Autômatos Finitos e Linguagens Regulares

Prof. Hamilton José Brumatto

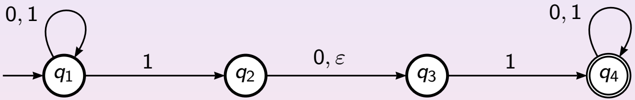
CIC-UESC

24 de dezembro de 2024

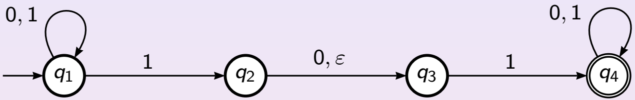
Onde está o Determinismo?

- Todo passo da computação segue da seguinte forma:
  - Dado um estado, ao receber uma entrada ele segue para o estado seguinte.
  - O estado seguinte é dado por uma função de relação entre o estado anterior e a entrada.
  - Ao repetir a seqüência, obtém-se o mesmo estado. ESTÁ DETERMINADO.
- Em um Autômato Finito Não Determinístico (AFN em contraposição com AFD) várias escolhas de estado podem existir para o próximo estado, em qualquer ponto.

Um exemplo de AFN e as diferenças



Um exemplo de AFN e as diferenças



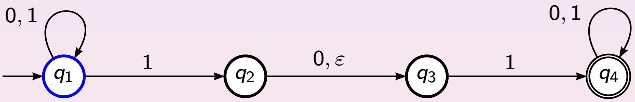
Diferenças:

- Não existem setas de transição para todos símbolos em cada estado.
- Mais de uma seta de transição para um mesmo símbolo.
- Existe seta de transição com o rótulo ε

Como computa o AFN?

No AFD a máquina está sempre em um estado e um único estado. No AFN ela pode estar em vários estados simultaneamente. Se, no final da cadeia, um dos estados é um estado de aceitação então a cadeia é aceita.

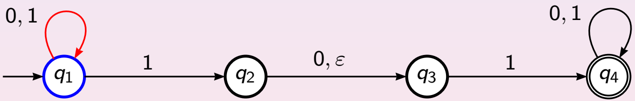
Vamos simular a cadeia 01010 para o autômato N_1 abaixo:



Como computa o AFN?

No AFD a máquina está sempre em um estado e um único estado. No AFN ela pode estar em vários estados simultaneamente. Se, no final da cadeia, um dos estados é um estado de aceitação então a cadeia é aceita.

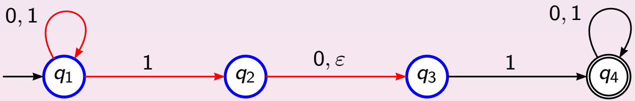
Vamos simular a cadeia 01010 para o autômato N_1 abaixo: 0



Como computa o AFN?

No AFD a máquina está sempre em um estado e um único estado. No AFN ela pode estar em vários estados simultaneamente. Se, no final da cadeia, um dos estados é um estado de aceitação então a cadeia é aceita.

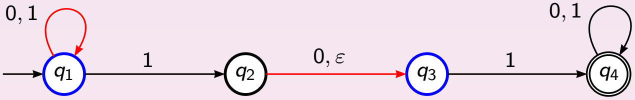
Vamos simular a cadeia 01010 para o autômato N_1 abaixo: 01



Como computa o AFN?

No AFD a máquina está sempre em um estado e um único estado. No AFN ela pode estar em vários estados simultaneamente. Se, no final da cadeia, um dos estados é um estado de aceitação então a cadeia é aceita.

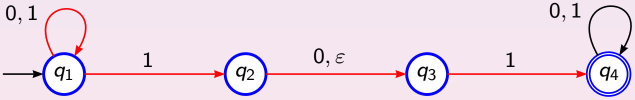
Vamos simular a cadeia 01010 para o autômato N_1 abaixo: 010



Como computa o AFN?

No AFD a máquina está sempre em um estado e um único estado. No AFN ela pode estar em vários estados simultaneamente. Se, no final da cadeia, um dos estados é um estado de aceitação então a cadeia é aceita.

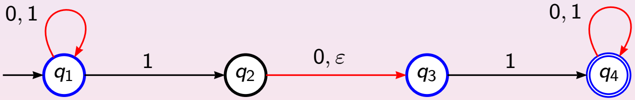
Vamos simular a cadeia 01010 para o autômato N_1 abaixo: 0101



Como computa o AFN?

No AFD a máquina está sempre em um estado e um único estado. No AFN ela pode estar em vários estados simultaneamente. Se, no final da cadeia, um dos estados é um estado de aceitação então a cadeia é aceita.

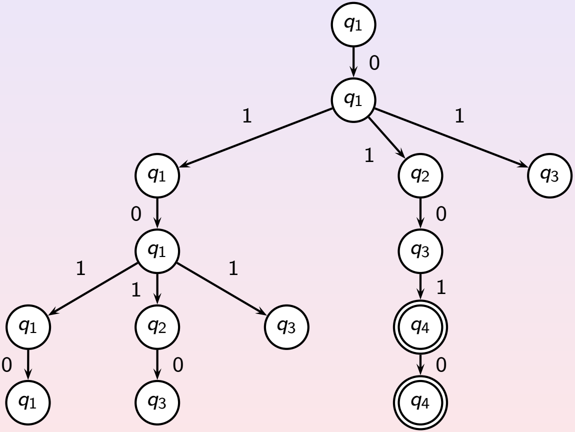
Vamos simular a cadeia 01010 para o autômato N_1 abaixo: 01010



Esta cadeia é aceita?

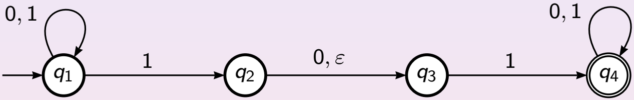
Árvore de Possibilidades

Execução da cadeia 01010 na máquina N_1 vista como uma árvore:



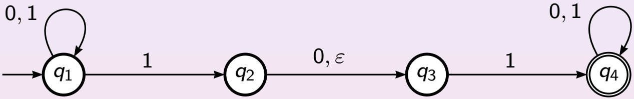
Qual a linguagem que o autômato reconhece?

Qual a linguagem que o autômato N_1 reconhece?



Qual a linguagem que o autômato reconhece?

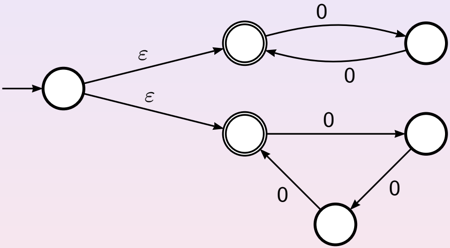
Qual a linguagem que o autômato N_1 reconhece?



$L = \{w | w$ contém a subcadeia 11 ou 101$\}$

Vantagem da transição ε

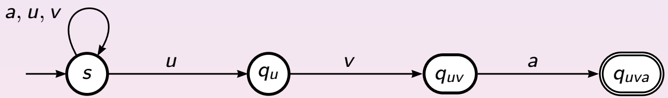
Veja abaixo na linguagem de *alfabeto unário* (só um símbolo): $\Sigma = \{0\}$



A linguagem deste autômato é: $L = \{w|w = 0^k, k|2 \equiv 0 \vee k|3 \equiv 0\}$
Com a transição ε começamos 2 autômatos distintos simultâneamente, um para numeros pares de 0 e outro para números múltiplos de 3 de zeros.

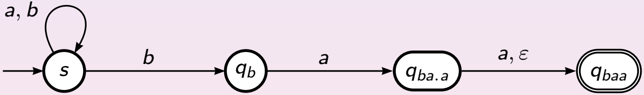
Exemplo de AFN

Um AFN é mais simples de se projetar e de se interpretar. Veja um exemplo de um AFN para a linguagem $L = \{w|w$ termina com a cadeia $uva\}$, no alfabeto $\Sigma = \{a, u, v\}$.



Exemplo de AFN

A aresta de instrução ε é muito útil, bem como a ausência de transição. Veja um exemplo de um AFN N_2 para a linguagem $L = \{w|w$ termina com uma cadeia de 1 ou 2 a após um $b\}$, no alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$.



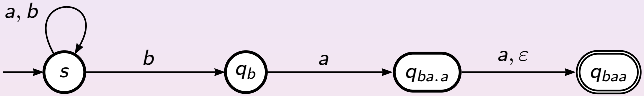
Definição Formal de um AFN

- Um AFN é definido tal qual um AFD, a diferença está na função de relação:
- Seja $N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ um autômato finito não determinístico:
  - Q representa o conjunto de estados do autômato.
  - Σ representa o alfabeto que o autômato aceita.
  - δ a função de relação para o autômato, neste caso esta função aceita ε como uma transição e $\emptyset$ como um estado de destino, além disto, uma transição remete a um conjunto de estados e não mais a um estado. $\delta : \Sigma_\varepsilon \times Q \to \mathcal{P}(Q)$, onde $\mathcal{P}(Q)$ é chamado de conjunto de partes de Q.
  - q_0 o estado inicial do autômato.
  - F o conjunto de estados de aceitação.

Podemos reparar nesta definição formal que o AFD é um caso particular do AFN, basta fazer qualquer transição ε para um estado $\emptyset$.

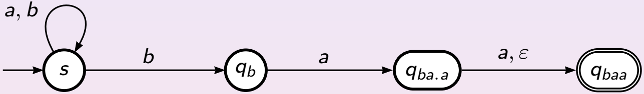
Exemplo da definição formal

Vamos considerar a máquina N_2 e sua definição formal:



Exemplo da definição formal

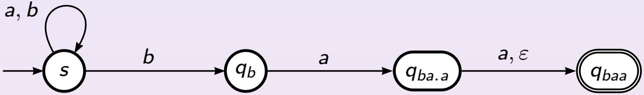
Vamos considerar a máquina N_2 e sua definição formal:



$N_2 = \{\{s, q_b, q_{ba.a}, q_{baa}\}, \{a, b\}, \delta_2, s, \{q_{baa}\}\}$, onde:

Exemplo da definição formal

Vamos considerar a máquina N_2 e sua definição formal:

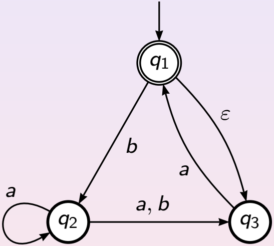


$N_2 = \{\{s, q_b, q_{ba.a}, q_{baa}\}, \{a, b\}, \delta_2, s, \{q_{baa}\}\}$, onde:

δ_2	a	b	ε
s	$\{s\}$	$\{s, q_b\}$	$\emptyset$
q_b	$\{q_{ba.a}\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$q_{ba.a}$	$\{q_{baa}\}$	$\emptyset$	$\{q_{baa}\}$
q_{baa}	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

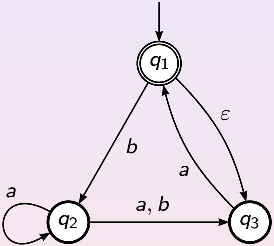
Outro exemplo de AFN

Seja o AFN N_3 apresentado abaixo:



Outro exemplo de AFN

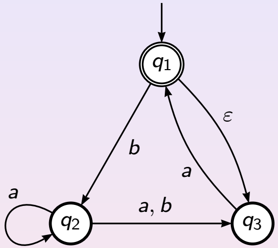
Seja o AFN N_3 apresentado abaixo:



$N_3 = \{\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta_3, q_1, \{q_1\}\}$, onde:

Outro exemplo de AFN

Seja o AFN N_3 apresentado abaixo:

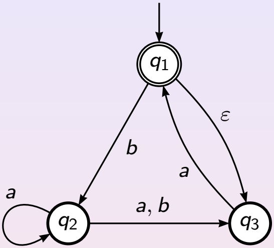


$N_3 = \{\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta_3, q_1, \{q_1\}\}$, onde:

δ_3	a	b	ε
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Outro exemplo de AFN

Seja o AFN N_3 apresentado abaixo:



$N_3 = \{\{q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta_3, q_1, \{q_1\}\}$, onde:

δ_3	a	b	ε
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Qual a linguagem que este autômato reconhece? (Exercício)

Definição Formal de Computação para o AFN

Seja $N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ um AFN e w uma cadeia sobre o alfabeto Σ. Então dizemos que N **aceita** w se podemos escrever $w = w_1 w_2 \ldots w_n$, onde cada w_i é um membro de $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ e existe uma sequência de estados $r_0 r_1 \ldots r_n$ em Q com três condições:

1. $r_0 = q_0$,
2. $R_{i+1} = \delta(r_i, w_{i+1})$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, e
3. $r_n \in F$.

Equivalência entre AFNs e AFDs

- AFNs e AFDs reconhecem a mesma classe de linguagem.
- A vantagem é que escrever um AFN para uma linguagem às vezes é mais simples.
- Duas máquinas são equivalentes se elas reconhecem a mesma linguagem.
- Cada AFN possui um AFD equivalente.

Teorema de Equivalência AFN e AFD

Teorema

Todo autômato finito não determinístico possui um autômato finito determinístico equivalente.

Para a demonstração:

1. Q é o conjunto de estados do AFN que podem ser atingidos por transições.
2. Σ é o mesmo.
3. δ indica uma transição de um estado que representa um conjunto de estados do AFN para outro, considerando-se, também, as ε.
4. q_0 é o conjunto $\{q_{0_{AFN}}\}$.
5. O conjunto de estados de aceitação é a coleção de conjunto de estados do AFN que possui um estado de aceitação do AFN.

Demonstração

Seja $N = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$ o AFN que reconhece alguma linguagem A. Construímos um AFD $M = \{Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\}$ que reconhece A.

1. $Q' = \mathcal{P}(Q)$.
   Todo estado de M é um conjunto de estados de N. De forma que cada elemento de Q' represente um conjunto de estados simultâneos de Q no qual a máquina N pode se encontrar.
2. $\Sigma \equiv \Sigma$.
3. Para $R \in Q'$ e $a \in \Sigma$, seja $\delta'(R, a) = \{q \in Q | q \in E(\delta(r, a))$ para algum $r \in R\}$.
   Sendo: $E(R) = \{q | q$ pode ser atingido a partir de R viajando-se ao longo de 0 ou mais setas $\varepsilon\}$

   $$\delta'(R, a) = E\left(\bigcup_{r \in R} \delta(r, a)\right).$$

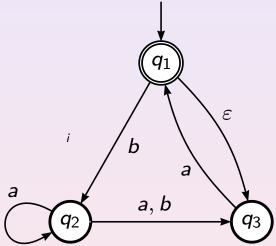
...continuando a Demonstração

4. $q_0' = E(q_0)$
   O estado inicial de M é o conjunto com o estado inicial de N e os estados atingíveis de N por transições ε.
5. $F' = \{R \in Q' | R$ contém um estado de aceitação de $N\}$.
   A máquina M aceita se um dos possíveis estados de N que a máquina pudesse estar é um estado de aceitação.

A construção de M funciona corretamente. Em todo passo na computação de M sobre uma entrada, ela claramente entra num estado que corresponde ao subconjunto de estados nos quais N poderia estar nesse ponto.

Aplicando a Demonstração

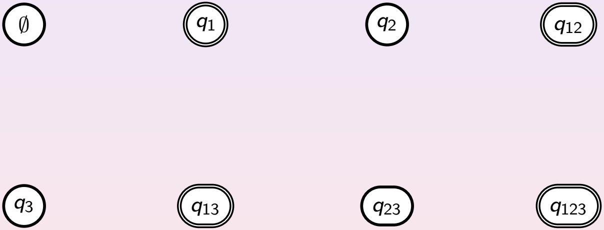
Considere o seguinte AFN N_3 que usamos:



Vamos construir um AFD que simule este AFN.

Aplicando a Demonstração

1. Q': São 3 estados em Q, logo teremos 2^3 estados em Q':
   $Q' = \{\emptyset, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$



Todos estados que contém q_1 pertencem a F'

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a								
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$							
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$						
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$					
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$				
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$			
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$		
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b								

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b	$\emptyset$							

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b	$\emptyset$	$\{q_2\}$						

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$					

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$				

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$			

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$		

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	

Aplicando a Demonstração

Precisamos calcular a função de transformação:

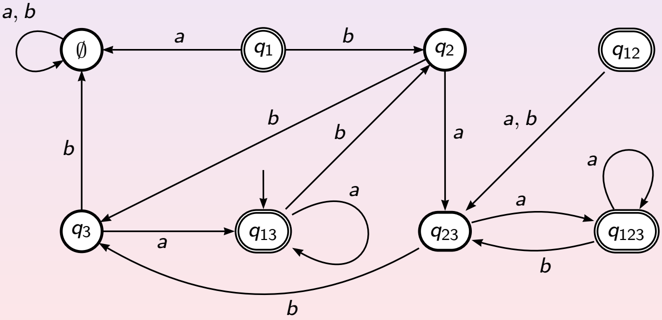
δ	q_1	q_2	q_3
a	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$
b	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
ε	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

δ'	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$
b	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$

Qual o estado inicial?

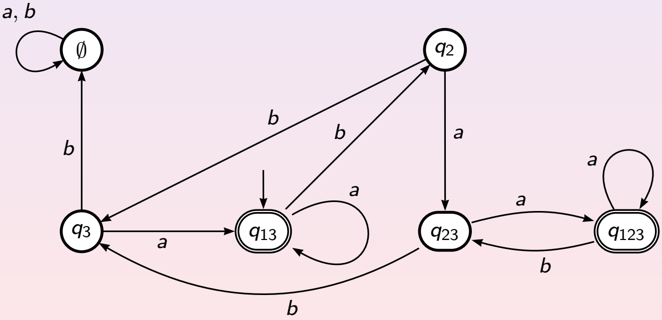
Aplicando a Demonstração

3. δ': a função de relação $\Sigma \times Q' \rightarrow Q'$:
4. Removendo estados inatingíveis
5. Removendo estados que não levam à aceitação



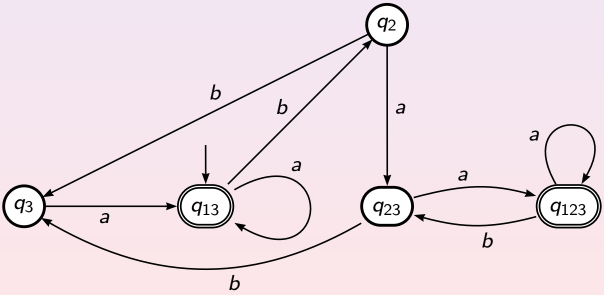
Aplicando a Demonstração

3. δ': a função de relação $\Sigma \times Q' \to Q'$:
4. Removendo estados inatingíveis
5. Removendo estados que não levam à aceitação



Aplicando a Demonstração

3. δ': a função de relação $\Sigma \times Q' \to Q'$:
4. Removendo estados inatingíveis
5. Removendo estados que não levam à aceitação



Corolário do teorema

Corolário

Uma linguagem é regular se e somente se um autômato finito não determinístico a reconhece.

Demonstração: $\Rightarrow$ (somente se): Linguagem Regular $\rightarrow$ AFN reconhece.

Todo AFD é um AFN, logo: Uma linguagem é regular então podemos criar um AFD que a reconhece, por extensão, um AFN a reconhece.

$\Leftarrow$ (se): Linguagem Regular $\leftarrow$ AFN reconhece.

Se um AFN reconhece uma linguagem, nós podemos criar um AFD que simule este AFN e que reconheça a linguagem, logo a linguagem é regular.

$\square$

Fecho de Operações sobre Linguagens Regulares

Vamos retomar as operações regulares:

União : sejam A e B linguagens regulares, $L = A \cup B$ é uma linguagem regular

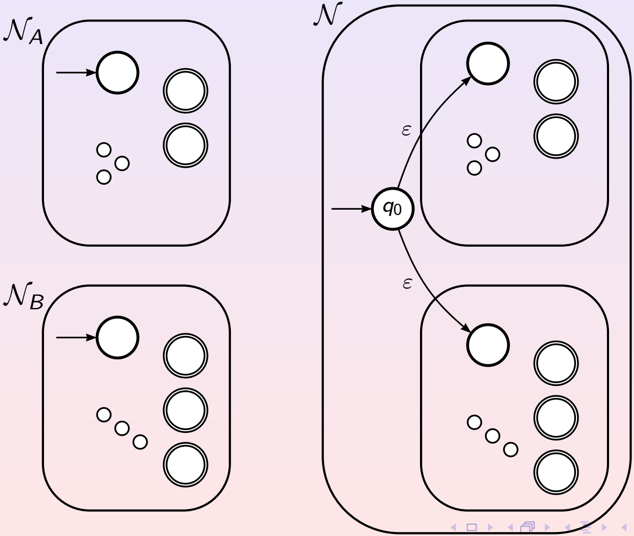
Concatenação : Sejam A e B linguagens regulares, $L = A \circ B$ é uma linguagem regular

Estrela : Seja A uma linguagem regular, $L = A^*$ é uma linguagem regular.

Já provamos o caso de união, mas vamos retomar sob o ponto de vista de AFNs.

Fecho na União

Sejam A e B linguagens regulares, $\mathcal{N}_A$ um AFN que reconhece A e $\mathcal{N}_B$ um AFN reconhece B. Vamos construir N um AFN que reconhece $A \cup B$:



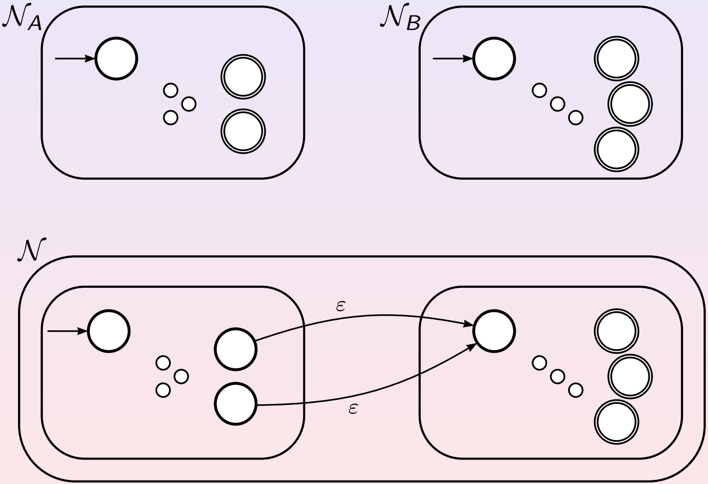
Fecho na União

Sejam A e B linguagens, $\mathcal{N}_A$ um AFN que reconhece A e $\mathcal{N}_B$ um AFN reconhece B. Vamos construir N um AFN que reconhece $A \cup B$:

- $\mathcal{N}_A = \{Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A\}$
- $\mathcal{N}_B = \{Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B\}$
- $\mathcal{N} = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$
  - $Q = \{q_0\} \cup Q_A \cup Q_B$
  - $F = F_A \cup F_B$
  - $\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_A(q, a) & q \in Q_A \\ \delta_B(q, a) & q \in Q_B \\ \{q_A, q_b\} & q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$

Fecho na Concatenação

Sejam A e B linguagens regulares, $\mathcal{N}_A$ um AFN que reconhece A e $\mathcal{N}_B$ um AFN reconhece B. Vamos construir N um AFN que reconhece $A \circ B$:



Fecho na Concatenação

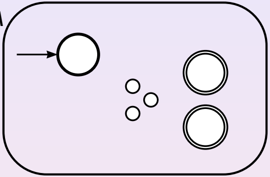
Sejam A e B linguagens regulares, $\mathcal{N}_A$ um AFN que reconhece A e $\mathcal{N}_B$ um AFN reconhece B. Vamos construir N um AFN que reconhece $A \cup B$:

- $\mathcal{N}_A = \{Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A\}$
- $\mathcal{N}_B = \{Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B\}$
- $\mathcal{N} = \{Q, \Sigma, \delta, q_A, F_B\}$
  - $Q = Q_A \cup Q_B$
  - $\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_A(q,a) & q \in Q_A \wedge q \notin F_A \\ \delta_A(q,a) & q \in F_a \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta_A(q,a) \cup \{q_B\} & q \in F_a \wedge a = \varepsilon \\ \delta_B(q,a) & q \in Q_B \end{cases}$

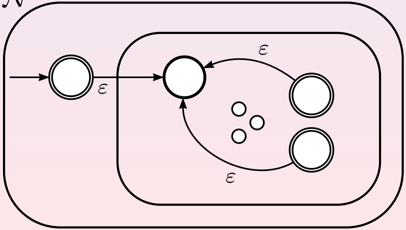
Fecho na Estrela

Seja A linguagem regular, $\mathcal{N}_A$ um AFN que reconhece A. Vamos construir N um AFN que reconhece A^*:

$\mathcal{N}_A$



$\mathcal{N}$



Fecho na Estrela

Seja A linguagem regular, $\mathcal{N}_A$ um AFN que reconhece A. Vamos construir N um AFN que reconhece A^*:

- $\mathcal{N}_A = \{Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A\}$
- $\mathcal{N} = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$
    - $Q = \{q_0\} \cup Q_A$
    - $F = \{q_0\} \cup F_A$
    - $\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_A(q, a) & q \in Q_A \wedge q \notin F_A \\ \delta_A(q, a) & q \in F_a \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta_A(q, a) \cup \{q_A\} & q \in F_a \wedge a = \varepsilon \\ \{q_A\} & q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \emptyset & q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$

Atividades baseadas no Sipser

- Concluir a leitura do capítulo 1.2
- resolver os exercícios: 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 1.14, 1.15, 1.16.