Конспекты лекций по алгебре-геометрии

Ведёт: Акопян Ольга Владимировна
перенесено в электронный формат Ширкуновым А.

2024-2025 учебный год, первый семестр

1 Множества

1.1 Множества действительных чисел

Прим.: опущу часть с определением множеств, функций и операций над ними, т.к эта тема пересекается с первыми лекциями по алгему.

1.2 Ограниченность множеств

Множество E **ограничено сверху**, если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in E \;\; x \leq b$. В таком случае b называют **мажорантой** множества E. Если $b \in E$, то b обозначают как $\max(e)$, читается как 'максимальный элемент множества E'.

Наименьшая мажоранта множества E называется **супремумом** этого множества или его верхней границей. Записывается через $M = \sup(E)$.

Множество E **ограничено снизу**, если $\exists b \in \mathbb{R} : \forall x \in E \;\; x \geq b$. В таком случае b называют **минорантой** множества E. Если $b \in E$, то b обозначают как $\min(e)$, читается как 'минимальный элемент множества E'.

Наибольшая миноранта множества E называется **инфинумом** этого множества или его нижней границей. Записывается через $m = \inf(E)$.

$$M = \sup(E) \Leftrightarrow (\forall x \in E \; x \leq M \;\; \text{and} \;\; \forall \epsilon > 0 \; \exists x_\epsilon : M - \epsilon < x_\epsilon)$$

$$m = \inf(E) \Leftrightarrow (\forall x \in E \; x \geq M \;\; \text{and} \;\; \forall \epsilon > 0 \; \exists x_\epsilon : M + \epsilon > x_\epsilon)$$

Свойства супремума и инфинума множеств:

- $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
- $\inf(X + Y) = \inf(X) + \inf(Y)$
- $\sup(X - Y) = \sup(X) - \inf(Y)$
- $\inf(X - Y) = \inf(X) - \sup(Y)$

- $\sup(\lambda X) = \begin{cases} \lambda \cdot \sup(X), \lambda > 0 \\ \lambda \cdot \inf(X), \lambda < 0 \end{cases}$
- $\inf(\lambda X) = \begin{cases} \lambda \cdot \inf(X), \lambda > 0 \\ \lambda \cdot \sup(X), \lambda < 0 \end{cases}$

Если множество не обладает свойством ограниченности сверху или снизу, его называют **неограниченным**: $\forall b \in \mathbb{R} \ \ \exists x \in E : x > b$ – пример для неограниченности сверху для множества E.

Принцип Архимеда гласит: если существуют $a, b : a < b$, то $\exists n : na > b$ *(в классе рассмотрели доказательство от противного).*

Мажоранта функции – функция, значения которой не меньше соответствующих значений данной функции.

2 Числовые последовательности

2.1 Ограниченность числовой последовательности

Числовая последовательность действительных чисел – функция, определяемая следующим образом: $f : N \to R, \ N = \{x \mid x \in \mathbb{N}\}, R = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$. Чаще рассматривается как пронумерованное множество действительных чисел.

Последовательность $\{x_n\}$ считается ограниченной, если $\exists k, K : \forall n \in \mathbb{N} \ \ k \leq x_n \leq K$, где k – миноранта x_n, а K – мажоранта $\{x_n\}$.

Супремумом числовой последовательности называют наименьшую из её мажорант, а **инфинумом** – наибольшую из минорант.

Последовательность $\{x_n\}$ считается неограниченной, если $\forall c > 0 \ \ \exists k \in \mathbb{N} : x_k \geq c$.

2.2 Предел числовой последовательности

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся** в случае, если: $\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N : \forall n > N \ \ |x_n - A| < \epsilon$, где число A – **предел** этой последовательности. Другими словами, последовательность сходится тогда и только тогда, когда существует некоторый предел равный A.

Данное утверждение понимается следующим образом: каким бы ни было число ϵ, все члены последовательности, начиная с некоторого N, попадают в ϵ-окрестности точки A. Вне ϵ-окрестности лежит лишь конечное число членов $\{x_n\}$.

Значение предела числовой последовательности записывается следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A$$

2.3 Свойства сходящихся последовательностей

Если последовательность сходится, то она **ограничена**.

Док-во: пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N\ |x_n - a| < \epsilon$. Берём $\epsilon = 1, N_1 = N(1), n \geq N_1$. Тогда $|x_n - a| < 1$. В силу произвольности выбора n, $\forall n \geq N_1\ a - 1 < x_n < a + 1$, что и требовалось доказать.

Единственность предела сходящейся последовательности: сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Док-во: предположим, у последовательности $\{x_n\}$ существует больше одного предела: $a = lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N_1 = N(\epsilon) : \forall n \geq N_1\ |x_n - a| < \epsilon,\ b = lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N_2 = N(\epsilon) : \forall n \geq N_2\ |x_n - b| < \epsilon,\ a \neq b$. Берём $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$, тогда $\exists N_1, N_2 : \forall n \geq N_1\ |x_n - a| < \frac{b-a}{2},\ \forall n \geq N_2\ |x_n - b| < \frac{b-a}{2}$. Пусть $N = max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n \geq N\ |x_n - a| < \frac{b-a}{2}$ и $|x_n - b| < \frac{b-a}{2}$. Берём $n \geq N$, тогда $a - \frac{b-a}{2} < x_n < a + \frac{b-a}{2}$, и $b - \frac{b-a}{2} < x_n < b + \frac{b-a}{2}$. Получим: $\frac{3a-b}{2} < x_n < \frac{a+b}{2},\ \frac{b+a}{2} < x_n < \frac{3b-a}{2}$. Противоречие.

Если $\exists N : \forall n > N\ x_n \leq y_n$, а $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ lim_{n\to\infty} y_n = b$, то выполняется неравенство $a \leq b$ (**предельный переход** в неравенстве).

Док-во: по определению предела имеем: $\forall \epsilon > 0\ \exists N_1 = N_1(\epsilon) : \forall n \geq N_1 |x_n - a| < \epsilon$, и $\forall \epsilon > 0\ \exists N_2 = N_2(\epsilon) : \forall n \geq N_2 |y_n - b| < \epsilon$. $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, и $b - \epsilon < y_n < b + \epsilon$. Берём $\epsilon \geq 0, n \geq max(N_1, N_2)$. Тогда $a - \epsilon < x_n \leq y_n < b + \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < b + \epsilon \Rightarrow a < b$.

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$ и при этом $x_n \leq z_n \leq y_n$, то $lim_{n\to\infty} z_n = a$ (**теорема о двух милиционерах**).

Док-во: бла-бла-бла, $a - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + e \Rightarrow a - \epsilon < y_n < a + \epsilon$.

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ a \neq 0$, то $\exists \overline{n} : \forall n \geq \overline{n}\ \ |x_n| > |a|/2$ (**отделимость от нуля**).

Док-во: по определению предела имеем: $\forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) : \forall n \geq N\ |x_n - a| < \epsilon$. Возьмём $\epsilon = \frac{|a|}{2} > 0,\ \overline{n} = N(\frac{|a|}{2}), n \geq \overline{n}$. Тогда $|x_n - a| < \frac{|a|}{2}$. $|a| - |x_n| \leq |a - x_n| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow |a| - |x_n| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow \frac{|a|}{2} < |x_n|$.

Если $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

Док-во: пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) : \forall n > N\ \ ||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \epsilon \Rightarrow ||x_n| - |a|| < \epsilon \Rightarrow |a| = \lim_{n\to\infty} |x_n|$.

2.4 Арифметические операции над числовыми последовательностями

Если $lim_{n\to\infty}(x_n) = a,\ lim_{n\to\infty}(y_n) = b,\ a, b \in \mathbb{R}$, то выполняется:

- $lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

- $lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
- $lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$
- $lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$

2.5 Свойства подпоследовательностей сходящихся последовательностей

Если последовательность имеет предел, то любая её подпоследовательность имеет тот же предел.

Теорема **Больцано-Вееерштрасса**: из любой ограниченной последовательности можно выделить сходяющуюся подпоследовательность.

Если последовательность неограничена сверху (снизу), то из неё можно выделить подпоследовательность, сходяющуюся к $+\infty(-\infty)$.

Предел подпоследовательности пос-ти $\{x_n\}$ называют **частичным пределом** относительно $\{x_n\}$.

Верхним пределом послед-ти называют точную верхнюю грань множества всех частичных пределов этой последовательности.

Нижним пределом послед-ти называют точную нижнюю грань множества всех частичных пределов этой последовательности.