Группа 5539. Демьянюк Виталий. Кравцов Никита. Рыбак Андрей.

Университет ИТМО

Определения

Взаимная информация

$$I(X) = \sum_{i=1}^{d} H(X_i) - H(X_1, \ldots, X_d)$$

Энтропия

$$H(X_1 \ldots X_d) =$$

$$-\int f(x_1 \ldots x_d) \log f(x_1 \ldots x_d) dx_1 \ldots dx_d$$

Определения

Информация Реньи

$$I_\alpha(X_1 \dots X_d) = D_\alpha \left(f(x_1 \dots x_d) || \prod_{i=1}^{d} f(x_i) \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \log \int \left(\frac{\prod_{i=1}^{d} f(x_i)}{f(x_1 \dots x_d)} \right)^{\alpha} f(x_1 \dots x_d) dx_1 \dots dx_d$$

Энтропия Реньи

$$H_\alpha(X_1 \dots X_d) = \frac{1}{1-\alpha} \log \int f^\alpha(x_1 \dots x_d) dx_1 \dots dx_d$$

$$\lim_{\alpha \to 1} I_\alpha = I \qquad \lim_{\alpha \to 1} H_\alpha = H$$

Определения

Пусть V — множество точек в $\mathbb{R}^w$.

$NN_S(V)$ — множество пар ближайжих соседей. S — множество индексов.

$$L_p(V) = \sum_{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in NN_S(V)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^p$$

Пусть $X = X_1 \ldots X_n$ — выборка из $[0,1]^d$. $\exists \gamma :$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{L_p(\mathbf{X})}{n^{1-p/d}} = \gamma$$

Оценка взаимной информации с помощью копульного преобразования.

Пусть $\mathbf{X}$ — выборка по $\mathbb{R}^d$ из распределения с плотностью f. Оцениваем $H_\alpha(\mathbf{X})$ $(\alpha \in (0,1))$:

$$\widehat{H}_\alpha(\mathbf{X}) = \frac{1}{1-\alpha} \log \frac{L_p(\mathbf{X})}{\gamma n^{1-p/d}}$$

, где $p = d(1-\alpha)$

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{H}_\alpha(\mathbf{X}) = H_\alpha(f)$$

Взаимная информация сохраняется после монотонных преобразований:

Пусть $\mathbf{Z} = (Z_1 \dots Z_d) = (g_1(X_1) \dots g_d(X_d)) = g(\mathbf{X})$, где $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j = 1 \dots d$ — монотонная функция

$$I_\alpha(\mathbf{Z}) = \int_Z \left(\frac{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})}{\prod_{j=1}^d f_{Z_j}(z_j)} \right)^\alpha \left(\prod_{j=1}^d f_{Z_j}(z_j) \right) d\mathbf{z} = I_\alpha(\mathbf{X})$$

$$Z_j \sim \mathbf{U}[0,1] \implies I_\alpha(\mathbf{Z}) = -H_\alpha(\mathbf{Z})$$

Копульное преобразование

$$\mathbf{X} = [X_1 \dots X_d] \to [F_1(X_1) \dots F_d(X_d)] = [Z_1 \dots Z_d] = \mathbf{Z}$$

$$\implies I_\alpha(\mathbf{X}) = I_\alpha(\mathbf{Z}) = -H_\alpha(\mathbf{Z})$$

Свели задачу нахождения взаимной информации к задаче нахождения энтропии Реньи.

Но F_i — неизвестны.

Копульное преобразование

$$\mathbf{X} = [X_1 \dots X_d] \to [F_1(X_1) \dots F_d(X_d)] = [Z_1 \dots Z_d] = \mathbf{Z}$$

$$\implies I_\alpha(\mathbf{X}) = I_\alpha(\mathbf{Z}) = -H_\alpha(\mathbf{Z})$$

Свели задачу нахождения взаимной информации к задаче нахождения энтропии Реньи.

Но F_i — неизвестны.

Решение: использовать эмпирические $\widehat{F}_j$ и эмпирическое копульное преобразование.

Эмпирическое копульное преобразование

$$\widehat{F}_j(x) = \frac{1}{n}|\{i : 1 \leq i \leq n, x \leq X_i^j\}|$$

Эмпирическая копула:

$$(\widehat{\mathbf{Z}}_1 \dots \widehat{\mathbf{Z}}_n) = (\widehat{F}(X_1) \dots \widehat{F}(X_n))$$

Задача

Есть три изображения. 

Генерируем выборку размером n: берем n троек случайных черных точек из 1го, 2го и 3го изображения.

Получили матрицу $[6 \times n]$.

Умножаем на случайную матрицу $[6 \times 6]$.

Получаем $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 \ldots \mathbf{X}_n)$

Задача: зная только $\mathbf{X}$, восстановить исходные изображения.

Первое решение:

- $Y = WX$
- Найдем такое W, что $I(Y_1, Y_2, Y_3)$ — максимально

Первое решение:

- $Y = WX$
- Найдем такое W, что $I(Y_1, Y_2, Y_3)$ — максимально

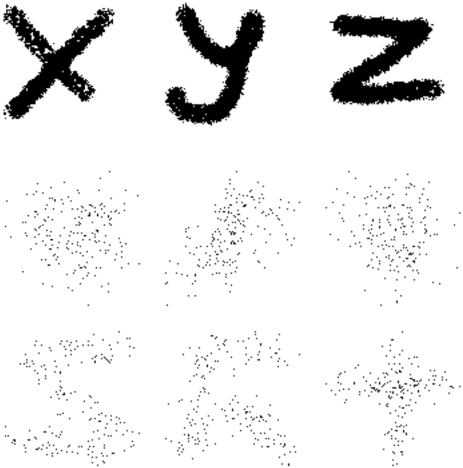
Проблемы: требует двумерное копульное преобразование, медленная оптимизация.

Второе решение:

- Найдем W_{ICA} с помощью FastICA
- $\widehat{Y} = W_{ICA}X$
- Найти перестановку строк $\widehat{Y}$, из которой можно получить исходные изображения.
- $\underset{j_1 \dots j_6}{argmax}\, I(Y_{j_1}, Y_{j_2}) + I(Y_{j_3}, Y_{j_4}) + I(Y_{j_5}, Y_{j_6})$
- Используем $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha = 0.99$.

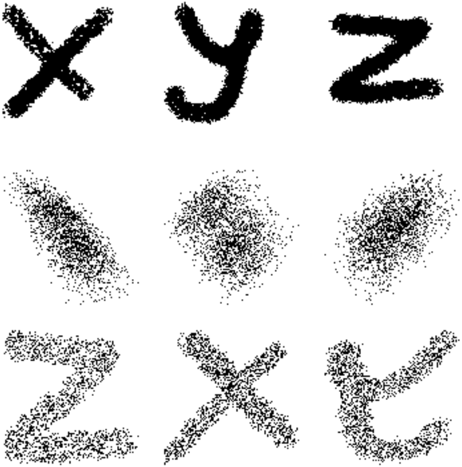
Результат

$n = 200$



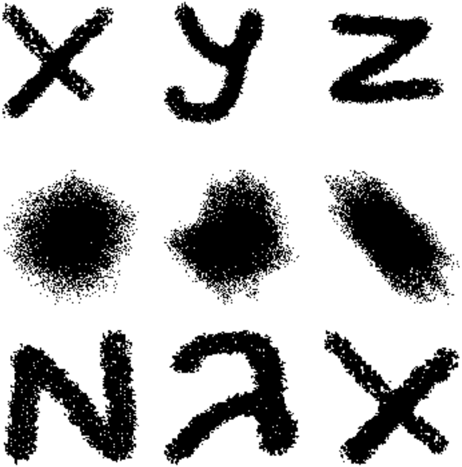
Результат

$n = 2000$



Результат

$n = 20000$



Статья:

Dávid Pál, Barnabás Póczos, Csaba Szepesvári:
Estimation of Renyi Entropy and Mutual Information Based on Generalized Nearest-Neighbor Graphs

http://david.palenica.com/papers/nn/Renyi-rates-NIPS-camera-ready-final.pdf