

设传感器接收端位置为：

$$s_i = [x_i, y_i] \quad (1)$$

目标位置为：

$$r_i = [x, y] \quad (2)$$

由于TOA是通过目标发出信号，接收端接收到该信号这一过程的时间差来判断目标的位置。首先声明着里的信号是声音信号，所以传播速度在空气中假定为 $c = 340 \text{ m/s}$ 。其次这里目标发送端和本地接收端的时钟并未同步，例如目的接收端的时间为2s时，发送端的时钟为0s，那么当发送的信号经过了10s后到达接收端，接收端当时为12s，但是发送端却认为发送的信号时从0s开始发送的，所以就会出现误差，认为该信号传输了12s。也就是 $10 + 2\text{s}$ 。

以上，假设目标在当前位置 $[x, y]$ 发送了信号，经过 $t_i$ 时间到达接收端，但由于目标与地标基站的时钟并不同步，所以会有一个 $delay$ 的时间，我们定义把接收站接收到的时间差叫做 $T_i$ ，把信号真实飞行的时间差叫做 $t_i$ ，把时钟误差叫做 $Delay$ 。关系如下：

$$T_i = t_i + delay \quad (3)$$

由于TOA定位的特性，我们可以用如下关系来描述目标和基站之间的位置：

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 = (ct_i)^2 \quad (4)$$

由于这里我们可以不知道 $t_i$ 和 $delay$ ，所以用(3)式代入：

$$\begin{aligned} x_i^2 + y_i^2 + x^2 + y^2 - 2x_i x - 2y_i y &= c^2 \cdot (T_i - delay)^2 \\ x_i^2 + y_i^2 + x^2 + y^2 - 2x_i x - 2y_i y &= c^2 T_i^2 + c^2 delay^2 - 2c^2 delay \end{aligned} \quad (5)$$

将 $R = x^2 + y^2$ ， $r_i = x_i^2 + y_i^2$ 代入：

$$r_i - c^2 T_i^2 = -R + 2x_i x + 2y_i y + c^2 delay^2 - 2c^2 delay \quad (6)$$

每一个接收器写一个方程写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} r_1 - c^2 T_1^2 \\ r_2 - c^2 T_2^2 \\ \vdots \\ r_n - c^2 T_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2x_1 & 2y_1 & c^2 & -2c^2 \\ -1 & 2x_2 & 2y_2 & c^2 & -2c^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 2x_n & 2y_n & c^2 & -2c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ x \\ y \\ delay^2 \\ delay \end{bmatrix} \quad (7)$$

将 (7) 式设为：

$$B = AX \quad (8)$$

求解其方程：

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B \quad (9)$$

