

Algebraische Topologie¹

Dozent: Dr. Vadim Alekseev
L^AT_EX: rydval.jakub@gmail.com
Version: 12. Februar 2017
Technische Universität Dresden

¹Math Ma ALGTOP: Algebraische Topologie, WS 2016/17

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	1
1	Topologische Räume	2
1.1	Grundlagen	2
2	Homotopie	5
2.1	Motivation	5
2.2	Homotopie zwischen Abbildungen	6
2.3	Konstruktionen und Beispiele	7
2.4	Fundamentalgruppe	8
2.5	Fundamentalgruppe von S^1	11
2.6	Hochhebung von Wegen und Homotopien	12
2.7	Überlagerungen und Fundamentalgruppe	16
2.8	Gruppen angegeben durch Erzeuger und Relationen; freie Gruppen	28
2.9	Angabe der Gruppen durch Erzeuger und Relationen.	31
2.10	Konsequenzen des Satzes von Seifert–van Kampen	38
2.11	Höhere Homotopiegruppen	41
3	Homologie	42
3.1	Simplizialkomplexe	42
3.2	Homologie für Simplizialkomplexe	43

0 Einführung

Algebraische Topologie dient dazu, mittels algebraischen Methoden (Zuordnung von algebraischen Objekten) topologische Räume zu verstehen (Klassifizierung). Beispiele von algebraischen Objekten:

- $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *Einheitssphäre*,
- Π_2 *Torus*.

Ein Merkmal der Sphäre: jede Schleife $\gamma : [0, 1] \longrightarrow S^2$ (stetig) ist zusammenziehbar. Auf dem Torus gibt es sogar zwei Arten nicht zusammenziehbarer Schleifen, die man ineinander nicht überführen kann.

Literaturempfehlung:

- A. Hatcher: Algebraic Topology (<https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>),
- C. Kosniowski: A First Course in Algebraic Topology,
- A. Fomenko, D. B. Fuchs: Homotopic Topology.

1 Topologische Räume

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition. (X, \mathcal{T}) ist ein topologischer Raum, wenn \mathcal{T} ein System von Teilmengen von X ist, das folgende Eigenschaften hat:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- (2) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
- (3) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

\mathcal{T} heißt *Topologie*, Elemente von \mathcal{T} heißen *offene Teilmengen* von X , $U_t \subset X$ heißt *Umgebung* von einem $t \in X$ wenn $\exists O \in \mathcal{T}$ s.d. $t \in O \subset U_t$. $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ heißt *Basis* von \mathcal{T} , falls $\forall O \in \mathcal{T} \exists J \subset I$ s.d. $O = \bigcup_{j \in J} O_j$. $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* gdw. $X \setminus A$ offen ist. Sei (X, \mathcal{T}') ein weiterer topologischer Raum, dann ist \mathcal{T}' *stärker* als \mathcal{T} , wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ($\iff \mathcal{T}$ *schwächer* als \mathcal{T}')

1.1.2 Beispiel. • X beliebige Menge;

- $\mathcal{T}_{\text{disc}} = \{\text{alle Teilmengen von } X\}$ *diskrete Topologie*,
- $\mathcal{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, X\}$ *antidiskrete Topologie*.
- (X, d) metrischer Raum;
 - $\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ s.d. } B(x, \varepsilon) \subset U\}$.

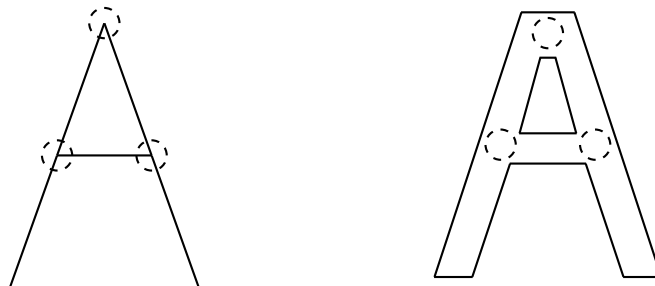
1.1.3 Definition. $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, Abb. $f : X \longrightarrow Y$ heißt

- *stetig in* $x \in X$ falls \forall Umgeb. $U_{f(x)} \exists$ Umgeb. $U_x : f(U_x) \subset U_{f(x)}$,
- *stetig*, wenn $\forall U \in \mathcal{T}_Y$ gilt: $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$,
- *Homöomorphismus*, falls f stetig ist und $\exists g : Y \longrightarrow X$ stetig mit $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$ (insbesondere sind Homöomorphismen stets Bijektionen).

Bemerkung: Falls nicht explizit gesagt, wird ab jetzt Stetigkeit aller Abb. vorausgesetzt.

1.1.4 Beispiel. • Eine “stetige Deformation” des Einheitskreises S_2 liefert einen Homöomorphismus zwischen den Parametrisierungen, die S_2 und das Endprodukt der Deformation beschreiben.

- Die Buchstaben



1 TOPOLOGISCHE RÄUME

sind nicht homöomorph—die eindimensionale/“dünne” Version von A “ verliert durch Wegnahme von kleiner Umgebung geschickt gewählter Punkten den Zusammenhang, die zweidimensionale/“dicke” Version nicht.

1.1.5 Definition. topologischer Raum (X, \mathcal{T}_X) heißt:

- *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung $X = X_1 \sqcup X_2$ in zwei disjunkte, nichtleere, offene Mengen gibt,
- *wegzusammenhängend*, wenn $\forall x, y \in X \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ stetig mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

1.1.6 Proposition. *Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.*

Beweis. (Berührt an der Tatsache, dass $[0, 1]$ zusammenhängend ist.) (X, \mathcal{T}_X) topologischer Raum, $X = X_1 \sqcup X_2$, X_1, X_2 offen, nichtleer $\implies \exists x \in X_1, y \in X_2$. Da X wegzusammenhängend ist: $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Es folgt $[0, 1] = \gamma^{-1}(X) = \gamma^{-1}(X_1 \sqcup X_2) = \gamma^{-1}(X_1) \sqcup \gamma^{-1}(X_2)$. Die Tatsache, dass $\gamma^{-1}(X_1)$, $\gamma^{-1}(X_2)$ offen sind liefert einen Widerspruch. ■

1.1.7 Definition. (X, \mathcal{T}) topologischer Raum, $A \subset X$.

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset F \subset X \\ \text{abgeschl.}}} F$$

ist der *Abschluss* von A . A liegt *dicht* in X : $\iff \overline{A} = X$.

1.1.8 Lemma. $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \ni x \text{ offen gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$.

Beweis. Übung. ■

1.1.9 Definition. (X, \mathcal{T}) topologischer Raum heißt *Hausdorffraum*, wenn

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x, U_y \text{ offen mit } x \in U_x, y \in U_y, U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Bemerkung: Metrische Räume sind Hausdorffräume.

1.1.10 Definition. (X, \mathcal{T}) topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn es für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X (also U_i offen, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$) eine endliche Teilüberdeckung U_{i_1}, \dots, U_{i_n} gibt ($\exists i_1, \dots, i_n \in I$ s.d. U_i offen, $\bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = X$).

Bemerkung: Es ist sinnvoll, Kompaktheit nur auf Hausdorffräumen zu betrachten. Im Weiteren werden topologische Räume/ Hausdorffräume einfach mit X bezeichnet.

1.1.11 Definition. (X, \mathcal{T}_X) topologischer Raum, $Y \subset X \implies (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist topologischer Raum mit *induzierter Topologie* (*Teilraumtopologie*) $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_X\}$.

1.1.12 Proposition. X Hausdorffraum, $Y \subset X$ kompakt $\implies Y$ abgeschlossen.

1 TOPOLOGISCHE RÄUME

Beweis. X ist Hausdorffraum $\implies \forall x \in X \setminus Y \forall y \in Y \exists V_{x,y} \ni y, U_{x,y} \ni x$ offen mit $V_{x,y} \cap U_{x,y} = \emptyset$. Wenn $x \in X \setminus Y \implies \bigcup_{y \in Y} (V_{x,y} \cap Y) = Y$, $V_{x,y} \cap Y$ offen in Y . Y ist kompakt $\implies \exists y_1, \dots, y_n \in Y$ s.d. $\bigcup_{k=1}^n (V_{x,y_k} \cap Y) = Y$, $V_{x,y_k} \cap U_{x,y_k} \implies U_{x,y_k} \cap Y = \emptyset \implies$ für $U_x := \bigcap_{k=1}^n U_{x,y_k}$ gilt $U_x \cap Y = \emptyset$. Nun ist $X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_x$ offen $\implies Y$ ist abgeschlossen. ■

1.1.13 Proposition. X kompakt, Y Hausdorffraum, Abb. $f : X \longrightarrow Y$ stetig, injektiv $\implies f : X \longrightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. $f : X \longrightarrow f(X)$ ist stetig und bijektiv \implies man braucht zu zeigen, dass die inverse Abb. stetig ist, oder, dass f abgeschlossene Teilmengen von X auf abgeschlossene Teilmengen von $f(X)$ abbildet. Nun, wenn $X' \subset X$ abgeschlossen, dann auch kompakt $\implies f(X')$ kompakt, da Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt $(f(X') = \bigcup_{i \in I} U_i \implies X' = \bigcup_{i \in I} f^{-1}U_i \stackrel{X' \text{ komp.}}{=} \bigcup_{k=1}^n f^{-1}U_{i_k} \implies f(X') = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k} \implies f(X') \subset Y$ abgeschlossen nach obiger Proposition. ■

2 Homotopie

2.1 Motivation

Das $X :=$ “dickes A” und $Y :=$ “dünnes A” aus Beispiel 1.4 sind nicht homöomorph aber doch irgendwie ähnlich. Manchmal ist Homöomorphie eine zu strenge Forderung. Man hat eine Einbettung $\iota : X \rightarrow Y$ mit einer Familie von Abbildungen $f_t : X \rightarrow Y$, $t \in [0, 1]$, s.d.

- $f_0 = \text{id}_X$,
- $f_1(Y) \subset \iota(X)$,
- die Abb. $F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$, $(y, t) \mapsto f_t(y)$ ist stetig,
- $f_t|_{\iota(X)} = \text{id}|_{\iota(X)}$.

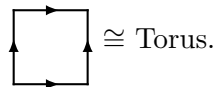
2.1.1 Definition. Sei Y ein topologischer Raum, $A \subset Y$ ein Teilraum. A heißt *Deformationsretrakt* von Y , wenn $\exists F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ stetig, s.d.

- $F(\cdot, 0) = \text{id}_Y$,
- $F(y, 1) \in A \forall y \in Y$,
- $F(a, t) = a \forall t \in [0, 1] \forall a \in A$.

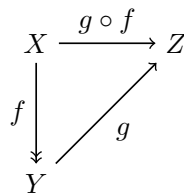
2.1.2 Beispiel. Einheitssphäre S_1 ist kein Deformationsretrakt von $\overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^2$.

2.1.3 Definition. Sei X ein topologischer Raum, $f : X \rightarrow Y$ (d.h. f surjektiv), dann kann man eine Topologie $\mathcal{T}_f := \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \subset X \text{ offen}\}$ auf Y definieren. Diese heißt *Quotiententopologie*.

2.1.4 Beispiel. $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation, $q : X \rightarrow X/R$ kanonische Abbildung liefern eine Quotiententopologie auf X/R . Z.B. $X := [0, 1]^2$, \sim gegeben durch Identifizierung der Strecken $\{0\} \times [0, 1]$ mit $\{1\} \times [0, 1]$ und $[0, 1] \times \{0\}$ mit $[0, 1] \times \{1\}$. Die Menge X/\sim ist homöomorph zu dem Torus Π_2 . Anschaulich:



2.1.5 Proposition (universelle Eigenschaft der Quotiententopologie). Sei Y eine Menge, X ein topologischer Raum, $f : X \rightarrow Y$ (surjektive) Abbildung. Betrachte (Y, \mathcal{T}_f) . Dann gilt für alle topologische Räume Z : eine Abb. $g : Y \rightarrow Z$ ist stetig $\iff g \circ f : X \rightarrow Z$ ist stetig.



2 HOMOTOPIE

Beweis. “ \implies ” $U \subset Z$ offen $\implies g^{-1}(U)$ offen $\implies f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ offen, d.h. $g \circ f$ stetig.
 “ \impliedby ” $U \subset Z$ offen, $g \circ f$ stetig $\implies (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen $\implies g^{-1}(U)$ ist offen wegen \mathcal{T}_f . ■

2.1.6 Beispiel. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, Zylinder $Z_f := X \times [0, 1] \sqcup Y / \sim$, wobei \sim Punkte $(x, 1) \in X \times [0, 1]$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert. Übung: $Y \subset Z_f$ ist ein Deformationsretrakt.

2.2 Homotopie zwischen Abbildungen

2.2.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ (stetig). Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $F(\cdot, 0) = f_0$, $F(\cdot, 1) = f_1$.

2.2.2 Definition. Sei $A \subset X$ ein Teilraum. Dann heißt eine Abbildung $r : X \rightarrow A$ mit $r|_A = \text{id}_A$ eine *Retraktion* von X auf A .

2.2.3 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ stetig, $A \subset X$ Teilraum mit $f_0|_A = f_1|_A$, f_0 und f_1 heißen *homotop relativ zu A* , wenn $\exists F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ Homotopie zwischen f_0 und f_1 , sodass $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \forall a \in A \forall t \in [0, 1]$.

2.2.4 Beispiel. Aus der Funktionentheorie ist Bekannt: $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow B(0, 1) \setminus \{0\}$, $t \mapsto 1/2e^{i\pi t}$ ist homotop zu $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B(0, 1) \setminus \{0\}$, $t \mapsto 1/2e^{-i\pi t}$, sie sind allerdings nicht homotop relativ zu $\{-1/2, 1/2\}$.

2.2.5 Definition. Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn $\exists f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$, sodass $f \circ g$ homotop zu id_Y und $g \circ f$ homotop zu id_X .

Notation: $X \simeq Y$ (X homotopieäquivalent zu Y), $X \cong Y$ (X homöomorph zu Y).

2.2.6 Proposition. Sei Y ein topologischer Raum, $A \subset Y$ Teilraum. Wenn A ein Deformationsretrakt von Y ist, dann gilt $A \simeq Y$.

Beweis. Die Abb. $F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ ist eine Homotopie zwischen id_Y und $r : Y \rightarrow A$, $r(y) := F(y, 1)$, die eine Retraktion ist, weil $r(a) = F(a, 1) = a \forall a \in A$. Betrachte $\iota : A \hookrightarrow Y$ Inklusion; $\iota \circ r \simeq \text{id}_Y$ durch F , $r \circ \iota = \text{id}_A$. ■

2.2.7 Definition. Ein topologischer Raum heißt *kontrahierbar*, wenn $X \simeq \{*\}$.

2.2.8 Beispiel. • $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar: $\{0\} \subset B(0, 1)$ ist Deformationsretrakt via $F : B(0, 1) \times [0, 1] \rightarrow B(0, 1)$, $(x, t) \mapsto (1 - t)x$.

- \mathbb{R}^n ist zusammenziehbar, denn $B(0, 1) \cong \mathbb{R}^n$ (analog $(0, 1) \cong \mathbb{R}$ mittels $F : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \pi(x - 1/2)$),
- $S_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist nicht zusammenziehbar.

2. Vorlesung, 13.10.2016

3. Vorlesung, 19.10.2016

2.3 Konstruktionen und Beispiele

- Wiederholung: Torus lässt sich darstellen als

$$[0, 1] \times [0, 1] / (0, y) \sim (1, y) \wedge (x, 0) \sim (x, 1).$$

Sukzessives Zusammenkleben. Formales Vorgehen:

- (0) Starte mit einem Punkt $\{*\} =: e^0$.
- (1) Betrachte zwei Kopien von $[0, 1]$: $e_a^1 := [0, 1]$, $e_b^1 := [0, 1] \implies \partial e_a^1 = \{0_a, 1_a\}$, $\partial e_b^1 = \{0_b, 1_b\}$. Abbildungen $\varphi_a : \partial e_a^1 \longrightarrow e^0 = \{*\}$, $\varphi_b : \partial e_b^1 \longrightarrow e^0 = \{*\}$. Betrachte

$$X^1 := e^0 \cup e_a^1 \cup e_b^1 / \varphi_a(x) \sim x \wedge \varphi_b(x) \sim x$$

(habe e_a^1 , e_b^1 an e^0 angeklebt).

- (2) Betrachte $e^2 := D^2 (= \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^2)$, $\partial e^2 := \partial D^2 = S^1$, $\varphi^2 : \partial e^2 \longrightarrow X^1$,

$$\implies X^2 := X^1 \cup e^2 / \varphi^2(x) \sim x = \Pi^2.$$

- Konstruktion einer Sphäre: Verklebe den gesamten Rand einer Kreisscheibe mit einem einzigen Punkt. $X^0 := \{*\}$, $X^1 := X^0$, $e_2 = D^2$, $\varphi^2 : \partial e^2 \longrightarrow X^1$, $x \mapsto *$
 $\implies X^2 := X^1 \cup e^2 / \varphi^2(x) \sim x = S^2$.

Notation:

- Zusammenkleben von Räumen längs einer Abbildung: Seien X, Y topologische Räume, $\varphi : A \subset X \longrightarrow Y$ stetig. Dann ist

$$X \cup_{\varphi} Y := X \sqcup Y / x \sim \varphi(x), x \in X.$$

- $D^n := \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^n$.
- $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$.
- e_{α}^n bezeichnet stets eine Kopie von D^n . So eine Kopie heißt n -Zelle.

2.3.1 Definition. Ein *CW-Komplex* X ist ein topologischer Raum, der wie folgt entsteht:

- (0) Fange mit einem diskreten Raum $X^0 :=$ disjunkte Vereinigung von Punkten an.
- (1) Definiere induktiv die Räume X^n (die sogenannte n -Skelette / n -Gerüste von X) für $n \geq 1$ folgendermaßen: für eine Familie $\{e_{\alpha}^n\}_{\alpha \in A}$ von n -Zellen fixiere stetige Abbildungen $\varphi_{\alpha}^n : \partial e_{\alpha}^n \longrightarrow X^{n-1}$ und definiere $X^n := (\bigsqcup_{\alpha \in A} e_{\alpha}^n) \cup_{\varphi_{\alpha}^n} X^{n-1}$.
- (2) $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ mit der *schwachen Topologie*: $Y \subset X$ offen $\iff Y \cap X^n$ offen für alle n .

2.3.2 Definition. Eine topologische *Mannigfaltigkeit* von Dimension n ist ein Hausdorffraum X , sodass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \ni x$ besitzt, die homöomorph zu \mathbb{R}^n ist.

2 HOMOTOPIE

2.3.3 Beispiel (Flächen höheren Geschlechts). Anschaulich: Man schneidet aus der Sphäre S^2 zwei Kreise aus und klebt an die Löcher die kreisförmigen Enden eines Zylinders $[0, 1] \times S^2$. Dieses Objekt ist homöomorph zu einem Torus. Eine Fläche Σ_g , die durch sukzessives Ankleben von g Handgriffen an die Sphäre S^2 heißt *Fläche von Geschlecht g* . Siehe z.B. Abbildung auf S. 5 in Hatcher: Algebraic Topology. Ferner:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \cong & \text{Zylinder} & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \cong & \text{Möbius-} \\ & & & & & \text{band} & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \cong & \text{Kleinsche} \\ & & & & & & & & \text{Flasche} & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \cong & \mathbb{RP}^2 \end{array}$$

Wiederholung: $\mathbb{RP}^2 := \{\text{Geraden } l \subset \mathbb{R}^3 \mid 0 \in l\}$ (topologisiert durch Winkelabstand) ist die *Projektive Ebene*. Andere Definition:

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^2 &:= \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / v \sim \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}^\times = \{[x_1 : x_2 : x_3] \mid (x_1, x_2, x_3) \neq 0\} \\ &= \underbrace{\{[x_1 : x_2 : 1]\}}_{\mathbb{R}^2} \cup \underbrace{\{[x_1 : x_2 : 0]\}}_{\mathbb{RP}^1} \end{aligned}$$

oder $\mathbb{RP}^2 := S^2 / x \sim -x$. Allgemeiner Fall:

$$\mathbb{RP}^n := \{\text{Geraden } l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid l \ni 0\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / v \sim \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}^\times = S^n / x \sim -x.$$

In sogenannten homogenen Koordinaten:

$$\{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \neq 0\} = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{RP}^{n-1}.$$

Der kleinste Fall:

$$\mathbb{RP}^1 = \underbrace{\mathbb{R}}_{=e^1} \sqcup \underbrace{\{\infty\}}_{=e^0} = S^1 / x \sim -x \cong S^1.$$

\mathbb{RP}^n ist also ein *CW-Komplex* mit einer Zelle in jeder Dimension und die Anklebeabbildungen sind die kanonischen Abbildungen $\varphi^k : S^k \rightarrow \mathbb{RP}^k$.

3. Vorlesung, 19.10.2016

4. Vorlesung, 20.10.2016

2.4 Fundamentalgruppe

Sei X topologischer Raum (ab jetzt: alle Räume sind Hausdorff).

2.4.1 Definition. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ heißt *Weg* in X . Ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ heißt *Schleife* in X .

Konvention: Homotopie von Wegen wird immer relativ zu $\{0, 1\}$ verstanden. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ wird verstanden als $\gamma_1 \sim_{\{0, 1\}} \gamma_2$. ($\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ zwischen γ_1 und γ_2 muss $H(0, t) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $H(1, t) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$). Notation:

- $I := [0, 1]$,

2 HOMOTOPIE

- $H : X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g , dann schreibe $H : f \rightsquigarrow g$.

2.4.2 Beispiel. Je zwei Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten in \mathbb{R}^n sind homotop: $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = y$. Wähle $H(s, t) := t \cdot \gamma_2(s) + (1 - t)\gamma_1(s) \implies H$ ist eine Homotopie.

2.4.3 Korollar. Alle Schleifen an $0 \in \mathbb{R}^n$ sind homotop.

2.4.4 Proposition. Homotopie von Wegen mit festen Endpunkten $x, y \in X$ ist eine Äquivalenzrelation. Sei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \longrightarrow X$. Wegen $\gamma_1(0) = \gamma_1(0) = \gamma_3(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_1(1) = \gamma_3(1) = y$:

- $\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2, \iff \gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_1$
- $\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_1$
- $\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2, \gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_3 \implies \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_3$.

Beweis. • $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$ Homotopie, dann ist $\bar{H}(s, t) := H(s, 1 - t)$ eine Homotopie $\gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_1$.

- $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_1$: $H(s, t) := \gamma_1(s)$.
- $H_1 : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2, H_2 : \gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_1$. Definiere

$$H(s, t) := \begin{cases} H_1(s, 2t), & t \in [0, 1/2], \\ H_2(s, 2t - 1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_3 . ■

Übung: Der Beweis funktioniert für beliebige stetige Abb. $\gamma : Z \longrightarrow X$ (Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf stetigen Abbildungen). Notation: $[\gamma]$ ist die Äquivalenzklasse des Wegen γ ($[f]$ ist die Äquivalenzklasse der Abb. f).

2.4.5 Definition. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow X$ zwei Wege s.d. $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$. Dann wird der Weg $\gamma := \gamma_2 \cdot \gamma_1$ so definiert:

$$\gamma(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s), & s \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2s - 1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

γ heißt *Verknüpfung* von γ_1, γ_2 .

2.4.6 Lemma. $\gamma_1 \rightsquigarrow \gamma'_1 \implies \gamma_2 \cdot \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 \cdot \gamma'_1, \gamma_2 \rightsquigarrow \gamma'_2 \implies \gamma_2 \cdot \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma'_2 \cdot \gamma_1$.

Beweis. Wenn $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma'_1, \gamma_{1,t}(\cdot) := H(\cdot, t)$, dann ist $H_{2,1}(s, t) := \gamma_2 \cdot \gamma_{1,t}(s)$ eine Homotopie $\gamma_2 \cdot \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 \cdot \gamma'_1$. Analog andersherum. ■

Sei $x_0 \in X$ fest. Def.: $\Omega(X, x_0) := \{\gamma : I \longrightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$ *Schleifen an* x_0 . Die Verknüpfung definiert Operation $\cdot : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$, die aber nicht assoziativ ist:

2 HOMOTOPIE

2.4.7 Definition. $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$, $\pi_1(X, x_0) := \{[\gamma] \mid \gamma \in \Omega(X, x_0)\}$, \cdot ist die obige Verknüpfung, heißt *Fundamentalgruppe* von X an x_0 .

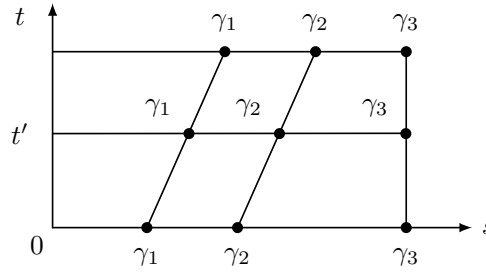
2.4.8 Proposition. $\pi_1(X, x_0)$ ist eine Gruppe mit dem neutralen Element $e = [\underline{x_0}]$, $\underline{x_0} : I \rightarrow X$, $t \mapsto x_0$. Das Inverse einer Klasse $[\gamma]$ ist gegeben durch $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$, $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$.

Beweis. Assoziativität—zu zeigen ist $[\gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)] = [(\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1]$. Die Abb.

$$\gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)(s) := \begin{cases} \gamma_1(4s), & s \in [0, 1/4], \\ \gamma_2(4s - 1), & s \in [1/4, 1/2], \\ \gamma_3(2s - 1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

$$(\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s), & s \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(4s - 2), & s \in [1/4, 3/4], \\ \gamma_3(4s - 3), & s \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

sind äquivalent durch folgende Homotopie (zuerst anschaulich in der Bildnotation):



$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma_1((4 - 2t)s), & s \in [0, 1/(4 - 2t)], \\ \gamma_2(4s - t - 1), & s \in \dots, \\ \gamma_3((2 + 2t)s - 1 - 2t), & s \in \dots \end{cases}$$

Neutrales Element: $[\underline{x_0} \cdot \gamma] = [\gamma \cdot \underline{x_0}] = [\gamma]$ offenbar. Inverses: $[\gamma \cdot \bar{\gamma}] = [\bar{\gamma} \cdot \gamma] = e$. Wähle

$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma(2s(1 - t)), & s \in [0, 1/2] \\ \gamma((1 - 2s)(1 - t)), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Dann ist dies tatsächlich eine Homotopie $\bar{\gamma} \cdot \gamma \rightsquigarrow \underline{x_0}$ mit $H(s, 1) = \gamma(0) = x_0$. Da $\bar{\bar{\gamma}} = \gamma$, folgt das andere. ■

2.4.9 Beispiel. • $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong \{e\}$ (jede Schleife ist homotop zur konstanten Schleife).

- Wenn $X \cong \{*\}$, dann $\pi_1(X, *) \cong \{e\}$, denn: $\gamma : I \rightarrow X$ eine Schleife an $*$, dann kann man die Homotopie zwischen $f : X \rightarrow X$, $x \mapsto *$ und $\text{id} : X \rightarrow X$ benutzen, um zu zeigen: $\gamma \sim *$: Sei $\gamma : I \rightarrow X$ gegeben, $H : X \times I \rightarrow X$ Homotopie zwischen id und $f \implies H \circ (\gamma \times \text{id}) : I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen γ und $*$ (denn: $H \circ (\gamma \times \text{id})(s, 0) = H(\gamma(s), 0) = \gamma(s)$, weil $H(\cdot, 0) = \text{id}$ und $H \circ (\gamma \times \text{id})(s, 1) = H(\gamma(s), 1) = *$, weil $H(\cdot, 1) = f$).

2 HOMOTOPIE

- $S^1 \subset \mathbb{C}$, dann $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. (Expliziter Homomorphismus $\phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist gegeben z.B. durch Funktionentheorie: $[\gamma] \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$.)

2.4.10 Proposition. Seien X, Y topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f(x_0) = y_0$. Dann gilt: die Abbildung $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ ein Gruppenhomomorphismus. Außerdem: wenn $g : Y \rightarrow Z$ stetig, $g(y_0) = z_0 \implies (g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$.

Beweis. f_* ist wohldefiniert, weil $\gamma_1 \sim \gamma_2$ durch H , dann gilt $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ durch $f \circ H$. $f_*(\gamma_2 \cdot \gamma_1) = [f \circ (\gamma_2 \cdot \gamma_1)] = [(f \circ \gamma_2) \cdot (f \circ \gamma_1)] = [f \circ \gamma_2] \cdot [f \circ \gamma_1] = f_*(\gamma_2) \cdot f_*(\gamma_1)$. $(g \circ f)_*([\gamma]) = [g \circ f \circ \gamma] = g_*([f \circ \gamma]) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$. ■

4. Vorlesung, 20.10.2016

5. Vorlesung, 26.10.2016

2.4.11 Lemma. $f, g : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abb. mit $f(x_0) = f'(x_0) = y_0 \implies f \sim f'$ rel. zu $x_0 \implies f_* = f'_*$.

Beweis. $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Erste Homotopie $f \sim f'$ induziert eine Homotopie $f \circ \gamma \sim f' \circ \gamma \implies f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma] = [f' \circ \gamma] = f'_*([\gamma])$. ■

Die obigen Behauptungen motivieren die Frage: Wie hängt $\pi_1(X, x_0)$ von x_0 ab?

2.4.12 Lemma. Sei X ein wegzusammenhängender Raum, $x_0, x_1 \in X$. Dann gilt: $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$. Genauer: Jede Homotopieklasse der Wege $\beta : I \rightarrow X$, $\beta(0) = x_0$, $\beta(1) = x_1$ induziert einen solchen Isomorphismus $\Theta_{[\beta]} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, $[\gamma] \mapsto [\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}]$.

Beweis. $\Theta_{[\beta]}$ ist wohldefiniert, denn: $\beta \sim \beta' \implies \beta^{-1} \sim \beta'^{-1}$, $\gamma \cdot \beta^{-1} \sim \gamma \cdot \beta'^{-1}$, $\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1} \sim \beta' \cdot \gamma \cdot \beta'^{-1} \implies [\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}] = [\beta' \cdot \gamma \cdot \beta'^{-1}]$. $\Theta_{[\beta]}$ ist ein Gruppenhomomorphismus; $\Theta_{[\beta]}([\gamma_2] \cdot [\gamma_1]) = \Theta_{[\beta]}([\gamma_2 \cdot \gamma_1]) = [\beta \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_1 \cdot \beta^{-1}] = [\beta \cdot \gamma_2 \cdot \beta^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma_1 \cdot \beta^{-1}] = [\beta \cdot \gamma_2 \cdot \beta^{-1}] \cdot [\beta \cdot \gamma_1 \cdot \beta^{-1}] = \Theta_{[\beta]}([\gamma_2]) \cdot \Theta_{[\beta]}([\gamma_1])$. Ferner $\Theta_{[\beta^{-1}]} = \Theta_{[\beta]}^{-1}$, denn: $\Theta \circ \Theta_{[\beta^{-1}]}([\gamma]) = \Theta_{[\beta^{-1}]}([\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}]) = [\beta^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1} \cdot \beta] = [\gamma]$, weil $\beta^{-1} \cdot \beta \sim \underline{x_0}$; analog folgt $\Theta_{[\beta]} \circ \Theta_{[\beta^{-1}]}([\gamma]) = [\gamma]$. ■

2.4.13 Definition. X wegzusammenhängend $\implies \pi_1(X)$ ist die Isomorphieklasse von $\pi_1(X, x_0)$ mit $x_0 \in X$.

2.5 Fundamentalgruppe von S^1

Wir wollen folgenden Satz zeigen:

2.5.1 Satz. $\pi_1(S^1, 1)$ (bzw. $S^1 \subseteq \mathbb{C}$) ist isomorph zu \mathbb{Z} , sie wird durch die Äquivalenzklasse der Schleife $\omega : I \rightarrow S^1$, $s \mapsto e^{2\pi i s} = \cos(2\pi s) + i \sin(2\pi s)$ erzeugt.

Was ist hier zu zeigen? $\omega^n \sim (\cos 2\pi n s + i \sin 2\pi n s = e^{2\pi i n s})$, $n \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen:

- Jede Schleife in S^1 ist homotop zu einer ω^n .

2 HOMOTOPIE

- $\omega^n \approx \underline{1}$.

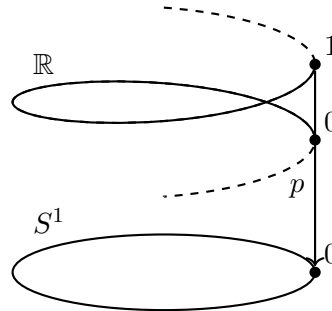
Betrachte $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ (hier hat man $p(x+n) = p(x) \forall n \in \mathbb{Z}$, also realisiert man $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Idee: Für jede Schleife $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ gibt es einen eindeutigen Weg $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = 0$, $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ (die sogenannte Hochhebung von γ). Nun kann man eine Abbildung $\varphi : \Omega(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ (Wdhlg. $\Omega(S^1, 1) := \{\gamma : I \rightarrow S^1 \mid \gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$) definieren. Dann müsste man zeigen: φ induziert eine Abbildung $\bar{\varphi} : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, die ein Isomorphismus ist (dazu sollte man zeigen, dass $\bar{\varphi}$ nur von der Homotopieklasse von γ abhängt).

2.5.2 Definition. Eine *Überlagerung* $p : Y \rightarrow X$ ist eine surjektive stetige Abbildung mit folgenden Eigenschaften: Für jeden Punkt $x \in X$ ex. eine Umgebung $U \ni x$, so dass

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in I} V_j \subset Y,$$

wobei $V_j \subset Y$ offen und so dass $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

2.5.3 Beispiel. • $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist eine Überlagerung, denn: p stetig, surjektiv, und für jedes $z = e^{i\varphi} \in S^1$ gilt: $p^{-1}(S^1 \setminus \{z\}) \cong (S^1 \setminus \{z\}) \times \mathbb{Z}$.



- Wenn man $S^1 \subset \mathbb{C}$ realisiert, kann man die Abb. $p_k : S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^k$ ($e^{i\varphi} \mapsto e^{ki\varphi}$). Es ist $p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) \cong (S^1 \setminus \{-z\}) \times \mathbb{Z}/k$.

2.6 Hochhebung von Wegen und Homotopien

Fragestellung: Gegeben eine stetige Abbildung $f : Z \rightarrow X$, finde *Hochhebungen* $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$, ($f = p \circ \tilde{f}$) und untersuche, ob sie eindeutig sind.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \tilde{f} & \nearrow p & \\ Y & & \end{array}$$

2 HOMOTOPIE

2.6.1 Proposition (Homotopiehochhebungseigenschaft von Überlagerungen). Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, $F : Z \times I \rightarrow X$ stetig. Sei $\tilde{F} : Z \times \{0\} \rightarrow Y$ eine Abbildung mit $p \circ \tilde{F} = F|_{Z \times \{0\}}$ (intuitiv: F ist eine Homotopie zwischen $F|_{Z \times \{0\}}$ und $F|_{Z \times \{1\}}$, und eine Hochhebung von der ersten Abbildung ist gegeben). Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{F} : Z \times I \rightarrow Y$ mit $p \circ \tilde{F} = F$, von der obigen $\tilde{F} : Z \times \{0\} \rightarrow Y$.

- 2.6.2 Korollar.** (1) Gegeben $\gamma : I \rightarrow X$ und $y_0 \in Y$ s.d. $p(y_0) = \gamma(0)$, es ex. genau eine Hochhebung $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ ($Z = \{*\}$, $F = \gamma : I \rightarrow X$, $\tilde{F}|_{\{0\}} = y_0$).
- (2) Gegeben $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$, eine Homotopie $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$ und $y_0 \in p^{-1}(\gamma_1(0)) = p^{-1}(\gamma_2(0)) \implies \exists! \tilde{H} : I \times I \rightarrow Y$ zwischen den Hochhebungen $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ s.d. $\tilde{H}|_{I \times \{0\}} = H$.

Beweis (der Homotopiehochhebungseigenschaft). Sei $z_0 \in Z$ fest. Wir werden erstmal \tilde{F} auf $N \times I$ fortsetzen, wobei $N \ni z_0$ eine Umgebung von z_0 ist. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Z \times I & \xrightarrow{F} & X \\ \tilde{F}|_{Z \times \{0\}} \downarrow & \nearrow p & \\ Y & & \end{array}$$

$F : Z \times I \rightarrow X$ ist stetig, deswegen existiert für jedes $t \in X$ eine Umgebung $N_t \times (a_t, b_t) \subset Z \times I$ von (z_0, t) , s.d. $F(N_t \times (a_t, b_t)) \subset U^t \subset X$ für eine Umgebung U^t von $F(z_0, t)$ mit $p^{-1}(U^t) = \bigsqcup_{j \in J} V_j^t$, wobei $p|_{V_j^t}$ ein Homöomorphismus ist (F stetig + Def. der Überlagerung). Sei $\bigcup_{t \in I} (a_t, b_t) = I$ eine off. Überdeckung, I kompakt \implies es gibt eine endliche Teilüberdeckung, also $I = \bigcup_{i=1}^n (a_{t_i}, b_{t_i})$, o.B.d.A. $0 = a_{t_1} < b_{t_1} < \dots < a_{t_n} < b_{t_n} = 1$. Sei $N := \bigcap_{i=1}^n N_{t_i} \subset Z$. Wir definieren \tilde{F} auf $N \times I$ induktiv: (o.B.d.A.) $F(N \times [a_{t_1}, b_{t_1}]) \subset U^{t_1}$, deswegen $\exists! j$ s.d. $\tilde{F}(N \times \{0\}) \subset V_j^{t_1}$; definiere $\tilde{F}|_{N \times (a_{t_1}, b_{t_1})} := p_{j,1}^{-1} \circ F$, wobei $p_{j,1}^{-1} : U^{t_1} \rightarrow V_j^{t_1}$ der inverse Homöomorphismus ist. Weiter: Wenn \tilde{F} auf $N \times \bigcup_{i=1}^k (a_{t_i}, b_{t_i})$ definiert ist, dann ist der Durchschnitt $(a_{t_k}, b_{t_k}) \cap (a_{t_{k+1}}, b_{t_{k+1}}) \neq \emptyset$ (evtl. nach Umm Nummerierung). Dann definiert man $\tilde{F}|_{N \times (a_{t_{k+1}}, b_{t_{k+1}})} := p_{j,k+1}^{-1} \circ F$, wobei $p_{j,k+1} : U^{t_{k+1}} \rightarrow V_j^{t_{k+1}}$ ein Homöomorphismus ist, $F(N \times (a_{t_k}, b_{t_k})) \subset V_j^{t_{k+1}}$. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir $\tilde{F} : N \times I \rightarrow Y$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, weil die Wahl von j in jedem Schritt eindeutig war. Schreibe jetzt $Z = \bigcup_{z \in Z} N_z$ (wiederhole für jede Wahl von z_0) \implies erhalte $\tilde{F}_z : N_z \times I \rightarrow Y$ für jedes z . Sobald $N_z \cap N_{z'} \neq \emptyset$, gilt $\tilde{F}_z = \tilde{F}_{z'}$, weil die Fortsetzung eindeutig \implies Definiere $\tilde{F} : Z \times I \rightarrow Y$ durch $\tilde{F}|_{N_z \times I} = \tilde{F}_z$ (wohldefiniert, weil \tilde{F}_z kompatibel und eindeutig, weil jedes \tilde{F}_z eindeutig). ■

5. Vorlesung, 26.10.2016

6. Vorlesung, 27.10.2016

Beweis (von Satz 2.5.1). $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist eine Überlagerung. Die Hochhebung $\tilde{\omega}$ von ω mit $\tilde{\omega}(0) = 0$ ist $\tilde{\omega}(s) = s$ (damit $(p \circ \tilde{\omega})(s) = e^{2\pi i s} = \omega(s)$).

2 HOMOTOPIE

Entsprechend ist $\tilde{\omega}^n(s) = n \cdot s$ die eindeutige Hochhebung von ω^n . Definiere eine Abbildung $\phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $\phi([\gamma]) := \tilde{\gamma}(1)$, wobei $\tilde{\gamma}$ die (eindeutige) Hochhebung von γ ist. Z.z.: ϕ ist wohldefiniert. Dazu:

- (1) $\tilde{\gamma}$ ist eine Hochhebung, also $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma \implies (p \circ \tilde{\gamma})(1) = p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = 1 \implies \tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.
- (2) Seien γ_1, γ_2 zwei homotope Schleifen an 1. Seien $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ ihre Hochhebungen. Nach dem Korollar von oben sind auch $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ homotop, und daher $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$.

Nun ist z.z.: ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus. Dazu erstmal: für jedes $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ s.d. $[\gamma] = [\omega^n]$. Dazu: hebe γ hoch zu $\tilde{\gamma}$, sei $\phi([\tilde{\gamma}]) = n \in \mathbb{Z}$. Jetzt sind $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\omega}^n$ zwei Wege in \mathbb{R} mit den gleichen Anfangspunkten ($\tilde{\gamma}(0) = 0 = \tilde{\omega}^n(0)$) und Endpunkten ($\tilde{\gamma}(1) = n = \tilde{\omega}^n(1)$) $\implies \tilde{\gamma} \sim \tilde{\omega}^n$, weil je zwei Wege in \mathbb{R} mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind (z.B. durch lineare Homotopie). Daher: $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} \sim p \circ \tilde{\omega}^n = \omega^n$. Ferner $\phi([\omega^n]) = n$. $\phi([\omega^n] \cdot [\omega^m]) = \phi([\omega^{n+m}]) = n + m = \phi([\omega^n]) + \phi([\omega^m]) \implies \phi$ ist ein Homomorphismus, surjektiv. Bleibt: ϕ ist injektiv. Dazu $\phi([\omega^n]) = 0 \implies n = 0, \omega^0 = \underline{1}$. ■

2.6.3 Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$, $n \geq 1$ hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis. Annahme: p hat keine Nullstellen in \mathbb{C} . Sei $r \geq 0$, betrachte

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|} \in S^1 \subset \mathbb{C} \forall r.$$

So ist $f_r : I \rightarrow S^1$ eine Schleife in S^1 an 1. Wenn r sich stetig verändert, verändert sich die Schleife stetig ($f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow S^1$, $(r, s) \mapsto f_r(s)$ ist stetig) $\implies [f_r]$ ist unabhängig von r .

$$f_0(s) = \frac{p(0)/p(0)}{|p(0)/p(0)|} = 1 \implies [f_0] = e \text{ in } \pi_1(S^1, 1).$$

Aber: $p(z) = z^n(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}) = z^n r(z)$ und $|\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}| < 1$ für $|z| \geq R$ hinreichend groß $\implies r(z) \subset B(1, 1) \implies r : \{|z| \geq R\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist homotop zur konstanten Abbildung $\tilde{r}(z) = 1$ durch Abbildungen $r_t(z) \neq 0$ auf $|z| \geq R \implies$ für hinreichend große r ist

$$f_r \sim \underbrace{\left(s \mapsto \frac{r^n e^{2\pi i n s}}{r^n} = e^{2\pi i n s} \right)}_{\omega^n}$$

$e = [f_r] = [\omega^n] \neq e \text{ in } \pi_1(S^1, 1)$. Widerspruch. ■

2.6.4 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ und sei $h : D^2 \rightarrow D^2$ stetig. Dann hat h einen Fixpunkt.*

2 HOMOTOPIE

Beweis. Widerspruchsbeweis. Wenn $h(x) \neq x \forall x \in D^2$. Definiere $r(x) \in S^1$ als den Punkt, wo der Strahl mit Richtung $h(x) - x$ den Rand schneidet. Also gilt $r : D^2 \rightarrow S^1$, $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ (r ist eine Retraktion von D^2 auf S^1). Sei $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$ die Inklusionsabbildung. Nach Proposition 2.4.10 sind $r_* : \pi_1(D^2, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1, x_0)$, $\iota_* : \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(D^2, x_0)$ Homomorphismen. Es ist $r \circ \iota = \text{id}_{S^1} \implies r_* \circ \iota_* = (\text{id}_{S^1})_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, x_0)}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{S^1} & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \pi_1(S^1, x_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(D^2, x_0) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(S^1, x_0) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \mathbb{Z} & & \{e\} & & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

$\implies \text{id}_{\mathbb{Z}}$ faktorisiert durch $\{e\}$. Widerspruch. ■

2.6.5 Satz (Borsuk-Ulam). Sei $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann $\exists x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.

Beweis. Widerspruchsbeweis. Wenn $f(x) \neq f(-x) \forall x \in S^2$, definiere

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \in S^1$$

$\implies g : S^2 \rightarrow S^1$ ist stetig. Sei $\eta : I \rightarrow S^2$ die Schleife $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0) \in S^2 \subset \mathbb{R}^2 \implies h := g \circ \eta$ ist eine Schleife in S^1 . Wir setzen: $\{s + 1/2\} = s + 1/2 \pmod{1}$ ist der Bruchteil von $s + 1/2$. Es gilt $g(-x) = -g(x) \forall x \in S^2 \implies h(\{s + 1/2\}) = -h(s)$, denn

$$h(s + 1/2) = g(\eta(s + 1/2)) = g((\cos(2\pi s + \pi), \sin(2\pi s + \pi), 0)) = g(-\eta(s)) = -h(s)$$

und $h(0) = h(1) \implies$ wenn $\tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von h ist, dann gilt $\tilde{h}(\{s + 1/2\}) = \tilde{h}(s) + q_s + 1/2$, wobei $q_s \in \mathbb{Z}$ ungerade. Es gilt $\mathbb{Z} \ni q_s = \tilde{h}(\{s + 1/2\}) - \tilde{h}(s) - 1/2$ stetig $\implies q_s = q \forall s \in I \implies \tilde{h}(\{s + 1/2\}) - \tilde{h}(s) = (2q + 1)/2$, also gilt $\tilde{h}(1) - \tilde{h}(0) = 2q + 1 \neq 0$ (weil ungerade) $\implies [h] \neq [1]$ (sonst wäre $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(0)$). Aber $e \neq [h] = [g \circ \eta] = g_*([\eta])$. Aber $[\eta] = e \in \pi_1(S^2, (1, 0, 0))$, weil man η über den "Nordpol" zusammenziehen kann. (Seien E_t Ebenen durch $(1, 0, 0)$ mit Normalenvektor $(\sin t, 0, \cos t)$ für $0 \leq t \leq \pi/2$, $\gamma_t :=$ Schleife an $(1, 0, 0)$ mit $\gamma_t(I) = E_t \cap S^2$, einmal durchgelaufen). Widerspruch. ■

2.6.6 Proposition. Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Dann gilt: $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

Beweis. Jede Schleife γ in $X \times Y$ an (x_0, y_0) definiert durch Verknüpfung mit Projektionen $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$, $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$, $(x, y) \mapsto y$ zwei Schleifen $\pi_X \circ \gamma$, $\pi_Y \circ \gamma$. Umgedreht: ein Paar $(\gamma_x, \gamma_y) \in \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0)$ definiert Schleife $\gamma(s) := (\gamma_x(s), \gamma_y(s)) \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$. Diese Entsprechung

respektiert Homotopien und Verknüpfungen (nachzurechnen) $\implies (\pi_X)_* \times (\pi_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ist ein Isomorphismus. ■

2.6.7 Korollar. $\pi_1(\Pi^n) = \pi_1(\overbrace{S^1 \times \dots \times S^1}^{n\text{-mal}}) \cong \mathbb{Z}^n$.

6. Vorlesung, 27.10.2016

7. Vorlesung, 03.11.2016

2.7 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Wiederholung: Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung ($p(y_0) = x_0$), dann ist $p_* : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$, $[\gamma] \mapsto [p \circ \gamma]$ der induzierte Gruppenhomomorphismus.

2.7.1 Proposition. p_* ist injektiv, $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ ist die Untergruppe der Homotopieklassen von Schleifen γ , deren Hochhebung $\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ auch Schleife ist.

Beweis. Sei $\hat{\gamma} \in \Omega(Y, y_0)$ mit $p_*([\hat{\gamma}]) = e \implies p \circ \hat{\gamma} = \gamma \sim \underline{x_0}$. Wegen der Eindeutigkeit der Hochhebung gilt $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$ (Hochhebung von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$). Homotopiehochhebung liefert eine Homotopie von $\tilde{\gamma}$ zu einer Hochhebung von $\underline{x_0}$, die nach Eindeutigkeit der Hochhebung gleich $\underline{y_0}$ ist $\implies \hat{\gamma} = \underline{y_0} \implies [\hat{\gamma}] = e \in \pi_1(Y, y_0)$. p_* ist also injektiv. Wenn $[\gamma] \in \text{Im}(p_*) \implies [\tilde{\gamma}] \in \pi_1(Y, y_0)$, weil $p_*([\tilde{\gamma}]) = [\gamma] \implies \tilde{\gamma} \in \Omega(Y, y_0)$. ■

Frage: Sei $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$, $\Lambda < \Gamma$ Untergruppe. Gibt es eine Überlagerung $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ mit $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = \Lambda$?

2.7.2 Beispiel. $(X, x_0) = (S^1, 1) \implies \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} =: \Gamma$, jedes $\Lambda < \mathbb{Z}$ hat die Form $n\mathbb{Z}$. Welche Überlagerung gehört zu $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$?

- $p_n : (S^1, 1) \longrightarrow (S^1, 1)$, $z \mapsto z^n \implies (p_n)_*([\omega]) = [\omega^n] \implies (p_n)_*(\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$.
- Sei $n = 0$, d.h. wir betrachten $0 < \mathbb{Z}$. Dann ist $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ die zugehörige Überlagerung.

2.7.3 Definition. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Eine Überlagerung $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ heißt *universelle Überlagerung*, falls $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{e\}$.

Bemerkung: Es ist sinnvoll, X als wegzusammenhängend vorauszusetzen (alles hängt nur von der Wegzusammenhangskomponente von x_0 ab).

Welche Eigenschaften von X sind notwendig für existenz einer universellen Überlagerung? Sei $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine universelle Überlagerung, sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $\tilde{\gamma} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ eine Hochhebung von γ (also setzen wir voraus, dass γ zu einer Schleife hochgehoben wird). Dann ist $\tilde{\gamma} \sim \underline{\tilde{x}_0}$, weil \tilde{X} einfach zusammenhängend ist. Wenn $U \ni x_0$ eine Umgebung von x_0 derart ist, dass $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in F} V_\alpha$ mit $p : V_\alpha \longrightarrow U$ Homöomorphismus, dann liegt $\tilde{x}_0 \in V_{\alpha_0}$, also hebt sich jede Schleife $\gamma \in \Omega(U, x_0)$ zu $\tilde{\gamma} \in \Omega(V_{\alpha_0}, \tilde{x}_0)$. D.h. $\tilde{\gamma} \sim \underline{\tilde{x}_0} \implies \gamma \sim \underline{x_0}$.

2 HOMOTOPIE

Also gilt: Für jede offene Teilmenge $W \subset X$ gibt es eine offene Teilmenge $U \subset W \subset X$ s.d. jede Schleife $\gamma \in \Omega(U, x)$ homotop zur konstanten Schleife \underline{x} ist. Dies ist eine Eigenschaft von X , die notwendig für die Existenz von einer universellen Überlagerung ist. Wenn X diese erfüllt, heißt X *semilokal einfach zusammenhängend*.

2.7.4 Definition. X heißt lokal *wegzusammenhängend*, wenn $\forall W \subset X$ offen eine offene Teilmenge $U \subset W$ ex. s.d. U *wegzusammenhängend* ist.

Bemerkung: CW-Komplexe erfüllen beide Eigenschaften automatisch (sie sind lokal zusammenziehbar, also hat jeder Punkt eine zusammenziehbare Umgebung).

Sei X ein *wegzusammenhängender*, *lokal wegzusammenhängender*, *semilokal einfach zusammenhängender* Raum, $x_0 \in X$ fest. Sei

$$\tilde{X} := \{[\gamma] \mid \gamma : I \longrightarrow X \text{ Weg mit } \gamma(0) = x_0\},$$

$p : \tilde{X} \longrightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, $\tilde{x}_0 := \underline{x_0} \in \tilde{X}$. Die Abb. p ist wohldefiniert und surjektiv, da X *wegzusammenhängend*. Wir brauchen eine Topologie auf \tilde{X} , s.d. $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung ist. Dazu betrachten wir:

$$\mathcal{U} := \{U \subset X \text{ offen, wegzusammenhängend} \mid \iota_* : \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X) \text{ trivial}\}.$$

Bemerkung: $U \in \mathcal{U}$, $V \subset U$ offen, *wegzusammenhängend* $\implies V \in \mathcal{U}$ ($\iota_*^V : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X)$ ist trivial, weil ι_*^U trivial).

Behauptung. Sei X *lokal wegzusammenhängend*, *semilokal einfach zusammenhängend* $\implies \mathcal{U}$ ist eine Basis der Topologie auf X .

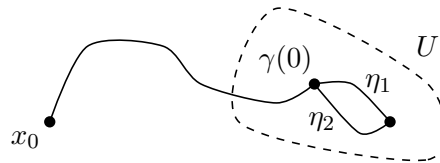
Beweis (der Behauptung). Es reicht zu zeigen: $\forall W \subset X$ offen, $\exists U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset W$. Sei W gegeben. Finde $U' \subset W$ s.d. jede Schleife in U' homotop zur konstanten Schleife in X ist (also $\iota_* : \pi_1(U') \longrightarrow \pi_1(X)$ ist trivial) und finde für dieses U' eine *wegzusammenhängende* offene Teilmenge U . Es folgt $U \in \mathcal{U}$, weil

$$\begin{array}{ccc} \iota_*^U : \pi_1(U) & \longrightarrow & \pi_1(X) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \pi_1(U') & \end{array}$$

■

Wir beweisen nun den nächsten Satz. Sei $U \in \mathcal{U}$ und $[\gamma] \in \tilde{X}$ mit $\gamma(1) \in U$. Definiere

$$U_{[\gamma]} := \{[\eta \cdot \gamma] \mid \eta : I \longrightarrow X \text{ mit } \eta(0) = \gamma(1) \text{ und } \eta(I) \subset U\}$$



2 HOMOTOPIE

(wohldefiniert, weil Homotopie verträglich mit Verknüpfung ist). Die Abbildung

$$p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$$

ist surjektiv, weil U wegzusammenhängend ist, auch injektiv, weil wenn $(\eta_1 \cdot \gamma)(1) = (\eta_2 \cdot \gamma)(1) \implies [\eta_1 \cdot \gamma] = [\eta_2 \cdot \gamma]$. Sei jetzt \mathcal{T} die Topologie auf \tilde{X} , die $\{U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U}, [\gamma] \in \tilde{X}\}$ als Basis hat. Dann gilt: $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ ist ein Homöomorphismus (wenn $V_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma]} \iff V \subset U$). Also ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig, weil Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist. Sei jetzt $U \in \mathcal{U}$, wähle $x \in U$.

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma]} U_{[\gamma]}.$$

Weil: Sei $U_{[\gamma_1]} \cap U_{[\gamma_2]} \neq \emptyset$. D.h. $[\eta_1 \cdot \gamma_1] = [\eta_2 \cdot \gamma_2]$ für gewisse $\eta_1, \eta_2 : I \longrightarrow U$, $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow X$. Sei $[\eta' \cdot \gamma_1] \in U_{[\gamma_1]}$. Dann gilt

$$[\eta' \cdot \gamma_1] = [\eta' \cdot \bar{\eta}_1 \cdot \eta_1 \cdot \gamma_1] = [\eta' \cdot \bar{\eta}_1 \cdot \eta_2 \cdot \gamma_2] = [\eta'' \cdot \gamma_2] \in U_{[\gamma_2]}$$

$\implies U_{[\gamma_1]} = U_{[\gamma_2]}$. Also: $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ ist eine Überlagerung. Bleibt zu zeigen: \tilde{X} ist einfach zusammenhängend.

- (1) \tilde{X} ist wegzusammenhängend. Sei $[\gamma] \in \tilde{X}$. Wir brauchen einen Weg $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{\gamma}(1) = \gamma$. Def.

$$\tilde{\gamma}(t) := s \mapsto \begin{cases} \gamma(s) & \text{falls } s \in [0, t], \\ \gamma(t) & \text{falls } s \in [t, 1] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(tautologische} \\ \text{Definition)} \end{array}$$

$$\implies \tilde{\gamma}(0) = \underline{x}_0, \tilde{\gamma}(1) = \gamma.$$

- (2) Es reicht zu zeigen: $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{e\} < \pi_1(X, x_0)$, da p_* injektiv ist. Das Bild $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ besteht aus Homotopieklassen $[\gamma]$ von Wegen $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, deren Hochhebung $\tilde{\gamma} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Wenn $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, sei $\hat{\gamma} : I \longrightarrow \tilde{X}$ wie oben definiert. $\hat{\gamma}$ ist eine Hochhebung von γ mit $\hat{\gamma}(0) = \underline{x}_0$ und $\{\hat{\gamma}(t)\}_{t \in I}$ ist eine Homotopie zwischen \tilde{x}_0 und $\tilde{\gamma}$. D.h.: $[\tilde{\gamma}] = [\underline{x}_0] \implies \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{e\}$.

2.7.5 Satz. Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum. Dann existiert eine universelle Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ (für jedes $x_0 \in X$).

Bemerkung: Ab jetzt betrachten wir nur Räume, die lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend sind (s.d. jede Wegzusammenhangskomponente eine universelle Überlagerung besitzt).

Beobachtung: Sei $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Dann wirkt Γ von rechts auf (\tilde{X}, \tilde{x}_0) durch

$$\begin{array}{ccc} [\gamma] \cdot [\beta] & = & [\gamma \cdot \beta] \\ \cap & & \cap \\ \tilde{X} & & \Gamma \end{array}$$

¹Vereinigung über Homotopieklassen von Wegen $\gamma : I \longrightarrow X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x \in U$

Letztes mal haben wir gesehen: Wenn (X, x_0) ein hinreichend guter topologischer Raum ist, dann existiert eine universelle Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$. Um aus \tilde{X} eine andere Überlagerung zu konstruieren, brauchen wir folgenden Begriff: Sei Γ eine Gruppe, Y ein topologischer Raum.

2.7.6 Definition. • $\text{Homeo}(Y) := \{f : Y \rightarrow Y \mid f \text{ ist Homöomorphismus}\}.$

- Eine *Wirkung* von Γ auf Y ist ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(Y)$.
Bezeichnung: $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y$.

2.7.7 Beispiel. Sei $\Gamma := \mathbb{Z}$. Dann ist $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{R})$, $n \mapsto (x \mapsto x + n)$ eine Wirkung.

Sei $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y$ eine Wirkung. Sei $R_{\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y} := \{(y, \alpha(g)(y)) \mid y \in Y, g \in \Gamma\}.$

$$\Gamma \backslash Y := R_{\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y} \backslash Y = \{y \sim \alpha(g)(y), y \in Y, g \in \Gamma\}$$

heißt *Quotientenraum* der Wirkung (der Raum aller Orbits).

Bemerkung: Der obige Begriff der Wirkung heißt manchmal Linkswirkung, weil die Abbildung α eine Abbildung $\tilde{\alpha} : \Gamma \times X \rightarrow X$, $(g, y) \mapsto \alpha(g)(y)$ induziert. $\tilde{\alpha}$ erfüllt $\alpha(gh, x) = \tilde{\alpha}(g, \tilde{\alpha}(h, x))$. Wenn die Wirkung fest ist, schreibt man $g \cdot x$ für $\alpha(g)(x)$. Entsprechend gibt es den Begriff der Rechtswirkung $\tilde{\beta} : X \times \Gamma \rightarrow X$ mit $(x, g) \mapsto \tilde{\beta}(x, g)$ mit Abkürzung $\tilde{\beta}(x, g) = x \cdot g$. Es gilt $\tilde{\beta}(x, gh) = \tilde{\beta}(\tilde{\beta}(x, g), h)$. Zu einer Rechtswirkung $\tilde{\beta}$ gehört auch ein Homomorphismus $\beta : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(Y)$, $g \mapsto \tilde{\beta}(x, g^{-1})$.

Rechtswirkungen bezeichnet man durch $Y \overset{\beta}{\curvearrowright} \Gamma$. Entsprechend bezeichnet man den Quotientenraum durch Y / Γ für die Rechtswirkung.

2.7.8 Beispiel. Sei G eine Gruppe, $Y := G$. Dann ist $L : G \times Y \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ eine Linkswirkung, $R : Y \times G \rightarrow G$, $(h, g) \mapsto h \cdot g$ ist eine Rechtswirkung.

2.7.9 Beispiel. Sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\alpha_\omega : \Gamma \curvearrowright X$ gegeben durch $\alpha_\omega(n)(z) := e^{i\omega n} \cdot z$ für $\omega \in \mathbb{R}$.

- $\omega/2\pi \in \mathbb{Q} \implies$ jede Bahn ist endlich $\implies S^1 / \mathbb{Z} \cong S^1$. (Eigentlich $\cong ([0, 1])$ aber 0 ist mit 1 verklebt.)
- $\omega/2\pi \notin \mathbb{Q} \implies$ jede Bahn ist dicht in S^1 . $X_\omega := S^1 / \mathbb{Z}$ ist schwer verständlich. Die Topologie auf X_ω viel besser: Wenn $f : X_\omega \rightarrow Z$ stetig $\implies \bar{f} := f \circ q$ ist stetig (Eigenschaft der Quotiententopologie—die feinste Topologie, für die die Abbildung q stetig ist).

$$\begin{array}{ccc} S^1 & & \\ q \downarrow & \searrow \bar{f} = f \circ q & \\ S^1 / \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

2 HOMOTOPIE

Aber \bar{f} ist nach Konstruktion \mathbb{Z} -invariant: $\bar{f} \circ \alpha_\omega(n) = \bar{f} \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{f}(\alpha_\omega(n)(x)) = \bar{f}(x) \forall x \in S^1, \forall n \in \mathbb{Z} \implies \bar{f}(y) = \bar{f}(x) \forall x, y \in S^1,$$

da die Bahn von x dicht ist und \bar{f} stetig $\implies \bar{f}$ ist konstant $\implies f$ ist konstant $\implies X_\omega$ hat triviale Topologie (die antidiskrete Topologie) und ist somit z.B. nicht Hausdorff.

2.7.10 Definition. Sei X ein topologischer Raum, $\alpha : \Gamma \curvearrowright X$ eine Wirkung. Dann heißt α eine *Überlagerungswirkung*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \ni x$ hat s.d. $\forall g_1 \neq g_2 \in \Gamma$ gilt $g_1 U \cap g_2 U = \emptyset$ ($g_1 U = \alpha(g_1)(U)$, $g_2 U = \alpha(g_2)(U)$).

2.7.11 Proposition. $\alpha : \Gamma \curvearrowright X$ ist eine Überlagerungswirkung $\implies q : X \rightarrow \Gamma \backslash X$ ist eine Überlagerung.

Beweis. Sei $x \in X$, $U \ni x$ aus der Def. der Überlagerungswirkung. Dann gilt für $V := q(U)$.

$$q^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in \Gamma} gU,$$

denn:

- $q(x) \in V \iff \exists g \in \Gamma$ s.d. $g \cdot x \in U$ (Def. des Quotientenraumes).
- die Vereinigung ist disjunkt, denn: $g_1 U \cap g_2 U \neq \emptyset \implies g_1 = g_2$ nach Definition eine Überlagerungswirkung.
- $q|_{gU} : gU \rightarrow V$ ist ein Homöomorphismus nach Definition der Quotiententopologie. (Inverse stetig wegen Injektivität).

■

Sei (X, x_0) topologischer Raum, (\tilde{X}, \tilde{x}_0) eine universelle Überlagerung, $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Wir haben folgende Rechtswirkung von Γ auf (\tilde{X}, \tilde{x}_0) :

$$\tilde{\beta} : \tilde{X} \times \Gamma \rightarrow \tilde{X}, ([\gamma], [\delta]) \rightarrow [\gamma \cdot \delta].$$

Dies ist tatsächlich eine Wirkung, denn $[(\gamma \cdot \delta_1) \cdot \delta_2] = [\gamma \cdot (\delta_1 \cdot \delta_2)]$. Es ist ebenfalls eine Überlagerungswirkung: Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gibt es eine Umgebung $U_{[\gamma]}$ (bei der Konstruktion von \tilde{X} benutzt) mit: $[\gamma_1] \neq [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0) \implies U_{[\gamma_1]} \cdot \gamma_1 \cap U_{[\gamma_2]} \cdot \gamma_2 = \emptyset$ (wurde bei Konstruktion von \tilde{X} bewiesen).

2.7.12 Korollar. Sei $\Lambda < \Gamma := \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Dann gilt: die Abbildung $q_\Lambda : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)/\Lambda =: X_\Lambda$ ist eine Überlagerung.

Also haben wir:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}, \tilde{x}_0) & & \\ \tilde{p} \downarrow & \searrow q_\Lambda & \\ (X, x_0) & \xleftarrow{p_\Lambda} & (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \end{array}$$

Wenn $\tilde{x} \cdot g = \tilde{y}$ für ein $g \in \Lambda$ mit $\tilde{x} = [\gamma]$, $\tilde{y} = [\gamma']$, $g = [\delta]$. Dann $[\gamma'] = [\gamma \cdot \delta] \implies \gamma'(1) = \gamma(1) \implies \tilde{p}(\tilde{y}) = \tilde{p}(\tilde{x}) \implies \exists p_\Lambda : (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig (nach universellen Eigenschaft von Quotientenraum) $p_\Lambda([\gamma] \cdot \Lambda) = \gamma(1)$.

2.7.13 Proposition. p_Λ ist eine Überlagerung.

Beweis. Zu zeigen: $\forall x \in X \exists U \ni x$ s.d. $p_\Lambda^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ s.d. $p_\Lambda|_{V_j} : V_j \xrightarrow{\cong} U$ ein Homöomorphismus. Nimm U aus der Überlagerungseigenschaft von $\tilde{p} \implies \tilde{p}(U) = \bigsqcup_{k \in K} \tilde{V}_k \subset \tilde{X}$ s.d. $\tilde{p}|_{\tilde{V}_k}$ Homöomorphismus $\implies V_j := q_\Lambda(\tilde{V}_k)$, wo \tilde{V}_{k_j} einzeln (aus jeder Λ -Bahn wird eine gewählt) aus Λ -Bahnen von \tilde{V}_k 's gewählt werden. ■

2.7.14 Proposition. $(p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) = \Lambda < \pi_1(X, x_0)$ (insbesondere gibt es für jede $\Lambda < \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung, die Λ realisiert).

Beweis. Wir haben folgende Charakterisierung von $(p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda))$: $[\gamma] \in (p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) \iff \tilde{\gamma}$ ist eine Schleife in X_Λ (Hochhebung nach X_Λ). D.h. $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) = x_0^\Lambda$. Sei $\tilde{\gamma}$ die Hochhebung von γ nach \tilde{X} (es gilt: $q_\Lambda(\tilde{\gamma}) = \gamma$).

$\gamma(1) = x_0^\Lambda \iff \tilde{\gamma}(1)$ liegt in der Λ -Bahn von \tilde{x}_0 , also $\exists [\delta] \in \Lambda$ s.d. $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0 \cdot [\delta] = [\delta]$. Aber $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma] \in \tilde{X}$ (wenn $\gamma : I \longrightarrow X$ Weg, ist $\tilde{\gamma} : I \longrightarrow \tilde{X}$, $t \mapsto [\gamma|_{[0,t]}$ die Hochhebung von γ) $\implies [\gamma] = [\delta] \in \Lambda$. ■

2.7.15 Definition. Zwei Überlagerungen $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, $p' : (Y', y'_0) \longrightarrow (X, x_0)$ heißen isomorph, wenn $\exists h : Y \longrightarrow Y'$ Homöomorphismus mit $p' \circ h = p$.

Frage: Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine (stetige) Abbildung. Wann existiert eine Hochhebung $\bar{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ($p \circ \bar{f} = f$)?

Beobachtung: Wenn \bar{f} existiert, dann gilt: $f_* = p_* \circ \bar{f}_* : \pi_1(Z, z_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \implies \text{Im } f_* \subset \text{Im } p_* \subset \pi_1(X, x_0)$.

2.7.16 Proposition. Sei p, f wie oben, Z wegzusammenhängend. Eine Hochhebung \bar{f} existiert genau dann, wenn $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$.

Beweis. Notwendigkeit erledigt. Sei $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ gegeben, sei $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Sei $z \in Z$ gegeben, sei $\gamma_z : I \longrightarrow Z$ ein Weg von z_0 nach z . $f \circ \gamma_z$ ist ein Weg in X mit Anfang x_0 . Sei $\bar{\gamma}_z$ die Hochhebung von $f \circ \gamma_z$ nach Y mit Anfang y_0 . Sei $\bar{f}(z) := \bar{\gamma}_z(1)$. Dann $p \circ \bar{f}(z) = f(z)$ nach Eigenschaften von $\bar{\gamma}_z$.

Frage: Warum ist \bar{f} wohldefiniert? Sei γ'_z ein anderer Weg von z_0 nach z , $f \circ \gamma'_z, \bar{\gamma}'_z$ entsprechend. Zu zeigen: $\bar{\gamma}_z(1) = \bar{\gamma}'_z(1)$. Es ist $\gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z \in \Omega(Z, z_0) \implies f \circ (\gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z) \in \Omega(X, x_0)$. Also $[f \circ (\gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z)] = f_*([\gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z]) \subset \text{Im } p_*$ nach Voraussetzung $\implies \gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z$ hebt sich zu einer Schleife hoch; nach Eindeutigkeit ist diese Schleife gleich $\bar{\gamma}'^{-1}_z \circ \bar{\gamma}_z \implies \bar{\gamma}_z(1) = \bar{\gamma}'_z(1)$. ■

2 HOMOTOPIE

2.7.17 Satz. Seien $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, $p' : (Y', y'_0) \longrightarrow (X, x_0)$ wegzusammenhängende Überlagerungen mit $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = p'_*(\pi_1(Y', y'_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. Dann gilt: $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ und $p' : (Y', y'_0) \longrightarrow (X, x_0)$ sind isomorph.

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & \xrightleftharpoons{\bar{p}'} & (Y', y'_0) \\ & \searrow \bar{p} \quad \swarrow p' & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

Beweis. Satz über Hochhebung von Abbildungen liefert Hochhebungen $\bar{p} : (Y, y_0) \longrightarrow (Y', y'_0)$, $\bar{p}' : (Y', y'_0) \longrightarrow (Y, y_0)$. Wir wollen zeigen, dass $\bar{p} \circ \bar{p}' = \text{id}_{Y'}$, $\bar{p}' \circ \bar{p} = \text{id}_Y$. Dazu: $\bar{p} \circ \bar{p}'(y'_0) = y'_0$, d.h. die Menge $A' := \{y' \in Y' \mid \bar{p} \circ \bar{p}' = y'\} \neq \emptyset$. Wir zeigen: A' ist offen und abgeschlossen:

- A' abgeschlossen, denn $A' = ((\bar{p} \circ \bar{p}') \times \text{id})^{-1}(\Delta)$, wobei $\Delta := \{(y', y') \mid y' \in Y'\} \subseteq Y' \times Y'$.
- A' ist offen, denn $\bar{p} \circ \bar{p}' : (Y', y'_0) \longrightarrow (Y', y'_0)$ ist eine Hochhebung von der $p' : (Y', y'_0) \longrightarrow (X, x_0)$, denn $p' \circ \bar{p} \circ \bar{p}' = p \circ \bar{p}' = p'$.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{id}} & (Y', y'_0) \\ & \searrow \bar{p} \circ \bar{p}' & \downarrow p' \\ (Y', y'_0) & \xrightarrow{p'} & (X, x_0) \end{array}$$

Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge s.d. $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ s.d. $p'|_{V_j} : V_j \xrightarrow{\cong} U$ lokaler Homöomorphismus ist. Sei $y' \in Y'$ s.d. $p'(y') \in U$, s.d. $\text{id}(y') = \bar{p} \circ \bar{p}'(y')$. Es $\exists j$ s.d. $y' \in V_j$. Daher bildet $\bar{p} \circ \bar{p}'$ das V_j in V_j ab. Das heißt, dass $\bar{p} \circ \bar{p}'|_{V_j} = \text{id}|_{V_j} \implies A'$ ist offen (mit jedem Punkt enthält sie eine Umgebung). Nun ist Y' wegzusammenhängend $\implies A' = Y' \implies \bar{p} \circ \bar{p}' = \text{id}$; aus Symmetriegründen folgt auch $\bar{p}' \circ \bar{p} = \text{id}_Y$. ■

2.7.18 Satz (Klassifikationssatz für Überlagerungen). Es gibt eine 1 : 1-Korrespondenz zwischen

$$\left(\begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von Überlagerungen} \\ p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0) \text{ (wegzusammenhängend)} \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Untergruppen} \\ \Lambda < \pi_1(X, x_0) \end{array} \right)$$

Die Korrespondenz ordnet einer Überlagerung $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ die Untergruppe $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ zu.

Beweis. Es folgt aus

- (1) Existenz von Überlagerungen zu jeder Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$.
- (2) Überlagerungen, die zu gleicher Untergruppe gehören, sind isomorph.

■

2.7.19 Beispiel (Klassifikation von Überlagerungen von S^1). Wir wissen schon: $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ ist von der Form $n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 0 : \Lambda = 0 < \mathbb{Z}$. Dazu gehört die universelle Überlagerung $\tilde{p} : \mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$.
- $n \neq 0 : \Lambda = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}, p_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$.

Notation: $\Gamma := \pi_1(X, x_0), \Lambda < \Gamma \implies (X_\Lambda, x_0^\Lambda)$ ist die (eindeutig bestimmte) wegzusammenhängende Überlagerung, die zu Λ gehört.

Erinnerung:

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X}, \tilde{x}_0) = (X_{\{1\}}, x_0^{\{1\}}) & & \\
 \tilde{p} \swarrow & & \searrow q_\Lambda \\
 (Y, y_0) & \xleftarrow{p_\Lambda} & (X_\Lambda, x_0^\Lambda)
 \end{array}$$

2.7.20 Lemma. $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \Gamma$, dann gilt: es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 (X_{\Lambda_1}, x_0^{\Lambda_1}) & & \\
 \downarrow p_{\Lambda_1} & \searrow \exists q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} \text{ Überlagerung} & \\
 & & (X_{\Lambda_2}, x_0^{\Lambda_2}) \\
 & \swarrow p_{\Lambda_2} & \\
 (X, x_0) & &
 \end{array}$$

Entsprechend: Wenn es eine stetige Abbildung $q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1}$ gibt, die das obige Diagramm kommutativ macht, dann gilt $\Lambda_1 < \Lambda_2$.

Beweis. $X_{\Lambda_1} = \tilde{X} / \Lambda_1, X_{\Lambda_2} = \tilde{X} / \Lambda_2$. Wenn $\Lambda_1 < \Lambda_2$, dann erhalten wir eine kanonische stetige Abbildung

$$q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} : X_{\Lambda_1} = \tilde{X} / \Lambda_1 \rightarrow X_{\Lambda_2} = \tilde{X} / \Lambda_2,$$

$p_{\Lambda_1} = p_{\Lambda_2} \circ q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1}$ nach Konstruktion von $p_{\Lambda_1}, p_{\Lambda_2}$. Die Umkehrung folgt aus Eindeutigkeit der Korrespondenz zwischen Gruppen mit Überlagerungen. ■

2.7.21 Definition. Sei $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung mit (X, x_0) wegzusammenhängend. Die Mächtigkeit von $p^{-1}(x_0)$ heißt *Anzahl der Blätter* der Überlagerung (wohldefiniert, da $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x)| \forall x \in X$ wegen X zusammenhängend).

2.7.22 Lemma. Sei $p_\Lambda : (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung (zur $\Lambda < \pi_1(X, x_0) =: \Gamma$). Dann gilt: $|p_\Lambda^{-1}(x_0)| = |\Gamma : \Lambda|$.

Beweis. Sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $\tilde{\gamma} : I \rightarrow X_\Lambda$ die Hochhebung davon. Wenn $[\lambda] \in \Lambda \implies \tilde{\lambda} \in \Omega(X_\Lambda, x_0^\Lambda)$, das heißt, $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\lambda}$ hat gleichen Endpunkt wie $\tilde{\gamma}$. Definiere jetzt $\phi : \Gamma / \Lambda \rightarrow p_\Lambda^{-1}(x_0)$, $[\gamma] \cdot \Lambda \mapsto \tilde{\gamma}(1)$. Abb. ϕ ist bijektiv, denn:

- ϕ ist injektiv: $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) \implies \tilde{\gamma}'^{-1} \circ \tilde{\gamma} \in \Omega(X_\Lambda, x_0^\Lambda) \implies [\gamma'^{-1} \circ \gamma] \in \Lambda \implies [\gamma] \in [\gamma'] \cdot \Lambda$.
- ϕ ist surjektiv: X_Λ wegzusammenhängend $\implies \forall y \in p^{-1}(x_0) \exists \tilde{\gamma} : I \rightarrow X_\Lambda$, ein Weg von x_0^Λ nach y ; $p_\Lambda \circ \tilde{\gamma} \in \Omega(X, x_0)$ mit Hochhebung $\tilde{\gamma}$, $\phi([p_\Lambda \circ \tilde{\gamma}] \cdot \Lambda) = \tilde{\gamma}(1) = y$.

■

2.7.23 Korollar. Die Anzahl der Blätter der universellen Überlagerung ist gleich $|\pi_1(X, x_0)|$.

2.7.24 Definition. Sei $(Y, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ eine Überlagerung. Eine Decktransformation $h : Y \rightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus mit $p \circ h = p$ (anders gesagt: $h : (Y, y_0) \rightarrow (Y, h(y_0))$ ist ein Isomorphismus von Überlagerungen).

Die Decktransformationen bilden eine Gruppe, die durch $\text{Aut}(p)$ bezeichnet wird.
Frage: Was ist $\text{Aut}(p_\Lambda)$ in Termen von $\Lambda < \pi_1(X, x_0)$?

2.7.25 Definition. Eine Überlagerung $(Y, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ heißt *normal*, wenn die Gruppe von Decktransformationen $\text{Aut}(p)$ transitiv auf $p^{-1}(x_0)$ wirkt ($\forall x'_0 \in p^{-1}(x_0) \exists h \in \text{Aut}(p)$ mit $h(x_0) = x'_0$).

2.7.26 Proposition. Sei $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, s.d. beide Räume wegzusammenhängend sind, sei $\Lambda := p_*(\pi_1(Y, y_0)) < \pi_1(X, x_0) =: \Gamma$ die zugehörige Untergruppe. Dann gilt:

- (1) p ist normal $\iff \Lambda \triangleleft \Gamma$ Normalteiler.
- (2) $\text{Aut}(p) \cong N(\Lambda) / \Lambda$, wobei

$$N(\Lambda) := \{g \in \Gamma \mid g\Lambda g^{-1} = \Lambda\},$$

der Normalisator von Λ in Γ .

- (3) Insbesondere gilt: p normal $\implies \text{Aut}(p) \cong \Gamma / \Lambda$,

$$\text{Aut}(\tilde{p}) \cong \Gamma.$$

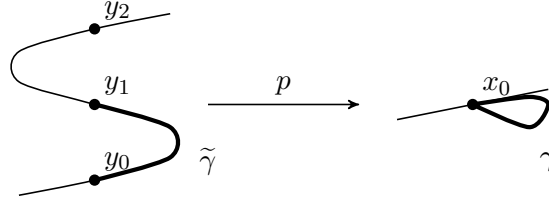
2.7.27 Korollar. $\text{Aut}(\tilde{p}) \cong \pi_1(X, x_0) = \Gamma$.

9. Vorlesung, 10.11.2016

10. Vorlesung, 17.11.2016

Erinnerung: p heißt normal, wenn $\text{Aut}(p)$ transitiv auf $p^{-1}(x_0)$ wirkt, also $\forall y \in p^{-1}(x_0) \exists h \in \text{Aut}(p)$ s.d. $h(y_0) = y_1$.

2 HOMOTOPIE



Beweis (der Proposition). Sei $h \in \text{Aut}(p)$, dann haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} h : (Y, y_0) & \longrightarrow & (Y, y_1) \\ & \searrow & \swarrow \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

$\Lambda = p_*\pi_1(Y, y_0) = p_*h_*\pi_1(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_1)$, weil h_* ein Isomorphismus ist.

Sei $\tilde{\gamma}$ ein Weg in Y von y_0 nach y_1 , $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$. Es gibt einen Isomorphismus $\phi_\gamma : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_1)$, $[\delta] \mapsto [\tilde{\gamma} \cdot \delta \cdot \tilde{\gamma}^{-1}]$.

p_* ist injektiv $\implies p_*\pi_1(Y, y_0)$ und $p_*\pi_1(Y, y_1)$ sind durch $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ konjugiert:

$$[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = p_*\pi_1(Y, y_1).$$

Wenn jetzt $h \in \text{Aut}(p)$ mit $h(y_0) = y_1$, so ist $p_*\pi_1(Y, y_1) = \Lambda$ nach obiger Beobachtung $\implies [\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = \Lambda \iff [\gamma] \in N(\Lambda)$.

Das heißt: Wenn p normal ist, nimm ein beliebiges $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, lifte das zu $\tilde{\gamma}$ in Y mit Anfang y_0 . Sei y_1 das Ende von $\tilde{\gamma}$. Nach Normalität von $p \exists h \in \text{Aut}(p)$ mit $h(y_0) = y_1 \implies [\gamma] \in N(\Lambda)$. Da $[\gamma]$ beliebig war, folgt $N(\Lambda) = \Gamma \implies \Lambda \trianglelefteq \Gamma$.

Umgekehrt: Wenn $\Lambda \trianglelefteq \Gamma$ normal, $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ gegeben. Nimm $\tilde{\gamma}$ in Y von y_0 nach $y_1 \implies \gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ erfüllt $[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = \Lambda$. Da $[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = p_*\pi_1(Y, y_1)$, $\exists h : (Y, y_0) \longrightarrow (Y, y_1)$ mit $p \circ h = p$. Aus Symmetriegründen existiert $g : (Y, y_1) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit $p \circ g = p$. Da h, g eindeutig sind und jeweils p hochheben, gilt $g \circ h = \text{id}$, $h \circ g = \text{id} \implies h \in \text{Aut}(p)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ h & & \\ & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\ & \text{---} & \text{id} & \text{---} & \\ & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{h} & (Y, y_1) & \xrightarrow{g} & (Y, y_0) \\ & \searrow p & \downarrow p & \swarrow p & \\ & & (X, x_0) & & \end{array}$$

Damit ist (1) bewiesen.

Für (2): Wie betrachten die Abbildung $\varphi : N(\Lambda) \longrightarrow \text{Aut}(p)$, $[\gamma] \mapsto h_{[\gamma]}$, $h_{[\gamma]}$ ist die eindeutig bestimmte Hochhebung

2 HOMOTOPIE

$$\begin{array}{ccc}
 & & (Y, y_1) \\
 & \nearrow h_{[\gamma]} & \downarrow p \\
 (Y, y_0) & \xrightarrow{p} & (X, x_0)
 \end{array}$$

wobei $y_1 = \tilde{\gamma}(1)$, $\tilde{\gamma}$ ist die Hochhebung von γ .

γ ist wohldefiniert:

- $\tilde{\gamma}(1)$ kommt nur auf $[\gamma]$ an (homotope Wege haben homotope Hochhebungen).
- $h_{[\gamma]} \in \text{Aut}(p)$ wie in (1). $h_{[\gamma]} \cdot h_{[\gamma]}^{-1}$ ist die Hochhebung der $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ und ist daher gleich id .
- φ ist ein Homomorphismus: $h_{[\gamma_2 \cdot \gamma_1]}$ und $h_{[\gamma_2]} \cdot h_{[\gamma_1]}$ heben $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ nach (Y, y_2) hoch \implies Gleichheit wegen Eindeutigkeit.
- φ ist surjektiv: Sei $h \in \text{Aut}(p)$,

$$\begin{array}{ccc}
 h : (Y, y_0) & \longrightarrow & (Y, y_1) \\
 & \searrow p & \swarrow p \\
 & (X, x_0) &
 \end{array}$$

Sei $\tilde{\gamma}$ ein Weg von y_0 nach y_1 in Y , $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$. Dann ist $h = h_{[\gamma]}$ nach Konstruktion.

- $\ker \varphi = \{[\gamma] \in N(\Lambda) \mid h_{[\gamma]} = \text{id}\} = \{[\gamma] \in N(\Lambda) \mid \tilde{\gamma}(1) = y_0\}$. (Λ besteht aus Schleifen unten, die sich zu Schleifen hochheben.) D.h. $\varphi : N(\Lambda) \rightarrow \text{Aut}(p)$ surjektiv, $\ker(\varphi) = \Lambda \implies \text{Aut}(p) \cong N(\Lambda)/\Lambda$ nach dem Homomorphiesatz. ■

Erinnerung: $\Gamma \curvearrowright Y$ ist eine Überlagerungswirkung. Dann ist $q : (Y, y_0) \rightarrow (Y/\Gamma, \overline{y_0})$ eine Überlagerung.

Beobachtung: Jedes $g \in \Gamma$ definiert ein Element $\alpha(g) \in \text{Aut}(q)$:

$$\begin{array}{ccc}
 h : (Y, y_0) & \xrightarrow{\alpha(g)} & (Y, \alpha(g)(y_0)) \\
 & \searrow q & \swarrow q \\
 & (Y/\Gamma, \overline{y_0}) &
 \end{array}$$

2.7.28 Proposition. *In der obigen Situation gilt:*

- (1) $\text{Aut}(q) \cong \Gamma$, wenn Y wegzusammenhängend.
- (2) $\Gamma \cong \pi_1(Y/\Gamma)/_{q_*\pi_1(Y)}$, wenn Y wegzusammenhängend ist.

Beweis. Die Überlagerung $q : (Y, y_0) \rightarrow (Y/\Gamma, \overline{y_0})$ ist normal, weil $q^{-1}(\overline{y_0}) = y_0 \cdot \Gamma$, und Γ wirkt darauf transitiv.

$$\text{Aut}(q) \cong \pi_1(Y/\Gamma)/_{q_*\pi_1(Y)}$$

2 HOMOTOPIE

nach dem Satz oben.

Nun haben wir: Wenn $h \in \text{Aut}(q)$

$$\begin{array}{ccc} h : (Y, y_0) & \longrightarrow & (Y, y_1) \\ & \searrow q & \swarrow q \\ & (Y/\Gamma, \overline{y_0}) & \end{array}$$

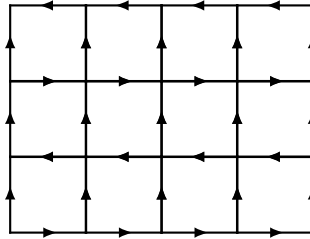
$\exists g \in \Gamma$ s.d. $y_1 = \alpha(g)y_0$. Aber dann ist $\alpha(g)$ auch eine Hochhebung von $q : (Y, y_0) \longrightarrow (Y/\Gamma, \overline{y_0})$ nach $(Y, y_1) \implies h = \alpha(g) \implies \text{Aut}(q) \cong \Gamma$. ■

2.7.29 Korollar. Wenn $\Gamma \curvearrowright Y$ eine Überlagerungswirkung ist, Y einfach zusammenhängend (Y wegzusammenhängend, $\pi_1(Y) \cong \{1\}$). Dann gilt:

$$\pi_1(Y/\Gamma) \cong \Gamma.$$

2.7.30 Beispiel. • Es ist $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/2$. Denn $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright S^n$ durch $t \cdot x = -x$ für $t = 1$.

- Sei $Y = \mathbb{R}^2$, dann $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong \Pi^2 \implies \pi_1(\Pi^2) \cong \mathbb{Z}^2$. Wirkung ist $t \cdot x := (x \mapsto x + t)$
- Sei $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ die Automorphismengruppe von diesen Graphen:



$$\mathbb{R}^2/\Gamma = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \uparrow \\ \longrightarrow \\ \downarrow \\ \longrightarrow \end{array} \\ \hline \end{array} = \text{die kleine Flasche } F, \pi_1(F) \cong \Gamma.$$

Frage: Gibt es für jede Gruppe Γ einen wegzusammenhängenden Raum X mit $\pi_1(X) \cong \Gamma$? Wir werden für diese Frage die Cayley-Graphen betrachten und daraus den Raum X wie oben konstruieren.

2.7.31 Definition. Sei Γ eine Gruppe, $S \subset \Gamma$ Teilmenge,

$$\langle S \rangle := \bigcup_{\Lambda < \Gamma, S \subseteq \Lambda} \Lambda$$

die durch S erzeugte Untergruppe von Γ . S heißt *Erzeugendenmenge* von Γ , wenn $\langle S \rangle = \Gamma$. (Übung: $\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$).

2.7.32 Beispiel. $\Gamma = (\mathbb{Z}, +)$, $S = (2, 4)$, $\langle S \rangle = 2\mathbb{Z}$. $S' = \{3, 5\} \implies \langle S' \rangle = \mathbb{Z}$.

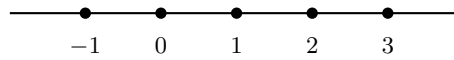
2.7.33 Definition. Sei Γ eine Gruppe, $S \subseteq \Gamma$, $\langle S \rangle = \Gamma$. $\text{Cay}(\Gamma, S)$ ist der Graph mit

- Ecken $V(\text{Cay}(\Gamma, S)) = \Gamma$,
- Kanten $E(\text{Cay}(\Gamma, S)) = \{(g, gs) \mid g \in \Gamma, s \in S\}$.

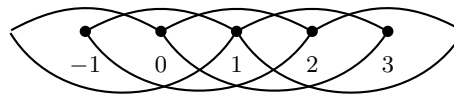
Entsprechend können wir $\text{Cay}(\Gamma, S)$ als einen 1-dimensionalen CW-Komplex auffassen (Ecken=0-Zellen, Kanten=1-Zellen).

2.7.34 Beispiel. $\Gamma = (\mathbb{Z}, +)$

- $S = \{1\}$:



- $S = \{2, 3\}$:



Die Linkswirkung von Γ auf sich selbst induziert eine Wirkung $\Gamma \curvearrowright \text{Cay}(\Gamma, S)$ ($g \in \Gamma = V(\text{Cay}(\Gamma, S))$, $\alpha(h)(g) = h \cdot g$).

$(g, gs) \in E(\text{Cay}(\Gamma, S)) \leadsto \alpha(h)(g, gs) = (h, hgs) \in E(\text{Cay}(\Gamma, S))$. Die Wirkung $\Gamma \curvearrowright \text{Cay}(\Gamma, S)$ ist eine Überlagerung (Übung).

Den Quotientenraum $\Gamma \backslash \text{Cay}(\Gamma, S)$ kann man leicht verstehen; Γ wirkt transitiv auf Γ , also bleibt im Quotienten nur eine Ecke $[1]$, an dieser Ecke bekommen wir $|S|$ Schleifen;

Sei X ein Punkt mit $|S|$ Schleifen. Was ist $\pi_1(X)$?

Beobachtung: Wenn $\pi_1(\text{Cay}(\Gamma, S)) \cong \{1\} \implies \pi_1(X_S) \cong \Gamma$ nach Proposition. $\pi_1(X_1) = \pi_1(\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})) \cong \mathbb{Z}$. Um $\pi_1(\text{Cay}(\mathbb{Z}, \{2, 3\}))$ zu berechnen, brauche ich eine Gruppe $\Gamma = \langle a, b \rangle$, s.d. $\pi_1(\text{Cay}(\Gamma, \{a, b\})) \cong \{1\}$ (ohne Schleifen).

10. Vorlesung, 17.11.2016

11. Vorlesung, 23.11.2016

Frage: $\pi_1\left(\underbrace{\text{Cay}(\Gamma, S)}_{\Gamma \backslash \text{Cay}(\Gamma, S)}\right) = ?$ Wenn $\pi_1(\text{Cay}(\Gamma, S)) = \{1\}$ ist $\Gamma \cong \pi_1(X_S)$.

2.8 Gruppen angegeben durch Erzeuger und Relationen; freie Gruppen

Fragestellung: Sei Γ eine Gruppe erzeugt durch $S \subseteq \Gamma$ ($\Gamma = \langle S \rangle$). Welche “Rechenregeln” gelten für Elemente in S . Kann man Γ anhand von S und dessen “Rechenregeln” beschreiben?

2 HOMOTOPIE

2.8.1 Beispiel. $\Gamma := \langle a, b \rangle$. Wenn in Γ gilt: $ab = ba$, was folgt über Γ ? In Γ gilt: Jedes $g \in \Gamma$ kann man schreiben als $g = a^{\varepsilon_1} \cdot b^{\varepsilon_2} \cdot a^{\varepsilon_3} \cdots$, $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$. Nach der Rechenregel oben erhalten wir $g = a^n \cdot b^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Es kann sein, dass $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2 = \langle (0, 1), (1, 0) \rangle$ oder $\Gamma \cong \{1\}$, wenn $a = b$. Der Unterschied besteht darin, ob es weitere “Rechenregeln” gibt, die $a^n \cdot b^m$ verfeinern können.

2.8.2 Beispiel. $\Gamma := \langle a, b \rangle$ “ohne Rechenregeln”. Es gilt $\Gamma \ni g = a^{\varepsilon_1} \cdot b^{\varepsilon_2} \cdot a^{\varepsilon_3} \cdots$, $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$. Elemente sind z.B. $aba^{-1}b^{-1}$, $ab^2a^{-2}b^{-3}$ etc. Alle diese Wörter müssen unterschiedliche Elemente geben, denn: wenn z.B. $aba^{-1}b^{-1} = ab^2a^{-2}b^{-3} \iff b^3a^2b^{-2}a^{-1}aba^{-1}b^{-1} = b^3a^2b^{-1}a^{-1}b^{-1} = 1$.

2.8.3 Definition. Sei S eine Menge,

$$X = S \sqcup \underbrace{\overline{S}}_{\substack{\text{Eine andere} \\ \text{Kopie von } S}}$$

Ein Wort im Alphabet X ist eine endliche Folge $w = x_1x_2 \cdots x_n$ von Elementen von X , $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0 \implies w = \varepsilon = \underline{1}$ leeres Wort). Wort w heißt *reduziert*, wenn es kein Teilwort von der Form $s \cdot \bar{s}$ oder $\bar{s} \cdot s$ hat, $s \in S$. Z.B. $S = \langle a, b \rangle$, $a\bar{b}a\bar{b}$ reduziert, $a\bar{a}$ nicht reduziert. Die Menge der Wörter bezeichnet man X^* . Die reduzierten Wörter bezeichnet man X_r^* . Wenn $v, w \in X^*$, $v = v_1 \cdots v_m$, $w = w_1 \cdots w_n$, $v_i, w_i \in X$ dann $vw := v_1 \cdots v_m w_1 \cdots w_n$. Die Reduktion eines Wortes $w = v\bar{s}su$, $s \in S$, $v, u \in X^*$ ist das Wort $w' = vu$; die Reduktion von $w = v\bar{s}su$ ist $w = vu$

2.8.4 Lemma. Jedes Wort kann man durch endlich viele Reduktionsschritte auf ein reduziertes Wort bringen, dieses ist eindeutig.

Bezeichnung: $r : X^* \longrightarrow X_r^*$, $w \mapsto$ (reduzierte Form von w).

2.8.5 Proposition und Definition. (X_r^*, \cdot) , $w \cdot v := r(wv)$ ist eine Gruppe. Sie heißt *freie Gruppe mit dem Erzeugendensystem S* .

Beweis. Assoziativität folgt aus Assoziativität der Konkatination und Eindeutigkeit der reduzierten Form: $w \cdot v \cdot u = r(w \cdot v \cdot u) = r(r(w \cdot v) \cdot u) = r(w \cdot r(v \cdot u))$. Sei $\overline{} : X \longrightarrow X$, $S \ni a \mapsto \bar{a} \in \overline{S}$, $\overline{S} \ni \bar{a} \mapsto a \in S$. Dann gilt mit $w^{-1} := \overline{w_n} \cdots \overline{w_1}$:

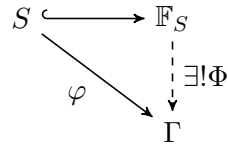
$$w^{-1} \cdot w = r(\overline{w_n} \cdots \overline{w_1} \cdot w_1 \cdots w_n) = \underline{1} = r(w_n \cdots w_1 \cdot \overline{w_1} \cdots \overline{w_n}) = w \cdot w^{-1}.$$

■

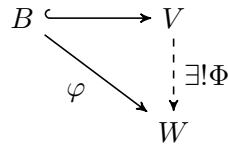
Bezeichnung: \mathbb{F}_S freie Gruppe auf dem Erzeugendensystem S . Je zwei unterschiedliche reduzierte Wörter sind unterschiedliche Elemente von der Gruppe nach Konstruktion.

2.8.6 Proposition (Universelle Eigenschaft der freien Gruppe). Sei S eine Menge, \mathbb{F}_S freie Gruppe auf S . Dann gilt: für jede Gruppe Γ und jede Abbildung $\varphi : S \longrightarrow \Gamma$ $\exists!$ Homomorphismus $\phi : \mathbb{F}_S \longrightarrow \Gamma$ s.d. $\phi|_S = \varphi$.

2 HOMOTOPIE



Bemerkung: Analog dazu gilt: V Vektorraum, $B \subseteq V$ Basis, \forall Vektorräume W
 $\forall \varphi : B \rightarrow W \exists! \phi : V \rightarrow W$ linear mit $\phi|_B = \varphi$.



Beweis. Sei $\varphi : S \rightarrow \Gamma$ gegeben. Definiere $\Phi(w_1, \dots, w_n) = \varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n)$, $w_i \in S = S \cup S^{-1}$. Sei $\varphi(w^{-1}) := \varphi(w)^{-1}$ (auf S^{-1} fortgesetzt). Dann gilt $\Phi(r(w \cdot v)) = \Phi(w \cdot v) = \Phi(w) \cdot \Phi(v)$ weil $\varphi(s) \cdot \varphi(s^{-1}) = \varphi(s) \cdot \varphi(s)^{-1} = 1 \implies \Phi$ ist eine Homomorphismus.

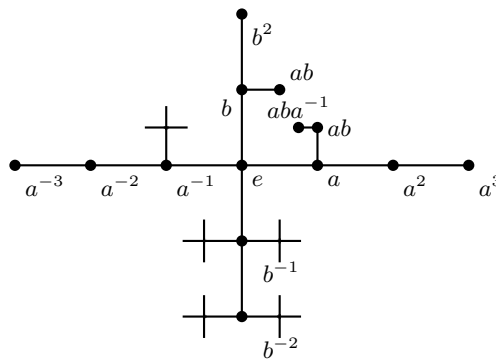
Eindeutigkeit: Wenn $\Psi : \mathbb{F}_S \rightarrow \Gamma$ ist Homomorphismus mit $\Psi|_S = \varphi$, dann gilt: $\Psi(s^{-1}) = \Psi(s)^{-1} = \varphi(s)^{-1} = \Phi(s)^{-1}$, $s \in S$. Dann gilt: $\Psi(w_1 \cdots w_n) = \Psi(w_1) \cdots \Psi(w_n) = \varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n) = \Phi(w_1) \cdots \Phi(w_n) = \Phi(w)$. ■

2.8.7 Korollar. Wenn $|S| = |S'|$, dann gilt $\mathbb{F}_S \cong \mathbb{F}_{S'}$.

Beweis. Übung. ■

2.8.8 Korollar. Wenn $\Gamma = \langle S \rangle$, dann ist Γ ein Quotient von $\mathbb{F}_S : \exists q : \mathbb{F}_S \twoheadrightarrow \Gamma$. Nach universellen Eigenschaft: q surjektiv, weil $\Gamma \supseteq q(\mathbb{F}_S) \supseteq dS \implies q(\mathbb{F}_S) \supseteq \langle S \rangle = \Gamma$.

Sei $\mathbb{F}_2 := \langle a, b \rangle$ frei auf 2 Erzeugern. Was ist $\text{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$?



2.8.9 Proposition. $\text{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$ ist ein 4-regulärer Baum.

Beweis. (1) Jede Ecke ist mit 4 anderen Knoten verbunden (durch a, b, a^{-1}, b^{-1}).

2 HOMOTOPIE

- (2) Es ist ein Baum, denn: ein Zyklus an $w \in \mathbb{F}_2$ ist eine Sequenz $w, wa^{\varepsilon_1}, wa^{\varepsilon_2}b^{\varepsilon_2}, \dots, w \cdot v = w \iff v = 1$, wobei v reduziert ist, weil wir Rückgänge nicht erlauben, somit ist v trivial \implies es gibt keine Zyklen. ■

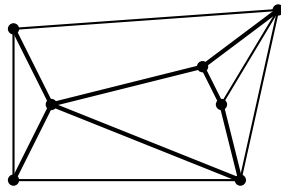
2.8.10 Korollar. $\pi_1(\text{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})) \cong \{1\}$.

Beweis. $(\text{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\}))$ ist zusammenziehbar: wir müssen eine Homotopie zwischen id und $c : \text{Cay}(\mathbb{F}_2) \rightarrow e$ konstruieren. Sei $h_t, t \in [0, 1]$ eine Familie der Abbildungen, die die 4 Kanten an 1 zusammenzieht?

$h_t^{(1)}$ sei die Familie von Abbildungen, die diese neuen Kanten an e zusammenzieht. Die gewünschte topologie entsteht durch Ausführung von $h_t^{(n)}$ auf dem Intervall $t \in [1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}]$ und Verkleben. ■

2.8.11 Korollar. $\pi(\underbrace{(\bigcirc \bigcirc)}_{\mathbb{F}_2 \setminus \text{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})}) \cong \mathbb{F}_2$; analog (Übung): $\pi(\underbrace{\text{flower}}_{|S| \text{ viele}}) \cong \mathbb{F}_S$.

Tatsächlich gilt noch mehr: die Fundamentalgruppe von jedem Graphen ist frei (Übung). Idee: $G = (V, E)$ hat einen maximalen Baum $T \subseteq G$, T wird zusammenziehbar



$$\implies G \sim G/T = \text{flower}$$

2.9 Angabe der Gruppen durch Erzeuger und Relationen.

2.9.1 Definition. Sei Γ eine Gruppe, $F \subseteq \Gamma$ eine Teilmenge. Die *normale Hülle* von F ist die kleinste normale Untergruppe $N \triangleleft \Gamma$, welche F enthält. Bezeichnung:

$$\langle\langle F \rangle\rangle = \bigcap_{N' \triangleleft \Gamma, N' \supseteq F} N'.$$

2.9.2 Proposition. Sei Γ eine Gruppe, $F \subseteq \Gamma$ eine Teilmenge. Die normale Hülle $\langle\langle F \rangle\rangle$ hat folgende Eigenschaft: \forall Homomorphismen $\varphi : \Gamma \rightarrow \Lambda$ mit $F \subseteq \ker \varphi$ gilt: $\langle\langle F \rangle\rangle \subseteq \ker \varphi$, und $\langle\langle F \rangle\rangle$ ist die größte normale Untergruppe von Γ mit dieser Eigenschaft.

Beweis. $\ker \varphi \triangleleft \Gamma \implies (F \subseteq \ker \varphi \implies \langle\langle F \rangle\rangle \subseteq \ker \varphi)$. Maximalität:

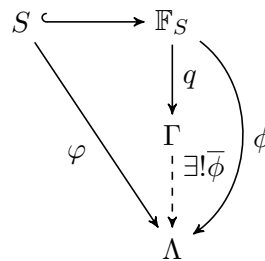
$$q : \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma / \langle\langle F \rangle\rangle, \ker q = \langle\langle F \rangle\rangle.$$

■

2.9.3 Definition. Sei S eine Menge, $R \subseteq \mathbb{F}_S$. Die Gruppe $\Gamma = \langle S | R \rangle$ definiert durch Erzeuger S mit Relationen R ist

$$\Gamma = \langle S | R \rangle := \mathbb{F}_S / \langle\langle R \rangle\rangle.$$

2.9.4 Proposition. $\Gamma = \langle S | R \rangle$ hat folgende universelle Eigenschaft: \forall Gruppen Λ und jede Abbildung $\varphi : S \rightarrow \Lambda$ s.d. $\ker \phi \supseteq \langle\langle R \rangle\rangle$, wobei $\phi : \mathbb{F}_S \rightarrow \Lambda$ der durch φ induzierter Homomorphismus ist, existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\bar{\phi} : \Gamma \rightarrow \Lambda$. Die Abbildung kann man auf Erzeuger angeben, wenn Relationen erfüllt sind.



Beweis. Übung. ■

2.9.5 Beispiel. $\Gamma = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$ ($= \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$.)
Behauptung: $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$. Ein Homomorphismus ist $\Phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $a \mapsto (1, 0)$, $b \mapsto (0, 1)$ ist surjektiv, weil $(1, 0)$, $(0, 1)$ das \mathbb{Z}^2 erzeugen, die inverse Abbildung ist $\Psi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Gamma$, $(1, 0) \mapsto a$, $(0, 1) \mapsto b$.

11. Vorlesung, 23.11.2016

12. Vorlesung, 24.11.2016

Letztes mal: Da Cayley-Graphen von freien Gruppen Bäume sind: $\pi_1(\underbrace{\text{Cayley-Graph}}_{|S| \text{ viele}}) \cong \mathbb{F}_S$.

Frage: Kann man diese Tatsache auch folgendermaßen verstehen: $\pi_1(X_1) = \pi_1(\bullet \circlearrowleft) \cong \mathbb{Z} = \langle a \rangle$ und $\pi_1(X_1) = \pi_1(\bullet \circlearrowright) \cong \mathbb{Z} = \langle b \rangle \implies \pi_1(\bigcirc \bullet \bigcirc) \cong \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$. Genauer: Wie berechnet man $\pi(U_1 \cup U_2)$ in Termen von $\pi(U_1)$ und $\pi(U_2)$? Die Antwort auf diese Frage ist der Satz von Seifert—van Kampen.

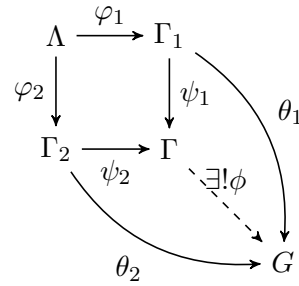
2.9.6 Definition. Seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \Lambda$ drei Gruppen und seien die Homomorphismen $\varphi_1 : \Lambda \rightarrow \Gamma_1$, $\varphi_2 : \Lambda \rightarrow \Gamma_2$ gegeben. Also ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\varphi_1} & \Gamma_1 \\ \varphi_2 \downarrow & & \\ & & \Gamma_2 \end{array}$$

2 HOMOTOPIE

Eine Gruppe Γ zusammen mit Homomorphismen $\psi_1 : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma$, $\psi_2 : \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma$ heißt *Pushout* von diesem Diagramm, wenn

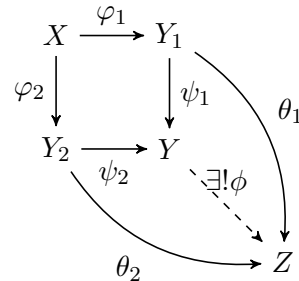
- (1) $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.
- (2) \forall Gruppen G mit Homomorphismen $\theta_1 : \Gamma_1 \longrightarrow G$, $\theta_2 : \Gamma_2 \longrightarrow G$ mit $\theta_1 \circ \varphi_1 = \theta_2 \circ \varphi_2$ $\exists! \phi : \Gamma \longrightarrow G$, welcher das Diagramm kommutativ macht.



Pushouts kann man auch für

- Mengen \longrightarrow Mengenabbildungen,
- Vektorräume \longrightarrow lineare Abbildungen,
- topologische Räume \longrightarrow stetige Abbildungen,

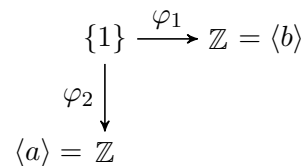
definieren. Auf Mengen:



$$Y := Y_1 \sqcup_{\varphi_1, \varphi_2} Y_2 = Y_1 \sqcup Y_2 / \varphi_1(x) \sim \varphi_2(x) \forall x \in X.$$

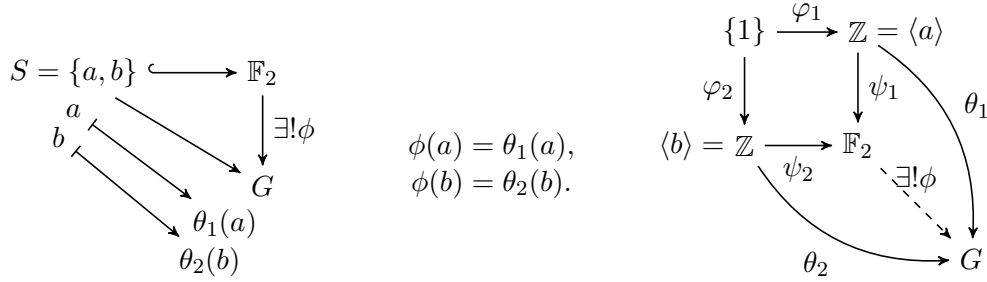
Gegeben θ_1, θ_2 mit $\theta_1 \circ \varphi_1 = \theta_2 \circ \varphi_2 \implies \theta_1(\varphi_1(x)) = \theta_2(\varphi_2(x)) \implies \theta_1, \theta_2$ sind konstant auf Äquivalenzklassen von $\sim \implies \exists \phi : Y \longrightarrow Z$, $y_1 \mapsto \theta_1(y_1)$, $y_2 \mapsto \theta_2(y_2)$.

2.9.7 Beispiel. $\Lambda = \{1\}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \mathbb{Z}$

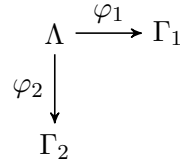


2 HOMOTOPIE

Behauptung: Pushout von dem obigen Diagramm ist $\Gamma = \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ mit $\psi_1 : \mathbb{Z} = \langle a \rangle \hookrightarrow \mathbb{F}_2$, $\psi_2 : \mathbb{Z} = \langle b \rangle \hookrightarrow \mathbb{F}_2$. Beweis: Gegeben eine Gruppe G , $\theta_1 : \mathbb{Z} = \langle a \rangle \hookrightarrow \mathbb{F}_2$, $\theta_2 : \mathbb{Z} = \langle b \rangle \hookrightarrow \mathbb{F}_2$



2.9.8 Proposition. *Jedes Diagramm*

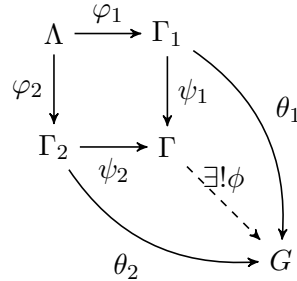


hat einen Pushout. Den kann man folgendermaßen konstruieren: Seien $\Gamma_1 = \langle S_1 | R_1 \rangle$, $\Gamma_2 = \langle S_2 | R_2 \rangle$. Dann ist der Pushout

$$\Gamma := \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \cup \underbrace{\{\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\}}_{\in \Gamma_1} \underbrace{\phantom{\{\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\}}}_{\in \Gamma_2} \rangle$$

Insbesondere ist der Pushout bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, ψ_1, ψ_2 sind induziert durch Inklusionen $S_1, S_2 \hookrightarrow S_1 \cup S_2$.

Beweis. Nach Proposition vom letzten Mal ist ein Homomorphismus $\phi : \Gamma \rightarrow G$ bestimmt durch $\phi(S_1 \cup S_2)$, falls die Relationen im Kern des induzierten Homomorphismus $\bar{\phi} : \mathbb{F}_{S_1 \cup S_2} \rightarrow G$ liegen.



Wir müssen nachrechnen, dass $R_1 \cup R_2 \cup \{\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \ker \bar{\phi}$, wobei $\phi(s_1) := \theta_1(s_1)$, $\phi(s_2) := \theta_2(s_2)$.

2 HOMOTOPIE

$R_1, R_2 \subseteq \ker \phi$, denn θ_1, θ_2 induzieren Homomorphismen $\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2$ auf freien Gruppen $\mathbb{F}_{S_1}, \mathbb{F}_{S_2}$, s.d. R_1 bzw. R_2 im Kern von $\bar{\theta}_1$ bzw. $\bar{\theta}_2$ liegt.

$$\bar{\phi}(\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)^{-1}) = \bar{\phi}(\varphi_1(\lambda))\bar{\phi}(\varphi_2(\lambda))^{-1} = \bar{\theta}_1(\varphi_1(\lambda))\bar{\theta}_2(\varphi_2(\lambda))^{-1} = 1,$$

weil $\theta_1 \circ \varphi_1 = \theta_2 \circ \varphi_2$. Γ ist durch $S_1 \cup S_2$ erzeugt $\implies \phi$ eindeutig bestimmt. ■

2.9.9 Definition. Der Pushout vom Diagramm

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma_1 \\ \downarrow & & \\ \Gamma_2 & & \end{array}$$

heißt *freies Produkt* von Γ_1 und Γ_2 . Bezeichnung: $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$.

Konkret: $\Gamma_1 = \langle S_1 | R_1 \rangle, \Gamma_2 = \langle S_2 | R_2 \rangle \implies \Gamma_1 * \Gamma_2 = \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$.

2.9.10 Beispiel. $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \mathbb{F}_n = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$.

2.9.11 Definition. Seien Γ_1, Γ_2 Gruppen, $\Lambda < \Gamma_1, \Lambda < \Gamma_2$. Der Pushout von

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xhookrightarrow{\iota_1} & \Gamma_1 \\ \downarrow \iota_2 & & \\ \Gamma_2 & & \end{array}$$

heißt *amalgamiertes freies Produkt* von Γ_1, Γ_2 über Λ ; Bezeichnung: $\Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$.

2.9.12 Satz (Seifert—van Kampen). *Sei $X = U_1 \cup U_2$ eine Vereinigung von zwei offenen Teilmengen, s.d. $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend sind. Sei $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt: $\pi_1(X, x_0)$ ist der Pushout von*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \xhookrightarrow{(\iota_1)_*} & \pi_1(U_1, x_0) \\ \downarrow (\iota_2)_* & & \\ \pi_1(U_2, x_0) & & \end{array}$$

wobei $\iota_1 : U_1 \hookrightarrow X, \iota_2 : U_2 \hookrightarrow X$ Inklusionsabbildungen sind.

2.9.13 Korollar. $\pi_1(\bigcirc \bullet \bigcirc) \cong \mathbb{F}_2$ (denn $\bigcirc \bullet \bigcirc = \bigcirc \cup \bullet \bigcirc$ mit einem gemeinsamen Mittelpunkt $\implies \pi_1(U_1 \cap U_2) \cong 1$ und $\pi_1(U_1) = \pi_1(U_2) = \mathbb{F}_1$). Analoge Aussage hat man für n hintereinander geschachtelte Schleifen.

2 HOMOTOPIE

Zur Idee des Beweises vom Satz von Seifert—van Kampen: Wir wollen zeigen, dass $\pi_1(X, x_0)$ ein Pushout ist d.h., $\forall G$ und $\forall \theta_1 : \pi_{U_1, x_0} \rightarrow G$, $\theta_2 : \pi_{U_2, x_0} \rightarrow G$ mit $\theta_1 \circ (\iota_1)_* = \theta_2 \circ (\iota_2)_* \exists! \phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$.

Frage: Wie interpretiert man einen Homomorphismus $\theta : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow G$ geometrisch (topologisch)?

Konstruktion: Sei (Y, y_0) ein punktierter Raum, $\theta : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow G$ ein Homomorphismus. Betrachte

$$Z := \tilde{Y} \times_{\theta} G = \tilde{Y} \times G / (y \cdot [\gamma], g) \sim (y, \theta([\gamma])g), [\gamma] \in \pi_1(Y, y_0), g \in G.$$

Alternativ:

$$Z := \tilde{Y} \times G / \pi_1(Y, y_0),$$

wobei $\pi_1(Y, y_0)$ von rechts auf $\tilde{Y} \times G$ wirkt:

$$(y, g) \cdot [\gamma] = (y[\gamma], \theta([\gamma])^{-1}g).$$

$p : Z \rightarrow Y$, $[(y, g)] \mapsto \tilde{p}(y)$, $\tilde{p} : \tilde{Y} \rightarrow Y$ dann ist $p : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerungsabbildung ($z_0 = [(\tilde{y}_0, 1)]$), weil \tilde{p} eine Überlagerung war. Außerdem trägt Z eine rechte G -Wirkung durch Decktransformationen:

$$[(y, g)] \cdot h := [(y, gh)].$$

Außerdem gilt: $Z/G \cong Y$. Fazit: Aus einem Homomorphismus $\theta : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow G$ haben wir eine Überlagerung $p : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ mit einer G -Wirkung durch Decktransformation bekommen, s.d. $Z/G \cong Y$.

2.9.14 Definition. Seien $p : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung mit einer G -Wirkung, $p' : (Z', z'_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung mit einer G -Wirkung. Ein Homomorphismus $h : Z \rightarrow Z'$ s.d. $p' \circ h = p$ und $h(z \cdot g) = h(z) \cdot g \forall z \in Z, g \in G$ heißt *Isomorphismus* (von Überlagerungen mit G -Wirkung).

2.9.15 Proposition. Homomorphismen $\theta : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow G$ entsprechen eindeutig Isomorphieklassen von Überlagerungen $p : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ mit G -Wirkung s.d. $Z/G \cong Y$.

Beweis. Inverse Konstruktion zur obigen. Wenn: $p : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine G -Überlagerung mit $Z/G \cong Y$. Sei $\theta : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow G$ gegeben durch $[\gamma] \mapsto g_{[\gamma]}$ s.d. $z_0 \cdot g_{\gamma} = \tilde{\gamma}(1)$, wobei $\tilde{\gamma}$ die eindeutig bestimmte Hochhebung von γ ist. Diese Konstruktion ist invers zur obigen (wir zeigen allerdings nur eine Richtung) Wenn $Z = \tilde{Y} \times_{\theta} G$, sei $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$, die Hochhebung $\tilde{\gamma}$ von γ nach \tilde{Y} erfüllt $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$. D.h., die Hochhebung $\tilde{\gamma}_z$ von γ nach Z erfüllt

$$\tilde{\gamma}_z(1) = [(z_0[\gamma], 1)] = [(z_0, \theta([\gamma]))] = [(z_0, 1)] \cdot \theta([\gamma]) \implies g_{[\gamma]} = \theta([\gamma]).$$

■

Beweis (von dem Satz 2.9.12). Bedeutung von Satz von Seifert—van Kampen: Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \xrightarrow{(\iota_1)_*} & \pi_1(U_1, x_0) \\
 (\iota_2)_* \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\
 \pi_1(U_2, x_0) & \xrightarrow{\varphi_2} & \pi_1(X, x_0) \\
 & \searrow \theta_2 & \swarrow \exists! \phi \\
 & & G
 \end{array}$$

θ_1 (curved arrow from $\pi_1(U_1, x_0)$ to G)

φ_1, φ_2 seien Homomorphismen induziert durch $U_1, U_2 \hookrightarrow X$. Brauchen: Universelle Eigenschaft: Sei G eine Gruppe, θ_1, θ_2 gegeben. Nach Proposition heben wir Überlagerungen $(U'_1, x_1) \rightarrow (U_1, x_0)$ und $(U'_2, x_1) \rightarrow (U_2, x_0)$ mit G -Wirkungen, die zu $\theta_1 : \pi_1(U_1, x_0) \rightarrow G, \theta_2 : \pi_1(U_2, x_0) \rightarrow G$ gehören. Die Einschränkungen dieser Überlagerungen auf $U_1 \cap U_2$ sind isomorph als G -Überlagerungen, denn sie gehören nach Proposition zu Hom . $\theta_1 \circ (\iota_1)_*$ bzw. $\theta_2 \circ (\iota_2)_* : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \rightarrow G$, die gleich sind. D.h. \exists Homöomorphismus $h : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$, der mit Projektionen kommutiert und mit G -Wirkungen verträglich ist. Definiere

$$X' := U'_1 \cup U'_2 = U'_1 \sqcup U'_2 / x \sim h(x),$$

p_1, p_2 geben Abbildung $p : X' \rightarrow X$. X' ist eine G -Überlagerung, weil U'_1, U'_2 es waren, h verträglich mit der G -Wirkung \sim erhalte $\phi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$, der zu X' gehört. Es gilt : $\phi \circ \varphi_2$ ist eindeutig durch die Struktur von X' über U_2 bestimmt $\Rightarrow \phi \circ \varphi_2 = \theta_2$. Eindeutigkeit: Wenn $\phi' : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ mit $\phi' \circ \varphi_2 = \theta_2, \phi' \circ \varphi_1 = \theta_1$. Konstruiere eine Überlagerung $p : X'' \rightarrow X$ zu ϕ .

- X'' ist über U_2 isomorph zu U'_2 , weil $\phi' \circ \varphi_2 = \theta_2$
- X'' ist über U_1 isomorph zu U'_1 , weil $\phi' \circ \varphi_1 = \theta_1$

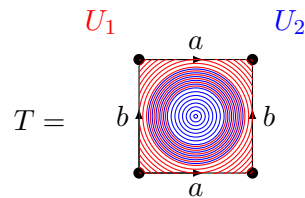
$\Rightarrow X'' \cong X'$. ■

2.10 Konsequenzen des Satzes von Seifert–van Kampen

Erinnerung: $\pi_1(\underbrace{\text{flower}}_{|S| \text{ viele}}, x_0) \cong \mathbb{F}_S$. $\pi_1(\text{figure-eight}, x_0)$ ein Pushout von

$$\begin{array}{ccc} \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{F}_2 \end{array}$$

2.10.1 Beispiel. Wir betrachten den Torus $T = U_1 \cup U_2$, $\pi_1(T, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$



$\theta_1(aba^{-1}b^{-1}) = 1$ jedenfalls $\implies \exists! \phi : \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \longrightarrow G$

$$\begin{array}{ccc} & t \longmapsto & aba^{-1}b^{-1} \\ \langle t \rangle = \mathbb{Z} \cong \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, x_0) \cong \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(T) \\ & \searrow \text{ZII} & \downarrow \theta_1 \\ & \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle & \downarrow \\ & & G \end{array}$$

θ_2

Erweiterung zu einem mehrfachen Torus $\Sigma_g := U_1 \cup U_2$, wobei

- U_1 Umgebung von Schleifen $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$.
- U_2 die 2-Zelle, die längs $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ angeklebt wird.

$$\Sigma_g = \dots = \prod_{k=1}^g [a_k, b_k].$$

Also man hat nach Seifert–van Kampen:

2 HOMOTOPIE

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} \cong \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(U_1, x_0) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \rangle \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 1 \cong \pi_1(U_2, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(\Sigma_g) \\
 & \searrow \theta_2 & \nearrow \theta_1 \\
 & & G
 \end{array}$$

$\exists! \phi$ (dashed arrow from $\pi_1(\Sigma_g)$ to G)

Wie beim Torus folgt $\pi_1(\Sigma_g) \cong \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{k=1}^g [a_k, b_k] = 1 \rangle$. Die Fläche Σ_g von Geschlecht g entsteht, indem man an ein Bouquet von $2g$ Kreisen eine 2-Zelle angeklebt. Die Anklebeabbildung ist durch das Wort

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

bestimmt.

Sei $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$ eine Gruppe gegeben durch Erzeuger und Relationen. Betrachte den CW-Komplex X_Γ gegeben durch:

- eine 0-Zelle e^0 ,
- $|S|$ 1-Zellen e_s^1 , $s \in S$, die mit beiden Randpunkten an e^0 angeklebt werden,
- $|R|$ 2-Zellen e_r^2 , $r \in R$ mit Anklebeabbildungen $\varphi_r : \partial e_r^2 \cong S^1 \longrightarrow e^0 \cup \bigcup_{s \in S} e_s^1$ (klebe e_r^2 längs des Weges r im Erzeuger $s \in S$ an). Wenn $r = s_1^{\alpha_1} \cdot s_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot s_k^{\alpha_k}$. Zerlege S^1 in $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_k|$ gleiche Teile.

2.10.2 Beispiel. • Wenn $\Gamma = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid \prod_{k=1}^g [a_k, b_k] = 1 \rangle \implies X_\Gamma \cong \Sigma_g$.

- $\Gamma = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle \implies X_\Gamma \cong \mathbb{RP}^2$.

Frage/Verdacht: $\pi_1(X_\Gamma, e^0) \cong \Gamma$.

2.10.3 Proposition. Sei X ein wegzusammenhängender Raum, sei

$$Y = X \cup_{\varphi_\alpha} \left(\bigcup_{\alpha \in A} e_\alpha^2 \right)$$

gleich X mit angeklebten Zellen e_α^2 durch Abbildung $\varphi_\alpha : S^1 \longrightarrow X$. Seien $x_\alpha \in \varphi_\alpha(S^1)$, $x_0 \in X$, γ_α Weg von x_0 nach x_α . Sei $[\varphi_\alpha] \in \pi_1(X, x_\alpha)$ die Klasse von φ_α , $[\gamma_\alpha^{-1} \cdot \varphi_\alpha \cdot \gamma_\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Sei $N := \langle \langle [\gamma_\alpha^{-1} \cdot \varphi_\alpha \cdot \gamma_\alpha] \mid \alpha \in A \rangle \rangle \triangleleft \pi_1(X, x_0)$. Dann gilt:

- (1) Die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ definiert eine Surjektion $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, x_0)$ mit Kern gleich N ; also gilt $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N$.
- (2) Wenn Y' von Y durch Ankleben von n -Zellen für $n > 2$ erhalten wird, gilt: $Y \hookrightarrow Y'$ induziert einen Isomorphismus von Fundamentalgruppen.
- (3) X CW-Komplex, dann gilt: die Inklusion $X \hookrightarrow X$ von dem 2-Skelett induziert einen Isomorphismus $\pi_1(X^2, x_1) \cong \pi_1(X, x_0)$.

2.10.4 Korollar. X CW-Komplex,

$$X^2 = e^0 \cup \bigcup_{s \in S} e_s^1 \cup_{\varphi_r} \bigcup_{r \in R} e_r^2$$

mit Anklebeabbildung φ_r . Seien $\bar{r} \in \mathbb{F}_s \cong \pi_1(X^1, e^0)$ induziert durch φ_r ($\bar{r} = [\varphi_r] \in \pi_1(X^1, e^0)$). Dann gilt: $\pi_1(X, x_0) \cong \langle S \mid \bar{r}, r \in R \rangle$.

13. Vorlesung, 07.12.2016

14. Vorlesung, 08.12.2016

Beweis (der letzten Proposition). Wähle $y_2 \in e_\alpha^2$. Schreibe $Z = U \cup V$, $U = Z \setminus \bigcup_\alpha \{y_\alpha\}$, $V = Z \setminus X \cong \{x'_0\}$. Dann

$$\underbrace{U \cap V}_{x'_0 := \{x_0\} \times 1 \in} = \bigcup_{\alpha \in A} e_\alpha^2 \setminus \{y_\alpha\} \cup \bigcup_{\alpha \in A} (\text{Im } \gamma_\alpha) \times (0, 1].$$

$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Z, x'_0)$ —Berechnung mit Seifert–van Kampen:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x'_0) & \longrightarrow & \pi_1(U, x'_0) \cong \pi_1(X, x_0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 \cong \pi_1(V, x'_0) & \longrightarrow & \pi_1(Z, x'_0) \cong \pi_1(X, x_0) / N \\ \pi_1(U, x'_0) \cong \pi_1(X, x_0) & \pi_1(U \cap V, x'_0) \cong \mathbb{F}_A = \langle a_\alpha \mid \alpha \in A \rangle. \end{array}$$

Es gilt nach Konstruktion $\theta \circ \iota_*(a_\alpha) = [\gamma_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ \gamma_\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Also $\pi_1(Z, x'_0) \cong \pi_1(X, x_0) / N$, damit ist (1) bewiesen. (2) analog, wobei alle Gruppen im Diagramm trivial sind, da man in S^n für $n > 1$ Schleifen zusammenziehen kann. (3): X CW-Komplex, dann gilt $\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$. ■

2.10.5 Korollar. $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$, $X_\Gamma = e^0 \cup \bigcup_{s \in S} e_s^1 \cup_{\varphi_r} \bigcup_{r \in R} e_r^2$ mit Anklebeabbildung φ_r durch Relationen gegeben, dann gilt

$$\left(\mathbb{F}_S / \langle \langle R \rangle \rangle \cong \right) \pi_1(X_\Gamma) \cong \Gamma.$$

Für jeden CW-Komplex X kann man somit die Fundamentalgruppe in Termen von Erzeugern und Relationen aus der CW-Struktur bestimmen.

Also gibt die Fundamentalgruppe nur Information über niedrigdimensionale Struktur von X .

Somit kann man durch π_1 z.B. Flächen unterscheiden: $\pi_1(\Sigma_g)$ ist nicht isomorph zu $\pi_1(\Sigma_{g'})$ für $g \neq g'$, aber $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^m)$ für $n \neq m$.

2.11 Höhere Homotopiegruppen

Nach Def. ist $\pi_1(X, x_0) = \{[\gamma] \mid \gamma : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)\}$. Analog: $\pi_n(X, x_0) = \{[\gamma] \mid \gamma : (S^n, *) \longrightarrow (X, x_0)\}$.

2.11.1 Definition. $(X, x_0), (Y, y_0)$ zwei punktierte Räume. Dann ist

$$X \vee Y := X \sqcup Y \Big/ x_0 \sim y_0$$

mit ausgewählten Punkten x_0, y_0 die *Ein-Punkt-Vereinigung*. Die Abbildung $S^1 \xrightarrow{g} S^1 \vee S^1$ definiert die Verknüpfung in der Fundamentalgruppe, gegeben $\gamma_1 : S^1 \longrightarrow X$, $\gamma_2 : S^1 \longrightarrow X$:

$$\gamma_1 \vee \gamma_2 : S^1 \vee S^1 \longrightarrow X \quad \gamma_1 \cdot \gamma_2 : S^1 \xrightarrow{g} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\gamma_1 \vee \gamma_2} X$$

Analog hat man $q : S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$. Verknüpfung auf $\pi_n(X, x_0)$: $f_1, f_2 \in \pi_n(X, x_0)$;

$$f_1 \cdot f_2 : S^n \xrightarrow{q} S^n \vee S^n \xrightarrow{f_1 \vee f_2} (X, x_0).$$

Liefert Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x_0)$.

Hauptproblem: $\pi_n(S^k)$ sind unbekannt. Z.B. $\pi_3(S^2)$ ist nichttrivial \implies es existiert eine nichttriviale Abbildung $h : S^3 \longrightarrow S^2$, die sogenannte *Hopf-Faserung*.

3 Homologie

3.1 Simplicialkomplexe

Wir beginnen mit dem n -Simplex:

$$\Delta^n := \left\{ (t_i)_{i=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} = \overbrace{[v_0, v_1, \dots, v_n]}^{\text{baryzentrische Koordinaten}},$$

$v_i := (0, \dots, 1, \dots, 0)$. Die Facetten f_k von Δ^n sind Simplexe $[v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_n]$, Simplexe von Dimension $n-1$.

Allgemeiner: Eine beliebige Teilmenge $I \subseteq \{0, \dots, n\}$ definiert den Teilsimplex $\Delta_I \subset \Delta^n$; $\Delta_I := [v_i]_{i \in I}$. Gegeben beliebige Punkte $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, die affin unabhängig sind, hat man den Simplex

$$[a_0, \dots, a_n] := \left\{ \sum_{i=0}^n t_i a_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}.$$

Es gibt in diesem Fall eine kanonische affine Abbildung

$$\Delta^n \longrightarrow [a_0, \dots, a_n], \quad (t_i) \longrightarrow \left(\sum_{i=0}^n t_i a_i \right).$$

Die Ordnung der erzeugenden Ecken ist wichtig, wir unterscheiden zwischen $[a_0, \dots, a_n]$ und $[a_1, a_0, \dots, a_n]$ (der Simplex ist durch einige gewisse Ordnung auf den Ecken bestimmt).

3.1.1 Definition. Die Vereinigung von allen Facetten von Δ^n ist der Rand $\partial\Delta^n$,

$$\overset{\circ}{\Delta}^n := \Delta^n \setminus \partial\Delta^n.$$

3.1.2 Definition. Sei X ein topologischer Raum. X hat eine simpliciale Struktur (ist ein Simplicialkomplex), wenn eine Menge von Abbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \longrightarrow X$ gegeben ist, so dass:

- (1) $\sigma_\alpha|_{\overset{\circ}{\Delta}^n}$ ist injektiv, und jeder Punkt in X ist im Bild genau eines $\sigma_\alpha|_{\overset{\circ}{\Delta}^n}$.
- (2) $\sigma_\alpha|_{f_k \subset \sigma_\alpha} = \sigma_\beta$ für ein geeignetes β . Hierbei benutzen wir die kanonische Identifizierung $[v'_0, \dots, v'_{n-1}] = \Delta^{n-1} \mapsto f_k = [v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_n]$.
- (3) $A \subset X$ offen $\iff \sigma_\alpha^{-1}(A)$ offen $\forall \alpha$.

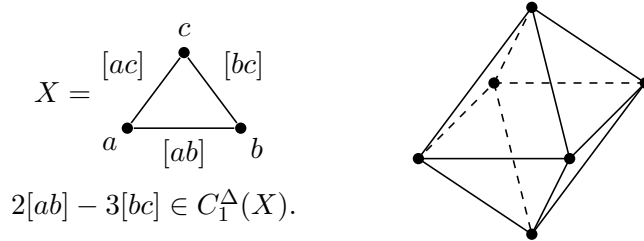
Anschaulich: X ist Verklebung von Simplexen längs Ränder. Z.B.: Nicht erlaubt: Beispiele: Polyeder sind Simplicialkomplexe (eventuelle nach Unterteilungen von Facetten).

14. Vorlesung, 08.12.2016

15. Vorlesung, 14.12.2016

3.2 Homologie für Simplizialkomplexe

Simplizialkomplexe: Zusammenkleben von Simplizes längs Facetten.

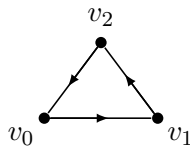


Intuitive Frage: Wie kann man Simplizialkomplexe topologisch unterscheiden? Geometrisch: Simplizialkomplexe können “Löcher verschiedener Dimensionen” haben. Kombinatorische Struktur auf Simplizes: Ränder. Der Standardsimplex:

$$\Delta^n := \left\{ (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} = [v_0, \dots, v_n].$$

Die Facetten von Δ^n sind $[v_0, \dots, \hat{v}_k, \dots, v_n]$, die $(n-1)$ -dimensionalen Teilsimplizes. Der Rand von Δ^n für kleinere n :

- $\Delta^0 = \{*\}$, $\partial\Delta^0 = \emptyset$.
- $\Delta^1 = [v_0, v_1]$, $\partial\Delta^1 = [v_1] - [v_0] \in \mathbb{Z} \cdot [v_0] \oplus \mathbb{Z} \cdot [v_1]$.
- $\Delta^2 = [v_0, v_1, v_2]$; $\partial\Delta^2 = [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1] \in \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_0, v_1] \oplus \mathbb{Z}[v_2, v_1]$.



Sei X ein Simplizialkomplex mit Strukturabbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$.

3.2.1 Definition. Die *simplizialen n -Ketten* von X sind Elemente der freien abelschen Gruppe erzeugt von den offenen n -Simplizes von X :

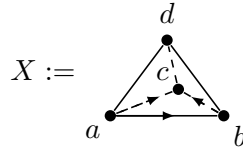
$$C_n^\Delta(X) = \bigoplus_{\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}.$$

Sie sind als formale Summen darstellbar: $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$, $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow X$. Sei $\partial^n : C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$ der *Randhomomorphismus* gegeben durch

$$\partial^n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}.$$

3.2.2 Beispiel. Wir betrachten

3 HOMOLOGIE



$$C_0^\Delta(X) = \mathbb{Z} \cdot [a] \oplus \mathbb{Z} \cdot [b] \oplus \mathbb{Z} \cdot [c] \oplus \mathbb{Z} \cdot [d].$$

- 1-Simplizes: $[ab], [bc], [ac], [ad], [db], [dc]$.
- 2-Simplizes $[abc], [abd], [bcd], [acd]$.

Es gilt:

- $\partial[ab] = [b] - [a]$.
- $\partial[abc] = [bc] - [ac] + [ab]$.
- $\partial(\partial[abc]) = [c] - [b] - [c] + [a] + [b] - [a] = 0$.

3.2.3 Lemma. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma_\alpha) &= \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{j < i} (-1)^j \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j > i} (-1)^{j-i} \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n]} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

3.2.4 Definition. Die Untergruppe $\ker \partial_n \subset C_n^\Delta(X)$ heißt die *Gruppe der n-Zykel* in X .

3.2.5 Definition. Die Untergruppe $\text{Im } \partial_n \subset C_{n-1}^\Delta(X)$ heißt die *Gruppe der (n-1)-Ränder*.

Zum letzten Beispiel: $[bcd] - [acd] + [abd] - [abc]$ ist ein 2-Zykel, aber kein Rand! (Übung) Beobachtung: Da $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, gilt $\text{Im } \partial_n \subset \ker \partial_{n-1}$ (alle Ränder sind auch Zykel).

3.2.6 Definition. Die n -te *Simpliziale Homologiegruppe* von einem Simplicialkomplex X ist

$$H_n^\Delta(X) := \ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} = n\text{-Zykel} / n\text{-Ränder}.$$

3 HOMOLOGIE

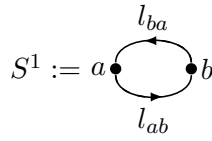
3.2.7 Definition. Eine Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Gruppen C_n mit Homomorphismen $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$, anschaulich

$$\rightarrow \dots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0.$$

heißt *Kettenkomplex*, falls $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

$H_n(C.) := \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$ ist die Homologie des Kettenkomplexes $C.$

3.2.8 Beispiel. (1) Wir betrachten



$$C_0^\Delta(S^1) \cong \mathbb{Z} = \langle a, b \rangle, C_1^\Delta(S^1) \cong \mathbb{Z}^2 = \langle l_{ab}, l_{ba} \rangle, C_n^\Delta(S^1) = 0 \text{ für } n \geq 2$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathbb{Z}l_{ab} \oplus \mathbb{Z}l_{ba} & & & & \\ & & \parallel & & & & \\ 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b & & \end{array}$$

Es gilt $\ker \partial_0 = C_0$, $\operatorname{Im} \partial_1 = \langle \partial l_{ab}, \partial l_{ba} \rangle = \langle b - a, a - b \rangle = \langle b - a \rangle \subset C_0 \implies$ simplizialer Kettenkomplex.

$$H_0^\Delta(S^1) \cong \underbrace{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b}_{(na, mb) \mapsto n-m} / \langle b - a \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

Es gilt: $\partial_1(l_{ab}) = b - a$, $\partial_1(l_{ba}) = a - b$. Damit:

$$H_1^\Delta(S^1) := \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = \ker \partial_1 = \underbrace{(nl_{ab} \oplus nl_{ba})}_{\cong \mathbb{Z}, \text{ erzeugt durch } l_{ab} + l_{ba}} \subset C_1.$$

(2) Torus:

$$\begin{aligned} C_2^\Delta(T^2) &\cong \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}U \oplus \mathbb{Z} \cdot L \\ C_1^\Delta(T^2) &\cong \mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z} \cdot b \oplus \mathbb{Z} \cdot c \\ C_0^\Delta(T^2) &\cong \mathbb{Z} \cdot v. \\ \partial_2(L) &= b + a + c \\ \partial_2(U) &= -c - b - a \\ \partial_1(a) &= \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0. \end{aligned}$$

3 HOMOLOGIE

$$H_0^\Delta(T^2) = \ker \partial_0 / \operatorname{Im} \partial_1 = C_0 / 0 \cong C_0 \cong \mathbb{Z}.$$

$$H_1^\Delta(T^2) = \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = C_1 / \operatorname{Im} \partial_2 \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c / \langle a + b + c \rangle \cong \mathbb{Z}^2 = \langle [a], [b] \rangle.$$

$$H_2^\Delta(T^2) = \ker \partial_2 / \operatorname{Im} \partial_3 \cong \ker \partial_2 = \underbrace{\langle L + U \rangle}_{\cong \mathbb{Z}} \subset C_2$$

(3) Projektive Ebene:

$$C_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}U \oplus \mathbb{Z}L$$

$$C_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z} \cdot b \oplus \mathbb{Z} \cdot c$$

$$C_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z} \cdot v \oplus \mathbb{Z}w.$$

$$\partial_2(L) = b - a - c$$

$$\partial_2(U) = c + b - a$$

$$\partial_1(a) = w - v, \partial_1(b) = w - v, \partial_1(c) = v - v = 0.$$

$$\partial_0 = 0.$$

$$H_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) = C_0 / \operatorname{Im} C_1 = \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}w / \langle w - v \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} H_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) &= \ker \partial_1 / \operatorname{Im} \partial_2 = C_1 / \operatorname{Im} \partial_2 \cong \langle c, a - b \rangle / \langle c + b - a, b - a - c \rangle \\ &= \langle c, a - b \rangle / \langle c + b - a, 2c \rangle \\ &= \langle c, a - b - c \rangle / \langle c + b - a, 2c \rangle \\ &= \langle c, t \rangle / \langle t, 2c \rangle \cong \mathbb{Z} / 2. \end{aligned}$$

$$H_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) = \ker \partial_2 / \operatorname{Im} \partial_3 = \ker \partial_2 = 0.$$

15. Vorlesung, 14.12.2016

16. Vorlesung, 15.12.2016

Letztes mal: simpliziale Homologie. Fragen/Nachteile:

- (1) $H_n^\Delta(X)$ hängen a priori von der Simplizialstruktur ab.
- (2) $H_n^\Delta(X)$ nur für Simplizialkomplexe definiert, man möchte sie für für andere Räume auch definieren!

Antwort: erweitere die Definition der Homologie!

3 HOMOLOGIE

3.2.9 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ein *singulärer n -Simplex* in X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$.

$$C_n(X) := \left\{ \sum_i n_i \sigma_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, \sigma_i : \Delta^n \rightarrow X \text{ singuläre } n\text{-Simplizes} \right\} = \bigoplus_{\sigma : \Delta^n \rightarrow X} \mathbb{Z}.$$

Randhomomorphismus $\partial^n : C_n^\Delta(X) \rightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$ gegeben durch

$$\partial^n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}.$$

3.2.10 Lemma. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Beweis. Wie vorher. ■

Wie vorher haben wir n -Zykel $Z_n := \ker \partial_n$, Ränder $B_n := \text{Im } \partial_{n+1}$.

3.2.11 Definition. Die n -te singuläre Homotopiegruppe von X ist

$$H_n^\Delta(X) := \ker \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} = n\text{-Zykel} / n\text{-Ränder}.$$

3.2.12 Definition. Die Sequenz

$$\rightarrow \dots \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0.$$

heißt *singulärer Kettenkomplex* von X

3.2.13 Lemma. Wenn $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$. Dann gilt: $H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.

Beweis. Für jeden singulären Simplex $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ gilt: $\sigma(\Delta^n) \subset X_{\alpha_\sigma}$ für ein $\alpha_\sigma \Rightarrow C_n(X) = \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$, $\partial_n : C_n(X_\alpha) \rightarrow C_{n-1}(X_\alpha) \Rightarrow H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$. ■

3.2.14 Proposition. Wenn X nichtleer und wegzusammenhängend ist, dann gilt: $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach Definition gilt

$$H_0^\Delta(X) := \ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1 = C_0 / \text{Im } \partial_1.$$

Definiere die Abbildung $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\sum_i n_i \sigma_i \mapsto \sum_i n_i$. Diese ist surjektiv, weil $X \neq \emptyset$. Wir haben $\text{Im } \partial_1 \subset \ker \varepsilon$: Für jeden singulären 1-Simplex $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ —einen Weg in X —gilt $\partial_1 \sigma = \sigma(1) - \sigma(0) \mapsto 0$. Es gilt auch $\ker \varepsilon \subset \text{Im } \partial_1$: Sei $\sum_i n_i x_i \in \ker \varepsilon$, dann $\sum_i n_i = 0$. Wir wählen einen Punkt $x_0 \in X$ und Pfade $\tau_i : \Delta^1 \rightarrow X$ mit $\tau_i(0) = x_0$, $\tau_i(1) = x_i$, und wir setzen $\sigma_0 : v_0 \mapsto x_0$. Dann ist τ_i singulärer 1-Simplex mit $\partial(\tau_i) = x_i - x_0$. Somit

$$\partial(\sum_i n_i \tau_i) = \sum_i n_i x_i - \sum_i n_i x_0 = \sum_i n_i x_i,$$

denn $\sum_i n_i = 0$. Also ist $\sum_i n_i x_i$ ein Rand. Also $\ker \varepsilon = \text{Im } \partial_1 \Rightarrow H_0(X) = C_0 / \text{Im } \partial_1 \cong \text{Im } (\varepsilon) = \mathbb{Z}$ nach dem Homomorphiesatz. ■

3 HOMOLOGIE

Bemerkung: $\varepsilon : C_0 \longrightarrow \mathbb{Z}, \sum_i n_i \sigma_i \mapsto \sum n_i$ heißt *Augmentationsabbildung*.

3.2.15 Proposition. *Es gilt:*

$$H_n(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Beweis. Es gibt für $\{*\}$ nur einen singulären Simplex $\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow \{*\}$ in jeder Dimension. Also sieht der singuläre Kettenkomplex so aus:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & & & & & & & \parallel & & \\ & & C_n & & & & & & & & C_0 & & \end{array}$$

$$\partial \sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade,} \\ \sigma_{n-1}, & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir haben also

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \\ & & & & C_2 & & C_1 & & C_0 & & & & \end{array}$$

$$\implies H_0(\{*\}) \cong \mathbb{Z}, H_n(X) = 0, n > 0. \quad \blacksquare$$

Beobachtung: Wenn X, Y topologische Räume sind und $f : X \longrightarrow Y$ stetig $\implies f_* : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y), \sigma \mapsto f \circ \sigma$ und es gilt $\partial_n^Y \circ f_* = f_* \circ \partial_n^X$, weil

$$\partial_n(f \circ \sigma) = \sum (-1)^i f \circ (\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}) = \sum (-1)^i (f \circ \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}).$$

Dementsprechend gilt:

- $f_*(\ker \partial_n) \subset \ker \partial_n^Y$,
- $f_*(\text{Im } \partial_n) \subset \text{Im } \partial_n^Y$.

Wir bekommen also $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y), [e] \mapsto [f_*e]$.

3.2.16 Korrolar. $X \cong Y \implies H_n(X) \cong H_n(Y) \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. f, g inverse Homomorphismen $\implies f_*g_* = \text{id}_* = \text{id}$ und $g_*f_* = \text{id}_* = \text{id}$. ■

Bemerkung: Algebraische Sichtweise: Wenn $C_{(\cdot)}, D_{(\cdot)}$ Kettenkomplexe

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} & C_n & \xrightarrow{\partial_n^X} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^X} & C_{n-2} & \xrightarrow{\partial_{n-2}^X} & \cdots \\ & & \downarrow f_{*n} & & \downarrow f_{*n-1} & & \downarrow f_{*n-2} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+1}^Y} & D_n & \xrightarrow{\partial_n^Y} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^Y} & D_{n-2} & \xrightarrow{\partial_{n-2}^Y} & \cdots \end{array}$$

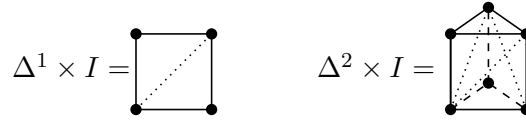
3 HOMOLOGIE

Eine Sequenz $f_{*n} : C_n \longrightarrow D_n$ von Homomorphismen heißt *Kettenabbildung*, wenn $\partial_n \circ f_{*n} = f_{*(n-1)} \circ \partial_n$.

3.2.17 Satz. Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$. Wenn $f \cong g$, dann gilt: $f_* = g_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$.

3.2.18 Korollar. $X \cong Y \implies H_n \cong H_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $F : X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g . Wir wollen aus F eine Abbildung zwischen $C_n(X)$ und $C_n(Y)$ bekommen. Wenn $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ ein singulärer Simplex ist, $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$, $\Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times \text{id}} X \times I \xrightarrow{F} Y$. Wir müssen $\Delta^n \times I$ in Simplexes zerlegen:



Allgemein: $\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^n [v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ (Nachrechnen!). Wir haben jetzt die Abbildung $F \circ (\sigma \times \text{id}) : \Delta^n \times I \longrightarrow Y$ für jeden singulären Simplex $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$. Wir definieren nun die sogenannten *Prismoperatoren*

$$P_n(\sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i (F \circ (\sigma \times \text{id}))|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \in C_{n+1}(Y).$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_* & \nearrow P_n & \downarrow f_* & \nearrow P_{n-1} & \downarrow f_* \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Wir zeigen jetzt folgende Identität: $\partial \circ P = g_* - f_* - P \circ \partial$. Indexverschiebung liefert:

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} \circ P_n(\sigma) &= \sum_{j \leq i} (-1)^j (-1)^i F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned}$$

Terme $i = j$: Kürzen sich außer

$$F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[\hat{v}_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} - F \circ (\sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \hat{w}_n]} = g_* - f_*.$$

3 HOMOLOGIE

Die Terme mit $i \neq j$ vergleichen wir mit

$$\begin{aligned} P \circ \partial(\sigma) &= P\left(\sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]}\right) \\ &= \left(\sum_i (-1)^i \sum_{j>i} (-1)^j (F \circ \sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, \hat{w}_j, \dots, v_n]}\right) \\ &\quad + \sum_i \sum_{j<i} (-1)^{i-1} (-1)^j (F \circ \sigma \times \text{id})|_{[v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_j, w_j, \dots, v_n]} \end{aligned}$$

Also gilt: $\partial \circ P = g_* - f_* - P \circ \partial$. Wir wollen zeigen: $f_* = g_*$ auf Homologie. Dazu sei $\alpha \in Z_n(X)$ (ein Zykel)

$$f_{*n}(\alpha) - g_{*n}(\alpha) = \partial \circ P(\alpha) + p \circ \partial(\alpha) = \partial \circ P(\alpha) \in \text{Im } \partial$$

$\implies f_{*n}(\alpha) - g_{*n}(\alpha) \in B_n(Y) \implies f_*([\alpha]) = g_*([\alpha]) \in H_n(Y) \implies f_* = g_*$, da in $H_n(Y)$ durch $\text{Im } \partial$ faktorisiert wird. ■

3.2.19 Definition. Seien $C_{(\cdot)}, D_{(\cdot)}$ Kettenkomplexe, $f_{(\cdot)}, g_{(\cdot)} : C_{(\cdot)} \longrightarrow D_{(\cdot)}$ Kettenabbildungen. Eine Sequenz $(P_n) : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ heißt *Kettenhomotopie* zwischen $f_{(\cdot)}, g_{(\cdot)}$, wenn $f_n - g_n = \partial_{n+1} \circ P_n - P_{n-1} \circ \partial_n$.

3.2.20 Lemma. $f_{(\cdot)}, g_{(\cdot)}$ Kettenhomotop $\implies f_* = g_* : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$.

Beweis. $\alpha \in Z_n \subset C_n \implies f_n(\alpha) - g_n(\alpha) = \partial_{n+1} \circ P_n(\alpha) - P_{n-1} \circ \partial(\alpha)$. Rest in dem letzten Beweis enthalten. ■

Was ist die Relation zwischen Homologiegruppen von X , $A \subset X$ und X/A ? Algebraische Vorbereitung: lange exakte Sequenzen.

3.2.21 Definition. Eine Sequenz von abelschen Gruppen A_n zusammen mit Homomorphismen $f_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}$ heißt *exakt*, wenn $\ker f_n = \text{Im } f_{n+1}$ ($\iff H_n(A_{(\cdot)}) = 0 \forall n$)

Demzufolge beschreibt Homologie, wie inexakt eine Sequenz ist.

3.2.22 Beispiel. Eine kurze exakte Sequenz ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \quad (*)$$

3.2.23 Lemma. $(*)$ kurze exakte Sequenz $\iff f$ injektiv, g surjektiv, $B/A \xrightarrow{\cong} C$.

3.2.24 Definition. Ein Paar von topologischen Räumen (X, A) , ($A \subset X$) heißt *gutartig*, wenn A abgeschlossen ist und A ein Deformationsretrakt einer Umgebung $U \supset A$ ist.

3 HOMOLOGIE

3.2.25 Satz. Wenn (X, A) ein gutartiges Paar ist, so haben wir eine lange exakte Sequenz:

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X/A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

(i_* steht für kanonische Inklusion, p_* für kanonische Projektion.)

3.2.26 Beispiel. $(X, A) = (D^k, S^{k-1}) \rightsquigarrow$ Berechnung von $H_n(S^k)$.

16. Vorlesung, 15.12.2016

17. Vorlesung, 21.12.2016

Letztes mal: (X, A) gutartig, dann hat man folgende lange exakte Homologiesequenz:

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n(X/A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots$$

3.2.27 Beispiel. $X = D^d$, $A = \partial D^d = S^{d-1} \subset D^d$. X ist zusammenziehbar

$$\implies H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Denn mit $D^d / S^{d-1} = S^d$:

$$\longrightarrow H_n(S^{d-1}) \xrightarrow{\iota_*} \underbrace{H_n(D^d)}_{=0} \xrightarrow{p_*} H_n(S^d) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(S^{d-1}) \longrightarrow \underbrace{H_{n-1}(D^d)}_{=0}$$

folgt:

$$\partial_n : H_n(S^d) \xrightarrow{\cong} H_n(S^{d-1})$$

ist ein Isomorphismus, das heißt: $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$; $\underbrace{H_k(S^1)}_{H_{k+d-1}(S^d)} \cong 0$ für $k > 1$. Also:

$$H_n(S^d) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, n \neq d, \\ \mathbb{Z}, & n = d. \end{cases}$$

3.2.28 Korollar (Analogon des Brouwerschen Fixpunktsatzes für höhere Dimensionen). ∂D^d ist kein Retrakt von D^d ; insbesondere hat jede stetige Abbildung $f : D^d \longrightarrow D^d$ einen Fixpunkt.

Beweis. Durch Widerspruch. Sei $r : D^d \longrightarrow \partial D^d$ eine Retraktion $\implies \overbrace{r \circ \iota}^{=id} : \partial D^d \longrightarrow \partial D^d$. Es folgt: $\overbrace{r \circ \iota}^{=r_* \circ \iota_*} \longrightarrow \blacksquare$

3 HOMOLOGIE

Strategie des Beweises:

- (1) Rein algebraischer Teil: eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $0 \rightarrow C.(A) \rightarrow C.(X) \rightarrow C.(X)/C.(A) \rightarrow 0$ gibt eine lange exakte Homologiesequenz.
- (2) In dieser Homologiesequenz wir statt $H_n(X/A)$ die sogenannte relative Homologie $H_n(X, A)$ stehen. Diese Gruppen müssen wir vergleichen.

3.2.29 Definition. Seien $(A_n), (B_n), (C_n)$ Kettenkomplexe (jeweils mit Randabbildung $\partial_n(A), \partial_n(B), \partial_n(C)$). Eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist eine Familie von kurzen exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow 0,$$

die mit Randabbildungen verträglich sind, d.h. das Diagramm

3.2.30 Beispiel. $A \subset X$ Unterraum, $C_n(A)$ —singuläre Ketten in A , $C_n(X)$ —singuläre Ketten in X , $f_n : C_n(A) \rightarrow C_n(X)$. Durch Inklusion induziert: $\sigma : \Delta^n \rightarrow A \subset X$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & C_n(A) & \longrightarrow & C_n(X) & \longrightarrow & C_n(X)/C_n(A) \\ & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \\ 0 & \longrightarrow & C_{n-1}(A) & \longrightarrow & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A) \end{array}$$

3.2.31 Satz (Fundamentalsatz der homologischen Algebra). *Sei*

$$0 \rightarrow A. \xrightarrow{f.} B. \xrightarrow{g.} C. \rightarrow 0$$

eine Erweiterung von Kettenkomplexen. Es gibt eine lange exakte Homologiesequenz

$$\dots \rightarrow H_n(A.) \xrightarrow{f_*} H_n(B.) \xrightarrow{g_*} H_n(C.) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A.) \rightarrow \dots$$

Beweis. (1) Bestimmung der Randabbildung.

$$H_n(C.) = \ker \partial_n^C / \text{Im } \partial_n^C.$$

Sei $[x] \in H_n(C.) \implies \exists x \in \ker \partial_n \subset C_n$, welches $[x]$ repräsentiert. $g_n : B_n \rightarrow C_n$ surjektiv $\implies \exists b \in B_n$ mit $f_n(b) = x$. Wegen Kommutativität gilt $g_{n-1} \circ \partial_n(b) = 0$, wegen Exaktheit der unteren Zeile gilt: $\exists a \in A_{n-1}$ mit $f_{n-1}(a) = \partial_n(b)$. Setze $\partial_*([x]) = [a] \in H_{n-1}(A.)$. Wohldefiniertheit: $f_{n-1}\partial_{n-1}(a) = \partial_{n-1}f_{n-1}(a) = \partial_{n-1}\partial_n(b) = 0$. Unabhängig von der Wahl von x : Sei $x' \in \partial_n^C$ mit $x' - x = c' \in \text{Im } \partial_{n+1} \implies \exists c'' \in C_{n+1}$ mit $\partial_{n+1}(c'') = c'$. Sei $b'' \in B_{n+1}$ s.d. $g_{n+1}(b'') = c'' \implies x$ liefert zu $b' := b + \partial_{n+1}(b'') \in B_n \implies \partial_n(b') = \partial_n(b) + \partial_n \circ$

3 HOMOLOGIE

$\partial_{n+1}(b'') = \partial_n(b)$. Unabhängig von der Wahl von b : Wenn $g_n(\tilde{b}) = x$, dann gilt: $\tilde{b} - b = \partial_n \circ f_n(\tilde{a}) \in \text{Im } \partial_n$, $\partial_*([x])$ ist unabhängig von der Wahl von b . Nun müssen wir zeigen, dass die Homologiesequenz exakt ist. Also z.z.:

$$\ker f_* \stackrel{(\supset)}{=} \text{Im } \partial_*$$

$$\ker g_* \stackrel{(\supset)}{=} \text{Im } f_* : g \circ f : A \rightarrow C.$$

$$\ker \partial_* \stackrel{(\supset)}{=} \text{Im } g_* : g_*([b]) = [g_n(b)], \partial_* g_*([b]) = [0]$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} & 0 \\ & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & 0 \end{array}$$

Die umgekehrten Inklusionen (\subset) : $\ker g_* \subseteq \text{Im } f_*$. Sei $[b] \in \ker g_*$, repräsentiert durch $b \in B_n$

$$g_n(b) = \partial_{n+1}(c) = \partial_{n+1}(g_{n+1}(b')) = g_n(\partial_n(b')) \implies g_n(b - \partial_n(b')) = 0 \implies \exists a \in A_n \text{ s.d. } f_n(a) = b - \partial_{n+1}(b').$$

$$f_{n-1}(\partial_n(a)) = \partial_n(f_n(a)) = \partial_n(b - \partial_{n+1}(b')) = 0 \implies \partial_n(a) = 0 \implies [a] \in H_n(A)$$

$$f_*([a]) = [f_n(a)] = [b - \partial_{n+1}(b)] = [b].$$

$\ker f_* \subset \text{Im } \partial_*$. Sei $[a] \in \ker f_* \implies a \in \ker \partial_n$, $f_n(a) \in \text{Im } \partial_{n+1} \implies \exists b \in B_{n+1}$ mit $\partial_{n+1}(b) = a$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} & 0 \\ & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & 0 \end{array}$$

Sei $[g_{n+1}(b)] =: [x] \in H_{n+1}(C)$. $(\partial_{n+1} \circ g_{n+1}(b) = g_n \circ \partial_{n+1}(b) = g_n \circ f_n(a) = 0.)$
 $\partial_*[x] = [a]$ nach Definition der Randabbildung. Es bleibt noch: $\ker \partial_* \subset \text{Im } g_*$. Sei $[x] \in \ker \partial_*$ mit $\partial_*[x] = 0$. D.h. wenn $b \in B_n$ mit $g_n(b) = x$ und $\partial_n(b) = f_{n-1}(a)$, dann gilt $a \in \text{Im } \partial_n \implies \exists a' \in A_n$ s.d. $a = \partial_n(a')$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & A_{n+1} & \longrightarrow & B_{n+1} & \longrightarrow & C_{n+1} & 0 \\ & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1} & \\ 0 & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & B_n & \longrightarrow & C_n & 0 \end{array}$$

Sei $b' := f_n(a')$, $\partial_n(b') = f_{n-1}(a) = \partial_n(b)$. Das heißt $\partial_n(b - b') = 0$, $[b - b'] \in H_n(B)$; $\partial_n(g_n(b - b')) = g_{n-1}(\partial_n(b - b')) = 0 \implies g_*([b - b']) \in H_n(C)$,
 $g_n(b - b') = x - g_n(b') = x - g_n(f_n(a')) = x$. ■

3 HOMOLOGIE

Also haben wir:

$$0 \longrightarrow A. \longrightarrow B. \longrightarrow C. \longrightarrow 0$$

$$\implies \dots \longrightarrow H_n(A.) \xrightarrow{f_*} H_n(B.) \xrightarrow{g_*} H_n(C.) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A.) \longrightarrow \dots$$

3.2.32 Korrolar. Wenn $A \subset X$, dann hat man eine lange exakte Homologiesequenz

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \dots,$$

wobei

$$H_n(X, A) = H_n\left(C.(X) / C.(A)\right),$$

die sogenannte relative Homologiegruppe. $H_n(X, A) \ni [x]$ heißt $\partial_n(x) \in C.(A)$