

Sprawozdanie

Metody obliczeniowe w nauce I technice

Temat: Rozwiązywanie układów równań liniowych

Autor: Ryszard Sikora

Kod źródłowy wszystkich zadań dostępny jest pod adresem: <https://github.com/rychuhardy/mownit-lab2.git>

Zadanie 1: Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa-Jordana została zaimplementowana w trzech wariantach:

- Podstawowym – Zaletą jest najprostsza implementacja. Nie działa jednak dla układów równań z zerami na diagonalu. Złożoność wynosi $O(n^3)$.
- Z częściowym poszukiwaniem elementu wiodącego – Bardziej złożony w implementacji od podstawowego wariantu. Dla każdej kolumny k wybierany jest wiersz j z przedziału $[k, n]$ z maksymalną wartością komórki. Następnie wiersze k i j są zamieniane miejscami. Zamiana wierszy nie wpływa na końcowy wynik. Złożoność pozostaje taka sama, jednak zamiany wierszy powodują dodatkowy narzut wydajnościowy.
- Z pełnym poszukiwaniem elementu wiodącego – Najbardziej złożony z wszystkich pozostałych. Dla każdej kolumny k wybierany jest element największy z podmacierzy $[k:n, k:n]$. Następnie odpowiednie wiersze i kolumny zostają zamienione miejscami. Kolejność zamian (najpierw wiersze, potem kolumny lub najpierw kolumny, potem wiersze) nie ma znaczenia. Należy jednak zapamiętać zamiany kolumn i odwrócić zamiany po zakończeniu algorytmu. Złożoność wynosi $O(n^3)$, powstaje jednak narzut związany z zamianami wierszy i kolumn.

Warianty 2 i 3 są potrzebne ze względu na niedokładność reprezentacji liczb w komputerze. Operacje arytmetyczne na bardzo dużych i bardzo małych liczbach powodują utratę precyzji. Takie operacje mogą wynikać z dzielenia przez bardzo mały element w eliminacji Gaussa-Jordana. Jeżeli metody te okazują się niewystarczająco dokładne, można rozważyć skalowanie równań wejściowych (najczęściej do przedziału $[-1, 1]$).

Zadanie 2: Faktoryzacja LU

Faktoryzacja LU pozwala zaoszczędzić czas, gdy mamy rozwiązać równanie $A \cdot X = B$ dla wielu różnych B . Złożoność rozwiązania pierwszego równania wynosi $O(n^3)$, a każdego kolejnego $O(n^2)$. L jest macierzą trójkątną dolną, a U macierzą trójkątną górną oraz $L \cdot U = A$. Aby rozkład A na macierze L i U był jednoznaczny przyjmuje się, że macierz L na diagonalu zawiera same jedynki.

Zadanie 3: Analiza obwodu elektrycznego

System równań utworzony z grafu opisującego obwód elektryczny można zapisać jako iloczyn macierzy $A \cdot I = B$, gdzie A jest macierzą kwadratową o liczbie kolumn równej liczbie węzłów n ; I jest wektorem kolumnowym składającym się z niewiadomych I_1, I_2, \dots, I_n ; B jest wektorem kolumnowym zawierającym same zera oprócz równań dla wierzchołków pomiędzy którymi przyłożono SEM – tam jest to odpowiednio E lub $-E$ (E - argument funkcji – wartość SEM). Kolejne wiersze macierzy A są wypełniane wartościami 1 lub -1 lub 0 w zależności czy prąd wpływa do wierzchołka po danej krawędzi czy wypływa (0 gdy krawędź ta nie jest skojarzona z danym wierzchołkiem) dla każdego wierzchołka. Jest to układ $m \times n$ (m jest liczbą wierzchołków) wynikający z pierwszego prawa Kirchhoffa. Może on jednak zawierać wiersze, które są liniowo zależne od pozostałych. Należy usunąć te wiersze przed przejściem do kolejnego kroku. Następnie należy znaleźć cykle w grafie, najlepiej posortowane pod względem ilości wierzchołków. Większe cykle najczęściej produkują równania liniowo zależne od ich podcykli. Do układu dodawane są kolejne równania z II prawa Kirchhoffa aż do osiągnięcia n równań niezależnych. Tym razem jednak wartości w macierzy A dla równań z II prawa Kirchhoffa odpowiadają wartościom oporów danej krawędzi, odpowiednio ze znakiem plus lub minus, zgodnym z kierunkiem przepływu prądu dla danej krawędzi, ustalonym przy wyliczaniu równań z I prawa Kirchhoffa. Wartości natężeń na krawędziach można teraz obliczyć rozwiązując równanie $I = A^{-1} \cdot B$.

Przykładowy wynik działania algorytmu dla danych z pliku data.csv z repozytorium oraz $s=1$, $t=3$, $E=10$:

(Przyjęto, że prąd płynie od wierzchołka o mniejszym indeksie do wierzchołka o większym indeksie, stąd ujemne natężenie oznacza przepływ w odwrotnym kierunku)

