意切平面与该抛物面只有一个交点.

解②：设通过直线L的抛物面Σ的切平面为

$4y-8z-9+\lambda(x-y-1)=0$，即 $\lambda x+(4-\lambda)y-8z-\lambda-9=0$.

联立得方程组：$\begin{cases} x^2+y^2-2z=0, \\ \lambda x+(4-\lambda)y-8z-\lambda-9=0, \end{cases}$

消去 z，配方得：$\left(x-\dfrac{\lambda}{8}\right)^2+\left(y-\dfrac{4-\lambda}{8}\right)^2=\dfrac{1}{32}\left(\lambda^2-12\lambda-64\right)$，

因为方程组只有唯一解，所以 $\lambda^2-12\lambda-64=0$，解得 $\lambda_1=16,\lambda_2=-4$.

所以，所求的切平面方程是 $16x-12y-8z-25=0$ 和 $4x-8y+8z+5=0$.

解②：设通过直线 L 的抛物面 Σ 的切平面为

$x-y-1+\lambda(4y-8z-9)=0$，即 $x+(4\lambda-1)y-8\lambda z-9\lambda-1=0$.

联立得方程组：$\begin{cases} x^2+y^2-2z=0, \\ x+(4\lambda-1)y-8\lambda z-9\lambda-1=0, \end{cases}$

消去 z，配方得：$\left(x-\dfrac{1}{8\lambda}\right)^2+\left(y-\dfrac{4\lambda-1}{8\lambda}\right)^2=\dfrac{1}{32\lambda^2}\left(1-12\lambda-64\lambda^2\right)$，

因为方程组只有唯一解，所以 $1-12\lambda-64\lambda^2=0$，解得 $\lambda_1=\dfrac{1}{16},\lambda_2=-\dfrac{1}{4}$.

所以所求的切平面方程是 $16x-12y-8z-25=0$ 和 $4x-8y+8z+5=0$.

十二、求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在部分球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=5r^2$ $(x>0,y>0,z>0)$ 上的最大值，并利用此结果证明：当 $a>0,b>0,c>0$ 时，有

$abc^3\le 27\left(\dfrac{a+b+c}{5}\right)^5$.（8 分）

解：作拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2)$，由之得

方程组：$\begin{cases} F_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0, \\ F_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0, \\ F_z=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0, \\ F_\lambda=x^2+y^2+z^2-5r^2=0 \end{cases}$，由前三个方程得 $x=y,z=\sqrt{3}x$，将其代入第

四个方程解得$x=y=r, z=\sqrt{3}r$. 所以当$x=y=r, z=\sqrt{3}r$时，$f(x,y,z)$在Σ上取最大值，最大值为$\ln(\sqrt{27}r^5)$.

又由上可知，对$\forall(x,y,z)\in\Sigma$， 恒有 $\ln(xyz^3)=\ln x+\ln y+3\ln z\le\ln(\sqrt{27}r^5)$，

即得 $xyz^3\le\sqrt{27}r^5$. 因为$x^2+y^2+z^2=5r^2$，所以$r=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}}$.

于是有 $xyz^3\le\sqrt{27}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{5}}\right)^5$，将不等式两边平方得

$$x^2y^2(z^2)^3\le 27\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{5}\right)^5.$$

所以对$a>0,b>0,c>0$，令$x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$ ，则$abc^3\le 27\left(\dfrac{a+b+c}{5}\right)^5$.