

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики

Факультет информационных технологий и программирования  
Кафедра компьютерных технологий

Рыбак Андрей Викторович

**Представление структур данных индуктивными  
семействами и доказательства их свойств**

Научный руководитель: Я. М. Малаховски

Санкт-Петербург  
2014

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	<b>5</b>
<b>Глава 1. Обзор</b> . . . . .	<b>6</b>
1.1 Лямбда-исчисление . . . . .	6
1.2 Лямбда-исчисление с простыми типами . . . . .	7
1.3 Алгебраические типы данных и сопоставление с образцом . .	8
1.4 Теория типов . . . . .	8
1.4.1 Отношение конвертабельности . . . . .	9
1.4.2 Интуиционистская теория типов . . . . .	9
1.5 Функциональное программирование . . . . .	9
1.5.1 Сопоставление с образцом . . . . .	10
1.5.2 ??? . . . . .	10
1.6 Унификация . . . . .	10
1.7 Индуктивные семейства . . . . .	11
1.8 Использование индуктивных семейств в структурах данных .	11
1.9 Agda . . . . .	12
1.10 Выводы по главе 1 . . . . .	13
<b>Глава 2. Описание реализованной структуры данных</b> . . . . .	<b>14</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	14
2.2 Структура данных «двоичная куча» . . . . .	14
2.3 Вспомогательные определения . . . . .	15
2.3.1 Общие определения . . . . .	15
2.3.2 Определение отношений и доказательства их свойств .	18
2.4 Модуль Heap . . . . .	24
2.4.1 Расширение исходного типа . . . . .	24
2.4.2 Тип данных Heap . . . . .	28
2.4.3 Функции вставки в кучу . . . . .	31
2.4.4 Удаление минимума из полной кучи . . . . .	32
2.4.5 Удаление минимума из неполной кучи . . . . .	33
2.5 Выводы по главе 2 . . . . .	46

<b>Заключение . . . . .</b>	<b>47</b>
<b>Литература . . . . .</b>	<b>48</b>

# Введение

Структуры данных используются в программировании повсеместно для абстрагирования обработки данных. Свойства структуры данных происходят из инвариантов, которые эта структура данных соблюдает.

Практика показывает, что тривиальные структуры данных и их инварианты хорошо выражаются в форме индуктивных семейств. Мы хотим узнать насколько хорошо эта практика работает и для более сложных структур.

В данной работе рассматривается представление в форме индуктивных семейств структуры данных приоритетная очередь типа «двоичная куча».

# Глава 1. Обзор

В данной главе производится обзор предметной области и даются определения используемых терминов.

## 1.1. Лямбда-исчисление

*Лямбда-исчисление* ( $\lambda$ -calculus) — вычислительный формализм с тремя синтаксическими конструкциями, называемыми *пре-лямбда-термами*:

- *вхождение переменной*:  $v$ . При этом  $v \in V$ , где  $V$  — некоторое множество имён переменных;
- *лямбда-абстракция*:  $\lambda x.A$ , где  $x$  — имя переменной, а  $A$  — пре-лямбда-терм. При этом терм  $A$  называют *телом абстракции*, а  $x$  перед точкой — *связыванием*.
- *лямбда-аппликация*:  $BC$ ;

и одной операцией *бета-редукции*. При этом говорят, что вхождение переменной является *свободным*, если оно не связано какой-либо абстракцией. Множество пре-лямбда-термов обозначают  $\Lambda^-$ . *Лямбда-термы* — это пре-лямбда-термы, факторизованные по отношению *альфа-эквивалентности*. Обозначение:  $\Lambda = \Lambda^- / \equiv_\alpha$ .

*Альфа-эквивалентность* ( $\alpha$ -equality) отождествляет два пре-лямбда-терма, если один из них может быть получен из другого путём некоторого *корректного* переименовывания переменных — переименования не нарушающего отношение связности.

*Бета-редукция* ( $\beta$ -reduction) для лямбда-терма  $A$  выбирает в нём некоторую лямбда-аппликацию  $BC$ , содержащую лямбда-абстракцию в левой части  $A$ , и заменяет свободные вхождения переменной, связанной  $A$ , в теле самой  $A$  на терм  $C$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>В терминах пре-лямбда-термов это означает замену свободных вхождений в теле  $A$  на пре-терм  $C$  так, чтобы ни для каких переменных не нарушилось отношение связности. То есть, в пре-терме  $A$  следует корректно переименовать все связанные переменные, имена которых совпадают с именами свободных переменных в  $C$ .

Два лямбда-терма  $A$  и  $B$  называются *конвертабельными*, когда существует две последовательности бета-редукций, приводящих их к общему терму  $C$ . Или, эквивалентно, когда термы  $A$  и  $B$  состоят с друг с другом в рефлексивно-симметрично-транзитивном замыкании отношения бета-редукции, также называемом отношением *бета-эквивалентности*.

За более подробной информацией об этом формализме следует обращаться к [1] и [2].

## 1.2. Лямбда-исчисление с простыми типами

**Определение 1.1.** Пусть  $U$  — бесконечное счетное множество, элементы которого мы будем называть *переменными типов*. Множество *простых типов*  $\Pi$  — множество, определенное грамматикой:

$$\Pi ::= U \mid (\Pi \rightarrow \Pi)$$

Для обозначения элементов множества  $\Pi$  используют буквы греческого алфавита:  $\sigma, \tau \dots$

**Определение 1.2.** Множество контекстов  $C$  — это множество всех множеств пар такого вида:

$$\{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$$

где  $\tau_1, \dots, \tau_n \in \Pi$ , а  $x_1, \dots, x_n \in V$  (переменные из  $\Lambda$ ) и  $x_i \neq x_j$  если  $i \neq j$ .

**Определение 1.3.** Домен контекста  $\Gamma = \{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$ :

$$\text{dom}(\Gamma) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

и  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ .

**Определение 1.4.** Отношение *типизации* (typability)  $\vdash$  на множестве  $C \times \Lambda \times \Pi$  определяется следующими правилами:

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \quad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma \rightarrow \tau} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

В первом и втором правиле мы требуем  $x \notin \text{dom}(\Gamma)$ .

**Определение 1.5.** Лямбда-исчисление с простыми типами или  $\lambda^{\rightarrow}$  — это тройка  $(\Lambda, \Pi, \vdash)$ . Чтобы отличать это определение системы  $\lambda^{\rightarrow}$  от других вариантов, эту систему называют лямбда-исчисление с простыми типами *по Карри*.

За более подробной информацией об этом формализме следует обращаться к [3] и [2].

### 1.3. Алгебраические типы данных и сопоставление с образцом

*Алгебраический тип данных* — вид составного типа, то есть типа, сформированного комбинированием других типов. Комбинирование осуществляется с помощью алгебраических операций — сложения и умножения.

*Сумма* типов  $A$  и  $B$  — дизъюнктное объединение исходных типов. Значения типа-суммы обычно создаются с помощью *конструкторов*.

*Произведение* типов  $A$  и  $B$  — прямое произведение исходных типов, кортеж типов.

TODO написать про  $\mu$  типы.

### 1.4. Теория типов

*Теория типов* — раздел математики изучающий отношения типизации вида  $M : \tau$  и их свойства.  $M$  называется *термом* или *выражением*, а  $\tau$  — типом терма  $M$ .

Теория типов также изучает правила для *переписывания* термов — замены подтермов в выражениях другими термами. Такие правила также называют правилами *редукции* или *конверсии* термов. Редукцию терма  $x$  в терм  $y$  записывают:  $x \rightarrow y$ . Также рассматривают транзитивное замыкание отношения редукции:  $\xrightarrow{*}$ . Например, термы  $2 + 1$  и  $3$  — разные термы, но первый редуцируется во второй:  $2 + 1 \xrightarrow{*} 3$ . Если для терма  $x$  не существует терма  $y$ , для которого  $x \rightarrow y$ , то говорят, что терм  $x$  — в *нормальной форме*.

### 1.4.1. Отношение конвертабельности

Два термина  $x$  и  $y$  называются *конвертабельными*, если существует терм  $z$  такой, что  $x \xrightarrow{*} z$  и  $y \xrightarrow{*} z$ . Обозначают  $x \xleftrightarrow{*} y$ . Например,  $1 + 2$  и  $2 + 1$  — конвертабельны, как и термы  $x + (1 + 1)$  и  $x + 2$ . Однако,  $x + 1$  и  $1 + x$  (где  $x$  — свободная переменная) — не конвертабельны, так как оба представлены в нормальной форме. Конвертабельность — рефлексивно-транзитивно-симметричное замыкание отношения редукции.

### 1.4.2. Интуиционистская теория типов

Интуиционистская теория типов основана на математическом конструктивизме [4].

Операторы для типов в ИТТ:

- $\Pi$ -тип (пи-тип) — зависимое произведение. Например, если  $\text{Vec}(\mathbb{R}, n)$  — тип кортежей из  $n$  вещественных чисел,  $\mathbb{N}$  — тип натуральных чисел, то  $\Pi_{n:\mathbb{N}} \text{Vec}(\mathbb{R}, n)$  — тип функции, которая по натуральному числу  $n$  возвращает кортеж из  $n$  вещественных чисел.
- $\Sigma$ -тип — зависимая пара. Например, тип  $\Sigma_{n:\mathbb{N}} \text{Vec}(\mathbb{R}, n)$  — тип пары из числа  $n$  и кортежа из  $n$  вещественных чисел.
- TODO : здесь будет написано про  $W$  типы

Базовые типы в ИТТ:  $\perp$  или  $0$  — пустой тип, не содержащий ни одного элемента;  $\top$  или  $1$  — единичный тип, содержащий единственный элемент.

*Индуктивный* или *рекурсивный* тип — тип данных, который может содержать значения своего типа.

## 1.5. Функциональное программирование

*Функциональное программирование* — парадигма программирования, являющаяся разновидностью декларативного программирования, в которой программу представляют в виде функций (математическом смысле этого слова, а не в смысле, используемом в процедурном программировании), а выпол-



нением программы считают вычисление значений применения этих функций к заданным значениям. Большинство функциональных языков программирования используют в своём основании лямбда-исчисление (например, Haskell [5], Curry [6], Agda [7], диалекты LISP [8—10], SML [11], OCaml[12]), но существуют и функциональные языки явно не основанные на этом формализме (например, препроцессор языка C и шаблоны в C++).

### 1.5.1. Сопоставление с образцом

*Сопоставление с образцом* — способ обработки объектов алгебраических типов данных, который идентифицирует значения по конструктору и извлекает данные в соответствии с представленным образцом.

### 1.5.2. ???

TODO Здесь будет написано про дата-тайпы, pattern matching и унификацию в Agda

```
data Vec (A : Set) : ℕ → Set where
  [] : Vec A zero
  _::_ : ∀ {k} → A → Vec A k → Vec A (succ k)
```

соответствует

$$\begin{aligned} & \forall n. \\ & [] : (n \equiv zero) \rightarrow Vec\ A\ n \\ & _ :: _ : \forall k. A \rightarrow Vec\ A\ k \rightarrow (n \equiv succ\ k) \rightarrow Vec\ A\ n \end{aligned}$$

## 1.6. Унификация

*Унификатор* для термов  $A$  и  $B$  — подстановка  $S$ , действующая на их свободные переменные, такая что  $S(A) \equiv S(B)$ .

Унификация — процесс поиска унификатора.

## 1.7. Индуктивные семейства

**Определение 1.6.** *Индуктивное семейство* [13, 14] — это индуктивный тип данных, который может зависеть от других типов и значений.

Тип или значение, от которого зависит зависимый тип, называют *индексом*.

Одной из областей применения индуктивных семейств являются системы интерактивного доказательства теорем.

Индуктивные семейства позволяют формализовать математические структуры, кодируя утверждения о структурах в них самих, тем самым перенося сложность из доказательств в определения.

## 1.8. Использование индуктивных семейств в структурах данных

В работах [15, 16] приведены различные подходы в использовании индуктивных семейств в реализации структур данных и доказательств их свойств.

Пример задания структуры данных и инвариантов — тип данных AVL-дерева и тип данных для хранения баланса в AVL-дереве [17].

Если  $m \sim n$ , то разница между  $m$  и  $n$  не больше чем один:

```
data _~_ : ℕ → ℕ → Set where
  ~+ : ∀ {n} → n ~ 1 + n
  ~0 : ∀ {n} → n ~ n
  ~- : ∀ {n} → 1 + n ~ n
```

В работе [16] представлен способ обобщения упорядоченных структур данных (таких как отсортированные списки и деревья поиска) и использование

этого метода для реализации 2-3 деревьев.

## 1.9. Agda

*Agda* [7] — чистый функциональный язык программирования с зависимыми типами. В *Agda* есть поддержка модулей:

```
module AgdaDescription where
```

В коде на *Agda* широко используются символы Unicode. Тип натуральных чисел —  $\mathbb{N}$ .

```
data  $\mathbb{N}$  : Set where
  zero :  $\mathbb{N}$ 
  succ :  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 
```

В *Agda* функции можно определять как *mixfix* операторы. Пример — сложение натуральных чисел:

```
 $\_+ \_$  :  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 
zero + b = b
succ a + b = succ (a + b)
```

Символы подчеркивания обозначают места для аргументов.

Зависимые типы позволяют определять типы, зависящие (индексированные) от значений других типов. Пример — список, индексированный своей длиной:

```
data Vec (A : Set) :  $\mathbb{N} \rightarrow$  Set where
  nil : Vec A zero
  cons :  $\forall \{n\} \rightarrow A \rightarrow$  Vec A n  $\rightarrow$  Vec A (succ n)
```

В фигурные скобки заключаются неявные аргументы.

Такое определение позволяет нам описать функцию `head`

для такого списка, которая не может бросить исключение:

$$\text{head} : \forall \{A\} \{n\} \rightarrow \text{Vec } A (\text{succ } n) \rightarrow A$$

У аргумента функции `head` тип `Vec A (succ n)`, то есть вектор, в котором есть хотя бы один элемент. Это позволяет произвести сопоставление с образцом только по конструктору `cons`:

$$\text{head } (\text{cons } a \text{ as}) = a$$

## 1.10. Выводы по главе 1

Рассмотрены некоторые существующие подходы к построению структур данных с использованием индуктивных семейств. Кратко описаны особенности языка программирования *Agda*.

## Глава 2. Описание реализованной структуры данных

В данной главе описывается разработанная функциональная структура данных приоритетная очередь типа «двоичная куча».

### 2.1. Постановка задачи

Целью данной работы является разработка типов данных для представления структуры данных и инвариантов, а также доказательство этих инвариантов.

Требования к данной работе:

- Разработать типы данных для представления структуры данных
- Реализовать функции по работе со структурой данных
- Используя разработанные типы данных доказать выполнение инвариантов.

### 2.2. Структура данных «двоичная куча»

**Определение 2.1.** Двоичная куча или пирамида [18] — такое двоичное подвешенное дерево, для которого выполнены следующие три условия:

- Значение в любой вершине не больше (если куча для минимума), чем значения её потомков.
- На  $i$ -ом слое  $2^i$  вершин, кроме последнего. Слои нумеруются с нуля.
- Последний слой заполнен слева направо

На рисунке 2.1 изображен пример кучи.

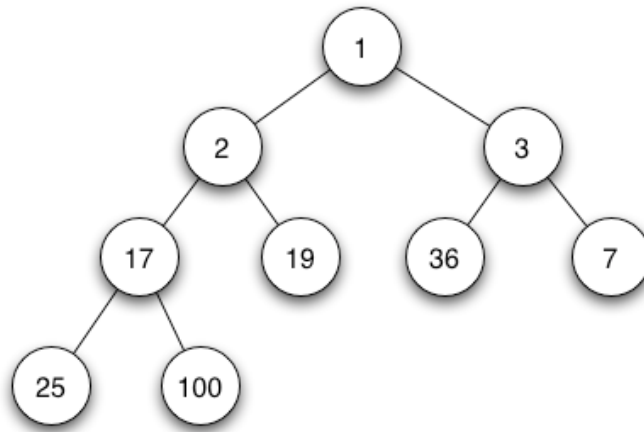


Рис. 2.1. Пример заполненной кучи для минимума

## 2.3. Вспомогательные определения

### 2.3.1. Общие определения

Некоторые общеизвестные определения заимствованы из стандартной библиотеки Agda [19].

```
module HeapModule where
```

Тип данных для пустого типа. У этого типа нет конструкторов, и, как следствие, нет термов, населяющих этот тип.

```
data ⊥ : Set where
```

```
module Level where
```

```
  postulate Level : Set
```

```
  postulate lzero : Level
```

```
  postulate lsucc : Level → Level
```

```
  postulate _⊔_ : Level → Level → Level
```

```
  infixl 6 _⊔_
```

```
  {-# BUILTIN LEVEL Level #-}
```

```
  {-# BUILTIN LEVELZERO lzero #-}
```

```
  {-# BUILTIN LEVELSUC lsucc #-}
```

```
{-# BUILTIN LEVELMAX _⊥_ #-}
open Level
```

```
module Function where
```

Композиция функций.

```
_◦_ : ∀ {a b c}
  → {A : Set a} {B : Set b} {C : Set c}
  → (B → C) → (A → B) → (A → C)
f ◦ g = λ x → f (g x)
flip : ∀ {a b c}
  → {A : Set a} {B : Set b} {C : A → B → Set c}
  → ((x : A) → (y : B) → C x y)
  → ((y : B) → (x : A) → C x y)
flip f x y = f y x
```

```
open Function public
```

```
module Logic where
```

Из элемента пустого типа следует что-угодно.

```
⊥-elim : ∀ {a} {Whatever : Set a} → ⊥ → Whatever
⊥-elim ()
```

Логическое отрицание.

```
¬ : ∀ {a} → Set a → Set a
¬ P = P → ⊥
```

```
private
```

```
module DummyAB {a b} {A : Set a} {B : Set b} where
```

Контрадикция, противоречие: из  $A$  и  $\neg A$  можно получить любое  $B$ .

```
contradiction : A → ¬ A → B
contradiction a ¬a = ⊥-elim (¬a a)
```

Контрапозиция

```
contraposition : (A → B) → (¬ B → ¬ A)
contraposition = flip _◦_
open DummyAB public
open Logic public
```

Определения интуиционистской теории типов.

```
module MLTT where
```

Пропозициональное равенство из интуиционистской теории типов [4].

```
infix 4 _≡_
data _≡_ {a} {A : Set a} (x : A) : A → Set a where
  refl : x ≡ x
{-# BUILTIN EQUALITY _≡_ #-}
{-# BUILTIN REFL refl #-}
```

Тип-сумма — зависимая пара.

```
record Σ {a b} (A : Set a) (B : A → Set b) : Set (a ⊔ b) where
  constructor _,_
  field fst : A ; snd : B fst
open Σ public
```



Декартово произведение — частный случай зависимой пары, Второй индекс игнорирует передаваемое ему значение.

```
_×_ : ∀ {a b} (A : Set a) → (B : Set b) → Set (a ⊔ b)
A × B = Σ A (λ _ → B)
infixr 5 _×_ _,_
```

```
module ≡-Prop where
  private
    module DummyA {a b} {A : Set a} {B : Set b} where
```

Конгруэнтность пропозиционального равенства.

```
cong : ∀ (f : A → B) {x y} → x ≡ y → f x ≡ f y
cong f refl = refl
open DummyA public
open ≡-Prop public
open MLTT public
```

### 2.3.2. Определение отношений и доказательства их свойств

Чтобы задать порядок элементов в куче, нужно уметь сравнивать элементы. Зададим отношения на этих элементах.

```
Rel2 : Set → Set1
Rel2 A = A → A → Set
```

Трихотомичность отношений меньше, равно и больше: одновременно два элемента могут принадлежать только одному отношению из трех.

```
data Tri {A : Set} (_<_ ==_ >_ : Rel2 A) (a b : A) : Set where
  tri< : (a < b) → ¬ (a == b) → ¬ (a > b) → Tri _<_ ==_ >_ a b
  tri= : ¬ (a < b) → (a == b) → ¬ (a > b) → Tri _<_ ==_ >_ a b
  tri> : ¬ (a < b) → ¬ (a == b) → (a > b) → Tri _<_ ==_ >_ a b
```

Введем упрощенный предикат, использующий только два отношения — меньше и равенство. Отношение больше заменяется отношением меньше с переставленными аргументами.

```
flip1 : ∀ {A B : Set} {C : Set1} → (A → B → C) → B → A → C
flip1 f a b = f b a

Cmp : {A : Set} → Rel2 A → Rel2 A → Set
Cmp {A} _<_ ==_ = ∀ (x y : A) → Tri (_<_) (_==_) (flip1 _<_) x y
```

Задавать высоту кучи будем натуральными числами.

```
data N : Set where
  zero : N
  succ : N → N
{-# BUILTIN NATURAL N #-}
{-# BUILTIN ZERO zero #-}
{-# BUILTIN SUC succ #-}
```

Тип данных для отношения меньше или равно на натуральных числах.

```
data _N≤_ : Rel2 N where
  z≤n : ∀ {n} → zero N≤ n
```

$$s \leq s : \forall \{n\} \{m\} \rightarrow n \mathbb{N} \leq m \rightarrow \text{succ } n \mathbb{N} \leq \text{succ } m$$

Все остальные отношения определяются через  $\_ \mathbb{N} \leq \_$ .

$$\_ \mathbb{N} < \_ \_ \mathbb{N} \geq \_ \_ \mathbb{N} > \_ : \text{Rel}_2 \mathbb{N}$$

$$n \mathbb{N} < m = \text{succ } n \mathbb{N} \leq m$$

$$n \mathbb{N} > m = m \mathbb{N} < n$$

$$n \mathbb{N} \geq m = m \mathbb{N} \leq n$$

В качестве примера компаратора — доказательство трихомичности для отношения меньше для натуральных чисел.

$$\text{lemma-succ-}\equiv : \forall \{n\} \{m\} \rightarrow \text{succ } n \equiv \text{succ } m \rightarrow n \equiv m$$

$$\text{lemma-succ-}\equiv \text{ refl} = \text{refl}$$

$$\text{lemma-succ-}\leq : \forall \{n\} \{m\} \rightarrow \text{succ } (\text{succ } n) \mathbb{N} \leq \text{succ } m \rightarrow \text{succ } n \mathbb{N} \leq m$$

$$\text{lemma-succ-}\leq (s \leq s \ r) = r$$

$$\text{cmpN} : \text{Cmp } \{\mathbb{N}\} \_ \mathbb{N} < \_ \equiv \_$$

$$\text{cmpN } \text{zero } (\text{zero}) = \text{tri} = (\lambda ()) \text{ refl } (\lambda ())$$

$$\text{cmpN } \text{zero } (\text{succ } y) = \text{tri} < (s \leq s \ z \leq n) (\lambda ()) (\lambda ())$$

$$\text{cmpN } (\text{succ } x) \text{ zero} = \text{tri} > (\lambda ()) (\lambda ()) (s \leq s \ z \leq n)$$

$$\text{cmpN } (\text{succ } x) (\text{succ } y) \text{ with } \text{cmpN } x \ y$$

$$\dots \mid \text{tri} < \ a \ \neg b \ \neg c = \text{tri} < (s \leq s \ a) (\text{contraposition lemma-succ-}\equiv \ \neg b)$$

$$(\text{contraposition lemma-succ-}\leq \ \neg c)$$

$$\dots \mid \text{tri} > \ \neg a \ \neg b \ \ c = \text{tri} > (\text{contraposition lemma-succ-}\leq \ \neg a)$$

$$(\text{contraposition lemma-succ-}\equiv \ \neg b) (s \leq s \ c)$$

$$\dots \mid \text{tri} = \ \neg a \ \ b \ \neg c = \text{tri} = (\text{contraposition lemma-succ-}\leq \ \neg a)$$

$$(\text{cong succ } b) (\text{contraposition lemma-succ-}\leq \ \neg c)$$

Транзитивность отношения.

$\text{Trans} : \{A : \text{Set}\} \rightarrow \text{Rel}_2 A \rightarrow \text{Set}$

$\text{Trans } \{A\} \text{ _rel_} = \{a \ b \ c : A\} \rightarrow (a \text{ rel } b) \rightarrow (b \text{ rel } c) \rightarrow (a \text{ rel } c)$

Симметричность отношения.

$\text{Symmetric} : \forall \{A : \text{Set}\} \rightarrow \text{Rel}_2 A \rightarrow \text{Set}$

$\text{Symmetric } \text{ _rel_} = \forall \{a \ b\} \rightarrow a \text{ rel } b \rightarrow b \text{ rel } a$

Предикат  $P$  учитывает (соблюдает) отношение  $\text{ _rel_}$ .

$\text{ _Respects_} : \forall \{\ell\} \{A : \text{Set}\} \rightarrow (A \rightarrow \text{Set } \ell) \rightarrow \text{Rel}_2 A \rightarrow \text{Set } \_$

$P \text{ Respects } \text{ _rel_} = \forall \{x \ y\} \rightarrow x \text{ rel } y \rightarrow P \ x \rightarrow P \ y$

Отношение  $P$  соблюдает отношение  $\text{ _rel_}$ .

$\text{ _Respects}_2 : \forall \{A : \text{Set}\} \rightarrow \text{Rel}_2 A \rightarrow \text{Rel}_2 A \rightarrow \text{Set}$

$P \text{ Respects}_2 \text{ _rel_} =$

$(\forall \{x\} \rightarrow P \ x \ \text{Respects } \text{ _rel_}) \times$

$(\forall \{y\} \rightarrow \text{flip } P \ y \ \text{Respects } \text{ _rel_})$

Тип данных для обобщенного отношения меньше или равно.

$\text{data } \text{ _<=} \{A : \text{Set}\} \{ \text{ _<_} : \text{Rel}_2 A \} \{ \text{ _==_} : \text{Rel}_2 A \} : \text{Rel}_2 A \text{ where}$

$\text{le} : \forall \{x \ y\} \rightarrow x < y \rightarrow x \text{ _<=} y$

$\text{eq} : \forall \{x \ y\} \rightarrow x == y \rightarrow x \text{ _<=} y$

Обобщенные функции минимум и максимум.

$\text{min max} : \{A : \text{Set}\} \{ \text{ _<_} : \text{Rel}_2 A \} \{ \text{ _==_} : \text{Rel}_2 A \}$

$\rightarrow (\text{cmp} : \text{Cmp } \text{ _<_} \text{ _==_}) \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$

$\text{min } \text{cmp } x \ y \text{ with } \text{cmp } x \ y$

$\dots \mid \text{tri<} \text{ _ _ _} = x$

... |  $\_ = y$   
 $\text{max cmp } x \ y \text{ with cmp } x \ y$   
 ... |  $\text{tri} > \_ \_ \_ = x$   
 ... |  $\_ = y$

Лемма: элемент меньше или равный двух других элементов меньше или равен минимуму из них.

$\text{lemma-}\leq\text{min} : \{A : \text{Set}\} \{\_<\_ : \text{Rel}_2 A\} \{\_==\_ : \text{Rel}_2 A\}$   
 $\{ \text{cmp} : \text{Cmp } \_<\_ ==\_ \} \{ a \ b \ c : A \}$   
 $\rightarrow (\_<=_ \{ \_<\_ = \_<\_ \} \{ \_==\_ \} a \ b)$   
 $\rightarrow (\_<=_ \{ \_<\_ = \_<\_ \} \{ \_==\_ \} a \ c)$   
 $\rightarrow (\_<=_ \{ \_<\_ = \_<\_ \} \{ \_==\_ \} a \ (\text{min cmp } b \ c))$

$\text{lemma-}\leq\text{min} \{ \text{cmp} = \text{cmp} \} \{ \_ \} \{ b \} \{ c \} ab \ ac \text{ with cmp } b \ c$   
 ... |  $\text{tri} < \_ \_ \_ = ab$   
 ... |  $\text{tri} = \_ \_ \_ = ac$   
 ... |  $\text{tri} > \_ \_ \_ = ac$

Функция — минимум из трех элементов.

$\text{min3} : \{A : \text{Set}\} \{\_<\_ : \text{Rel}_2 A\} \{\_==\_ : \text{Rel}_2 A\}$   
 $\rightarrow (\text{cmp} : \text{Cmp } \_<\_ ==\_ ) \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow A$   
 $\text{min3 cmp } x \ y \ z \text{ with cmp } x \ y$   
 ... |  $\text{tri} < \_ \_ \_ = \text{min cmp } x \ z$   
 ... |  $\_ = \text{min cmp } y \ z$

Аналогичная предыдущей лемма для минимума из трех элементов.

$\text{lemma-}\leq\text{min3} : \{A : \text{Set}\} \{\_<\_ : \text{Rel}_2 A\} \{\_==\_ : \text{Rel}_2 A\}$   
 $\{ \text{cmp} : \text{Cmp } \_<\_ ==\_ \} \{ x \ a \ b \ c : A \}$   
 $\rightarrow (\_<=_ \{ \_<\_ = \_<\_ \} \{ \_==\_ \} x \ a)$

```

→ (_<=_ { _<_ = _<_ } { _==_ } x b)
→ (_<=_ { _<_ = _<_ } { _==_ } x c)
→ (_<=_ { _<_ = _<_ } { _==_ } x (min3 cmp a b c))
lemma-<=min3 { cmp = cmp } { x } { a } { b } { c } xa xb xc with cmp a b
... | tri< _ _ _ = lemma-<=min { cmp = cmp } xa xc
... | tri= _ _ _ = lemma-<=min { cmp = cmp } xb xc
... | tri> _ _ _ = lemma-<=min { cmp = cmp } xb xc

```

Леммы `lemma-<=min` и `lemma-<=min3` понадобятся при доказательстве соотношений между элементами, из которых составляются новые кучи при их обработке.

Отношение `_<=_` с помощью `==` соотношения равенства `_==_`, которое оно определено.

```

resp<= : { A : Set } { _<_ : Rel2 A } { _==_ : Rel2 A }
→ (resp : _<_ Respects2 _==_) → (trans== : Trans _==_)
→ (sym== : Symmetric _==_)
→ (_<=_ { A } { _<_ } { _==_ }) Respects2 _==_
resp<= { A } { _<_ } { _==_ } resp trans sym = left , right where
left : ∀ { a b c : A } → b == c → a <= b → a <= c
left b=c (le a<b) = le (fst resp b=c a<b)
left b=c (eq a=b) = eq (trans a=b b=c)
right : ∀ { a b c : A } → b == c → b <= a → c <= a
right b=c (le a<b) = le (snd resp b=c a<b)
right b=c (eq a=b) = eq (trans (sym b=c) a=b)

```

Транзитивность отношения `_<=_`.

```

trans<= : { A : Set } { _<_ : Rel2 A } { _==_ : Rel2 A }
→ _<_ Respects2 _==_
→ Symmetric _==_ → Trans _==_ → Trans _<_

```

```

→ Trans (_<=_ {A} {_<_} {_==_})
trans<= r s t == t < (le a < b) (le b < c) = le (t < a < b b < c)
trans<= r s t == t < (le a < b) (eq b = c) = le (fst r b = c a < b)
trans<= r s t == t < (eq a = b) (le b < c) = le (snd r (s a = b) b < c)
trans<= r s t == t < (eq a = b) (eq b = c) = eq (t == a = b b = c)

```

## 2.4. Модуль Heap

Модуль, в котором мы определим структуру данных куча, параметризован исходным типом, двумя отношениями, определенными для этого типа,  $\_<\_$  и  $\_==\_$ . Также требуется симметричность и транзитивность  $\_==\_$ , транзитивность  $\_<\_$ , соблюдение отношением  $\_<\_$  отношения  $\_==\_$  и

```

module Heap (A : Set) (_<_ _==_ : Rel2 A) (cmp : Cmp _<_ _==_)
  (sym == : Symmetric _==_) (trans == : Trans _==_)
  (trans < : Trans _<_) (resp : _<_ Respects2 _==_)
where

```

### 2.4.1. Расширение исходного типа

Будем индексировать кучу минимальным элементом в ней, для того, чтобы можно было строить инварианты порядка на куче исходя из этих индексов. Так как в пустой куче нет элементов, то мы не можем выбрать элемент, который нужно указать в индексе. Чтобы решить эту проблему, расширим исходный тип данных, добавив элемент, больший всех остальных. Тип данных для расширения исходного типа.

```

data expanded (A : Set) : Set where
  # : A → expanded A -- элемент исходного типа

```

`top : expanded A -- элемент расширение`

Теперь нам нужно аналогичным образом расширить отношения заданные на множестве исходного типа. Тип данных для расширения отношения меньше.

```
data _<E_ : Rel₂ (expanded A) where
base : ∀ {x y : A} → x < y → (# x) <E (# y)
ext   : ∀ {x : A} → (# x) <E top
```

Вспомогательная лемма, извлекающая доказательство для отношения элементов исходного типа из отношения для элементов расширенного типа.

```
lemma-<E : ∀ {x} {y} → (# x) <E (# y) → x < y
lemma-<E (base r) = r
```

Расширенное отношение меньше — транзитивно.

```
trans<E : Trans _<E_
trans<E {# _} {# _} {# _} a<b b<c =
  base (trans< (lemma-<E a<b) (lemma-<E b<c))
trans<E {# _} {# _} {top} _ _ = ext
trans<E {# _} {top} {# _} _ _ ()
trans<E {top} {# _} {# _} _ _ ()
```

Тип данных расширенного отношения равенства.

```
data _=E_ : Rel₂ (expanded A) where
base : ∀ {x y} → x == y → (# x) =E (# y)
ext   : top =E top
```

Расширенное отношение равенства — симметрично и транзитивно.



$\text{sym}=\text{E} : \text{Symmetric } \_=\text{E}_\text{}$   
 $\text{sym}=\text{E} (\text{base } a=b) = \text{base } (\text{sym}== a=b)$   
 $\text{sym}=\text{E } \text{ext} = \text{ext}$   
 $\text{trans}=\text{E} : \text{Trans } \_=\text{E}_\text{}$   
 $\text{trans}=\text{E} (\text{base } a=b) (\text{base } b=c) = \text{base } (\text{trans}== a=b b=c)$   
 $\text{trans}=\text{E } \text{ext } \text{ext} = \text{ext}$

Отношение  $\_<\text{E}_\text{}$  соблюдает отношение  $\_=\text{E}_\text{}$ .

$\text{respE} : \_<\text{E}_\text{ } \text{Respects}_2 \_=\text{E}_\text{}$   
 $\text{respE} = \text{left} , \text{right } \text{where}$   
 $\text{left} : \forall \{a \ b \ c : \text{expanded } A\} \rightarrow b =\text{E } c \rightarrow a <\text{E } b \rightarrow a <\text{E } c$   
 $\text{left } \{ \# \_ \} \{ \# \_ \} \{ \# \_ \} (\text{base } r1) (\text{base } r2) = \text{base } (\text{fst } \text{resp } r1 \ r2)$   
 $\text{left } \{ \# \_ \} \{ \text{top} \} \{ \text{top} \} \text{ext } \text{ext} = \text{ext}$   
  
 $\text{left } \{ \_ \} \{ \# \_ \} \{ \text{top} \} () \_$   
 $\text{left } \{ \_ \} \{ \text{top} \} \{ \# \_ \} () \_$   
 $\text{left } \{ \text{top} \} \{ \_ \} \{ \_ \} \_ ()$   
  
 $\text{right} : \forall \{a \ b \ c : \text{expanded } A\} \rightarrow b =\text{E } c \rightarrow b <\text{E } a \rightarrow c <\text{E } a$   
 $\text{right } \{ \# \_ \} \{ \# \_ \} \{ \# \_ \} (\text{base } r1) (\text{base } r2) = \text{base } (\text{snd } \text{resp } r1 \ r2)$   
 $\text{right } \{ \text{top} \} \{ \# \_ \} \{ \# \_ \} \_ \text{ext} = \text{ext}$   
  
 $\text{right } \{ \_ \} \{ \# \_ \} \{ \text{top} \} () \_$   
 $\text{right } \{ \_ \} \{ \text{top} \} \{ \_ \} \_ ()$

Отношение меньше-равно для расширенного типа.

$\_ \leq \_ : \text{Rel}_2 (\text{expanded } A)$   
 $\_ \leq \_ = \_ <= \_ \{ \text{expanded } A \} \{ \_ <\text{E}_\text{} \} \{ \_ =\text{E}_\text{} \}$

Транзитивность меньше-равно следует из свойств отношений  $\_ =E\_$  и  $\_ <E\_$ :

```
trans≤ : Trans _≤_
trans≤ = trans<= respE sym=E trans=E trans<E
resp≤ : _≤_ Respects₂ _=E_
resp≤ = resp<= respE trans=E sym=E
```

Вспомогательная лемма, извлекающая доказательство равенства элементов исходного типа из равенства элементов расширенного типа.

```
lemma-=E : ∀ {x} {y} → (# x) =E (# y) → x == y
lemma-=E (base r) = r
```

Трихотомичность для  $\_ <E\_$  и  $\_ =E\_$ .

```
cmpE : Cmp {expanded A} _<E_ _=E_
cmpE (# x) (# y) with cmp x y
cmpE (# x) (# y) | tri< a b c =
  tri< (base a) (contraposition lemma-=E b) (contraposition lemma-<E c)
cmpE (# x) (# y) | tri= a b c =
  tri= (contraposition lemma-<E a) (base b) (contraposition lemma-<E c)
cmpE (# x) (# y) | tri> a b c =
  tri> (contraposition lemma-<E a) (contraposition lemma-=E b) (base c)
cmpE (# x) top = tri< ext (λ ()) (λ ())
cmpE top (# y) = tri> (λ ()) (λ ()) ext
cmpE top top = tri= (λ ()) ext (λ ())
```

Функция — минимум для расширенного типа.

```
minE : (x y : expanded A) → expanded A
minE = min cmpE
```

Функция — минимум из трех элементов расширенного типа — частный случай ранее определенной общей функции.

$\text{min3E} : (\text{expanded } A) \rightarrow (\text{expanded } A) \rightarrow (\text{expanded } A) \rightarrow (\text{expanded } A)$   
 $\text{min3E } x \ y \ z = \text{min3 cmpE } x \ y \ z$

Леммы для сравнения с минимумами для элементов расширенного типа.

$\text{lemma-}\leq\text{minE} : \forall \{a \ b \ c\} \rightarrow a \leq b \rightarrow a \leq c \rightarrow a \leq (\text{minE } b \ c)$   
 $\text{lemma-}\leq\text{minE} = \text{lemma-}\leq\text{min} \ \{\text{expanded } A\} \ \{\_<\text{E}\_ \} \ \{\_=\text{E}\_ \} \ \{\text{cmpE}\}$   
 $\text{lemma-}\leq\text{min3E} : \forall \{x \ a \ b \ c\} \rightarrow x \leq a \rightarrow x \leq b \rightarrow x \leq c$   
 $\rightarrow x \leq (\text{min3E } a \ b \ c)$   
 $\text{lemma-}\leq\text{min3E} = \text{lemma-}\leq\text{min3} \ \{\text{expanded } A\} \ \{\_<\text{E}\_ \} \ \{\_=\text{E}\_ \} \ \{\text{cmpE}\}$

## 2.4.2. Тип данных Heap

Вспомогательный тип данных для индексации кучи — куча полная или почти заполненная.

$\text{data HeapState} : \text{Set where}$   
 $\text{full almost} : \text{HeapState}$

Тип данных для кучи, проиндексированный минимальным элементом кучи, высотой и заполненностью.

$\text{data Heap} : (\text{expanded } A) \rightarrow (h : \mathbb{N}) \rightarrow \text{HeapState} \rightarrow \text{Set where}$

У пустой кучи минимальный элемент —  $\text{top}$ , высота — ноль. Пустая куча — полная.

$\text{eh} : \text{Heap top zero full}$

Мы хотим в непустых кучах задавать порядок на элементах — элемент в узле меньше либо равен элементам в поддеревьях. Мы можем упростить этот инвариант, сравнивая элемент в узле только с корнями поддеревьев. Порядок кучи задается с помощью двух элементов отношения  $\leq$ :  $i$  и  $j$ , которые говорят о том, что значение в корне меньше-равно значений в корнях левого и правого поддеревьев соответственно. На рисунке 2.2 схематично изображены конструкторы типа данных **Heap**.

Полная куча высотой  $n + 1$  состоит из корня и двух куч высотой  $n$ .

$$\begin{aligned}
 \text{nf} : \forall \{n\} \{x\ y\} \rightarrow (p : A) \rightarrow (i : (\# p) \leq x) \rightarrow (j : (\# p) \leq y) \\
 \rightarrow (a : \text{Heap } x\ n\ \text{full}) \\
 \rightarrow (b : \text{Heap } y\ n\ \text{full}) \\
 \rightarrow \text{Heap } (\# p)\ (\text{succ } n)\ \text{full}
 \end{aligned}$$

Куча высотой  $n + 2$ , у которой нижний ряд заполнен до середины, состоит из корня и двух полных куч: левая высотой  $n + 1$  и правая высотой  $n$ .

$$\begin{aligned}
 \text{nd} : \forall \{n\} \{x\ y\} \rightarrow (p : A) \rightarrow (i : (\# p) \leq x) \rightarrow (j : (\# p) \leq y) \\
 \rightarrow (a : \text{Heap } x\ (\text{succ } n)\ \text{full}) \\
 \rightarrow (b : \text{Heap } y\ n\ \text{full}) \\
 \rightarrow \text{Heap } (\# p)\ (\text{succ } (\text{succ } n))\ \text{almost}
 \end{aligned}$$

Куча высотой  $n + 2$ , у которой нижний ряд заполнен меньше, чем до середины, состоит из корня и двух куч: левая неполная высотой  $n + 1$  и правая полная высотой  $n$ .

$$\begin{aligned}
 \text{nl} : \forall \{n\} \{x\ y\} \rightarrow (p : A) \rightarrow (i : (\# p) \leq x) \rightarrow (j : (\# p) \leq y) \\
 \rightarrow (a : \text{Heap } x\ (\text{succ } n)\ \text{almost}) \\
 \rightarrow (b : \text{Heap } y\ n\ \text{full}) \\
 \rightarrow \text{Heap } (\# p)\ (\text{succ } (\text{succ } n))\ \text{almost}
 \end{aligned}$$

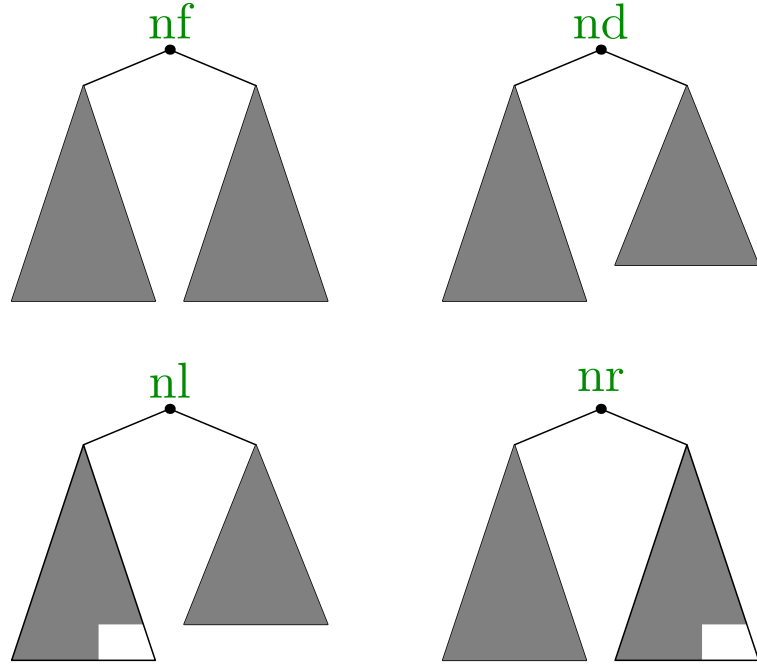


Рис. 2.2. Конструкторы типа данных `Heap`

Неполная куча высотой  $n + 2$ , у которой нижний ряд заполнен больше, чем до середины, состоит из корня и двух куч: левая полная высотой  $n + 1$  и правая неполная высотой  $n + 1$ .

$$\begin{aligned}
 \text{nr} : & \forall \{n\} \{x\ y\} \rightarrow (p : A) \rightarrow (i : (\# p) \leq x) \rightarrow (j : (\# p) \leq y) \\
 & \rightarrow (a : \text{Heap } x \text{ (succ } n) \text{ full}) \\
 & \rightarrow (b : \text{Heap } y \text{ (succ } n) \text{ almost}) \\
 & \rightarrow \text{Heap } (\# p) \text{ (succ (succ } n)) \text{ almost}
 \end{aligned}$$

*Замечание:* высота любой неполной кучи больше нуля.

$$\text{lemma-almost-height} : \forall \{m\ h\} \rightarrow \text{Heap } m\ h \text{ almost} \rightarrow h \mathbb{N} > 0$$

$$\text{lemma-almost-height } (\text{nd } \_ \_ \_ \_) = s \leq s \leq z \leq n$$

$$\text{lemma-almost-height } (\text{nl } \_ \_ \_ \_) = s \leq s \leq z \leq n$$

$$\text{lemma-almost-height } (\text{nr } \_ \_ \_ \_) = s \leq s \leq z \leq n$$

Функция — просмотр минимума в куче.

```
peekMin : ∀ {m h s} → Heap m h s → (expanded A)
peekMin eh = top
peekMin (nd p _ _ _ _) = # p
peekMin (nf p _ _ _ _) = # p
peekMin (nl p _ _ _ _) = # p
peekMin (nr p _ _ _ _) = # p
```

### 2.4.3. Функции вставки в кучу

Функция вставки элемента в полную кучу.

```
finsert : ∀ {h m} → (z : A) → Heap m h full
→ Σ HeapState (Heap (minE m (# z)) (succ h))
finsert {0} z eh = full , nf z (le ext) (le ext) eh eh
finsert {1} z (nf p i j eh eh) with cmp p z
... | tri < p < z _ _ = almost ,
    nd p (le (base p < z)) j (nf z (le ext) (le ext) eh eh) eh
... | tri = _ p = z _ _ = almost ,
    nd z (eq (base (sym == p = z))) (le ext) (nf p i j eh eh) eh
... | tri > _ _ z < p = almost ,
    nd z (le (base z < p)) (le ext) (nf p i j eh eh) eh
finsert z (nf p i j (nf x il jl a b) c) with cmp p z
finsert z (nf p i j (nf x il jl a b) c) | tri < p < z _ _
    with finsert z (nf x il jl a b)
    | lemma-<=minE {# p} {# x} {# z} i (le (base p < z))
... | full , newleft | ll = almost , nd p ll j newleft c
... | almost , newleft | ll = almost , nl p ll j newleft c
finsert z (nf p i j (nf x il jl a b) c) | tri = _ p = z _
    with finsert p (nf x il jl a b)
```

```

| lemma-<=minE {# z} {# x} {# p}
  (snd resp≤ (base p=z) i) (eq (base (sym== p=z)))
| snd resp≤ (base p=z) j
... | full , newleft | l1 | l2 = almost , nd z l1 l2 newleft c
... | almost , newleft | l1 | l2 = almost , nl z l1 l2 newleft c

```

TODO из-за непонятного бага в LaTeX некоторые строки на Agda не отрендерены

```

... | almost , newleft | l1 = almost ,
nl z l1 (trans≤ (le (base z<p)) j) newleft c

```

Вставка элемента в неполную кучу.

```

ainsert : ∀ {h m} → (z : A) → Heap m h almost
  → Σ HeapState (Heap (minE m (# z)) h)
ainsert z (nd p i j a b) with cmp p z
ainsert z (nd p i j a b) | tri< p<z _ _
  with fininsert z b | lemma-<=minE j (le (base p<z))
... | full , nb | l1 = full , nf p i l1 a nb
... | almost , nb | l1 = almost , nr p i l1 a nb

```

#### 2.4.4. Удаление минимума из полной кучи

Вспомогательный тип данных.

```

data OR (A B : Set) : Set where
  orA : A → OR A B
  orB : B → OR A B

```

Слияние двух полных куч одной высоты.

```

fmerge : ∀ {x y h} → Heap x h full → Heap y h full

```

$\rightarrow \text{OR} (\text{Heap } x \text{ zero full} \times (x \equiv y) \times (h \equiv \text{zero}))$   
 $(\text{Heap } (\text{minE } x y) (\text{succ } h) \text{ almost})$   
 $\text{fmerge } eh \text{ eh} = \text{orA } (eh, \text{refl}, \text{refl})$   
 $\text{fmerge } (\text{nf } x \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a \text{ } b) (\text{nf } y \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } c \text{ } d) \text{ with } cmp \text{ } x \text{ } y$   
 $\text{fmerge } (\text{nf } x \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a \text{ } b) (\text{nf } y \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } c \text{ } d) \mid \text{tri} < x < y \text{ } \_ \text{ } \_ \text{ with } \text{fmerge } a \text{ } b$   
 $\dots \mid \text{orA } (eh, \text{refl}, \text{refl}) = \text{orB } (\text{nd } x (\text{le } (\text{base } x < y)) j_1 (\text{nf } y \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } c \text{ } d) eh)$   
 $\dots \mid \text{orB } ab = \text{orB}$   
 $(\text{nr } x (\text{le } (\text{base } x < y)) (\text{lemma-} \leq \text{minE } i_1 j_1) (\text{nf } y \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } c \text{ } d) ab)$

$\text{fmerge } (\text{nf } x \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a \text{ } b) (\text{nf } y \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } c \text{ } d) \mid \text{tri} > \_ \text{ } \_ \text{ } y < x \text{ with } \text{fmerge } c \text{ } d$   
 $\dots \mid \text{orA } (eh, \text{refl}, \text{refl}) = \text{orB } (\text{nd } y (\text{le } (\text{base } y < x)) j_2 (\text{nf } x \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a \text{ } b) eh)$   
 $\dots \mid \text{orB } cd = \text{orB}$   
 $(\text{nr } y (\text{le } (\text{base } y < x)) (\text{lemma-} \leq \text{minE } i_2 j_2) (\text{nf } x \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a \text{ } b) cd)$

Извлечение минимума из полной кучи.

$\text{fpop} : \forall \{m \text{ } h\} \rightarrow \text{Heap } m (\text{succ } h) \text{ full} \rightarrow \text{OR}$   
 $(\Sigma (\text{expanded } A) (\lambda x \rightarrow (\text{Heap } x (\text{succ } h) \text{ almost}) \times (m \leq x)))$   
 $(\text{Heap } \text{top } h \text{ full})$

### 2.4.5. Удаление минимума из неполной кучи

Составление полной кучи высотой  $h + 1$  из двух куч высотой  $h$  и одного элемента.

$\text{makeH} : \forall \{x \text{ } y \text{ } h\} \rightarrow (p : A) \rightarrow \text{Heap } x \text{ } h \text{ full} \rightarrow \text{Heap } y \text{ } h \text{ full}$   
 $\rightarrow \text{Heap } (\text{min3E } x \text{ } y \text{ } (\# p)) (\text{succ } h) \text{ full}$



Вспомогательные леммы, использующие lemma-≤minE.

```
lemma-resp : ∀ {x y a b} → x == y → (# x) ≤ a → (# x) ≤ b
→ (# y) ≤ minE a b
lemma-resp x=y i j = lemma-≤minE (snd resp≤ (base x=y) i)
(snd resp≤ (base x=y) j)
lemma-trans : ∀ {x y a b} → y < x → (# x) ≤ a → (# x) ≤ b
→ (# y) ≤ minE a b
lemma-trans y<x i j = lemma-≤minE (trans≤ (le (base y<x)) i)
(trans≤ (le (base y<x)) j)
```

Слияние поддеревьев из кучи, у которой последний ряд заполнен до середины, определенной конструктором nd.

```
ndmerge : ∀ {x y h} → Heap x (succ (succ h)) full → Heap y (succ h) full
→ Heap (minE x y) (succ (succ (succ h))) almost
```

```
ndmerge (nf x i j a b) (nf y il jl c d) with cmp x y
ndmerge (nf x i j a b) (nf y il jl c d) | tri< x<y _ _ with fmerge a b
ndmerge (nf x i j a b) (nf y il jl c d) | tri< x<y _ _ | orA (_, _, ())
ndmerge (nf x i j a b) (nf y il jl c d) | tri< x<y _ _ | orB xl =
  nl x (lemma-≤minE i j) (le (base x<y)) xl (nf y il jl c d)
```

```
ndmerge (nf x i j a b) (nf y il jl c d) | tri= _ x=y _ with fmerge c d
ndmerge (nf x i j a b) (nf y il jl c d) | tri= _ x=y _ | orA (eh, refl, refl)
  with fmerge a b
ndmerge (nf x i j a b) (nf y il jl c d) | tri= _ x=y _ | orA (eh, refl, refl)
  | orA (eh, refl, ())
ndmerge (nf x i j a b) (nf y il jl c d) | tri= _ x=y _ | orA (eh, refl, refl)
  | orB ab = nl y (lemma-resp x=y i j) (eq (base (sym== x=y)))
```

$ab\ (nf\ x\ (le\ ext)\ (le\ ext)\ eh\ eh)$

$ndmerge\ (nf\ x\ i\ j\ a\ b)\ (nf\ y\ i_l\ j_l\ c\ d)\ |\ tri = \_ \ x=y \_ \ |\ orB\ cd\ with\ fmerge\ a\ b$   
 $ndmerge\ (nf\ x\ i\ j\ a\ b)\ (nf\ y\ i_l\ j_l\ c\ d)\ |\ tri = \_ \ x=y \_ \ |\ orB\ cd\ |\ orA\ (\_, \_, ())$   
 $ndmerge\ (nf\ x\ i\ j\ a\ b)\ (nf\ y\ i_l\ j_l\ c\ d)\ |\ tri = \_ \ x=y \_ \ |\ orB\ cd\ |\ orB\ ab =$   
 $nl\ y\ (lemma-resp\ x=y\ i\ j)\ (lemma-<=min3E\ i_l\ j_l\ (eq\ (base\ (sym==\ x=y))))$   
 $ab\ (makeH\ x\ c\ d)$   
 $ndmerge\ (nf\ x\ i\ j\ a\ b)\ (nf\ y\ i_l\ j_l\ c\ d)\ |\ tri > \_ \_ \ y < x\ with\ fmerge\ a\ b$   
 $ndmerge\ (nf\ x\ i\ j\ a\ b)\ (nf\ y\ i_l\ j_l\ c\ d)\ |\ tri > \_ \_ \ y < x\ |\ orA\ (\_, \_, ())$   
 $ndmerge\ (nf\ x\ i\ j\ a\ b)\ (nf\ y\ i_l\ j_l\ c\ d)\ |\ tri > \_ \_ \ y < x\ |\ orB\ ab =$   
 $nl\ y\ (lemma-trans\ y < x\ i\ j)\ (lemma-<=min3E\ i_l\ j_l\ (le\ (base\ y < x)))$   
 $ab\ (makeH\ x\ c\ d)$

Слияние неполной кучи высотой  $h + 2$  и полной кучи высотой  $h + 1$  или  $h + 2$ .

$afmerge : \forall \{h\ x\ y\} \rightarrow Heap\ x\ (succ\ (succ\ h))\ almost$   
 $\rightarrow OR\ (Heap\ y\ (succ\ h)\ full)\ (Heap\ y\ (succ\ (succ\ h))\ full)$   
 $\rightarrow OR\ (Heap\ (minE\ x\ y)\ (succ\ (succ\ h))\ full)$   
 $(Heap\ (minE\ x\ y)\ (succ\ (succ\ (succ\ h))))\ almost)$

$afmerge\ (nd\ x\ i\ j\ (nf\ p\ i_l\ j_l\ eh\ eh)\ eh)\ (orA\ (nf\ y\ i_2\ j_2\ eh\ eh))\ with\ cmp\ x\ y$   
 $\dots\ |\ tri < \_ \_ \ x < y \_ \_ = orA\ (nf\ x\ i\ (le\ (base\ x < y)))$   
 $(nf\ p\ i_l\ j_l\ eh\ eh)\ (nf\ y\ i_2\ j_2\ eh\ eh))$   
 $\dots\ |\ tri = \_ \_ \ x = y \_ \_ = orA\ (nf\ y\ (eq\ (base\ (sym==\ x=y))))$   
 $(snd\ resp \leq\ (base\ x=y)\ i)\ (nf\ x\ (le\ ext)\ (le\ ext)\ eh\ eh)\ (nf\ p\ i_l\ j_l\ eh\ eh))$   
 $\dots\ |\ tri > \_ \_ \ y < x = orA\ (nf\ y\ (le\ (base\ y < x)))$   
 $(trans \leq\ (le\ (base\ y < x))\ i)\ (nf\ x\ j\ j\ eh\ eh)\ (nf\ p\ j_l\ j_l\ eh\ eh))$

$afmerge\ (nd\ x\ i\ j\ (nf\ p_1\ i_l\ j_l\ a_1\ b_1)\ (nf\ p_2\ i_2\ j_2\ a_2\ b_2))\ (orA\ (nf\ y\ i_3\ j_3\ c\ d))$   
 $with\ cmp\ x\ y\ |\ ndmerge\ (nf\ p_1\ i_l\ j_l\ a_1\ b_1)\ (nf\ p_2\ i_2\ j_2\ a_2\ b_2)$

... | tri< x<y \_ \_ | ab = orB (nl x (lemma-<=minE i j) (le (base x<y))  
 ab (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d))  
 ... | tri= \_ x=y \_ | ab = orB (nl y (lemma-resp x=y i j)  
 (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (eq (base (sym== x=y))))) ab (makeH x c d))  
 ... | tri> \_ \_ y<x | ab = orB (nl y (lemma-trans y<x i j)  
 (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (le (base y<x)))) ab (makeH x c d))  
 afmerge (nl x i j (nd p<sub>1</sub> i<sub>1</sub> j<sub>1</sub> a<sub>1</sub> b<sub>1</sub>) (nf p<sub>2</sub> i<sub>2</sub> j<sub>2</sub> a<sub>2</sub> b<sub>2</sub>)) (orA (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d))  
 with cmp x y | afmerge (nd p<sub>1</sub> i<sub>1</sub> j<sub>1</sub> a<sub>1</sub> b<sub>1</sub>) (orA (nf p<sub>2</sub> i<sub>2</sub> j<sub>2</sub> a<sub>2</sub> b<sub>2</sub>))  
 ... | tri< x<y \_ \_ | orA ab =  
 orA (nf x (lemma-<=minE i j) (le (base x<y)) ab (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d))  
 ... | tri< x<y \_ \_ | orB ab =  
 orB (nl x (lemma-<=minE i j) (le (base x<y)) ab (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d))  
 ... | tri= \_ x=y \_ | orA ab = orA  
 (nf y (lemma-resp x=y i j) (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (eq (base (sym== x=y)))))  
 ab (makeH x c d))  
 ... | tri= \_ x=y \_ | orB ab = orB  
 (nl y (lemma-resp x=y i j) (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (eq (base (sym== x=y)))))  
 ab (makeH x c d))  
 ... | tri> \_ \_ y<x | orA ab = orA  
 (nf y (lemma-trans y<x i j) (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (le (base y<x))))  
 ab (makeH x c d))  
 ... | tri> \_ \_ y<x | orB ab = orB  
 (nl y (lemma-trans y<x i j) (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (le (base y<x))))  
 ab (makeH x c d))  
  
 afmerge (nl x i j (nl p<sub>1</sub> i<sub>1</sub> j<sub>1</sub> a<sub>1</sub> b<sub>1</sub>) (nf p<sub>2</sub> i<sub>2</sub> j<sub>2</sub> a<sub>2</sub> b<sub>2</sub>)) (orA (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d))  
 with cmp x y | afmerge (nl p<sub>1</sub> i<sub>1</sub> j<sub>1</sub> a<sub>1</sub> b<sub>1</sub>) (orA (nf p<sub>2</sub> i<sub>2</sub> j<sub>2</sub> a<sub>2</sub> b<sub>2</sub>))  
 ... | tri< x<y \_ \_ | orA ab =  
 orA (nf x (lemma-<=minE i j) (le (base x<y)) ab (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d))  
 ... | tri< x<y \_ \_ | orB ab =

$\text{orB } (\text{nl } x \text{ (lemma-}\leq\text{minE } i \ j) \text{ (le (base } x < y)) \text{ } ab \text{ (nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \_ \mid \text{orA } ab = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-}\text{resp } x = y \ i \ j)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \ j_3 \text{ (eq (base (sym} == \ x = y)))) \text{ } ab \text{ (makeH } x \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \_ \mid \text{orB } ab = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-}\text{resp } x = y \ i \ j)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \ j_3 \text{ (eq (base (sym} == \ x = y)))) \text{ } ab \text{ (makeH } x \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \ y < x \mid \text{orA } ab = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-}\text{trans } y < x \ i \ j)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \ j_3 \text{ (le (base } y < x))) \text{ } ab \text{ (makeH } x \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \ y < x \mid \text{orB } ab = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-}\text{trans } y < x \ i \ j)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \ j_3 \text{ (le (base } y < x))) \text{ } ab \text{ (makeH } x \ c \ d))$

$\text{afmerge } (\text{nl } x \ i \ j \text{ (nr } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) \text{ (nf } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2)) \text{ (orA } (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\text{ with cmp } x \ y \mid \text{afmerge } (\text{nr } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) \text{ (orA } (\text{nf } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid \text{orA } ab =$   
 $\text{ orA } (\text{nf } x \text{ (lemma-}\leq\text{minE } i \ j) \text{ (le (base } x < y)) \text{ } ab \text{ (nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid \text{orB } ab =$   
 $\text{ orB } (\text{nl } x \text{ (lemma-}\leq\text{minE } i \ j) \text{ (le (base } x < y)) \text{ } ab \text{ (nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \_ \mid \text{orA } ab = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-}\text{resp } x = y \ i \ j)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \ j_3 \text{ (eq (base (sym} == \ x = y)))) \text{ } ab \text{ (makeH } x \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \_ \mid \text{orB } ab = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-}\text{resp } x = y \ i \ j)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \ j_3 \text{ (eq (base (sym} == \ x = y)))) \text{ } ab \text{ (makeH } x \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \ y < x \mid \text{orA } ab = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-}\text{trans } y < x \ i \ j)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \ j_3 \text{ (le (base } y < x))) \text{ } ab \text{ (makeH } x \ c \ d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \ y < x \mid \text{orB } ab = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-}\text{trans } y < x \ i \ j)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \ j_3 \text{ (le (base } y < x))) \text{ } ab \text{ (makeH } x \ c \ d))$

$\text{afmerge } (\text{nr } x \ i \ j \text{ (nf } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) \text{ (nd } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2)) \text{ (orA } (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\text{ with cmp } x \ y \mid \text{afmerge } (\text{nd } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2) \text{ (orB } (\text{nf } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orA } ab) =$   
 $\text{ orA } (\text{nf } x \text{ (le (base } x < y)) \text{ (lemma-}\leq\text{minE } j \ i) \text{ (nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \text{ } ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orB } ab) =$

$\text{orB } (\text{nl } x \text{ (lemma-}\leq\text{minE } j \text{ } i) \text{ (le (base } x < y)) \text{ } ab \text{ (nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \text{ } x = y \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-resp } x = y \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (eq (base (sym == } x = y))) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \text{ } x = y \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-resp } x = y \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (eq (base (sym == } x = y))) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \text{ } y < x \mid (\text{orA } ab) = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-trans } y < x \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (le (base } y < x)) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \text{ } y < x \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-trans } y < x \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (le (base } y < x)) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$

$\text{afmerge } (\text{nr } x \text{ } i \text{ } j \text{ (nf } p_1 \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a_1 \text{ } b_1) \text{ (nl } p_2 \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } a_2 \text{ } b_2)) \text{ (orA } (\text{nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d))$   
 $\text{ with cmp } x \text{ } y \mid \text{afmerge } (\text{nl } p_2 \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } a_2 \text{ } b_2) \text{ (orB } (\text{nf } p_1 \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a_1 \text{ } b_1))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orA } ab) =$   
 $\text{ orA } (\text{nf } x \text{ (le (base } x < y)) \text{ (lemma-}\leq\text{minE } j \text{ } i) \text{ (nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d) \text{ } ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orB } ab) =$   
 $\text{ orB } (\text{nl } x \text{ (lemma-}\leq\text{minE } j \text{ } i) \text{ (le (base } x < y)) \text{ } ab \text{ (nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \text{ } x = y \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-resp } x = y \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (eq (base (sym == } x = y))) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \text{ } x = y \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-resp } x = y \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (eq (base (sym == } x = y))) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \text{ } y < x \mid (\text{orA } ab) = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-trans } y < x \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (le (base } y < x)) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \text{ } y < x \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-trans } y < x \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (le (base } y < x)) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$

$\text{afmerge } (\text{nr } x \text{ } i \text{ } j \text{ (nf } p_1 \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a_1 \text{ } b_1) \text{ (nr } p_2 \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } a_2 \text{ } b_2)) \text{ (orA } (\text{nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d))$   
 $\text{ with cmp } x \text{ } y \mid \text{afmerge } (\text{nr } p_2 \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } a_2 \text{ } b_2) \text{ (orB } (\text{nf } p_1 \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a_1 \text{ } b_1))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orA } ab) =$   
 $\text{ orA } (\text{nf } x \text{ (le (base } x < y)) \text{ (lemma-}\leq\text{minE } j \text{ } i) \text{ (nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d) \text{ } ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orB } ab) =$

$\text{orB } (\text{nl } x \text{ (lemma-}\leq\text{minE } j \text{ } i) \text{ (le (base } x < y)) \text{ } ab \text{ (nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \text{ } x = y \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-resp } x = y \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (eq (base (sym == } x = y))) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \text{ } x = y \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-resp } x = y \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (eq (base (sym == } x = y))) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \text{ } y < x \mid (\text{orA } ab) = \text{orA } (\text{nf } y \text{ (lemma-trans } y < x \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (le (base } y < x)) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \text{ } y < x \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nl } y \text{ (lemma-trans } y < x \text{ } j \text{ } i)$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (le (base } y < x)) \text{ ) } ab \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d))$

$\text{afmerge } (\text{nd } x \text{ } i \text{ } j \text{ (nf } p \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ eh eh) eh) (orB (nf } y \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } c \text{ } d)) \text{ with cmp } x \text{ } y$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ =$   
 $\text{ orB (nd } x \text{ (le (base } x < y)) \text{ } i \text{ (nf } y \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } c \text{ } d) \text{ (nf } p \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ eh eh))}$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \text{ } x = y \_ = \text{orB (nd } y$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_2 \text{ } j_2 \text{ (eq (base (sym == } x = y))) \text{ ) (snd resp} \leq \text{ (base } x = y) \text{ } i)$   
 $\text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d) \text{ (nf } p \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ eh eh))}$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \text{ } y < x = \text{orB (nd } y \text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_2 \text{ } j_2 \text{ (le (base } y < x))$   
 $\text{ (trans} \leq \text{ (le (base } y < x)) \text{ } i) \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d) \text{ (nf } p \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ eh eh))}$

$\text{afmerge } (\text{nd } x \text{ } i \text{ } j \text{ (nf } p_1 \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a_1 \text{ } b_1) \text{ (nf } p_2 \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } a_2 \text{ } b_2)) \text{ (orB (nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d))$   
 $\text{ with cmp } x \text{ } y \mid \text{ndmerge } (\text{nf } p_1 \text{ } i_1 \text{ } j_1 \text{ } a_1 \text{ } b_1) \text{ (nf } p_2 \text{ } i_2 \text{ } j_2 \text{ } a_2 \text{ } b_2)$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid ab =$   
 $\text{ orB (nr } x \text{ (le (base } x < y)) \text{ (lemma-}\leq\text{minE } i \text{ } j) \text{ (nf } y \text{ } i_3 \text{ } j_3 \text{ } c \text{ } d) \text{ } ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \text{ } x = y \_ \mid ab = \text{orB (nr } y$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (eq (base (sym == } x = y))) \text{ )}$   
 $\text{ (lemma-resp } x = y \text{ } i \text{ } j) \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d) \text{ } ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \text{ } y < x \mid ab = \text{orB (nr } y$   
 $\text{ (lemma-}\leq\text{min3E } i_3 \text{ } j_3 \text{ (le (base } y < x)) \text{ )}$   
 $\text{ (lemma-trans } y < x \text{ } i \text{ } j) \text{ (makeH } x \text{ } c \text{ } d) \text{ } ab)$

$\text{afmerge } (\text{nl } x \ i \ j \ (\text{nd } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) \ (\text{nf } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2)) \ (\text{orB } (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\text{with } \text{cmp } x \ y \mid \text{afmerge } (\text{nd } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) \ (\text{orA } (\text{nf } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \ \_ \ \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orB } (\text{nd } x \ (\text{le } (\text{base } x < y)))$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{minE } i \ j) \ (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \ \_ \ \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nr } x \ (\text{le } (\text{base } x < y)))$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{minE } i \ j) \ (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \ \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orB } (\text{nd } y$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 \ (\text{eq } (\text{base } (\text{sym} == x = y)))) \ (\text{lemma-resp } x = y \ i \ j)$   
 $(\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \ \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nr } y$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 \ (\text{eq } (\text{base } (\text{sym} == x = y)))) \ (\text{lemma-resp } x = y \ i \ j)$   
 $(\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \ \_ \ y < x \mid (\text{orA } ab) = \text{orB } (\text{nd } y$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 \ (\text{le } (\text{base } y < x))) \ (\text{lemma-trans } y < x \ i \ j) \ (\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \ \_ \ y < x \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nr } y$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 \ (\text{le } (\text{base } y < x))) \ (\text{lemma-trans } y < x \ i \ j) \ (\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\text{afmerge } (\text{nl } x \ i \ j \ (\text{nl } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) \ (\text{nf } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2)) \ (\text{orB } (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\text{with } \text{cmp } x \ y \mid \text{afmerge } (\text{nl } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) \ (\text{orA } (\text{nf } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \ \_ \ \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orB } (\text{nd } x \ (\text{le } (\text{base } x < y)))$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{minE } i \ j) \ (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \ \_ \ \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nr } x \ (\text{le } (\text{base } x < y)))$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{minE } i \ j) \ (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \ \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orB } (\text{nd } y$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 \ (\text{eq } (\text{base } (\text{sym} == x = y)))) \ (\text{lemma-resp } x = y \ i \ j)$   
 $(\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \ \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB } (\text{nr } y$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 \ (\text{eq } (\text{base } (\text{sym} == x = y)))) \ (\text{lemma-resp } x = y \ i \ j)$   
 $(\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \ \_ \ y < x \mid (\text{orA } ab) = \text{orB } (\text{nd } y$   
 $(\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 \ (\text{le } (\text{base } y < x)))$

$(\text{lemma-trans } y < x \ i \ j) (\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \ y < x \mid (\text{orB } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nr } y (\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 (\text{le } (\text{base } y < x))))$   
 $(\text{lemma-trans } y < x \ i \ j) (\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$

$\text{afmerge } (\text{nl } x \ i \ j (\text{nr } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) (\text{nf } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2)) (\text{orB } (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\text{with } \text{cmp } x \ y \mid \text{afmerge } (\text{nr } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) (\text{orA } (\text{nf } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nd } x (\text{le } (\text{base } x < y)) (\text{lemma-} \leq \text{minE } i \ j) (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nr } x (\text{le } (\text{base } x < y)) (\text{lemma-} \leq \text{minE } i \ j) (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nd } y (\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 (\text{eq } (\text{base } (\text{sym} == x = y))))$   
 $(\text{lemma-resp } x = y \ i \ j) (\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} = \_ \ x = y \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nr } y (\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 (\text{eq } (\text{base } (\text{sym} == x = y))))$   
 $(\text{lemma-resp } x = y \ i \ j) (\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \ y < x \mid (\text{orA } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nd } y (\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 (\text{le } (\text{base } y < x))))$   
 $(\text{lemma-trans } y < x \ i \ j) (\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} > \_ \_ \ y < x \mid (\text{orB } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nr } y (\text{lemma-} \leq \text{min3E } i_3 \ j_3 (\text{le } (\text{base } y < x))))$   
 $(\text{lemma-trans } y < x \ i \ j) (\text{makeH } x \ c \ d) \ ab)$

$\text{afmerge } (\text{nr } x \ i \ j (\text{nf } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1) (\text{nd } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2)) (\text{orB } (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d))$   
 $\text{with } \text{cmp } x \ y \mid \text{afmerge } (\text{nd } p_2 \ i_2 \ j_2 \ a_2 \ b_2) (\text{orB } (\text{nf } p_1 \ i_1 \ j_1 \ a_1 \ b_1))$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orA } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nd } x (\text{le } (\text{base } x < y)) (\text{lemma-} \leq \text{minE } j \ i) (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \ ab)$   
 $\dots \mid \text{tri} < x < y \_ \_ \mid (\text{orB } ab) = \text{orB}$   
 $(\text{nr } x (\text{le } (\text{base } x < y)) (\text{lemma-} \leq \text{minE } j \ i) (\text{nf } y \ i_3 \ j_3 \ c \ d) \ ab)$



... | tri= \_ x=y \_ | (orA ab) = orB  
 (nd y (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (eq (base (sym== x=y))))  
 (lemma-resp x=y j i) (makeH x c d) ab)  
 ... | tri= \_ x=y \_ | (orB ab) = orB  
 (nr y (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (eq (base (sym== x=y))))  
 (lemma-resp x=y j i) (makeH x c d) ab)  
 ... | tri> \_ \_ y<x | (orA ab) = orB  
 (nd y (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (le (base y<x))) (lemma-trans y<x j i)  
 (makeH x c d) ab)  
 ... | tri> \_ \_ y<x | (orB ab) = orB  
 (nr y (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (le (base y<x))) (lemma-trans y<x j i)  
 (makeH x c d) ab)  
 afmerge (nr x i j (nf p<sub>1</sub> i<sub>1</sub> j<sub>1</sub> a<sub>1</sub> b<sub>1</sub>) (nl p<sub>2</sub> i<sub>2</sub> j<sub>2</sub> a<sub>2</sub> b<sub>2</sub>)) (orB (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d))  
 with cmp x y | afmerge (nl p<sub>2</sub> i<sub>2</sub> j<sub>2</sub> a<sub>2</sub> b<sub>2</sub>) (orB (nf p<sub>1</sub> i<sub>1</sub> j<sub>1</sub> a<sub>1</sub> b<sub>1</sub>))  
 ... | tri< x<y \_ \_ | (orA ab) = orB  
 (nd x (le (base x<y)) (lemma-<=minE j i) (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d) ab)  
 ... | tri< x<y \_ \_ | (orB ab) = orB  
 (nr x (le (base x<y)) (lemma-<=minE j i) (nf y i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> c d) ab)  
 ... | tri= \_ x=y \_ | (orA ab) = orB  
 (nd y (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (eq (base (sym== x=y)))) (lemma-resp x=y j i)  
 (makeH x c d) ab)  
 ... | tri= \_ x=y \_ | (orB ab) = orB  
 (nr y (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (eq (base (sym== x=y)))) (lemma-resp x=y j i)  
 (makeH x c d) ab)  
 ... | tri> \_ \_ y<x | (orA ab) = orB  
 (nd y (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (le (base y<x))) (lemma-trans y<x j i)  
 (makeH x c d) ab)  
 ... | tri> \_ \_ y<x | (orB ab) = orB  
 (nr y (lemma-<=min3E i<sub>3</sub> j<sub>3</sub> (le (base y<x))) (lemma-trans y<x j i)  
 (makeH x c d) ab)

```

afmerge (nr x i j (nf p1 i1 j1 a1 b1) (nr p2 i2 j2 a2 b2)) (orB (nf y i3 j3 c d))
  with cmp x y | afmerge (nr p2 i2 j2 a2 b2) (orB (nf p1 i1 j1 a1 b1))
... | tri< x<y _ _ | (orA ab) = orB
  (nd x (le (base x<y)) (lemma-<=minE j i) (nf y i3 j3 c d) ab)
... | tri< x<y _ _ | (orB ab) = orB
  (nr x (le (base x<y)) (lemma-<=minE j i) (nf y i3 j3 c d) ab)
... | tri= _ x=y _ _ | (orA ab) = orB
  (nd y (lemma-<=min3E i3 j3 (eq (base (sym== x=y))))
  (lemma-resp x=y j i) (makeH x c d) ab)
... | tri= _ x=y _ _ | (orB ab) = orB
  (nr y (lemma-<=min3E i3 j3 (eq (base (sym== x=y))))
  (lemma-resp x=y j i) (makeH x c d) ab)
... | tri> _ _ y<x | (orA ab) = orB
  (nd y (lemma-<=min3E i3 j3 (le (base y<x)))
  (lemma-trans y<x j i) (makeH x c d) ab)
... | tri> _ _ y<x | (orB ab) = orB
  (nr y (lemma-<=min3E i3 j3 (le (base y<x)))
  (lemma-trans y<x j i) (makeH x c d) ab)

```

Извлечение минимума из неполной кучи.

```

apop : ∀ {m h} → Heap m (succ h) almost
  → OR (Σ (expanded A) (λ x → (Heap x (succ h) almost) × (m ≤ x)))
  (Σ (expanded A) (λ x → (Heap x h full) × (m ≤ x)))

```

```

apop (nd {x = x} p i j a eh) = orB (x , a , i)
apop (nd _ i j (nf x i1 j1 a b) (nf y i2 j2 c d))
  with cmp x y | ndmerge (nf x i1 j1 a b) (nf y i2 j2 c d)
... | tri< _ _ _ | res = orA (# x , res , i)
... | tri= _ _ _ | res = orA (# y , res , j)
... | tri> _ _ _ | res = orA (# y , res , j)

```

```

apop (nl _ i j (nd x il jl (nf y _ _ eh eh) eh) (nf z _ _ eh eh))
  with cmp x z
... | tri< x<z _ _ = orB (# x , nf x il (le (base x<z))
  (nf y (le ext) (le ext) eh eh) (nf z (le ext) (le ext) eh eh) , i)
... | tri= _ x=z _ _ = orB (# z ,
  nf z (eq (base (sym== x=z))) (snd resp≤ (base x=z) il)
  (nf x (le ext) (le ext) eh eh) (nf y (le ext) (le ext) eh eh) , j)
... | tri> _ _ z<x = orB (# z , nf z
  (le (base z<x)) (trans≤ (le (base z<x)) il)
  (nf x (le ext) (le ext) eh eh) (nf y (le ext) (le ext) eh eh) , j)

apop (nl _ i j (nd x il jl (nf y i2 j2 a2 b2) (nf z i3 j3 a3 b3)) (nf t i4 j4 c d))
  with cmp x t | ndmerge (nf y i2 j2 a2 b2) (nf z i3 j3 a3 b3)
... | tri< x<t _ _ | res = orA (# x , nl x
  (lemma-<=minE il jl) (le (base x<t))
  res (nf t i4 j4 c d) , i)
... | tri= _ x=t _ _ | res = orA (# t , nl t
  (snd resp≤ (base x=t) (lemma-<=minE il jl))
  (lemma-<=min3E i4 j4 (eq (base (sym== x=t)))) res (makeH x c d) , j)
... | tri> _ _ t<x | res = orA (# t , nl t
  (lemma-trans t<x il jl)
  (lemma-<=min3E i4 j4 (le (base t<x)))) res (makeH x c d) , j)

apop (nl _ i j (nl x il jl a b) (nf y i2 j2 c d))
  with cmp x y | afmerge (nl x il jl a b) (orA (nf y i2 j2 c d))
... | tri< _ _ _ | orA res = orB (# x , res , i)
... | tri= _ _ _ | orA res = orB (# y , res , j)
... | tri> _ _ _ | orA res = orB (# y , res , j)
... | tri< _ _ _ | orB res = orA (# x , res , i)
... | tri= _ _ _ | orB res = orA (# y , res , j)

```

```

... | tri> _ _ _ | orB res = orA (# y , res , j)
apop (nl _ i j (nr x i1 j1 a b) (nf y i2 j2 c d))
  with cmp x y | afmerge (nr x i1 j1 a b) (orA (nf y i2 j2 c d))
... | tri< _ _ _ | orA res = orB (# x , res , i)
... | tri= _ _ _ | orA res = orB (# y , res , j)
... | tri> _ _ _ | orA res = orB (# y , res , j)
... | tri< _ _ _ | orB res = orA (# x , res , i)
... | tri= _ _ _ | orB res = orA (# y , res , j)
... | tri> _ _ _ | orB res = orA (# y , res , j)
apop (nr _ i j (nf x i1 j1 a b) (nd y i2 j2 c d))
  with cmp y x | afmerge (nd y i2 j2 c d) (orB (nf x i1 j1 a b))
... | tri< _ _ _ | orA res = orB (# y , res , j)
... | tri= _ _ _ | orA res = orB (# x , res , i)
... | tri> _ _ _ | orA res = orB (# x , res , i)
... | tri< _ _ _ | orB res = orA (# y , res , j)
... | tri= _ _ _ | orB res = orA (# x , res , i)
... | tri> _ _ _ | orB res = orA (# x , res , i)
apop (nr _ i j (nf x i1 j1 a b) (nl y i2 j2 c d))
  with cmp y x | afmerge (nl y i2 j2 c d) (orB (nf x i1 j1 a b))
... | tri< _ _ _ | orA res = orB (# y , res , j)
... | tri= _ _ _ | orA res = orB (# x , res , i)
... | tri> _ _ _ | orA res = orB (# x , res , i)
... | tri< _ _ _ | orB res = orA (# y , res , j)
... | tri= _ _ _ | orB res = orA (# x , res , i)
... | tri> _ _ _ | orB res = orA (# x , res , i)
apop (nr _ i j (nf x i1 j1 a b) (nr y i2 j2 c d))
  with cmp y x | afmerge (nr y i2 j2 c d) (orB (nf x i1 j1 a b))
... | tri< _ _ _ | orA res = orB (# y , res , j)
... | tri= _ _ _ | orA res = orB (# x , res , i)
... | tri> _ _ _ | orA res = orB (# x , res , i)

```

```

... | tri< _ _ _ | orB res = orA (# y , res , j)
... | tri= _ _ _ | orB res = orA (# x , res , i)
... | tri> _ _ _ | orB res = orA (# x , res , i)

```

## 2.5. Выводы по главе 2

Разработаны типы данных для представления структуры данных двоичная куча. Реализованы функции для обработки кучи. Доказано сохранение инвариантов порядка на элементах и сбалансированности.

# Заключение

Представленный в данной работе подход к представлению инвариантов — по одному конструктору на каждый случай инварианта — приводит к неприятному разрастанию функций по обработке структуры данных. Но данный подход позволил написать простые доказательства с помощью интерактивного редактора, использующего систему типов для указания типа требуемого терма. Хотелось бы уметь обобщать такие представления инвариантов для упрощения доказательств и уменьшения объема кода.

## Литература

1. *Thompson S.* Type theory and functional programming. International computer science series. Addison-Wesley, 1991. С. I—XV, 1—372. ISBN: 978-0-201-41667-1.
2. *Sørensen M. H. B., Urzyczyn P.* Lectures on the Curry-Howard Isomorphism. 1998.
3. *Church A.* A Formulation of the Simple Theory of Types // J. Symb. Log. 1940. №2. С. 56—68.
4. *Martin-Löf P.* Intuitionistic Type Theory. Bibliopolis, 1984. ISBN: 88-7088-105-9.
5. The Haskell Programming Language. <http://www.haskell.org/haskellwiki/Haskell>.
6. A Truly Integrated Functional Logic Language. <http://www-ps.informatik.uni-kiel.de/currywiki/>.
7. Agda language. <http://wiki.portal.chalmers.se/agda/pmwiki.php>.
8. *IEEE.* IEEE Std 1178-1990, IEEE Standard for the Scheme Programming Language. IEEE, 1991. ISBN: 1-55937-125-0. [http://standards.ieee.org/reading/ieee/std\\_public/description/busarch/1178-1990\\_desc.html](http://standards.ieee.org/reading/ieee/std_public/description/busarch/1178-1990_desc.html).
9. *Hickey R.* The Clojure programming language / DLS. Под ред. Johan Brichau. ACM, 2008. С. 1. ISBN: 978-1-60558-270-2.
10. *Abelson H., Sussman G. J.* Structure and Interpretation of Computer Programs. MIT Press, 1985. ISBN: 0-262-51036-7.
11. *Milner R., Tofte M., Macqueen D.* The Definition of Standard ML. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1997. ISBN: 0262631814.
12. OCaml. <http://ocaml.org/>.
13. *Dybjer P.* Inductive Families // Formal Asp. Comput. 1994. №4. С. 440—465.
14. *Atkey R., Johann P., Ghani N.* Refining Inductive Types // Logical Methods in Computer Science. 2012. №2.
15. *Xi H., Pfenning F.* Dependent Types in Practical Programming / POPL. Под ред. Andrew W. Appel и Alex Aiken. ACM, 1999. С. 214—227. ISBN: 1-58113-095-3.
16. *McBride C.* How to Keep Your Neighbours in Order. <https://personal.cis.strath.ac.uk/conor.mcbride/Pivotal.pdf>.
17. *McBride C., Norell U., Danielsson N. A.* The Agda standard library — AVL trees. <http://agda.github.io/agda-stdlib/html/Data.AVL.html>.
18. *Cormen T. H., Leiserson C. E., Rivest R. L., Stein C.* Introduction to Algorithms, Second Edition. The MIT Press и McGraw-Hill Book Company, 2001. ISBN: 0-262-03293-7, 0-07-013151-1.
19. The Agda standard library. <http://agda.github.io/agda-stdlib/html/README.html>.