

# Конспекты лекций по алгебре-геометрии

Ведёт: Верников Борис Муневич  
перенесено в электронный формат Ширкуновым А.

2024-2025 учебный год, первый семестр

## 1 Введение в алгебру

### 1.1 Множества и отображения

**Множество** - неопределяемое понятие, которое понимается как совокупность произвольного числа объектов, выделенная исходя из какого-то признака и рассматриваемая как единое целое. Понятие множества внутренне противоречиво (см. *парадокс Рассела*), поэтому мы пользуемся таким наивным "определением".

В работе с множествами используются **кванторы** – специальные символы для описания логики рассуждений.

Например,  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n + 1\}$  читается как 'множество всех целых нечётных  $x$ ', где в фигурных скобках объявляется  $x$ , а после вертикальной черты – условие вхождения  $x$  во множество.

Свойства логических операций над множествами: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, идемпотентность и проч.

- $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$  – коммутативность
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$  – дистрибутивность отн. объединения
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  – дистрибутивность отн. пересечения
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  – ассоциатив-ть
- $A \cup A = A$ ;  $A \cap A = A$  – идемпотентность
- $(A \cup B) \cap A = A$ ;  $(A \cap B) \cup A = A$  – законы поглощения
- $\overline{\overline{A}} = A$  – закон снятия двойного отрицания
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ;  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  – законы де-Моргана
- $A \cup \overline{A} = U$  – определение универсального множества

- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$  – определение разности множеств

Важно отметить, что у операций объединения, пересечения и разности множеств одинаковый приоритет. Поэтому при работе с множествами нужно отделять части выражения скобками.

**Декартовым произведением** множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \times B$ , состоящее из всех упорядоченных пар  $(a, b)$  таких, что  $a \in A$ ,  $b \in B$ .  
Замечание: декартово произведение некоммукативно и неассоциативно.

Декартово произведение  $n$  множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$$

$A^n$  – **декартова степень** множества, определяется как множество всех кортежей длины  $n$ , состоящих из элементов данного множества.

## 1.2 Отображение

**Отображением**  $f$  из  $A$  в  $B$  называется подмножество  $f$  множества  $A \times B$ , которое определяется следующим образом:  $\forall x \in A, \exists! y \in B : (x, y) \in f$ . Если множества  $A$  и  $B$  состоят из чисел, то  $f$  называется **функцией**.

Форма записи:  $f : A \rightarrow B$  – отображение из  $A$  в  $B$ . Запись  $(x, y) \in f$  часто обозначают как  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  – **образ** элемента  $x$ , а  $x$  – **прообраз** элемента  $f(x)$  при отображении  $f$ .

Если  $\alpha$  – отображение из  $A$  в  $B$ , а  $X \subseteq A$ , то **ограничением**  $\alpha$  на подмножество  $X$  называется отображение из  $X$  в  $B$ , обозначаемое через  $\alpha|_X$  и определяемое правилом  $\alpha|_X(x) = \alpha(x)$  для всякого  $x \in X$ .

Отображение  $f$  из  $A$  в  $B$  называется:

- взаимно однозначным отображением (или **инъективным** отображением), если для любых  $x, y \in A$  из того, что  $x \neq y$  следует, что  $f(x) \neq f(y)$ , то есть образы двух различных элементов различны
- отображением  $A$  на  $B$  (или **сюръективным** отображением), если  $\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$ , то есть каждый элемент из  $B$  имеет прообраз.
- взаимно однозначным соответствием (или **биективным** отображением), если  $f$  инъективно и сюръективно.

Пусть  $f$  – отображение из  $A$  в  $B$ , а  $g$  – отображение из  $B$  в  $C$ . **Произведением** (а также композицией или суперпозицией) отображений  $f$  и  $g$  называется отображение  $h$  из  $A$  в  $C$ , задаваемое правилом  $h(x) = g(f(x))$ . Часто обозначается через  $fg(x)$ .

Замечания: произведение отображений ассоциативно, но некоммукативно. Произведение биективных отображений биективно. Произведение инъективных отображений инъективно, а произведение сюръективных отображений сюръективно.

Отображение  $f$  из множества  $A$  в себя, задаваемое правилом  $f(x) = x$ , называется **тождественным**. Такие отображения мы будем обозначать буквой  $\epsilon$ . Пусть  $f$  – отображение из  $A$  в  $B$ . Отображение  $g$  из  $f(A)$  в  $A$  называется **обратным** к  $f$ , если отображение  $fg$  является тождественным. Обратное отображение обозначается как  $f^{-1}$ .

**Критерий существования** обратного отображения: отображение, обратное к  $f$ , существует тогда и только тогда, когда  $f$  – инъекция.

Доказательство: предположим, что отображение, обратное к  $f$ , существует. Если при этом  $f(x_1) = f(x_2)$  для некоторых  $x_1, x_2 \in A$ , то:

$$x_1 = \epsilon(x_1) = (ff^{-1})(x_1) = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = (ff^{-1})(x_2) = x_2$$

Таким образом,  $x_1 = x_2$ , т.е. отображение  $f$  инъективно. Необходимость доказана.

Докажем и достаточность:  $\forall y \in f(A) \exists x \in A : f(x) = y$ . По условию  $f$  инъективно  $\Rightarrow$  элемент  $x$  определён однозначно. Это позволяет определить  $g : f(A) \rightarrow A$  правилом  $g(y) = x$ . Если  $x \in A$ , то  $(fg)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ , т.е.  $fg = \epsilon$ . Следовательно,  $g = f^{-1}$ , т.е.  $f^{-1}$  существует.

Замечание: если  $f$  – биективное отображение из  $A$  в  $B$ , то  $f^{-1}$  – биективное отображение из  $B$  в  $A$ .

**Свойства** обратного отображения ( $A, B, C$  – множества  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$ ):

- Если существует отображение  $f^{-1}$ , то существует  $(f^{-1})^{-1} = f$ .
- Если существуют отображения  $f^{-1}$  и  $g^{-1}$ , то существует  $(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}$ .

### 1.3 Мощность конечного множества

Множества  $A$  и  $B$  называют **равномощными**, если существует биективное отображение из  $A$  на  $B$ .

Конечные множества  $A$  и  $B$  равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одно и то же число элементов (*доказывается по свойству биекции*).

Число элементов конечного множества  $S$  называется **мощностью** этого множества и обозначается через  $|S|$ .

Если  $S_1, S_2, \dots, S_n$  – конечные множества и  $|S_i| = k$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ , то  $|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n| = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ .

Доказательство проведём индукцией по  $n$ . При  $n = 1$  доказываемое очевидно. Если  $n > 1$ ,  $S_n = \{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\}$ . Для всякого  $i = 1, 2, \dots, k_n$  обозначим через  $T_i$  множество всех кортежей из множества  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ , у которых последняя компонента равна  $x_i$ . Ясно, что  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_{k_n}$

и множества  $T_1, T_2, \dots, T_{k_n}$  попарно пересекаются по пустому множеству. Следовательно,  $|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n| = |T_1| + |T_2| + \dots + |T_{k_n}|$ . Очевидно, что для всякого  $i = 1, 2, \dots, k_n$  существует биекция из  $T_i$  в  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}$ , которая кортежу  $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_i) \in T_i$  ставит в соответствие кортеж  $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}$ . Следовательно,  $|T_i| = |S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}|$ , и потому  $|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n| = k_n \cdot |S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}|$ . По предположению индукции  $|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}| = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{n-1}$ . Следовательно,  $|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n| = k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_{n-1} \cdot k_n$ , что и требовалось доказать (*советую вдумчиво подумать над д-вом, оно очень симпатичное*).

Следствие: если  $S$  – конечное множество и  $|S| = k$ , а  $n$  – натуральное число, то  $|S^n| = k^n$ .

## 1.4 Булеан множества

**Булеаном** множества  $S$  называют множество всех подмножеств множества  $S$ . Булеан обозначается по-разному:  $B(S), P(S), 2^S$ .

Если  $S$  – конечное множество и  $|S| = n$ , то  $|B(S)| = 2^n$ .

Доказательство проведём индукцией по  $n$ . База индукции: если  $n = 0$ , то  $S = \emptyset$  и  $|B(S)| = 1 = 2^0 = 2^{|S|}$ .

Шаг индукции: пусть  $n > 0$ . Зафиксируем произвольный элемент  $x \in S$  и положим  $S' = S \setminus \{x\}$ . Тогда  $|S'| = n - 1$  и, по предположению индукции,  $|B(S')| = 2^{|S'|} = 2^{n-1}$ . Все подмножества множества  $S$  можно разбить на два типа: те, которые не содержат  $x$ , и те, которые содержат  $x$ . Любое подмножество множества  $S$ , не содержащее  $x$ , содержится в  $S'$ . Число таких подмножеств равно мощности булеана множества  $S'$ , т.е.  $2^{n-1}$ . Далее, любое подмножество множества  $S$ , содержащее  $x$ , получается из какого-то подмножества множества  $S'$  путём прибавления к нему  $x$ . Число таких подмножеств равно числу подмножеств, содержащих  $x$ , т.е.  $2^{n-1}$ . Следовательно, общее число подмножеств множества  $S$  равно  $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n$ .

## 2 Элементы комбинаторики

### 2.1 Рамещения и перестановки

Пусть  $X$  – непустое конечное множество из  $n$  элементов и  $k \leq n$ . **Размещением** из  $n$  элементов по  $k$  элементов называется произвольный упорядоченный набор из  $k$  попарно различных элементов множества  $X$ . Число размещений из  $n$  элементов по  $k$  элементов обозначается через  $A_n^k$ .

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пусть  $X$  – непустое конечное множество из  $n$  элементов. **Перестановкой** на множестве  $X$  называется размещение из  $n$  элементов на этом множестве.

Число перестановок из  $n$  элементов обозначается через  $P_n$ .

$$P_n = A_n^n = n!$$

Говорят, что перестановка  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  получена из  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  **транспозицией** символов  $i_k$  и  $i_m$ , если  $j_k = i_m, j_m = i_k, j_r = i_r$  для всех  $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ , отличных от  $k$  и  $m$ . Транспозиция называется **смежной**, если  $k = m + 1$  или  $m = k + 1$ .

Говорят, что символы  $i_k$  и  $i_m$  образуют **инверсию** в перестановке  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ , если  $k < m$ , а  $i_k > i_m$ . Число инверсий в перестановке обозначается через  $I(i_1, i_2, \dots, i_n)$ . Перестановка называется **чётной**, если число инверсий чётно, и **нечётной** в противном случае.

Если перестановка  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  получена из перестановки  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  транспозицией, то чётности этих перестановок различны.

Все перестановки на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$ , где  $n > 1$ , можно упорядочить так, что каждая следующая перестановка будет получаться из предыдущей транспозицией пары символов. При этом в качестве первой перестановки можно взять любую на данном множестве.

Если  $n \geq 2$ , то как число чётных, так и число нечётных перестановок на множестве  $\{1, 2, \dots, n\}$  равно  $\frac{n!}{2}$ .

## 2.2 Сочетания

Пусть  $X$  – непустое конечное множество из  $n$  элементов и  $k \leq n$ . Сочетанием из  $n$  элементов по  $k$  элементов на этом множестве называется любое подмножество множества  $X$ , состоящее из  $k$  элементов. Число сочетаний из  $n$  по  $k$  обозначается через  $C_n^k$ . Для удобства вычислений будем считать, что  $C_n^0 = 1$ .

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Числа вида  $C_n^k$  называются **биномиальными коэффициентами**.

Свойства биномиальных коэффициентов:

- $C_n^k = C_n^{n-k}$
- $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$
- $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

Пусть  $n$  – произвольное натуральное число. Следующая формула называется биномиальной формулой Ньютона или просто **биномом Ньютона**.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} y^k$$

Эта формула объясняет термин "биномиальные коэффициенты": числа вида  $C_n^k$  есть коэффициенты при одночленах в бинOME Ньютона.

## 3 Универсальная алгебра

### 3.1 Определение алгебры

**N-арной алгебраической операцией** на множестве  $S$  называется произвольное отображение из  $S^n$  в  $S$ . **Арность** алгебраической операции – количество её операндов (аргументов). При  $n = 1$  операция называется **унарной** (например, дополнение множества), при  $n = 2$  – **бинарной** (например, сложение на множестве действительных чисел), при  $n = 3$  – **тернарной** и т.д. При  $n = 0$  мы говорим о **нулевой** операции, т.е. операции без аргументов, как, например, 'взятие' элемента множества.

**Универсальная алгебра** – некоторое непустое множество с заданным на нём набором  $n$ -арных операций. Этот набор операций называется **сигнатурой** или структурой алгебры. Множество можно считать вырожденной алгебраической системой с пустым набором операций и отношений. Имеет место следующая запись алгебры:  $\langle A; \Omega \rangle$ , где  $A$  – произвольное непустое множество, а  $\Omega$  – сигнатура алгебры.

Наука **алгебра** (как раздел математики) изучает свойства операций на множестве.

### 3.2 Группоид и его частные случаи

**Группоид** – алгебра, сигнатура которой состоит из одной бинарной операции.

Операция в произвольном группоиде записывается через  $f(x, y)$  или просто  $xy$ .

Бинарная операция на  $S$  **ассоциативна**, если  $\forall x, y, z \in S : f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) \Leftrightarrow (xy)z = x(yz)$ .

Группоид с ассоциативной бинарной операцией называется **полугруппой**.

**Словом** над  $X$  называется произвольное упорядоченное конечное число букв. Слово без букв называется  **$\lambda$ -словом**.

Полугруппа, в которой задан нейтральный элемент  $e$  (использование которого в бинарной операции с другим элементом  $x$  оставляет  $x$  неизменным), называется **моноидом**.

Элемент  $y \in S$  называется **обратным** к  $x$ , если  $xy = yx = e$ . Лемма: если элемент, обратный к  $x$ , существует, то он – единственный (*доказывается от обратного*). Элемент, обратный к  $x$ , записывается как  $x^{-1}$ .

Если существует некоторый  $x^{-1}$ , то существует и  $x^{-1^{-1}} = x$ .

Если существуют некоторые  $x^{-1}$  и  $y^{-1}$ , то существует и  $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ . прим.: конспектировал на ходу, не очень понял, для сложения на  $\mathbb{R}$  не выполняется же например

Моноид, в котором все элементы обратимы, называется **группой**. Сигнатура группы – три операции: произвольная бинарная ассоциативная, унарная (ставящая в соответствие элементу  $x$  элемент, обратный ему) и нульарная – введение нейтрального элемента.

Бинарная операция на  $S$  называется **коммутативной**, если  $\forall x, y \in S : f(x, y) = f(y, x)$ , то есть  $xy = yx$ . Группа, в которой бинарная операция коммутативна, называется **абелевой**.

Взаимнооднозначное отображение множества  $S$  в себя называется **подстановкой**, а  $S_n$  – множеством всех подстановок.

Бинарная операция  $f$  на  $S$  **дистрибутивна** относительно  $g$ , если  $\forall x, y, z \in S : g(f(x, y), z) = f(g(x, z), g(y, z))$ .

Алгебра называется **кольцом** в общем виде, если на ней заданы две операции, одна из которых обладает свойствами коммутативности и ассоциативности ('сложение'), а другая ('умножение') обладает свойством дистрибутивности относительно сложения, при этом существует нейтральный элемент относительно сложения (ноль). Кольца могут обладать свойствами ассоциативности и коммутативности для умножения, относительно умножения может быть введён нейтральный элемент (единица), а также может быть введено условие про отсутствие делителей у нуля.

$\langle R, +, \cdot \rangle$  – сигнатура кольца в общем виде

Элемент  $a$  кольца  $(R, +, \times)$  является левым (правым) **делителем нуля**, если существует  $b \neq 0$  такой, что  $a \times b = 0$  ( $b \times a = 0$ ). Заметим, что для коммутативного кольца нет разницы между правыми и левыми делителями нуля.

## 4 Матрицы

### 4.1 Понятие матрицы и их свойства

**Матрица** – прямоугольная таблица, состоящая из строк и столбцов. Имеет место запись:

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Пара чисел  $m, n$  – **размер** матрицы. В случае, если  $m = n$ , матрица называется **квадратной**.

В работе с матрицами определены операции **сложения** и **умножения**.

Если  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , то  $A + B = C$ ,  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Если  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times k}$ , то  $AB = C$ ,  $C = (c_{ij})_{m \times k}$ ,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ .