Группа 5539. Демьянюк Виталий. Кравцов Никита. Рыбак Андрей.

Университет ИТМО

Взаимная информация

$$I(X) = \sum_{i=1}^{d} H(X_i) - H(X_1, \dots, X_d)$$

$I(X_1, \dots, X_d) = 0 \iff$ independence

Энтропия

$$H(X_1 \dots X_d) =$$

$$-\int f(x_1 \dots x_d) \log f(x_1 \dots x_d) dx_1 \dots dx_d$$

Информация Реньи

$$I_\alpha(X_1 \dots X_d) = D_\alpha\left(f(x_1 \dots x_d) || \prod_{i=1}^{d} f(x_i)\right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \log \int \left(\frac{\prod_{i=1}^{d} f(x_i)}{f(x_1 \dots x_d)}\right)^\alpha f(x_1 \dots x_d) dx_1 \dots dx_d$$

Энтропия Реньи

$$H_\alpha(X_1 \dots X_d) = \frac{1}{1-\alpha} \log \int f^\alpha(x_1 \dots x_d) dx_1 \dots dx_d$$

$$\lim_{\alpha \to 1} I_\alpha = I \quad \lim_{\alpha \to 1} H_\alpha = H$$

Пусть $\mathbf{Z} = (Z_1 \dots Z_d) = (g_1(X_1) \dots g_d(X_d)) = g(\mathbf{X})$, где $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1 \dots d$ — монотонная функция

Информация сохраняется после монотонных преобразований:

$$I_\alpha(\mathbf{Z}) = \int_Z \left(\frac{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\prod_{j=1}^d f_{Z_j}(z_j)} \right)^\alpha \left(\prod_{j=1}^{d} f_{Z_j}(z_j) \right) d\mathbf{z} = I_\alpha(\mathbf{X})$$

$$Z_j \sim \mathbf{U}[0,1] \implies I_\alpha(\mathbf{Z}) = -H_\alpha(\mathbf{Z})$$

Копульное преобразование

$$\mathbf{X} = [X_1 \dots X_d] \to [F_1(X_1) \dots F_d(X_d)] = [Z_1 \dots Z_d] = \mathbf{Z}$$

$$\implies I_\alpha(\mathbf{X}) = I_\alpha(\mathbf{Z}) = -H_\alpha(\mathbf{Z})$$

Свели задачу нахождения взаимной информации к задаче нахождения энтропии Реньи.

Но F_i — неизвестны.

Копульное преобразование

$$\mathbf{X} = [X_1 \ldots X_d] \to [F_1(X_1) \ldots F_d(X_d)] = [Z_1 \ldots Z_d] = \mathbf{Z}$$

$$\implies I_\alpha(\mathbf{X}) = I_\alpha(\mathbf{Z}) = -H_\alpha(\mathbf{Z})$$

Свели задачу нахождения взаимной информации к задаче нахождения энтропии Реньи.

Но F_i — неизвестны.

Решение: использовать эмпирические F_j^n и эмпирическое копульное преобразование.

Эмпирическое копульное преобразование

$$\mathbf{X} = [X_1 \dots X_d] \to [F_1(X_1) \dots F_d(X_d)] = [Z_1 \dots Z_d] = \mathbf{Z}$$

Приблизим $F_1 \dots F_d$

$$[X_j^{(1)} \leq \dots \leq X_j^{(n)}] = sort\{X_j^1 \dots X_j^n\}$$

Входные данные