厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷

考试日期：2015　信息学院自律督导部整理

自律督导部

一、计算下列各题：（每小题 5 分，共 20 分）

(1) 设函数 $u(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x$，求 $\mathbf{grad}\,u$、$\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)$ 和 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)$.

(2) 计算 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=4, y\ge 0$ 与 x 轴围成的闭曲线.

(3) 计算 $\int_L xy\mathrm{d}x$，L 为曲线 $y^2=x$ 上由 $A(1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 的一段弧.

(4) 讨论正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|\sin n|}{2^n}$ 的敛散性.

二、(8 分)计算 $\iint_{\Sigma}(x+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是平面 $z=x+1$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截部分.

三、（10 分）计算 $\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$，取逆时针方向.

四、(1)（2 分）证明：在整个 xOy 平面内，$(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$ 为某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分；

(2)（5 分）求解全微分方程 $(x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y=0$；

(3)（3 分）求$\int_L (x+y+1)\mathrm{d}x+(x-y^2+3)\mathrm{d}y$，其中曲线$L$：$(x-1)^2+y^2=4, y\geq 0$，$L$的方向为逆时针方向.

五、(10 分)求向量场$\{x,0,0\}$经过曲面Σ指定侧的通量，其中Σ为圆柱面$x^2+y^2=1$位于$z=0$上方及平面$z=y$的下方部分，取外侧.

六、(1)（8 分）讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+4}$的收敛性；

(2)（2 分）判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\frac{n}{n^2+4}+\frac{1}{\sqrt{n}}]$的敛散性.

七、（8 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)}$在$(-1,1)$内的和函数.

八、（8 分）将$f(x)=\frac{x-1}{x^2}$展开成$x-2$的幂级数.

九、（10 分）将函数$f(x)=1+x\ (0<x\leq 1)$展开成以 2 为周期的正弦级数，并指出该级数在$x=1$处的值.

十、(6 分)设级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对收敛.