厦门大学《微积分 I-2》课程期末试卷

考试日期：2011　信息学院自律督导部整理

1. (10分)求位于两圆 $(x-1)^2+y^2=1$，$(x-2)^2+y^2=4$ 之间的图形的形心。

2. （10分）在一个形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器内，已经盛有 8π 立方厘米的水，现又倒入 120π 立方厘米的水，问水面比原来升高多少厘米？

3. （10分）计算 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 为抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=3$ 所围的区域。

4. （10分）计算 $\oint_L(|x|+2|y|)\,\mathrm{d}s$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$。

5. （10分）计算 $\oint_L\dfrac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 为曲线 $|x|+|y|=2$，方向为逆时针。

6. （10分） 计算 $\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+4\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 在 $z\ge0$ 部分，方向取下侧。

7. （10分）根据a的取值，讨论常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{na^n}$ $(a>0)$的敛散性（绝对收敛，条件收敛或发散）。

8. （10分）求无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(n+1)x^n$的和函数$S(x)$，并指出其收敛域。

9. （10分）把函数$f(x)=-\ln\frac{1+x}{1-x}+x^2$展成关于$x$的幂级数。

10. （10分）记$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，将$f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$展开成Fourier级数。

附加题：（两题任选一题，也可以不选）

1. 设$f(x)$在$[0;\,1]$上单调减少且$f(x)>0$，证明$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$。

2. 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数。若$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=p$，证明：当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$p<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。