

Пересечение множества отрезков, алгоритм Бентли-Оттмана

Андрей Шулаев

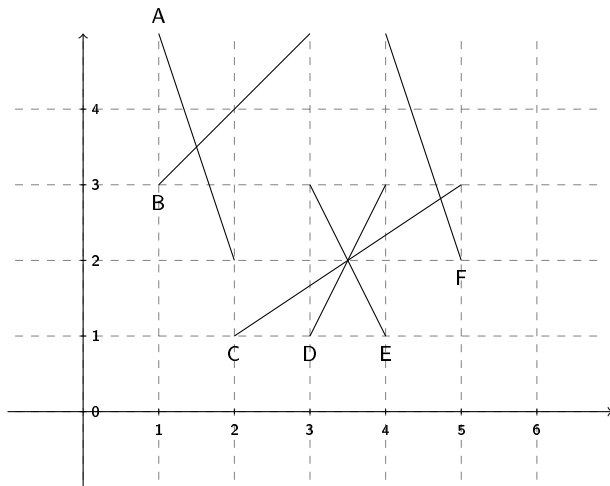
Национальный исследовательский университет ИТ, механики и оптики

Постановка задачи

Задача

Дано множество отрезков на плоскости, заданных координатами концов. Требуется найти все подмножества отрезков, которые пересекаются в одной точке.

Пример результата



Пересечения отрезков в примере: $\{\{A, B\}, \{C, D, E\}, \{C, F\}\}$

Идея алгоритма

- Сканирующая прямая

Идея алгоритма

- Сканирующая прямая
- Три типа событий:
 - Начало отрезка
 - Конец отрезка
 - Пересечение множества отрезков

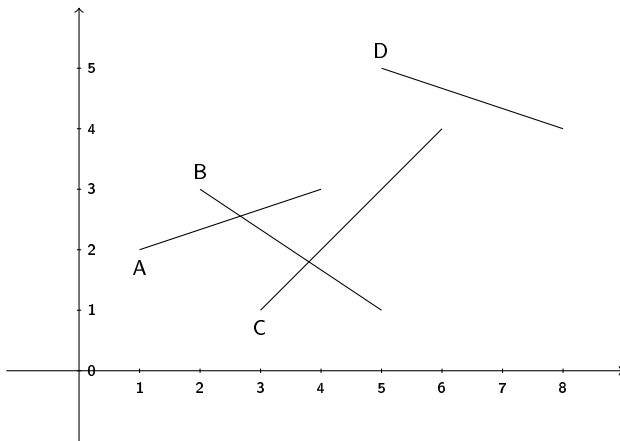
Идея алгоритма

- Сканирующая прямая
- Три типа событий:
 - Начало отрезка
 - Конец отрезка
 - Пересечение множества отрезков
- События обрабатываются по увеличению абсциссы

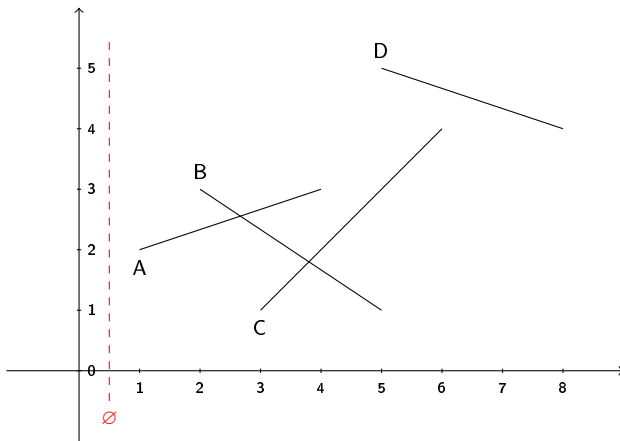
Идея алгоритма

- Сканирующая прямая
- Три типа событий:
 - Начало отрезка
 - Конец отрезка
 - Пересечение множества отрезков
- События обрабатываются по увеличению абсциссы
- В каждый момент времени поддерживается *статус*: множество отрезков, которые пересекает сканирующая прямая, упорядоченное по ординате точки пересечения

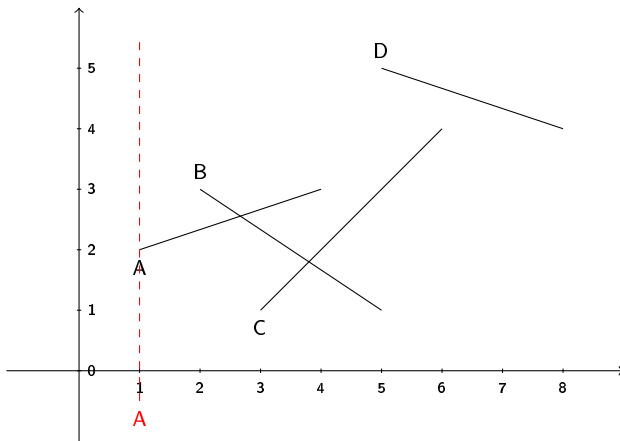
Пример работы



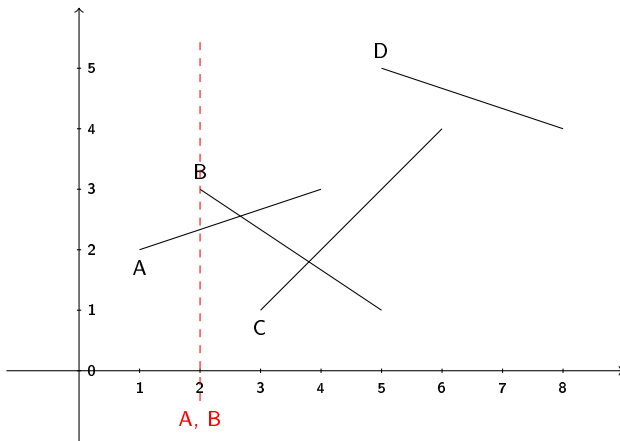
Пример работы



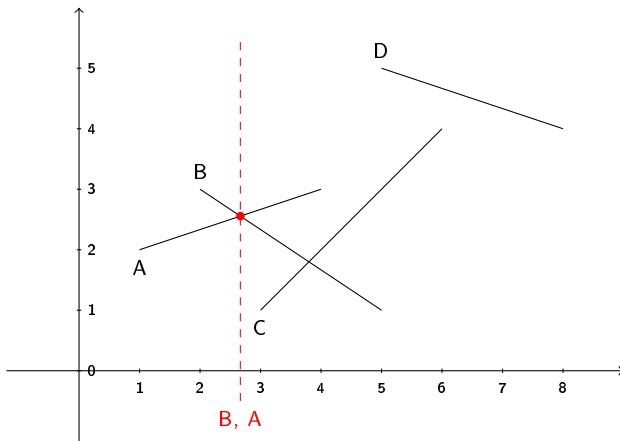
Пример работы



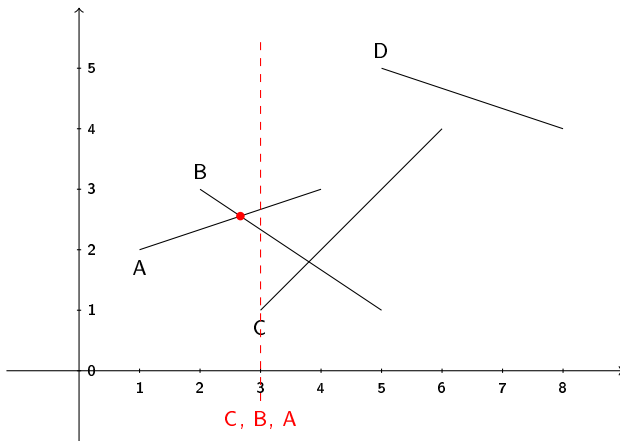
Пример работы



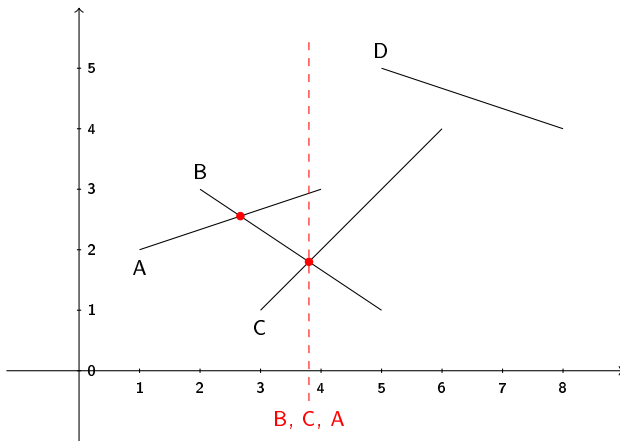
Пример работы



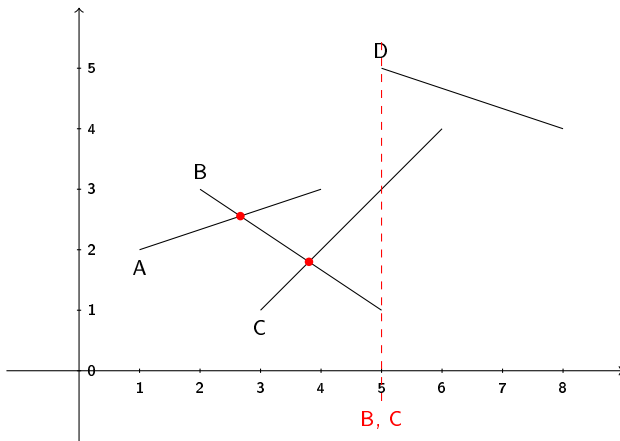
Пример работы



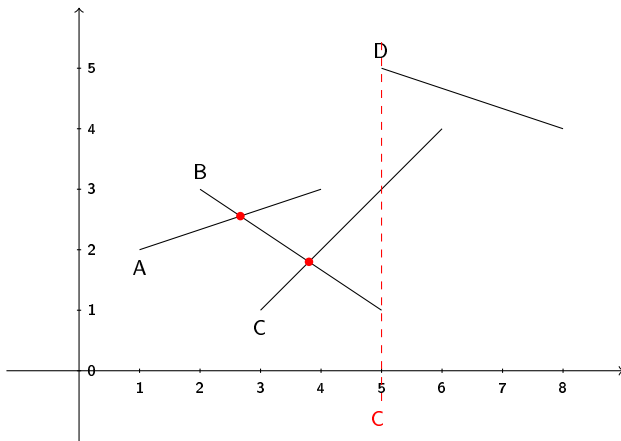
Пример работы



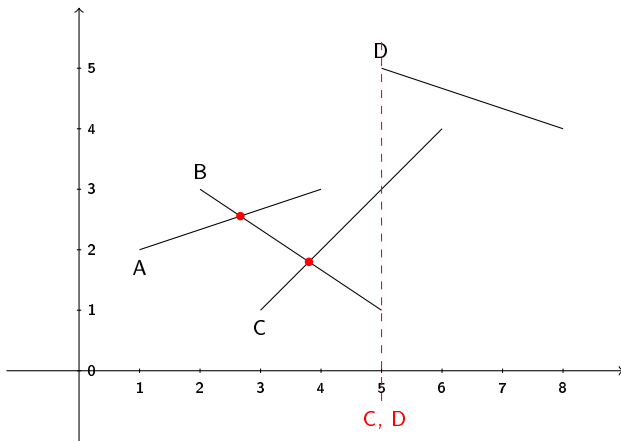
Пример работы



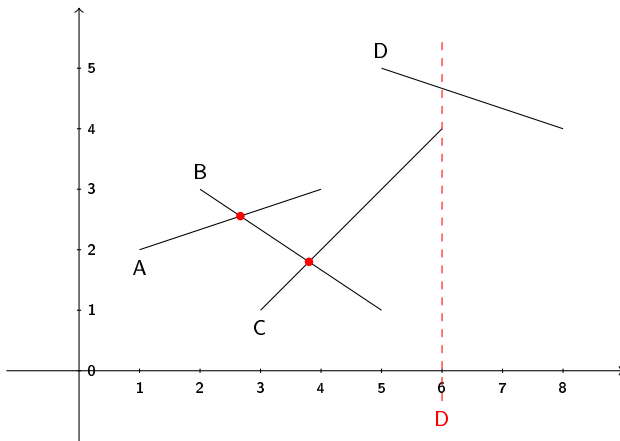
Пример работы



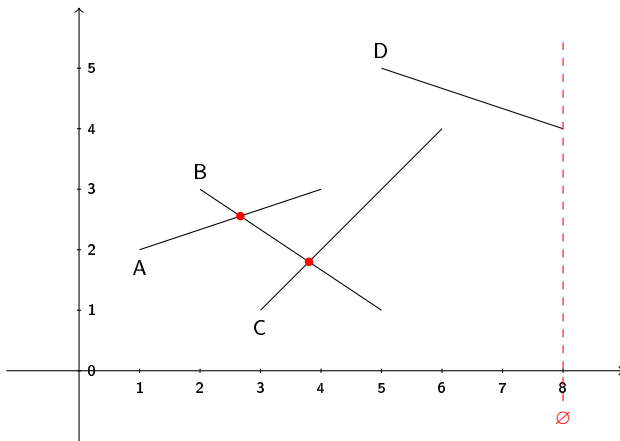
Пример работы



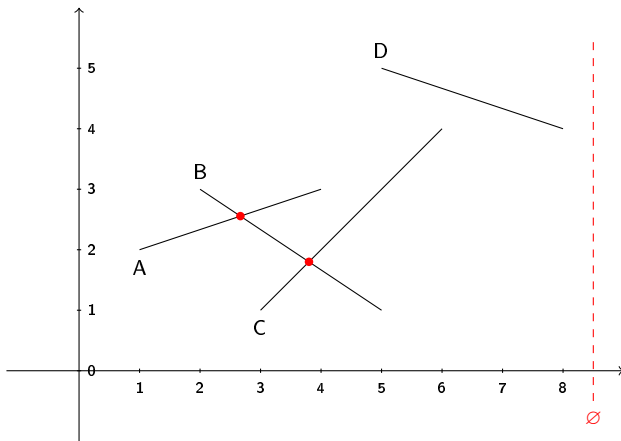
Пример работы



Пример работы



Пример работы



- Статус требует поддержания следующих операций:
 - Вставка в произвольную позицию
 - Переворот подотрезка

- Статус требует поддержания следующих операций:
 - Вставка в произвольную позицию
 - Переворот подотрезка
- Как реализовать?

- Статус требует поддержания следующих операций:
 - Вставка в произвольную позицию
 - Переворот подотрезка
- Как реализовать?
 - Просто: список, операции за $O(n)$
 - Быстро: декартово дерево по неявному ключу, операции за $O(\log n)$

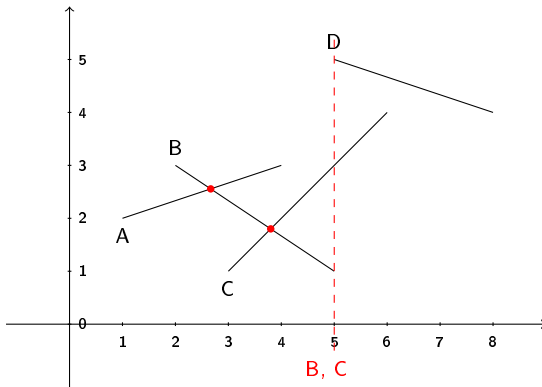
Проблемы и решения

Проблемы и решения

- Проблема вертикальных отрезков и наличия более одного события разрешается обработкой событий на текущей абсциссе в порядке увеличения ординаты

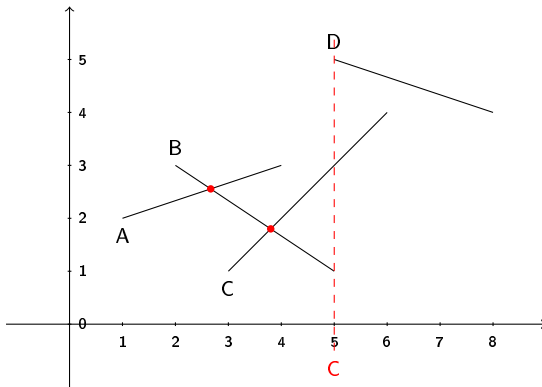
Проблемы и решения

- Проблема вертикальных отрезков и наличия более одного события разрешается обработкой событий на текущей абсциссе в порядке увеличения ординаты



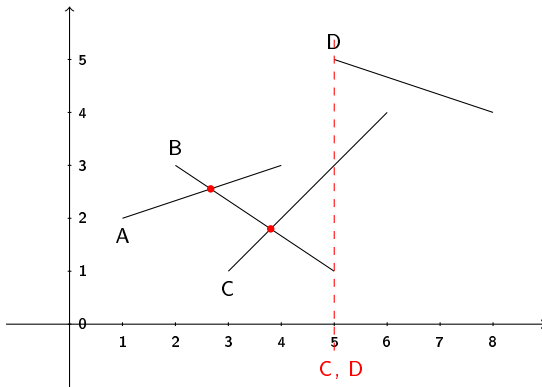
Проблемы и решения

- Проблема вертикальных отрезков и наличия более одного события разрешается обработкой событий на текущей абсциссе в порядке увеличения ординаты



Проблемы и решения

- Проблема вертикальных отрезков и наличия более одного события разрешается обработкой событий на текущей абсциссе в порядке увеличения ординаты

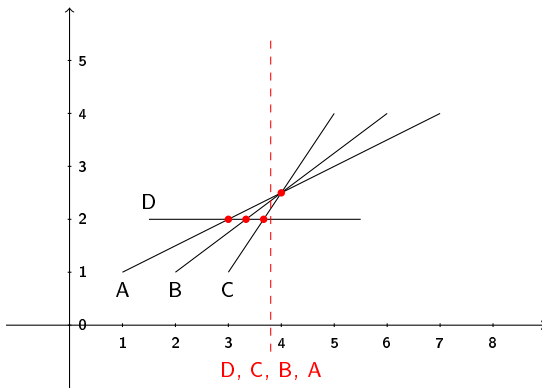


Проблемы и решения

- Если в точке пересекается множество отрезков, то они идут подряд в статусе и после точки соответствующий отрезок надо инвертировать

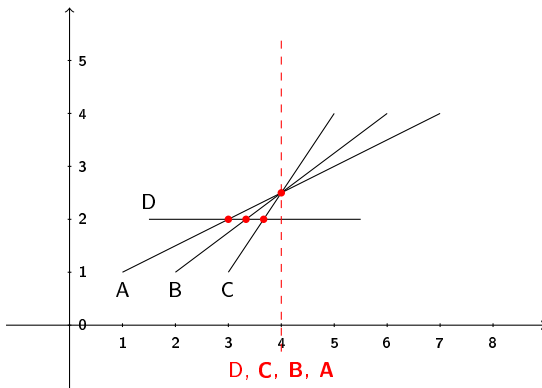
Проблемы и решения

- Если в точке пересекается множество отрезков, то они идут подряд в статусе и после точки соответствующий отрезок надо инвертировать



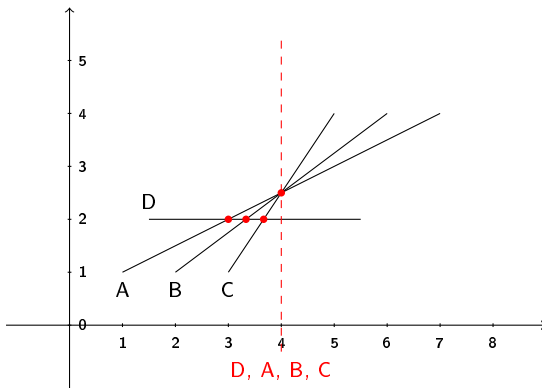
Проблемы и решения

- Если в точке пересекается множество отрезков, то они идут подряд в статусе и после точки соответствующий отрезок надо инвертировать



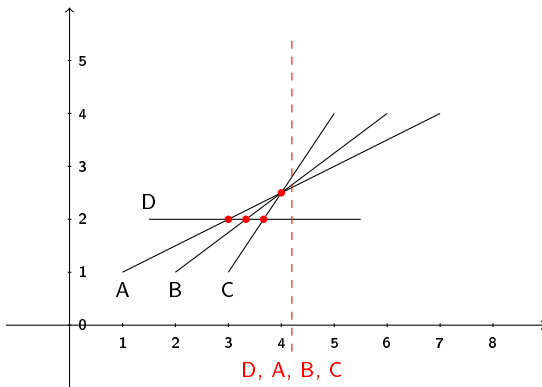
Проблемы и решения

- Если в точке пересекается множество отрезков, то они идут подряд в статусе и после точки соответствующий отрезок надо инвертировать



Проблемы и решения

- Если в точке пересекается множество отрезков, то они идут подряд в статусе и после точки соответствующий отрезок надо инвертировать



Оценки времени работы и используемой памяти

- Упорядочение событий — $O(n \log n)$ времени, $O(n)$ памяти
- Хранение статуса — $O(n \log n)$ времени, $O(n)$ памяти
- Вывод ответа — $O(k)$ времени (k — размер ответа).

- Кормен, Лейзерсон, Ривест, Штайн. «Алгоритмы: построение и анализ», раздел «Вычислительная геометрия».
- Bentley, Ottman. «Algorithms for Reporting and Counting Geometric Intersections».
- Препарата, Шеймос. «Вычислительная геометрия: введение».

Вопросы?