Комбинаторика представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$

Лаборатория Зеркальной Симметрии и Автоморфных Форм

Рыбин Дмитрий

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

26.11.2020

Введение и Мотивация

Я изучаю дополнительную градуировку на характерах классической алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$, имеющую два определения - комбинаторное, через FFLV многогранник, и алгебраическое, через PBW фильтрацию. Эта градуировка определяет q-деформацию характера и многие стат-суммы.
О связи данной деформации с темами Математической Физики неизвестно, но имеется ряд общих свойств с такими объектами, как многогранник Люстига и супер-многочлены из квантовых инвариантов узлов.

Основные определения, PBW теорема

Пусть $\mathfrak{g}$– алгебра Ли над полем k, и $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ её универсальная обёртывающая алгебра.
По Теореме Пуанкаре–Бирхгофа–Витта $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ имеет фильтрацию

$$\mathrm{F}^0\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{F}^1\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{F}^2\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \subset \ldots,$$

причём подпространство $\mathrm{F}^s\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ определяется как

$$\mathrm{F}^s\mathrm{U}(\mathfrak{g}) = \mathrm{span}\left(\prod_{i=1}^{k} x_i \,|\, x_i \in \mathfrak{g}, 0 \leq k \leq s\right).$$

И имеет место изоморфизм

$$\mathrm{gr}\,\mathrm{U}(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g}).$$

Основные определения, PBW фильтрация

Данную фильтрацию можно "спустить" на представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а именно:
Пусть теперь $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Тогда все конечномерные неприводимые представления являются циклическими, классифицируются старшим весом $\lambda = \sum \lambda_i \omega_i$ и имеют описание вида

$$V(\lambda) = (\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_n) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}_\lambda)/M,$$

где $\mathbb{C}_\lambda$ является единственным одномерным представлением алгебры Ли верхнетреугольных матриц $\mathfrak{b}^+$, с действием каждого простого корня α_i посредством умножения на λ_i, а M максимальный собственный подмодуль.
Фильтрация $\mathrm{F}^s V(\lambda)$ приходит из фильтрации на $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_n)$.

Основные определения, q-размерность

Строго говоря, получающаяся фильтрация зависит от выбора $\mathfrak{b}^+$, но размерности присоединённых градуированных пространств не зависят. Это легко доказать, но далее будет явно видно из необходимого нам описания через *FFLV* многогранник.

Определение

Для неприводимого представления $V(\lambda)$ q-размерность это

$$\dim_q V(\lambda) = \sum_s \dim \mathrm{F}^s V(\lambda)/\mathrm{F}^{s-1} V(\lambda) \cdot q^s.$$

Пример

В случае $\mathfrak{sl}_2$ имеем

$$\dim_q V(\lambda_1\omega_1) = 1 + q + q^2 + ... + q^{\lambda_1}.$$

Основные определения, q-характер

Определение

Для неприводимого представления $V(\lambda)$ q-характер это

$$\mathrm{ch}_q V(\lambda) = \sum_{\mu} \dim_q V(\lambda)^{\mu} \cdot e^{\mu},$$

где $V(\lambda)^{\mu}$ это весовое подпространство.

Пример

В случае $\mathfrak{sl}_2$ имеем

$$\mathrm{ch}_q V(\lambda_1\omega_1) = e^{\lambda_1\omega_1} + qe^{(\lambda_1-2)\omega_1} + \ldots + q^{\lambda_1} e^{-\lambda_1\omega_1}.$$

Основные определения, конструкция $FFLV(\lambda)$

В работе [1] доказано существование выпуклого многогранника $FFLV(\lambda)$, целые точки которого имеют явную биекцию с базисом неприводимого представления $V(\lambda)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$.
Для $\mathfrak{sl}_n$ имеется $n-1$ фундаментальных весов.
Пусть $\lambda = \sum \lambda_i \omega_i$, определим $FFLV(\lambda)$ как многогранник в $\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ с координатами $x_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n-1$, и неравенствами:

$$x_{ij} \geq 0 \, \forall x_{ij},$$

$$\sum_{ij \in p} x_{ij} \leq \lambda_i + \lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_j,$$

$$\forall p - \text{путь Дика из } x_{ii} \text{ в } x_{jj}.$$

[1] Evgeny Feigin, Ghislain Fourier, Peter Littelmann, *PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n*, https://arxiv.org/abs/1002.0674

Основные определения, конструкция $FFLV(\lambda)$

Пример

Пусть $n = 6$, тогда фундаментальных весов 5, и на рисунке приведён пример пути Дика из x_{22} в x_{55}, и соответствующее ему неравенство.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & x_{15} & & & & \\
 & & & x_{14} & & x_{25} & & & \\
 & & x_{13} & & x_{24} & & x_{35} & & \\
 & x_{12} & & x_{23} & & x_{34} & & x_{45} & \\
x_{11} & & x_{22} & & x_{33} & & x_{44} & & x_{55} \\
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & \lambda_4 & & \lambda_5
\end{array}$$

$$x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{45} + x_{55} \leq \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$$

Основные определения, биекция с базисом

Для данной целой точки $\mathbf{s} = (s_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n-1}$ внутри многогранника $FFLV(\lambda)$, соответсвующий базисный вектор $V(\lambda)$ это

$$v_{\mathbf{s}} = \prod_{i<j} f_{i,j}^{s_{ij}} v_\lambda,$$

где $v_\lambda = 1 \otimes v \in (\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_n) \otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{b}_+)} \mathbb{C}_\lambda)/M$, а $f_{i,j}$ это матричная единица в j-ой строке i-го столбца. PBW градуировка $v_{\mathbf{s}}$ равняется $\sum s_{ij}$, (то есть сумма координат).

Как следствие, $\dim_q V(\lambda)$ это производящая функция числа целых точек в $FFLV(\lambda)$ с фиксированной суммой координат.

Замечание

Комбинаторика многогранника $FFLV(\lambda)$ связана с комбинаторикой многогранника $GZ(\lambda)$, но эквивалентны они (т.е. имеют одинаковое кол-во гиперрёбер и их инцидентность) лишь для $n = 2, 3$.

Представления со старшим весом $\lambda_i \omega_i$

Пример

Пусть $n = 6$, и $\lambda = \lambda_3 \omega_3$. Тогда достаточно оставить неравенства соответствующие путям из x_{13} в x_{35} (т.е. между противоположными вершинами прямоугольника).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & x_{15} & & & & \\
 & & & x_{14} & & x_{25} & & & \\
 & & x_{13} & & x_{24} & & x_{35} & & \\
 & 0 & & x_{23} & & x_{34} & & 0 & \\
0 & & 0 & & x_{33} & & 0 & & 0
\end{array}
$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{34} + x_{35} \leq \lambda_3$$

q-размерность представлений старшего веса $\lambda_i\omega_i$

Теорема

Пусть ω_i один из фундаментальных весов $\mathfrak{sl}_n$, тогда:

$$\dim_q(V(\lambda_i \cdot \omega_i)) = s_\mu(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{i}, \underbrace{q, ..., q}_{n-i}),$$

где μ диаграмма Юнга из i строк длины λ_i, и s_μ многочлен Шура.

Рассмотрим присоединённое действие GL_n на $\mathfrak{sl}_n$, которое продолжается на $V(\lambda_i\omega_i)$. Действуя на всё представление элементом $\mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{i}, \underbrace{q, ..., q}_{n-i})$ тора и взятие следа даёт:

$$s_\mu(\underbrace{1, 1, ..., 1}_{i}, \underbrace{q, ..., q}_{n-i}).$$

Завершение доказательства

Вычислим ту же величину используя базис определяемый FFLV многогранником.
Сопряжение элемента $f_{k,l}$ с $l \geq i$ и $k \leq i$ даёт $q \cdot f_{k,l}$, а для остальных индексов собственное значение равняется 1. Значит $\prod_{i<j} f_{i,j}^{s_{ij}}$ умножается на $q^{\sum s_{ij}}$, действие на $\mathrm{gr}\, V(\lambda)$ диагонально и сумма собственных значений даёт q-размерность.

Замечание

Данная специализация многочленов Шура не упоминается в литературе, в отличие от распространённой главной (principal) специализации:

$$s_\mu(1, q, q^2, q^3, ..., q^{n-1}).$$

Комбинаторные следствия

Итого мы получили производящую функцию (или стат. сумму с весом $q^{\sum s_{ij}}$) для заполнений прямоугольника $i \times n - i$ целыми неотрицательными числами, у которых сумма вдоль любого пути из нижнего левого угла в правый верхний не превосходит λ_i.

Следствие

Математическое ожидание PBW градуировки для представления $V(\lambda_i \cdot \omega_i)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ равняется

$$\lambda_i \cdot \frac{i(n-i)}{n},$$

в частности оно линейно по λ_i, что неверно для старших весов другого вида.

Доказательство следствия

Доказательство.

Мат. ожидание это значение производной производящей функции в точке $q = 1$ делённое на значение самой функции в этой точке.

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(s_\mu(\underbrace{1,\dots,1}_{i},\underbrace{q,\dots,q}_{n-i})\right)\Big|_{q=1} = (n-i)\cdot s'_\mu(1,\dots,1) =$$

$$= (n-i)\cdot \frac{i\cdot\lambda_i\cdot s_\mu(1,\dots,1)}{n}$$

Где s'_μ это частная производная многочлена Шура по любой переменной, её мы вычислим из тожества Эйлера:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1,\dots,x_k) = \deg f\cdot f \Longrightarrow n\cdot s'_\mu(1,\dots,1) = i\cdot\lambda_i\cdot s_\mu(1,\dots,1).$$

$\square$

Производящие функции

Допустим мы хотим вычислить производящие функции для q-характера или q-размерности некоторого семейства неприводимых представлений.
Рассмотрим более простой вопрос — вычисление обычных производящих функций характеров и размерностей.
Строго говоря, для производящей функции характеров имеется замкнутое выражение, получающееся из формулы Вейля:

$$\mathrm{ch}\, V(\lambda) = \frac{\sum\limits_{w \in W} \mathrm{sgn}(w) \cdot e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod\limits_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})}$$

$$\sum_{\lambda} \mathrm{ch}\, V(\lambda) x^{\lambda} = \frac{1}{e^{\rho} \prod\limits_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})} \sum_{w \in W} \mathrm{sgn}(w) \sum_{\lambda} x^{\lambda} e^{w(\lambda+\rho)}$$

Но получение производящей функции для размерностей из неё (путём главной специализации) затруднено.

Размерность $V(\lambda_i\omega_i)$

Лемма

Число $\dim V(\lambda_i\omega_i) = s_\mu(\underbrace{1,\ldots,1}_{n})$*, где* μ *прямоугольник* $i \times \lambda_i$*, равняется числу трёхмерных диаграмм Юнга внутри параллелепипеда* $i \times (n-i) \times \lambda_i$*.*

Доказательство.

Видно сведение формулы для числа диаграмм внутри параллелепипеда $a \times b \times c$:

$$\mathbb{Y}_{a,b,c} = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2},$$

к формуле Вейля:

$$\dim V(c\omega_a) = \prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b} \frac{c+i+j-1}{i+j-1}.$$

Производящая функция размерности

Пусть $C(d,n)$ это множество путей на решетке $\mathbb{Z}^d$ из (0,0,...,0) в (n,n,...,n) в подмножестве $\{(x_1,...,x_d)|\, 0 \le x_1 \le x_2 \le ... \le x_d\}$. Для $p \in C(d,n)$ пара последовательных шагов на векторы e_i и e_j называется подъём (спуск) (ascent, descent) если $i < j$ ($i > j$).

Определение

Числа Нараяны размерности d, $N(d,n,k)$, — это количество путей $p \in C(d,n)$ имеющих k подъёмов.

Пример

$N(2,n,k)$ это число путей Дика длины $2n$ с $k+1$ (и каждый из k спусков расположен между последовательными подъёмов).

Определение

Многочлен Нараяны размерности d это

$$\mathcal{N}_{d,n}(z) = \sum_k N(d,n,k) z^k = \sum_{p \in C(d,n)} z^{\mathrm{asc}(p)}.$$

Производящая функция размерности

Теорема

Пусть $V(j \cdot \omega_i)$ с $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ представления $\mathfrak{sl}_n$. Тогда имеется равенство

$$\frac{\mathcal{N}_{i,n-i}(z)}{(1-z)^{i(n-i)+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} \dim V(j \cdot \omega_i) z^j.$$

Доказательство.

Шаг 1: Соответствие $p \in C(i, n-i)$ и SYT формы $i \times (n-i)$.
Шаг 2: Формула (7.96) на странице 364 Перечислительная Комбинаторика Том 2:

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_{\lambda/\mu}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{i}, 0, \ldots) z^i = \frac{\sum_T z^{\mathrm{des}(T)+1}}{(1-z)^{|\lambda/\mu|+1}}.$$

Шаг 3: (по Лемме) $s_{(b^a)}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a+c}, 0, \ldots) = s_{(c^a)}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a+b}, 0, \ldots)$. □

Ряды Гильберта

Стоит отметить, что правая часть равенства теоремы задаёт ряд Гильберта для $Gr(k, n)$, то есть производящую функцию

$$\sum_{j=0}^{\infty} \dim R_j z^j,$$

где $R = \bigoplus R_j$ - это однородное разложение координатного кольца $Gr(k, n)$.

Производящие функции q-размерности

Производящие функции q-размерности являются некоторой деформацией полученных производящих функций размерности, но не очевидной.
Для любого n легко вычислить:

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0} \mathrm{dim}_q(V(\lambda_1 \cdot \omega_1 + \lambda_{n-1} \cdot \omega_{n-1}))x^{\lambda_1} z^{\lambda_{n-1}} =$$

$$= \frac{1 - qxz}{(1-x)(1-z)(1-qx)^{n-1}(1-qz)^{n-1}}.$$

В частности, имеем полный ответ для $\mathfrak{sl}_3$.
Для $i = 2$ и $n = 5$:

$$\sum_{\lambda_2 \geq 0} \mathrm{dim}_q V(\lambda_2 \omega_2) y^{\lambda_2} = \frac{1 + 2qy - 2q^3y^2 - q^4y^3}{(1-y)(1-qy)^4(1-q^2y)^3}.$$

Производящие функции q-размерности

Для случая $\mathfrak{sl}_4$ прямым вычислением имеем:

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\geq 0} \dim_q V(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2+\lambda_3\omega_3)x^{\lambda_1}y^{\lambda_2}z^{\lambda_3} =$$

$$\frac{\begin{gathered}1+qy-qxz-2q(1+q)y(x+z)+q^2y(x^2+z^2)+\\ +q^3y^2(x^2+z^2)+q(1+3q+q^2)xyz(1+qy)-q^4xy^3z-\\ -2q^3(1+q)xy^2z(x+z)+q^4x^2y^2z^2(1+qy)\end{gathered}}{(1-x)(1-y)(1-z)(1-qx)^3(1-qy)^3(1-qz)^3(1-q^2y)}.$$

В частности, для $i=2$ и $n=4$ выражение неявно упомянуто в OEIS A133826:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \dim_q(V(j\cdot\omega_2))z^j = \frac{1+qz}{(1-z)(1-qz)^3(1-q^2z)}.$$

.

Об инвариантах узлов и Многогранниках Люстига

Видно, что случай $\lambda = \lambda_i \omega_i$ поддаётся куда более явному описанию, чем остальные. В таком же положении находится описание:

- супер-многочленов узла восьмёрки
- кристальной структуры для многогранников Люстига $\mathcal{L}_{\lambda_i \omega_i} = \mathit{FFLV}(\lambda_i \omega_i)$