Autômatos Finitos e Linguagens Regulares

Prof. Hamilton José Brumatto

CIC-UESC

23 de dezembro de 2024

Máquina e Linguagem de Máquina

Como visto em arquiteturas, ao se falar em computadores, falamos em "máquina", e esta máquina é programável, existe uma "linguagem de máquina".
Na Teoria da Computação queremos apresentar um modelo matemático para a máquina. E descrever sua computabilidade: como este modelo interpreta a linguagem da máquina.

Um computador é muito complexo para ser estudado. É necessário um modelo mais simples que nos permita estudar como são computadas as instruções, e como uma linguagem está associada ao modelo. Desta forma é possível saber o que pode e o que não pode ser computável.

Um modelo simples é uma máquina de estados. Nesta máquina cada estado representa uma situação que a máquina pode estar e um conjunto de instruções permite transições entre os estados. Este modelo é representado por um "AUTÔMATO FINITO".

Máquina de Estados

- O conceito de máquina de estados não é muito diferente do que existe atualmente no computador.
- O estado de um processo no computador é definido por:
  - O valor de cada uma das variáveis declaradas, canais e manipuladores abertos
  - O valor das pilhas de memória e páginas de memórias.
  - O valor dos registradores no processador
- Desta forma é possível guardar o "estado" de um processo na fila de escalonamento para que ele continue na próxima vez.
- Se for ver em Sistemas Distribuídos, ele pode continuar até em outra máquina.
- Mas vamos começar com um modelo mais simples, o automato finito, com 1 ou pouco valores a guardar representando o estado.

Portão-Automático

Considere a função de um portão automático que vimos no último tema, como uma máquina que recebe instruções. A entrada é uma 2-upla no alfabeto $\Sigma : \{\Updownarrow, \Box\}$ e nos estados do portão representado pelo conjunto $E : \{aberto, abrindo, fechando, fechado\}$, ou seja a entrada é o domínio $D : \Sigma \times E$. Para entender os símbolos: $\Updownarrow$ representa um "*click*" no controle remoto; e $\Box$ representa o aviso do sensor do fim de curso.

Um click $\Updownarrow$ no controle com o portão aberto, ou abrindo, faz com que ele comece a fechar ou seja passa para o estado "fechando", e vice-versa. E se o portão estiver abrindo ou fechando e chegar ao fim de curso $\Box$ ele para, no estado "aberto" ou "fechado" respectivamente.

Portão: $\Sigma \times E \to E$

Portão	*aberto*	*abrindo*	*fechando*	*fechado*
$\Updownarrow$				
$\Box$				

Portão-Automático

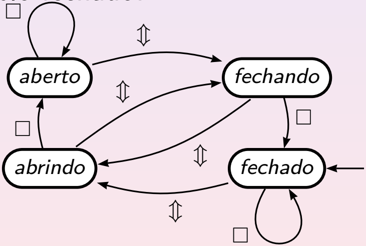
Considere a função de um portão automático que vimos no último tema, como uma máquina que recebe instruções. A entrada é uma 2-upla no alfabeto $\Sigma : \{\Updownarrow, \square\}$ e nos estados do portão representado pelo conjunto $E : \{aberto, abrindo, fechando, fechado\}$, ou seja a entrada é o domínio $D : \Sigma \times E$. Para entender os símbolos: $\Updownarrow$ representa um "*click*" no controle remoto; e $\square$ representa o aviso do sensor do fim de curso.
Um click $\Updownarrow$ no controle com o portão aberto, ou abrindo, faz com que ele comece a fechar ou seja passa para o estado "fechando", e vice-versa. E se o portão estiver abrindo ou fechando e chegar ao fim de curso $\square$ ele para, no estado "aberto" ou "fechado" respectivamente.

Portão: $\Sigma \times E \to E$

Portão	*aberto*	*abrindo*	*fechando*	*fechado*
$\Updownarrow$	*fechando*	*fechando*	*abrindo*	*abrindo*
$\square$	*aberto*	*aberto*	*fechado*	*fechado*

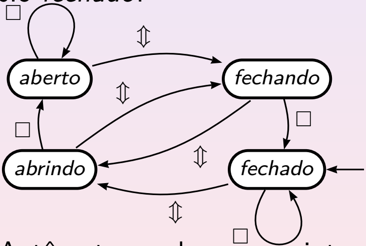
Portão-automático

O portão-automático pode ser representado por uma máquina de estado, vamos construir esta máquina a partir de um grafo orientado, este grafo terá em seus vértices a informação do estado, e os arcos serão as ações de entrada que podem ocasionar uma mudança de estado. Precisamos de um estado inicial, por exemplo *fechado*:



Portão-automático

O portão-automático pode ser representado por uma máquina de estado, vamos construir esta máquina a partir de um grafo orientado, este grafo terá em seus vértices a informação do estado, e os arcos serão as ações de entrada que podem ocasionar uma mudança de estado. Precisamos de um estado inicial, por exemplo *fechado*:

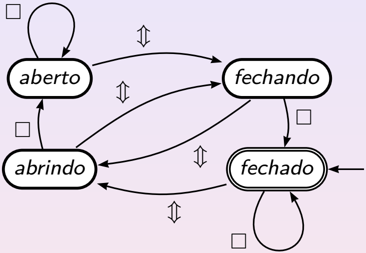


O que acontece se este Autômato receber a seguinte cadeia de entrada: ⇕ □ ⇕⇕ □□?

Estados de Aceitação

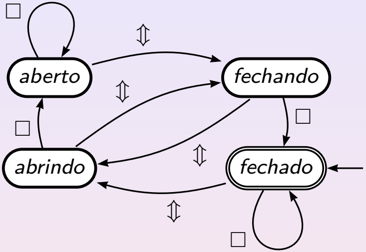
- Na máquina de estados do slide anterior, o conjunto de instruções apresentadas resulta no final no estado "*aberto*", mas será este um estado aceito como final?
- Os autômatos definem um estado de aceitação, de forma que somente as cadeias que atingem o estado de aceitação é aceita pelo autômato.
- O conjunto de cadeias aceitas é a Linguagem que o autômato reconhece.
- Veja no próximo slide, nosso autômato define como estado de aceitação o estado "*fechado*".

Autômato do Portão-Automático



⇕ □ ⇕⇕ □□ não é uma cadeia aceita, no entanto
⇕ □ ⇕⇕ □ ⇕ □ o é!

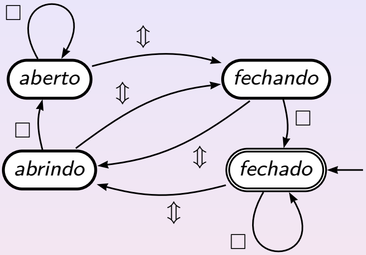
Autômato do Portão-Automático



⇕ □ ⇕⇕ □□ não é uma cadeia aceita, no entanto
⇕ □ ⇕⇕ □ ⇕ □ o é!

Qual a forma geral de uma cadeia para ser aceita?
Ou seja, qual a linguagem de máquina deste autômato?

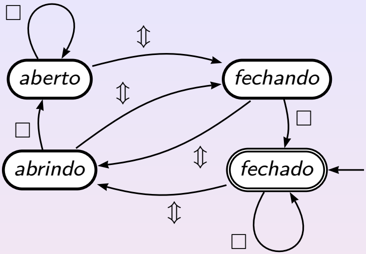
Autômato do Portão-Automático



⇳ □ ⇳⇳ □□ não é uma cadeia aceita, no entanto
⇳ □ ⇳⇳ □ ⇳ □ o é!

Qual a forma geral de uma cadeia para ser aceita?
Ou seja, qual a linguagem de máquina deste autômato?
$A = \{w|w$ contém um número par de ⇳ e termina com □$\}$

Autômato do Portão-Automático



$\Updownarrow \square \Updownarrow\Updownarrow \square\square$ não é uma cadeia aceita, no entanto
$\Updownarrow \square \Updownarrow\Updownarrow \square \Updownarrow \square$ o é!

Qual a forma geral de uma cadeia para ser aceita?
Ou seja, qual a linguagem de máquina deste autômato?
$A = \{w | w$ contém um número par de $\Updownarrow$ e termina com $\square\}$
Ainda não falamos de cadeia vazia. Vamos representar por ε uma cadeia que não contém nenhum símbolo. Então:
$A = \{w | w = \varepsilon \vee w$ contém um número par de $\Updownarrow$ e termina com $\square\}$.

Elementos de um Autômato

Colocando de forma mais precisa, podemos identificar os elementos que definem o autômato. Descrevendo completamente os elementos, podemos indicar qualquer autômato. São 5 os elementos que formam um autômato, ou seja ele pode ser descrito por uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, onde.

- Q, é o conjunto de estados do autômato.
- Σ, o alfabeto que define as transições entre os estados.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, é a função de transição.
- $q_0 \in Q$, é o estado inicial.
- $F \subseteq Q$, é o conjunto de estados de aceitação.

Autômato do Portão Automático

Portão=$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q
- Σ
- δ
- q_0
- F

Autômato do Portão Automático

Portão$=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q: $\{aberto, abrindo, fechando, fechado\}$
- Σ
- δ
- q_0
- F

Autômato do Portão Automático

Portão=$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q: $\{aberto, abrindo, fechando, fechado\}$
- Σ: $\{\Updownarrow, \Box\}$
- δ
- q_0
- F

Autômato do Portão Automático

Portão=$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q: $\{aberto, abrindo, fechando, fechado\}$
- Σ: $\{\Updownarrow, \square\}$
- δ:

Portão	*aberto*	*abrindo*	*fechando*	*fechado*
$\Updownarrow$	*fechando*	*fechando*	*abrindo*	*abrindo*
$\square$	*aberto*	*aberto*	*fechado*	*fechado*

- q_0
- F

Autômato do Portão Automático

Portão$=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q: $\{aberto, abrindo, fechando, fechado\}$
- Σ: $\{\Updownarrow, \Box\}$
- δ:

Portão	aberto	abrindo	fechando	fechado
$\Updownarrow$	*fechando*	*fechando*	*abrindo*	*abrindo*
$\Box$	*aberto*	*aberto*	*fechado*	*fechado*

- q_0: *fechado*
- F

Autômato do Portão Automático

Portão$=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q: $\{aberto, abrindo, fechando, fechado\}$
- Σ: $\{\Updownarrow, \Box\}$
- δ:

Portão	*aberto*	*abrindo*	*fechando*	*fechado*
$\Updownarrow$	*fechando*	*fechando*	*abrindo*	*abrindo*
$\Box$	*aberto*	*aberto*	*fechado*	*fechado*

- q_0: *fechado*
- F: $\{fechado\}$

Autômato do Portão Automático

Portão$=(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q: $\{aberto, abrindo, fechando, fechado\}$
- Σ: $\{\Updownarrow, \Box\}$
- δ:

Portão	*aberto*	*abrindo*	*fechando*	*fechado*
$\Updownarrow$	*fechando*	*fechando*	*abrindo*	*abrindo*
$\Box$	*aberto*	*aberto*	*fechado*	*fechado*

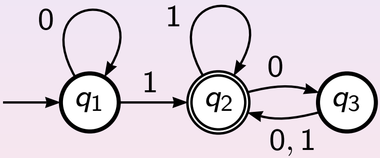
- q_0: *fechado*
- F: $\{fechado\}$

Olhando esta definição, interprete a cadeia: $\Updownarrow \Box \Updownarrow\Updownarrow \Box \Updownarrow \Box$

M_1

Formalmente:

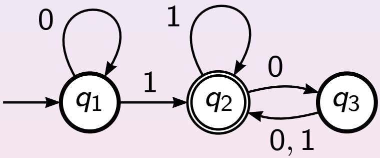
- Q
- Σ
- δ
- q_0
- F



M_1

Formalmente:

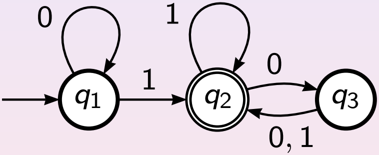
- Q: $\{q_1, q_2, q_3\}$
- Σ
- δ
- q_0
- F



M_1

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2, q_3\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ
- q_0
- F



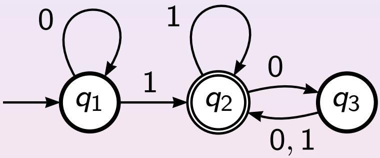
M_1

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2, q_3\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

- q_0
- F



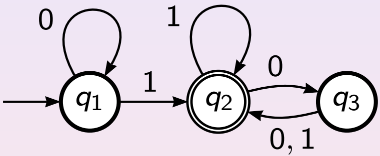
M_1

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2, q_3\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

- q_0: q_1
- F



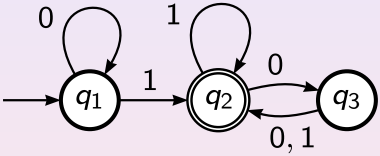
M_1

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2, q_3\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

- q_0: q_1
- F: $\{q_2\}$



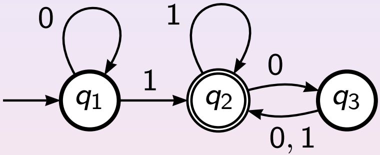
M_1

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2, q_3\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

- q_0: q_1
- F: $\{q_2\}$



Qual a linguagem que este autômato reconhece?

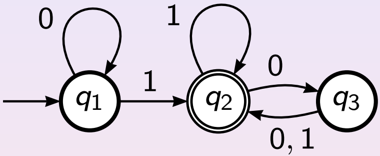
M_1

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2, q_3\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_2	q_2

- q_0: q_1
- F: $\{q_2\}$

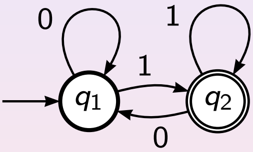


Qual a linguagem que este autômato reconhece?
$L(M_1) = A; A = \{w|w$ contém pelo menos um 1 e um número par de 0s segue o último 1$\}$

M_2

Formalmente:

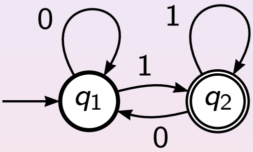
- Q
- Σ
- δ
- q_0
- F
- $L(M_2)$



M_2

Formalmente:

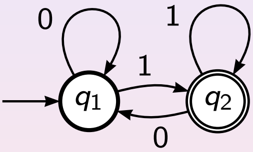
- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ
- δ
- q_0
- F
- $L(M_2)$



M_2

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ
- q_0
- F
- $L(M_2)$



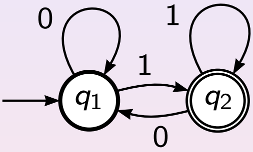
M_2

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- q_0
- F
- $L(M_2)$



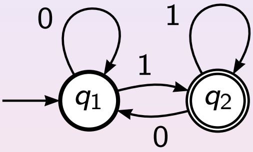
M_2

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- q_0: q_1
- F
- $L(M_2)$



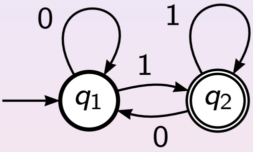
M_2

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- q_0: q_1
- F: $\{q_2\}$
- $L(M_2)$



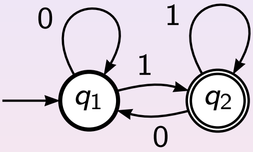
M_2

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

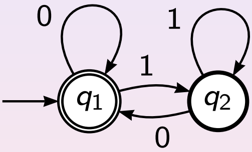
- q_0: q_1
- F: $\{q_2\}$
- $L(M_2)$: $A = \{w | w \text{ termina com um } 1\}$



M_3

Formalmente:

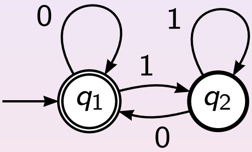
- Q
- Σ
- δ
- q_0
- F
- $L(M_3)$



M_3

Formalmente:

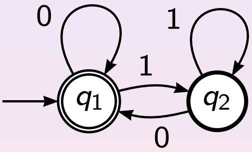
- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ
- δ
- q_0
- F
- $L(M_3)$



M_3

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ
- q_0
- F
- $L(M_3)$



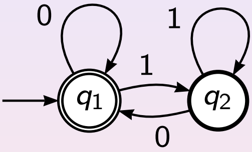
M_3

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- q_0
- F
- $L(M_3)$



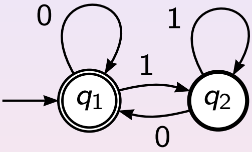
M_3

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- q_0: q_1
- F
- $L(M_3)$



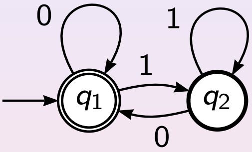
M_3

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

- q_0: q_1
- F: $\{q_1\}$
- $L(M_3)$



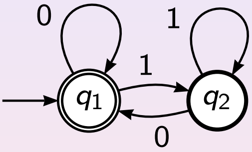
M_3

Formalmente:

- Q: $\{q_1, q_2\}$
- Σ: $\{0, 1\}$
- δ:

	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

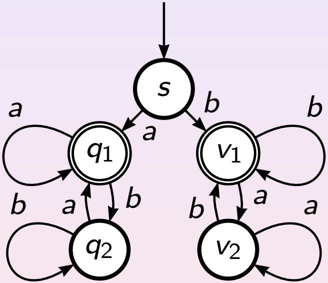
- q_0: q_1
- F: $\{q_1\}$
- $L(M_3)$: $A = \{w | w$ é a cadeia vazia ε ou termina com um $0\}$



M_4

Formalmente:

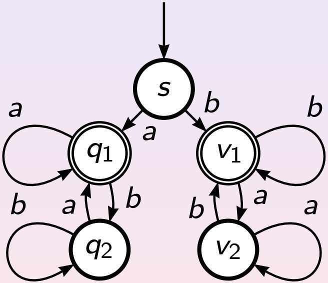
- Q
- Σ
- δ
- q_0
- F
- $L(M_4)$



M_4

Formalmente:

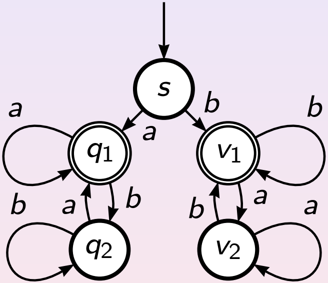
- Q: $\{s, q_1, v_1, q_2, v_2\}$
- Σ
- δ
- q_0
- F
- $L(M_4)$



M_4

Formalmente:

- Q: $\{s, q_1, v_1, q_2, v_2\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ
- q_0
- F
- $L(M_4)$



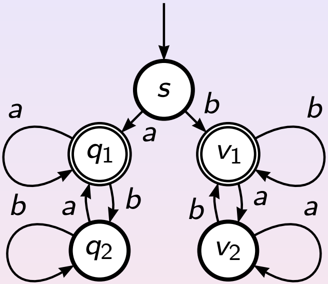
M_4

Formalmente:

- Q: $\{s, q_1, v_1, q_2, v_2\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	a	b
s	q_1	v_1
q_1	q_1	q_2
v_1	v_2	v_1
q_2	q_1	q_2
v_2	v_2	v_1

- q_0
- F
- $L(M_4)$



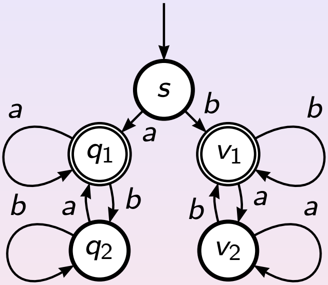
M_4

Formalmente:

- Q: $\{s, q_1, v_1, q_2, v_2\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	a	b
s	q_1	v_1
q_1	q_1	q_2
v_1	v_2	v_1
q_2	q_1	q_2
v_2	v_2	v_1

- q_0: s
- F
- $L(M_4)$



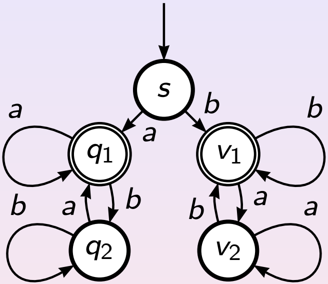
M_4

Formalmente:

- Q: $\{s, q_1, v_1, q_2, v_2\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	a	b
s	q_1	v_1
q_1	q_1	q_2
v_1	v_2	v_1
q_2	q_1	q_2
v_2	v_2	v_1

- q_0: s
- F: $\{q_1, v_1\}$
- $L(M_4)$



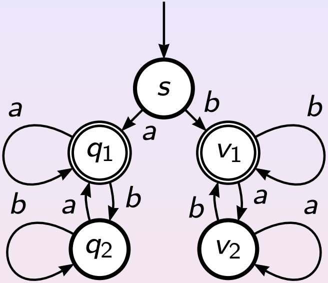
M_4

Formalmente:

- Q: $\{s, q_1, v_1, q_2, v_2\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	a	b
s	q_1	v_1
q_1	q_1	q_2
v_1	v_2	v_1
q_2	q_1	q_2
v_2	v_2	v_1

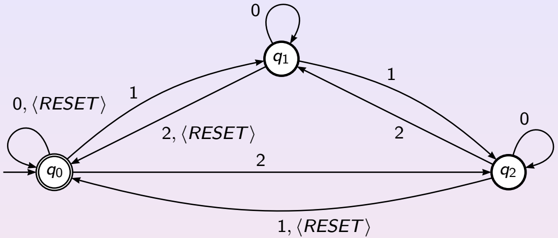
- q_0: s
- F: $\{q_1, v_1\}$
- $L(M_4)$: $A = \{w | w$ é a cadeia que começa e termina com o mesmo símbolo$\}$



M_5

Formalmente:

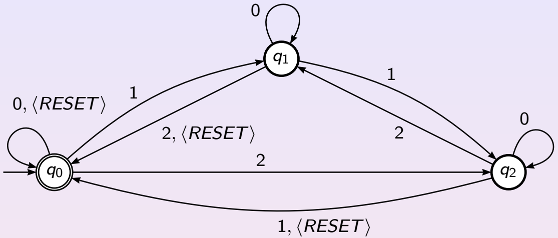
- Q
- Σ
- δ
- q_0
- F
- $L(M_5)$



M_5

Formalmente:

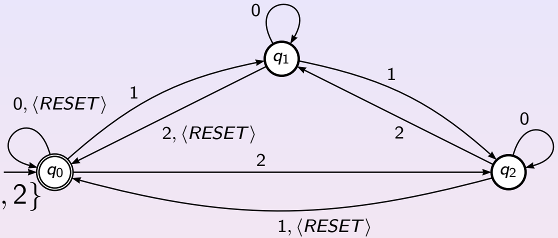
- Q: $\{q_0, q_1, q_2\}$
- Σ
- δ
- q_0
- F
- $L(M_5)$



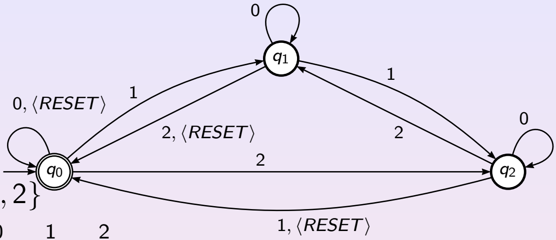
M_5

Formalmente:

- Q: $\{q_0, q_1, q_2\}$
- Σ: $\{\langle RESET \rangle, 0, 1, 2\}$
- δ
- q_0
- F
- $L(M_5)$



M_5



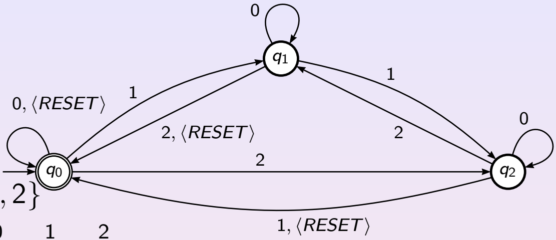
Formalmente:

- Q: $\{q_0, q_1, q_2\}$
- Σ: $\{\langle RESET \rangle, 0, 1, 2\}$
- δ:

	$\langle RESET \rangle$	0	1	2
q_0	q_0	q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_1	q_2	q_0
q_2	q_0	q_2	q_0	q_1

- q_0
- F
- $L(M_5)$

M_5



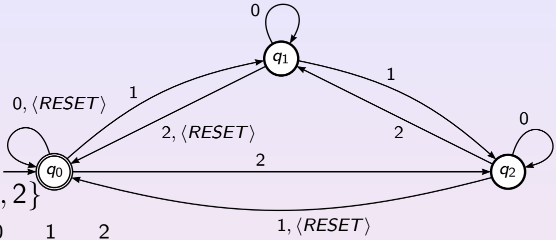
Formalmente:

- Q: $\{q_0, q_1, q_2\}$
- Σ: $\{\langle RESET \rangle, 0, 1, 2\}$
- δ:

	$\langle RESET \rangle$	0	1	2
q_0	q_0	q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_1	q_2	q_0
q_2	q_0	q_2	q_0	q_1

- q_0: q_0
- F
- $L(M_5)$

M_5



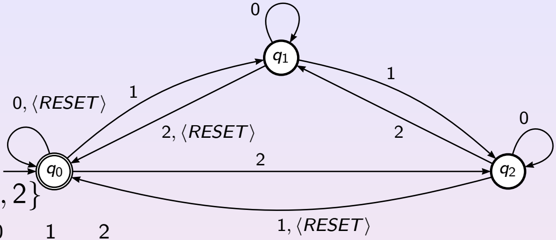
Formalmente:

- Q: $\{q_0, q_1, q_2\}$
- Σ: $\{\langle RESET \rangle, 0, 1, 2\}$
- δ:

	$\langle RESET \rangle$	0	1	2
q_0	q_0	q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_1	q_2	q_0
q_2	q_0	q_2	q_0	q_1

- q_0: q_0
- F: $\{q_0\}$
- $L(M_5)$

M_5



Formalmente:

- Q: $\{q_0, q_1, q_2\}$
- Σ: $\{\langle RESET \rangle, 0, 1, 2\}$
- δ:

	$\langle RESET \rangle$	0	1	2
q_0	q_0	q_0	q_1	q_2
q_1	q_0	q_1	q_2	q_0
q_2	q_0	q_2	q_0	q_1

- q_0: q_0
- F: $\{q_0\}$
- $L(M_5)$: $A = \{w | w$ é a cadeia vazia ou a soma dos valores após o último $\langle RESET \rangle$ é 0 módulo 3$\}$

M_6

Formalmente:

- Q: $\{s, q_a, q_b, f\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	s	q_a	q_b	f
a	q_a	f	q_b	f
b	q_b	q_a	f	f

- q_0: s
- F: $\{f\}$
- $L(M_6)$

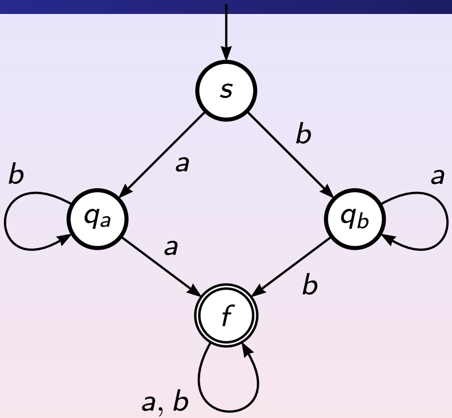
M_6

Formalmente:

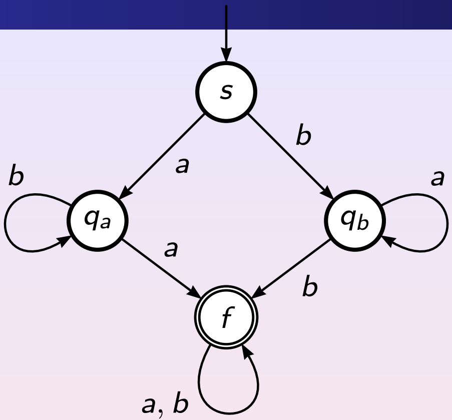
- Q: $\{s, q_a, q_b, f\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	s	q_a	q_b	f
a	q_a	f	q_b	f
b	q_b	q_a	f	f

- q_0: s
- F: $\{f\}$
- $L(M_6)$



M_6



Formalmente:

- Q: $\{s, q_a, q_b, f\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	s	q_a	q_b	f
a	q_a	f	q_b	f
b	q_b	q_a	f	f

- q_0: s
- F: $\{f\}$
- $L(M_6)$: $A = \{w | w$ é a cadeia não vazia na qual o símbolo de início aparece no mínimo uma segunda vez$\}$

M_7

Formalmente:

- Q: $\{s, q_a, q_b, f\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ: $\begin{array}{c|cccc} & s & q_a & q_b & f \\ \hline a & q_a & f & q_b & s \\ b & q_b & q_a & f & s \end{array}$
- q_0: s
- F: $\{f\}$
- $L(M_7)$

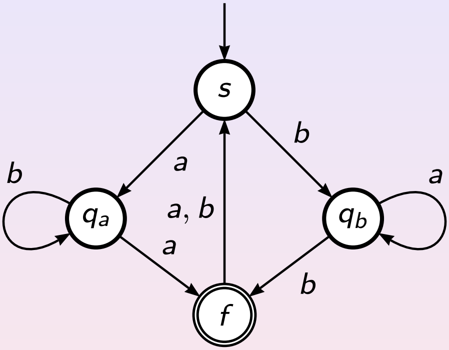
M_7

Formalmente:

- Q: $\{s, q_a, q_b, f\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	s	q_a	q_b	f
a	q_a	f	q_b	s
b	q_b	q_a	f	s

- q_0: s
- F: $\{f\}$
- $L(M_7)$



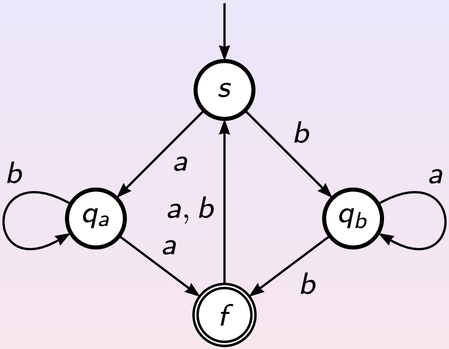
M_7

Formalmente:

- Q: $\{s, q_a, q_b, f\}$
- Σ: $\{a, b\}$
- δ:

	s	q_a	q_b	f
a	q_a	f	q_b	s
b	q_b	q_a	f	s

- q_0: s
- F: $\{f\}$
- $L(M_7)$: Desafio de Hoje!



Atividades baseadas no Sipser

- Ler as seguinte seções do capítulo 1.1:
  - Autômatos Finitos.
  - Definição Formal de um Autômato Finitos.
  - Exemplos de Autômatos Finitos.
- resolver os exercícios: 1.1, 1.2, 1.3.