Analysis Aufbaumodul[1]

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht
LaTeX: `rydval.jakub@gmail.com`
Version: 11. November 2016
Technische Universität Dresden

[1]Math Ba ANAA: Grundlagen der Analysis, WS 2014/15

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Integration auf Mannigfaltigkeiten

(Nur als Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.)

29 Mannigfaltigkeiten

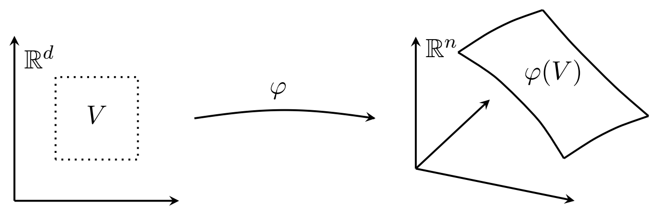
Abbildung $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ mit $V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ heißt *regulär* im Punkt $x \in V$ falls

$$\varphi'(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \text{ regulär (d.h. injektiv) ist.} \tag{1}$$

Falls φ regulär ist $\forall x \in V$ heißt φ *regulär auf* V bzw. *reguläre* C^q*-Parametrisierung* (auch C^q*-Immersion*). V heißt *Parameterbereich* und $\varphi(V)$ *Spur* von φ.

$$\text{(1) impliziert (vgl. Lineare Algebra), dass } d \leq n. \tag{2}$$

Dies sei in VIII stets erfüllt! Folglich ist (1) äquivalent zu $\operatorname{rang} \underbrace{\varphi'(x)}_{n \times d\text{-Matrix}} = d$. $\qquad (1')$

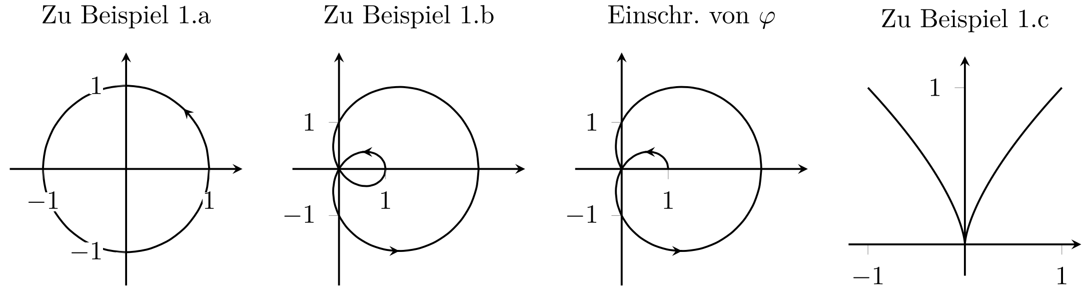


Beispiel 1 (Reguläre Kurven). Sei stets $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ I$ offen, $\varphi'(x) \neq 0$ (Tangentenvektor).

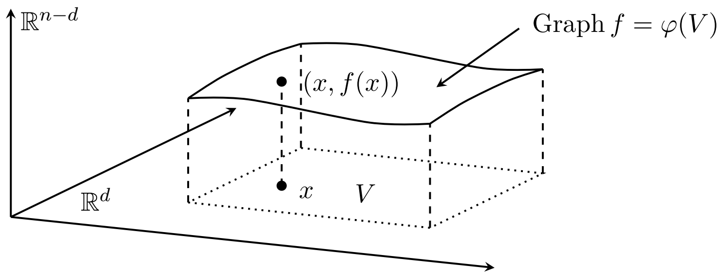
(a) $\varphi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (\cos kt, \sin kt)^{\mathrm{T}},\ k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. (Der Einheitskreis wird k-mal durchlaufen.)

(b) $\varphi : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (1 + 2\cos t) \cdot (\cos t, \sin t)^{\mathrm{T}},\ \varphi\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = (0,0)^{\mathrm{T}},\ \varphi(0) = (3,0)^{\mathrm{T}},\ (1,0)^{\mathrm{T}}$ gehört nicht zur Kurve $\implies$ φ ist regulär (Selbststudium). Einschränkung von φ auf $\left(-\pi, \frac{2\pi}{3}\right)$ ist auch eine reguläre Kurve.

(c) $(-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (t^3, t^2)^{\mathrm{T}}$ ist nicht regulär, da $\varphi'(0) = 0$.



Beispiel 2 (Parametrisierung von Graphen). Sei $f : C^q(V, \mathbb{R}^{n-d}),\ V \subset \mathbb{R}^d$ offen. Betrachte $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) = (x, f(x))$. Offenbar $\varphi \in C^q(V, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi'(x) = (\mathrm{id}_d, f'(x))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times d} \implies \varphi$ ist stets regulär.



(vgl. *Kapitel 14*)

- $U \subset M$ heißt *offen* bzgl. M g.d.w. $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U = \tilde{U} \cap M$.
- $U \subset M$ heißt *Umgebung* von $u \in M$ bzgl. M g.d.w. $\exists U_0 \subset M$ offen bzgl. M ist mit $u \in U_0 \subset U$.

Beispiel. Für $M \subset \mathbb{R}^2$ ist

offen bzgl. M und

nicht offen bzgl. M.

- $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit* ($q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) falls $\forall u \in M$ existiert Umgebung U von u bzgl. M und $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$, U offen, mit φ ist reguläre C^q-Parametrisierung, φ ist Homöomorphismus und $\varphi(V) = U$ $(\subset M)$.

(M heißt auch C^q*-Untermannigfaltigkeit.*)

Verwende *Mannigfaltigkeit* statt C^1-Mannigfaltigkeit.

- φ^{-1} bzw. (φ^{-1}, U) heißt *Karte* von M um $u \in M$, U ist zugehöriges *Kartengebiet*, φ zugehörige *Parameterabbildung*, V zugehöriges Parameterbereich.
- Menge $\{\varphi_\alpha^{-1} \mid \alpha \in A\}$ heißt *Atlas* von M falls zugehörige Kartengebiete U_α die Mannigfaltigkeit M überdecken.

Reguläre Parametrisierung heißt *Einbettung*, falls sie Homöomorphismus ist. *Vereinbarung:* Parametrisierungen im Zusammenhang mit Mannigfaltigkeiten seien stets Einbettungen!

Beispiel 3. (Beweise Selbststudium)

(a) Kreis aus *Beispiel 1.a* ist 1-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit (d.h. C^q-Mannigfaltigkeit $\forall q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) (Obwohl der Kreis mehrfach durchgelaufen wird). Atlas benötigt 2 Karten!

(b) Kurven aus Beispiel 1.b,c sind keine Mannigfaltigkeiten.

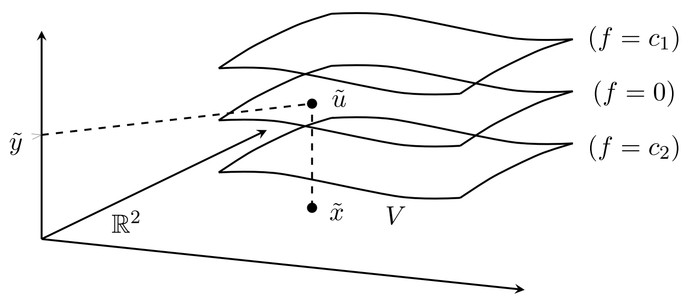
(c) $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist n-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, $\{\mathrm{id}\}$ ist Atlas (Atlas kommt mit einer Karte aus).

Beispiel 4. Betrachte $M := \operatorname{graph} f$ aus *Beispiel 2.* Offenbar $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to M \subset \mathbb{R}^n$ ist Homöomorphismus und reguläre C^q-Parametrisierung $\implies$ M ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit.

Beispiel 5. Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$, D offen, f in C^q für $q \geq 1$.

$$\operatorname{rang} f'(u) = n - d \ \forall n \in D. \tag{$*$}$$

$$M := \{u \in D \mid f(u) = 0\}.$$



Fixiere $\tilde{u} = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in M$, $u = (x_1, ..., x_d, y_1, ..., y_{n-d}) \in \mathbb{R}^n$. $(*) \underset{\text{-vertauschung}}{\overset{\text{evtl. Koord.}}{\Longrightarrow}} \underbrace{f_y(\tilde{x}, \tilde{x})}_{\in \mathbb{R}^{(n-d)\times(n-d)}}$

$\underset{\textit{impl. Funktion}}{\overset{\textit{Theorem über}}{\Longrightarrow}} \exists$ Umgebung $V \subset \mathbb{R}^d$ von $\tilde{x}$, Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n-d}$ von $\tilde{y}$, $\psi \in C^q(V, U)$

mit $(x, \psi(x)) \in M, \psi : V \to W$ Homöomorphismus

$\Longrightarrow$ $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(x) := (x, \psi(x))$ ist reguläre C^q- Parametrisierung und Homöomorphismus, $\varphi(V)$ ist Umgebung von $\tilde{U} \in M$ bzgl. M

$\Longrightarrow$ M ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit.

Bemerkung: $M = \operatorname{graph} f$ und $M = \{f = 0\}$ sind grundlegende Konstruktionen für Mannigfaltigkeiten. Jede Mannigfaltigkeit hat lokal diese Gestalt.

Satz 1 (lokale Darstellung als Graph). *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit $\iff$ $\forall u \in M \subset \mathbb{R}^n$ existiert Umgebung U von u bzgl. M, $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und Permutation π von Koordinaten in $\mathbb{R}^n$ mit $\psi(W) = U$ für $\psi(v) := \pi(v, f(v))$ $\forall v \in W$ (d.h. U ist Graph von f).*

Somit: M ist C^q-Mannigfaltigkeit g.d.w. M ist lokal Graph einer C^q-Funktion f (vgl. *Beispiel 2,4*).

Beweis. "$\Longleftarrow$": Folgt aus *Beispiel 2,4*.

"$\Longrightarrow$": Fixiere $\tilde{u} \in M$, sei $\varphi : \tilde{V} \subset \mathbb{R}^d \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ zugehörige C^q-Parametrisierung, $\tilde{u} = \varphi(\tilde{x})$. $\varphi'(\tilde{x})$ ist regulär $\underset{\text{der Zeilen}}{\overset{\text{evtl. Permut. } \pi}{\Longrightarrow}}$ $\varphi_I'(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ ist regulär für $\varphi(x) = \pi(\varphi_I(x), \varphi_{II}(x))^{\mathrm{T}}$, $\varphi_I(x) \in \mathbb{R}^d, \varphi_{II}(x) \in \mathbb{R}^{n-d}$.

Zerlege auch $u = \pi(v, w)$ mit $v \in \mathbb{R}^d$, d.h. $\tilde{U} = \pi(\tilde{v}, \tilde{w})$ $\underset{\text{Funktion}}{\overset{\text{Thm. ü. inverse}}{\Longrightarrow}}$ $\exists V \subset \tilde{V}$ offen, $W \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\tilde{v} \in W$ mit $\varphi_I^{-1} : W \to V$ existiert und ist Homöomorphismus, C^q-Abbildung, $\varphi_I^{-1}(\tilde{v}) = \tilde{x}$ mit $f(v) := \varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v))$ $\forall v \in W$ ist $f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ und $\psi(v) := \varphi(\varphi_I^{-1}(v)) = \pi(\varphi_I(\varphi_I^{-1}(v))), \ \varphi_{II}(\varphi_I^{-1}(v)) = \pi(v, f(v)) \implies \psi(\tilde{v}) = \pi(\tilde{v}, \tilde{w}) = \tilde{u}$, $\psi(w) = \varphi(v) \subset M$. $\varphi : \tilde{V} \to \tilde{U}$ ist Homöomorphismus $\implies$ $\varphi(V)$ ist offen in M $U := \psi(W)$ ist offen bzgl. $M \implies U$ ist Umgebung von $\tilde{u}$ bzgl. $M \overset{\tilde{u}\text{ bel.}}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

∎

Satz 2 (Charakterisierung von Mannigfaltigkeiten mittels umgebenden Raum). *$M \subset$
$\mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit $\iff$ $\forall u \in M$ existiert Umgebung $\tilde{U}$ von u bzgl. $\mathbb{R}^n$, $\tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\tilde{\psi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ mit $\tilde{\psi}$ ist C^q-Diffeomorphismus und*

$$\tilde{\varphi}(\tilde{U} \cap M) = \tilde{V} \cap \underbrace{(\mathbb{R}^d \times \{0\})}_{\subset \mathbb{R}^n}.$$

Bemerkung: Diese Charakterisierung benutzt umgebenden Raum und wird häufig als die Definition für Mannigfaltigkeit benutzt.

Beweis. "$\Longleftarrow$": $\tilde{\psi}$ eingeschränkt auf $\tilde{U} \cap M$ liefert Karten $\Longrightarrow$ Behauptung.

"$\Longrightarrow$": Fixiere $\tilde{u} \in M$, wähle $U \subset M, W \subset \mathbb{R}^d, f \in C^q(W, \mathbb{R}^{n-d})$ gemäß *Satz 1*, o.B.d.A. $\pi = \text{id}$. Zerlege $u = (v, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}, \tilde{w} = (\tilde{v}, f(\tilde{v}))$. Sei $\hat{U} := W \times \mathbb{R}^{n-d} =: \hat{V}$ und $\tilde{\varphi} : \hat{V} \to \hat{U}$ mit $\tilde{\varphi}(v, w) := (v, f(v) + w) \implies \tilde{\varphi} \in C^q$.

$$\tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0) = \begin{pmatrix} \text{id}_d & 0 \\ f'(v) & \text{id}_{n-d} \end{pmatrix} \text{ ist regulär}$$

$\overset{\text{Thm. ü. inverse}}{\underset{\text{Funktion}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ Umgebung $\tilde{U} \subset \hat{U}$ von $\tilde{u}$, Umgebung $\tilde{V} \subset \hat{V}$ von $(\tilde{v}, 0)$ so dass $\tilde{\psi} := \tilde{\varphi}^{-1} \in C^q(\tilde{U}, \tilde{V})$ existiert. Wegen $\tilde{\varphi}(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})) = \tilde{U} \cap M$ folgt Behauptung.

■

Folgerung 3. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit und $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to U \subset M$ zugehörige Parametrisierung um $u \in U \implies \exists \tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \to \tilde{U}$ mit $U \subset \tilde{U}$, $V \times \{0\} \subset \tilde{V}$, $\tilde{\varphi}$ ist C^q-Diffeomorphismus und $\tilde{\varphi}(x, 0) = \varphi(x)$ $\forall x \in V$.*

Beweis. Folgt aus Beweisen von *Satz 1,2*. ■

Satz 4 (lokale Mannigfaltigkeit als Niveaumenge). *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist d-dimensionale C^q-Mannig- faltigkeit $\iff$ $\forall u \in M$ existiert Umgebung $\tilde{U}$ von u bzgl. $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$ mit $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$ und $\tilde{U} \cap M = \{\tilde{u} \in M \mid f(\tilde{u}) = 0\}$.*

Somit ist M C^q-Mannigfaltigkeit g.d.w. M lokal Niveaumenge einer C^q-Funktion f ist.

Bemerkung: $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ heißt *regulärer Wert* von $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$, $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, falls $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$ $\forall u \in \tilde{U}$ mit $f(u) = c$. Folglich ist $M := \{u \in \tilde{U} \mid f(u) = c\}$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit falls c regulärer wert von f ist.

Beweis. "$\Longleftarrow$": Gemäß *Beispiel 5* erhält man lokale Parametrisierung.

"$\Longrightarrow$": Fixiere $\tilde{u} \in M$, wähle $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n, \tilde{\psi} : \tilde{U} \to \tilde{V}$ nach *Satz 2*. Sei $f := (\tilde{\psi}_{d+1}, ..., \tilde{\psi}_n)$, offenbar $f \in C^q(\tilde{U}, \mathbb{R}^{n-d})$ mit $\tilde{\varphi}$ aus Beweis von *Satz 2*. $\tilde{\psi}'(\tilde{u}) = \tilde{\varphi}'(\tilde{v}, 0)^{-1}$ ist regulär. $f'(\tilde{u})$ hat vollen Rang, d.h. $\operatorname{rang} f'(\tilde{u}) = n - d$ nach Konstruktion $\{\tilde{u} \in \tilde{U} \mid f(\tilde{u}) = 0\} = \tilde{U} \cap M \implies$ Behauptung.

■

Offenbar sind Karten und Atlas für Mannigfaltigkeiten nicht eindeutig. Gelegentlich ist Änderung der Karten sinnvoll.

Lemma 5 (Kartenwechsel). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale C^q-Mannigfaltigkeit und $\varphi_1^{-1}, \varphi_2^{-1}$ Karten mit zugehörigem Kartengebiet $U_1 \cap U_2 = \emptyset \implies \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ ist C^q-Diffeomorphismus.*

Beweis. Ersetze φ_1, φ_2 mit $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ gemäß *Folgerung 3* $\implies$ Einschränkung von $\tilde{\varphi}_2^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1^{-1}$ liefert Behauptung. ■

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit

- Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt *Tangentialvektor* in $u \in M$ an M falls stetig differenzierbare Kurve $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ $(\delta > 0)$ existiert mit $\gamma(0) = u$ und $\gamma'(0) = v$.
- Menge aller Tangentialvektoren T_uM in u heißt *Tangentialraum.*

Satz 6. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit, $u \in M, \varphi : V \to U$ zugehörige Parametrisierung um $u \implies T_uM$ ist d-dimensionaler ($\mathbb{R}$-)Vektorraum und*

$$T_uM = \underbrace{\varphi'(x)}_{\in L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)} \cdot \mathbb{R}^d$$

für $x := \varphi^{-1}(u)$, wobei T_uM unabhängig von spezieller Parametrisierung ist.

Bemerkung: Man bezeichnet auch $(u, T_uM) \subset M \times \mathbb{R}^n$ als Tangentialraum und $TM := \bigcup_{u \in M}(u, T_uM)$
$\subset M \times \mathbb{R}^n$ als *Tangentialbündel.*

Beispiel 6. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen $\implies$ M ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $T_uM = \mathbb{R}^n$ $\forall u \in M$.

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit

- (Normalenvektor) Vektor $w \in \mathbb{R}^n$ heißt *Normalenvektor* in $u \in M$ an M falls $\langle w, v\rangle = 0\ \forall v \in T_uM$ (d.h. $w \perp v\ \forall v \in T_uM$).
- (Normalenraum) Menge aller Normalenvektoren $N_uM = T_uM^\perp$ heißt *Normalenraum* von M in u.

Beweis. Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ C^1-Kurve mit $\gamma(0) = u$

$$\begin{aligned} \implies & g := \varphi^{-1} \circ \gamma \text{ ist } C^1\text{-Kurve } g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^d \text{ mit } g(0) = x \text{ und} \\ & \gamma'(0) = \varphi'(x) \cdot \underbrace{g'(0)}_{\in \mathbb{R}^d},\ \varphi'(x) \text{ ist regulär.} \end{aligned} \tag{$*$}$$

Offenbar liefert auch jede C^1-Kurve g in $\mathbb{R}^d$ durch x C^1-Kurve γ in M mit $(*)$. Menge aller Tangentialvektoren $g'(0)$ von C^1-Kurve g in $\mathbb{R}^d$ ist offenbar $\mathbb{R}^d$ $\implies$ (3) $\underset{\text{regulär}}{\overset{\varphi'(x)\text{ ist}}{\implies}}$ $\dim(T_uM) = d$. Da $(*)$ für jede Parametrisierung φ gilt, ist T_uM unabhängig von φ. ■

Satz 7. *Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R}^{n-d}), V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $c \in \mathbb{R}^{n-d}$ regulärer Wert von f $\implies$ $M := \{u \in V \mid f(u) = c\}$ ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $T_uM = \{v \in \mathbb{R}^n \mid f'(u) \cdot v = 0\}$ $\big(= \operatorname{kern} f'(u)\big)$ $\forall u \in M$, $N_uM = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w = f'(u)^{\mathrm{T}} \cdot v, v \in \mathbb{R}^{n-d}\}$ $\forall u \in M$. (d.h. Spalten von $f'(u)^{\mathrm{T}}$ bilden Basis von N_uM.)*

Beispiel 7. Sei $f = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}} \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2), 0 \in \mathbb{R}^2$ regulärer Wert von f $\implies$ $M := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(u) = 0, f_2(u) = 0\}$ ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Gradient $f_i'(u)^T$ steht senkrecht auf $\{f_i = 0\}$ $\implies$ $f_1'(u)^{\mathrm{T}}$, $f_2'(u)^{\mathrm{T}}$ sind Normalen zu M in u $\implies$ $f_i'(u)^{\mathrm{T}} \cdot v = 0$, $i = 1, 2$ für Tangente v.

Beweis. (von *Satz 7*) M ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit gemäß Bemerkung nach *Satz 4*. Sei γ C^1-Kurve auf M, $\gamma(0) = u, \gamma'(0) = v$ $\implies$ $f(\gamma(t)) = c\ \forall t$ $\implies$ $f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = f'(u) \cdot v = 0$. Wegen $\operatorname{rang} f'(u) = n - d$ folgt $\dim\{\operatorname{kern} f'(u)\} = d$ $\implies$ Behauptung für T_uM wegen $\dim T_uM = d$. Sei $w = f'(u)^T \cdot \tilde{v}, v \in T_uM$ $\implies$ $\langle w, v\rangle = \langle \tilde{v}, \underbrace{f'(u) \cdot v}_{=0}\rangle = 0$ $\implies$ $w \in N_uM$.

Wegen $\operatorname{rang} f'(u)^T = n - d$ und $\dim N_uM = n - d$ folgt Behauptung. ■

Beispiel 8 (Orthogonale Gruppe von $n \times n$ Matrizen). Sei $M := O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^{\mathrm{T}}A$
$= \mathrm{id}\}$ Orthogonale Gruppe (*d.h.*$A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, vgl. Lineare Algebra). $T_{\mathrm{id}}M$ ist $\frac{n(n-1)}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ $(\cong \mathbb{R}^{n^2})$ mit $T_{\mathrm{id}}M = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B + B^{\mathrm{T}} = 0\}$

(schiefsymmetrische Matrizen). *Denn:* Betrachte $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{Sym.}}$ mit $f(A) = A^{\mathrm{T}}A$. f ist stetig differenzierbar mit

$$f'(A) \cdot B = \underbrace{A^{\mathrm{T}} \cdot B + B^{\mathrm{T}} \cdot A}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{Sym.}}} \; \forall B \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

id ist regulärer Wert von f, denn sei $f(A) = \mathrm{id}, s \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{Sym.}} \implies f'(A)\cdot B = S$ hat Lösung $B = \frac{1}{2}(A \cdot S)$ (da $\frac{1}{2}\underbrace{A^{\mathrm{T}}A}_{\mathrm{id}} \cdot S + \frac{1}{2}S \cdot \underbrace{A^{\mathrm{T}}A}_{\mathrm{id}} = S$), d.h. $f'(A)$ hat vollen Rang $\overset{\textit{Satz 4}}{\implies}$ M ist d-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $d = \dim \mathbb{R}^{n\times n} - \dim \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{Sym.}} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Nach *Satz 7*: $T_{\mathrm{id}}M = \{B \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \mathrm{id}^{\mathrm{T}} \cdot B + B^{\mathrm{T}}\mathrm{id} = 0\}$.

- $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Hyperfläche.*
- Abbildung $\nu : M \to \mathbb{R}^n, M \subset \mathbb{R}^n$ ist Mannigfaltigkeit heißt *Einheitsnormalenfeld* (ENF), falls $\nu(u) \in N_uM$, $\|\nu(u)\| = 1 \; \forall u \in M$, ν ist stetig auf M.

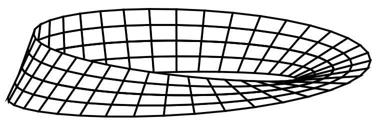
Lemma 8 (Existenz von ENF). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängende Hyperfläche, dann existiert kein Einheitsnormalenfeld oder genau Zwei.*

Beweis. (a) Falls ν Einheitsnormalenfeld auf M ist $\implies$ auch $-\nu$ ist Einheitsnormalenfeld auf M.

(b) Seien $\nu, \tilde{\nu}$ Einheitsnormalenfelder auf $M \implies s(u) := \langle \nu(u), \tilde{v}(u)\rangle = \pm 1 \; \forall u \in M$, da $\dim N_uM = 1$. Abbildung s ist stetig auf M, M ist zusammenhängend $\implies$ $s(u) = 1 \; \forall u$ oder $s(u) = -1 \; \forall u \implies \tilde{\nu} = \nu$ oder $\tilde{\nu} = -\nu \implies$ Behauptung.

∎

Beispiel 9 (Möbius Band). Klebe Enden eines 2-dimensionalen Streifens verdreht zusammen $\implies$ diese Mannigfaltigkeit besitzt kein Einheitsnormalenfeld.



Hyperfläche $M \subset \mathrm{R}^n$ heißt *orientierbar*, falls Einheitsnormalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ existiert, ν heißt *Orientierung*, (M, ν) *orientierte Mannigfaltigkeit.*

Beispiel 10. Konstruiere Einheitsnormalenfeld für Hyperfläche $M = \{f = 0\}$. Sei $f \in C^1(V, \mathbb{R}), V \subset \mathbb{R}^n$ offen, 0 regulärer Wert von f ($\implies f'(u) \neq 0,\ u \in M$). $M = \{u \in V \mid f(u) = 0\}$ ist Hyperfläche. Offenbar ist $\nu(u) = \frac{f'(u)}{|f'(u)|}$ Einheitsnormalenfeld auf M.

Seien $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$, $A := \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ und $A_k \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$ sei Matrix A ohne k-te Zeile. Dann heißt

$$a_1 \wedge ... \wedge a_{n-1} := \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_k := (-1)^k \cdot \det A_k$ *äußeres Produkt* von $a_1, ..., a_{n-1}$. (*Später:* $|\alpha|$ ist Volumen des von $a_1, ..., a_{n-1}$ aufgespannten Parallelotops.)

Beispiel 11. Für $n = 3$ ist $a_1 \wedge a_2 = a_1 \times a_2$, wobei $\times$ für Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$ steht.

Lemma 9. *Seien* $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$

$$\langle b, a_1 \wedge ... \wedge a_{n-1} \rangle = \det \begin{pmatrix} b & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \ \forall b \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

$a_1 \wedge ... \wedge a_{n-1} \perp a_j \ \forall j = 1, ..., n-1.$

Bemerkung:

$$a_1 \wedge ... \wedge a_{n-1} \begin{cases} = 0 & \text{falls } \exists a_j \text{ linear abhängig,} \\ \neq 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(Vgl. n-dimensionales Volumen.)

Beweis. Für (4) entwickle $\det \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix}$ nach 1. Spalte b. $b = a_j$ in (4) $\implies$ 2. Bedingung; (4) liefert auch 3. Bedingung. ∎

Beispiel 12. Konstruiere Einheitsnormalenfeld mittels Parametrisierung φ. Sei $M = \varphi(V)$ Hyperfläche mit zugehöriger Parametrisierung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n, V$ offen

$$\overset{\text{Satz 6}}{\implies} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)}_{=\varphi'(x)e_j} \in T_{\varphi(x)}M \ \forall x \in V, j = 1, ..., n-1 \text{ (beachte } \varphi_{x_j}(x) \in \mathbb{R}^n)$$

$$\implies N(x) := \varphi_{x_1}(x) \wedge ... \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x) \in N_{\varphi(x)}M \ \forall x \in V$$

$$\implies \nu(x) := \frac{N(x)}{|N(x)|} \text{ ist Einheitsnormalenfeld auf } M \text{ (beachte: } \varphi'(x) \text{ ist regulär).}$$

30 Integration über Kartengebiete

Frage: Oberflächeninhalt bzw. d-dimensionaler Inhalt auf Mannigfaltigkeit M. Idee: Approximation durch stückweise "ebene"Mannigfaltigkeiten.

(a) (d=2): Verbinde Punkte auf Mannigfaltigkeit zu Dreiecken (einbeschriebene Approximation).

$$\text{Fläche } M = \sup_{\substack{\text{Zerle-}\\ \text{-gungen}}} \sum_{\text{Dreiecke}} \text{Dreiecksflächen.}$$

Dies funktioniert nur für Kurven (d.h. mit $d = 1$), nicht für $d > 1$. Z.B. Zylinderoberfläche $M \subset \mathbb{R}^2$ wird unendlich. *(Vgl. Hildebrandt: Analysis 2., 6.1, "Schwarzscher Stiefel").*

(b) (d=2) Nehme Tangentiale Parallelogramme (äußere Approximation).

$$\text{Fläche } M = \lim_{\substack{\text{Feinheit d.}\\ \text{Zerlegung.}\\ \longrightarrow 0}} \sum_j \text{Fläche } (\varphi'(x)(Q)).$$

Hinweis: Allgemeine Theorie für d-dimensionalen Inhalt liefert Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^d$ (vgl. Literatur). Seien $a_1, ..., a_d \in \mathbb{R}^n (d \leq n)$. Dann heißt

$$p(a_1, ..., a_d) := \left\{ \sum_{j=1}^{d} t_j a_j \mid t_j \in [0, 1], j = 1, ..., d \right\}$$

das von $a_1, ..., a_d$ aufgespannte *Parallelotop* (auch *d-Spat*).

Satz 1. *Seien $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$, Volumen $v(a_1, ..., a_n) := \mathcal{L}^n(P(a_1, ..., a_n))$ (Lebesque-Maß vom Parallelotop)*

$\Longrightarrow$ (i) $v(a_1, ..., \lambda a_k, ..., a_n) = |\lambda| v(a_1, ..., a_n)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(ii) (Prinzip d. Cavalieri) $v(a_1, ..., a_k + a_j, ..., a_n) = v(a_1, ..., a_n)$ *falls* $k \neq j$,

(iii) $v(a_1, ..., a_n) = 1$ *falls* $\{a_1, ..., a_n\}$ *Orthonormalsystem in* $\mathbb{R}^n$ *ist,*

(iv) $v(a_1, ..., a_n) = |\det A|$ *für* $A := \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *d.h. Determinante liefert Volumen!.*

Beachte: Eigenschaften (i)-(iii) implizieren bereits (iv). (Argumentiere wie bei det.)

Beweis. (a) $a_1, ..., a_n$ sind linear abhängig $\Longrightarrow$ $P(a_1, ..., a_n)$ ist "flach" $\Longrightarrow$ $v(a_1, ..., a_n) = 0 \Longrightarrow$ (iv) ist richtig $\Longrightarrow$ (i), (ii) sind richtig.

(b) $a_1, ..., a_n$ sind linear unabhängig: Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ Standard-ONS, dafür gilt (iii) nach Def. α^n. $U := P(e_1, ..., e_n), V := P(a_1, ..., a_n) \Longrightarrow A : \operatorname{int} U \to \operatorname{int} V$ ist Diffeomorphismus, offenbar $A'(y) = A\ \forall y$

$$\overset{\text{Trans. Satz}}{\underset{\text{Kapitel 24}}{\Longrightarrow}} \alpha^n(V) = \int_V \mathrm{d}x \overset{x=Ay}{=} \int_U |\det A| \,\mathrm{d}y = |\det A| \int_U \mathrm{d}y = |\det A| \cdot \underbrace{\alpha^n(U)}_{=1} = |\det A|$$

$\implies$ (iv) $\implies$ (i), (ii), (iii) nach Eig. Def. .

∎

Benutze (ii)

Ziel: d-dimensionaler Inhalt $V_d(P(a_1, ..., a_d))$. Idee: Betrachte $P(a_1, ..., a_d)$ als Teilmenge des d-dimensionalem Vektorraum X und nehme (d-dimensionales) Lebesque Maß $\mathcal{L}^d$ in X. Somit sollte $V_d : \mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ folgende Eigenschaften haben:

(V1) $V_d(a_1, ..., \lambda a_k, ..., a_d) = |\lambda| V_d(a_1, ..., a_d)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

(V2) $V_d(a_1, ..., a_k + a_j, ..., a_d) = V_d(a_1, ..., a_d)$ falls $k \neq j$,

(V3) $V_d(a_1, ..., a_d) = 1$ falls $a_1, ..., a_d$ orthonormal sind.

Satz 2. *V_d ist durch* (V1)-(V2) *eindeutig bestimmt und es gilt*

$$V_d(a_1, ..., a_d) = \sqrt{\det \underbrace{A^T A}_{\in \mathbb{R}^{d \times d}}} \text{ mit } A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_d \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n \times d}}. \tag{1}$$

Bemerkung:

(1) Für $d = n$ liefert (1) Gleichung (iv) in *Satz 1*.
(2) $A^\mathrm{T} A$ ist symmetrisch und positiv definit $\big(\langle x, A^\mathrm{T} A x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = |Ax|^2 \geq 0\big)$ und somit auch $\det A^\mathrm{T} A \geq 0$.
(3) $V_d(a_1, ..., a_2) = 0$ g.d.w. $a_1, ...,_d$ lineare abhängig sind.

Beweis. Sei $\alpha_{ij} := \langle a_i, a_j \rangle$

$$\implies A^\mathrm{T} A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d1} & \cdots & \alpha_{dd} \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften von Determinante implizieren, dass rechte Seite in (1) (V1)-(V3) erfüllt. (Selbststudium) Wie bei Determinante zeigt man auch, dass $V_d(a_1, ..., a_d)$ durch (V1)-(V3) eindeutig bestimmt ist. ∎

Polarzerlegung. $O^T \cdot O = \mathrm{id}_d$. $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n \implies A = \overbrace{O}^{\in\mathbb{R}^{n\times d}} \cdot \underbrace{S}_{\in\mathbb{R}^{d\times d}_{\mathrm{sym}}} \implies A^T \cdot A = S^T \cdot O^T \cdot O \cdot S = S^T \cdot S$.

$|\det S| = \sqrt{\det S^{\mathrm{T}} S}$.

Beispiel 1. $d = n-1$: Seien $a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}^n, a = a_1 \wedge ... \wedge a_{n-1}$

$$\implies V_{n-1}(a_1, ..., a_n) = |a|^2 \tag{2}$$

(d.h. Länge des äußeren Produkts liefert Volumen). Denn:

$$\begin{pmatrix} a^T \\ A^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a, a\rangle & 0 \\ 0 & A^T A \end{pmatrix}.$$

Wegen $\langle a, a_j\rangle = 0 \; \forall j$, A wie in (1) $\implies |a|^2 \det A^T A = \left(\det \begin{pmatrix} a & A \end{pmatrix}\right)^2 \overset{29.4}{=} |a|^4 \overset{(1)}{\implies}$ (2).

Frage: Für Mannigfaltigkeit M:

$$V_d(\text{Quader}) \xrightarrow{\varphi'(x)} V_d(\text{Parallelotop})?$$

Für Quader $Q = P(b_1, ..., b_d) \subset \mathbb{R}^d$ ist $P(a_1, ..., a_d) \subset T_u M \subset \mathbb{R}^n$ zugehöriges Parallelotop falls $a_j = \varphi'(x) b_j,\ j = 1, ..., d$.

Satz 3. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit, φ Parametrisierung und $\varphi(x) = u \in M$ und sei $Q := P(b_1, ..., b_d) \subset \mathbb{R}^d$ Quader ($b_j \in \mathbb{R}^d$), $a_j := \varphi'(x) b_j, j = 1, ..., d$*

$$\implies V_d(a_1, ..., a_d) = \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)}\, V_d(b_1, ..., b_d). \tag{1}$$

- (Maßtensor) $\varphi'(x)^T \cdot \varphi'(x) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *heißt* Maßtensor *von φ in x.*
- (gramsche Determinante) $g^\varphi(x) := \det \varphi'(x)^T \varphi'(x)$ *heißt* Gramsche Determinante *von φ in x.*

Beweis. Sei $B = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times d}$.

$$V_d(a_1,...,a_d) \overset{(1)}{=} \sqrt{\det A^T A} = \sqrt{\det(\varphi'(x)B^T)\cdot \underbrace{\varphi'(x)B}_{A}} = \sqrt{\det \varphi'(x)^T\varphi'(x)}\cdot \underbrace{\sqrt{\det B^T B}}_{=V_d(b_1,...,b_d)}.$$

■

Sei $m \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\varphi : V \to U$ lokale Parametrisierung, $f : U \to \mathbb{R}$ Funktion auf Kartengebiet U motiviert z.B. durch Riemannsummen (vgl. *Kapitel 22*)

$$\sum_i f(a_i)V_d(P_i) = \sum_i f(\varphi(x_i))\sqrt{g^{\varphi}(x_i)}V_d(Q_i)$$

mit $P_i = \varphi'(x)(Q_i)$. Man setzt

$$\int_U f\,\mathrm{d}a := \int_V f(\varphi(x))\cdot\sqrt{g^{\varphi}(x)}\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

$\big($alternativ: $\int_U f(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^d(y)$, $\int_U f(y)\,\mathrm{d}a(y)\big)$ als *Integral von f über Kartengebiet U* falls rechte Seite existiert. Funktion f heißt *integrierbar* auf U. Bemerkung:

- Rechte Seite in (4) ist Lebesque-Integral in $\mathbb{R}^d$.
- Damit Definition (4) sinnvoll ist, sollte rechte Seite unabhängig von φ sein
- Mittels Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^d$ kann man $\int_U f\,\mathrm{d}a$ als allgemeines Maßintegral definieren.
- Für n-dimensinale Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ ist $\int_U f\,\mathrm{d}a$ Lebesque-Integral $\int_U f\,\mathrm{d}x$ falls existent.

Satz 4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dimensionale Mannigfaltigkeit, $U \subset M$ Kartengebiet, $f : U \to \mathbb{R}$ und $\varphi_i : V_i \to U$, $i = 1, 2$ seien zugehörige Parametrisierungen*

$$\Longrightarrow \int_{V_1} f(\varphi_1(x))\sqrt{g^{\varphi_1}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{V_2} f(\varphi_2(x))\sqrt{g^{\varphi_2}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Somit: (4) ist unabhängig von φ und

$$f(\cdot) \text{ ist integrierbar auf } U \iff f(\varphi(\cdot))\sqrt{g^{\varphi}(\cdot)} \text{ ist integrierbar auf } V \tag{5}$$
$$\text{für eine Parametrisierung } \varphi : V \to U.$$

Beweis. $\psi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \to V_1$ ist Diffeomorphismus nach *Lemma 5*

$$\overset{\text{Trafo-}}{\underset{\text{-satz}}{\Longrightarrow}} \int_{V_1} f(\varphi_1(x))\sqrt{g^{\varphi_1}(x)}\,\mathrm{d}x \overset{x=\psi(y)}{=} \int_{V_2} f(\varphi_1(\psi(y)))\cdot\underbrace{\det\varphi_1'(\psi(y))^{\mathrm{T}}\varphi_1(\psi(y))\cdot|\det\psi'(y)|}_{\sqrt{\det\psi'^{\mathrm{T}}\varphi_1'\psi'}=\sqrt{\det(\varphi_1'\psi')\underbrace{\varphi_1'\psi'}_{\varphi_2'}}}\,\mathrm{d}y$$

Wegen $\varphi_2(y) = \varphi_1(\psi(y)) \overset{\text{Ketten-}}{\underset{\text{-regel}}{\Longrightarrow}} \varphi_2'(y) = \varphi_1'(\psi(y))\psi'(y) \Longrightarrow$ Behauptung. ■

Falls Funktion $f \equiv 1$ integrierbar über Kartengebiet $U \subset M$ ist, dann heißt

$$V_d(U) := \int_U 1 \,\mathrm{d}a \left(= \int_V 1 \sqrt{g^\varphi(x)} \,\mathrm{d}x \right) \tag{6}$$

heißt *d-dimensionaler Inhalt* (Maß, Volumen, Flächeninhalt,...). $\sqrt{g^\varphi(x)}\,\mathrm{d}x$ heißt auch *Flächeninhalt von U bzgl. φ. Bemerkung:*

(1) $V_d(U) = \mathcal{H}^d(U)$, d.h. d-dimensionaler Inhalt stimmt für Kartengebiete mit d-dimensionalem Hausdorff-Maß überein (vgl. Literatur).

(2) Nach (4): $V_d(U) = 0 \iff \mathcal{L}^d(\varphi^{-1}(U)) = 0$.

Beispiel 2. Sei $M = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |u| = r, u_1 > 0\}$ Halbsphäre von Radius r. Berechne $\int_M f \,\mathrm{d}a$.

Parametrisierung von M (Kugelkoordinaten):

$$\varphi(x_1, x_2) = r \begin{pmatrix} \cos x_2 \cos x_1 \\ \cos x_2 \sin x_1 \\ \sin x_2 \end{pmatrix} \text{ für } (x_1, x_2) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =: V.$$

Offenbar $\varphi : V \to M$ ist C^1, regulär und Homöomorphismus (Selbststudium)

$\implies$ φ ist Parametrisierung von M, d.h. M ist Mannigfaltigkeit und M ist Kartengebiet.

$$\varphi'(x) = r \begin{pmatrix} -\cos x_2 \sin x_1 & -\sin x_2 \cos x_1 \\ \cos x_2 \cos x_1 & -\sin x_2 \sin x_1 \\ 0 & \cos x_2 \end{pmatrix} \implies \varphi'(x)^{\mathrm{T}} \varphi'(x) = r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 x_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\implies \sqrt{g^\varphi(x)} = r^2 \cos x_2 \ \forall x \in V$

$$\implies \int_U f \,\mathrm{d}a = r^2 \cdot \int_V f(\varphi(x)) \cos x_2 \,\mathrm{d}x = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(x)) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2.$$

Z.B. $f(u) = u_1^2 + u_2^2 \implies f(\varphi(x)) = r^2 \cos^2 x_2$

$$\begin{aligned} \int_U u_1^2 + u_2^2 \,\mathrm{d}a &= r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x_3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 = r^4 \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x_2 \,\mathrm{d}x_2 \\ &= \pi r^4 \left[\sin x_2 - \frac{1}{3} \sin^3 x_2 \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^4 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi r^4. \end{aligned}$$

Für $f(u) = 1$:

$$V_2(M) = \int_M \mathrm{d}a = \pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x_2 \,\mathrm{d}x_2 = \pi r^2 \left[\sin x_2\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2.$$

$\Longrightarrow$ Kugeloberfläche in $\mathbb{R}^3 = 4\pi r^2$.

Satz 5 (Integration über $(n-1)$-dimensionalem Graphen). *Sei $g : V \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, V offen, $\Gamma := \underbrace{\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n \mid x \in V\}}_{\text{Graph von } g} \Longrightarrow$ für $f := \Gamma \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}a = \int_V \underbrace{f(x, g(x))}_{\varphi(x)} \sqrt{1 + |g'(x)|^2} \,\mathrm{d}x \tag{7}$$

falls rechte Seite in (7) existiert.

Beweis. Γ ist $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit (vgl. *Beispiel 29.2*) und auch Kartengebiet bzgl. Parametrisierung $\varphi(x) = (x, g(x))$. Offenbar:

$$\gamma := \sqrt{\varphi'(x)^{\mathrm{T}} \varphi'(x)} \overset{(1)}{=} V_{n-1}\left(\varphi_{x_1}(x), ..., \varphi_{x_{n-1}}(x)\right) \overset{(2)}{=} \left|\varphi_{x_1}(x) \wedge ... \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x)\right|.$$

Wegen $\varphi_{x_1}(x) \wedge ... \wedge \varphi_{x_{n-1}}(x) = (-1)^n (g'(x), 1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$ (Selbststudium) $\Longrightarrow \gamma = \sqrt{1 + |g'(x)|^2} \overset{(4)}{\Longrightarrow} \int_M f \,\mathrm{d}a = \int_V f(\varphi(x)) \sqrt{1 + |g'(x)|^2} \,\mathrm{d}x$ falls rechte Seite existiert. ■

Flächeninhalt von Γ (falls existent) ist somit

$$V_{n-1}(\Gamma) = \int_V \sqrt{1 + |g'(x)|^2} \,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Beispiel 3 (Halbsphäre $S_+^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1, x_n \geq 0\}$). Offenbar ist S_+^{n-1} Graph von $g(x)$
$:= \sqrt{1 - |x|^2}\ \forall x \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$

$$\overset{(8)}{\Longrightarrow} V_{n-1}(S_+^{n-1}) = \int_{B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1 + \frac{|x|^2}{1 - |x|^2}} \,\mathrm{d}x = \int_{B_1(0)} \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}} \,\mathrm{d}x.$$

Nach *Königsberger Analysis 2, Kapitel 8.2*: $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}}$ ist rotationssymmetrisch auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, d.h. $f(x) = \tilde{f}(|x|)\ \forall x$ für $\tilde{f} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dann gilt für $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$:

$$\int_{B_r(0)} f(x) \,\mathrm{d}x = n \cdot \kappa_n \int_0^r \tilde{f}(\varrho) \varrho^{n-1} \,\mathrm{d}\varrho \text{ mit } \kappa_n := \mathcal{L}^n(B_1(0)) \tag{9}$$

$$\underset{\text{Statt } n}{\overset{(n-1)}{\Longrightarrow}} V_{n-1}(S_+^{n-1}) = (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - r^2}} \,\mathrm{d}r = (n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^n \cdot \frac{1}{r^2 \sqrt{1 - r^2}} \mathrm{d}r$$
$$\underset{\text{Integr.}}{\overset{\text{part.}}{=}} n(n-1)\kappa_{n-1} \int_0^1 r^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{1 - r^2}}{r} \mathrm{d}r \overset{(9)}{=} n \cdot \int_{B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{1 - |x|^2} \,\mathrm{d}x = \frac{n}{2} \kappa_n.$$

Sei $W_n = V_{n-1}(S^{n-1}) = 2V_{n-1}(S_+^{n-1})$ Oberfläche d. Sphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$

$$\implies W_n = n \cdot \kappa_n \; \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}. \tag{10}$$

Z.B. $n = 2$: Kreisumfang $2\pi = 2 \cdot$ Kreisoberfläche π,

$n = 3$: Kugeloberfläche $4\pi = 3 \cdot$ Kugelvolumen $\frac{4}{3}\pi$.

Beispiel 4 (Kurvenintegrale). Betrachte $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, I offenes Intervall, so dass $C := \varphi(I)$ 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. (Beachte: φ ist regulär g.d.w. $\varphi'(x) \neq 0$). Offenbar $\det \varphi'(x)^{\mathrm{T}} \varphi'(x) = (\varphi'(x))^2$.

– (Kurvenintegral) Für $f : C \to \mathbb{R}, I = (a, b)$ ist (falls existent)

$$\int_C f \,\mathrm{da} = \int_a^b f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t. \tag{11}$$

Integral oben heißt auch *Kurvenintegral* von f über $\mathbb{C}$.

– (Bogenlänge) 1-dimensionaler Inhalt

$$V_1(C) = \int_a^b |\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t \tag{12}$$

heißt *Bogenlänge* der Kurve C.

– Falls $|\varphi'(t)| = 1 \; \forall t \in I$, heißt φ *Bogenlängen-Parametrisierung* von C. (Denn $V_1(\varphi(t_1, t_2)) = t_2 - t_1$, d.h. Parameter liefert Bogenlänge.) Mit $\sigma(s) := \int_a^s |\varphi'(t)| \,\mathrm{d}t$ ist $\psi : (0, V_1(C)) \to \mathbb{R}^n$ mit $\psi(\tau) = \varphi(\sigma^{-1}(\tau))$ stets Bogenlängen-Parametrisierung von C, denn offenbar $\sigma \in C^1$ und ist streng wachsend $\implies \sigma^{-1} \in C^1$ existiert

$$\implies |\psi'(\tau)| = |\varphi'(\sigma^{-1}(\tau)) \cdot \sigma'^{-1}(\tau)| = |\varphi'(\sigma^{-1}(\tau))| \cdot \frac{1}{|\sigma'(\sigma^{-1}(\tau))|} = 1.$$

– Beliebige Kurve $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, $C = \varphi([a, b])$ heißt *rektifizierbar*, falls

$$\varphi(C) = \sup_z \left\{ \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| : \{t_0, ..., t_k\} \in Z \right\} < \infty$$

wobei Z die Menge aller Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b, \; k \in \mathbb{N}$ ist.

Satz 6 (rektifizierbare Kurven). *Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann:*

(1) *φ ist rektifizierbar,*
(2) *$C := \varphi((a, b))$ sei 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Parametrisierung $\varphi \implies l(C) = V_1(C)$.*

Beweis. Zu (1): φ ist Lipschitz-stetig auf $[a,b]$ mit Lipschitz-Konstante $L = \max_{t\in[a,b]} |\varphi'(t)| \implies \sum_{j=1}^k |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| \leq L \sum_{j=1}^k |t_j - t_{j-1}| = L(b-a)$ für jede Zerlegung $Z \implies l(\varphi([a,b])) < L(b-a) \implies \varphi$ ist rektifizierbar.

Zu (2): Für beliebige Zerlegung gilt:

$$\sum_{j=1}^k |\varphi(t_j)\varphi(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^k \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \sum_{j=1}^k \int_{t_j}^{t_{j-1}} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$\implies l(C) \leq \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Sei $l(t) = l(\varphi([a,b]))$ $\forall t \in [a,b]$, sei $h \in \mathbb{R}$ mit $t+h \in [a,b]$

$$\overset{h>0}{\implies} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \underset{l}{\overset{\text{Def.}}{\leq}} l(t+h) - l(t) \overset{(*)}{\leq} \int_t^{t+h} |\varphi'(\tau)|\mathrm{d}\tau \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{h}$$

$\implies$ l ist differenzierbar mit $l'(t) = |\varphi'(t)| \implies \underbrace{l(b)}_{=l(c)} = \int_a^b l'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = V_1(C)$.

■

Beispiel 4 (Umfang des Einheitskreises). Betrachte $\varphi : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)^\mathrm{T}$. $C := \varphi\big((-\pi,\pi)\big)$ ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit.

$$V_1(C) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right| \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Beachte: φ ist Bogenlängenparametrisierung.

Satz 7 (Eigenschaften des Integrals). *Seien $f, g, f_k : U \to \mathbb{R}$, U Kartengebiet der Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann*

(1) *f ist integrierbar auf U $\iff$ $|f|$ ist integrierbar auf U,*
$\iff$ *f^+ und f^- sind integrierbar auf U.*
(2) *f, g sind integrierbar auf U, $c \in \mathbb{R} \implies \int_U cf \pm g\,\mathrm{d}a = c\int_U f\,\mathrm{d}a \pm \int_U g\,\mathrm{d}a$.*
(3) *f, g sind integrierbar auf U, g ist beschränkt auf U $\implies$ $f \cdot g$ ist integrierbar auf U.*
(4) *f, g sind integrierbar auf U, $f \leq g$ auf U $\implies \int_U f\,\mathrm{d}a \leq \int_U g\,\mathrm{d}a$.*
(5) (Monotone Konvergenz) *Seien f_k integrierbar auf U, $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$. Folge $\int_U f_k\,\mathrm{d}a$ sei beschränkt und $f(u) := \lim\limits_{k\to\infty} f_k(u)$ $\forall u \in U \implies f$ ist integrierbar auf U mit*
$$\int_U f\,\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k\,\mathrm{d}a.$$
(6) (Majorisierte Konvergenz) *Seien g, f_k integrierbar auf U, $|f_k| \leq g$ auf U $\forall k$, $f(u) :=$*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(u)\ \forall u \in U \implies f \textit{ ist integrierbar auf } U \textit{ mit}$$
$$\int_U f \,\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k \,\mathrm{d}a.$$

Beweis. Sei $\varphi : V \to U$ Parametrisierung des Kartengebietes U.

Somit:

$$f \text{ ist integrierbar auf } U \overset{\text{Def.}}{\iff} f(\varphi(\cdot))\sqrt{g^\varphi(\cdot)} \text{ ist integrierbar auf } V$$

und

$$\begin{aligned} f \leq g \text{ auf } U &\iff f(\varphi(\cdot))\sqrt{g^\varphi(\cdot)} \leq g(\varphi(\cdot))\sqrt{g^\varphi(\cdot)} \text{ auf } V. \\ f(u) = \lim_{k\to\infty} f_k(u)\ \forall u \in U &\iff f(\varphi(x)) = \lim_{k\to\infty} f_k(\varphi(x))\ \forall x \in V. \end{aligned}$$

Damit folgen Behauptungen direkt aus Eigenschaften des Lebesque-Integrals (vgl. *Kapitel 22*). ■

31 Integral auf Mannigfaltigkeiten

Frage: Wie berechnet man $\int_M f \, da$ für Mannigfaltigkeit M? Idee: Überdecke M mit Kartengebieten U_β ($\beta \in J$) und setze Integrale $\int_{U_\beta} f \, da$ geeignet zusammen. Problem: U_β überlappen sich. Ausweg: Zerlege Funktion $\alpha \equiv 1$ geeignet als $1 = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j(x)$. Menge stetiger Funktionen $\alpha_j : M \to [0,1], j \in \mathbb{N}$ heißt *Zerlegung der Eins* auf $M \subset \mathbb{R}^n$ falls

(i) $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j(u) = 1 \forall u \in M$,

(ii) Zerlegung ist *lokal endlich*, d.h. $\forall u \in M$ existiert Umgebung $U(x) \subset M$ mit $\alpha_j = 0$ auf $U(u)$ für fast alle j.

- Sei $\mathcal{U}$ eine bzgl. M offene Überdeckung von $M \subset \mathbb{R}^n$. Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ ist $\mathcal{U}$ *untergeordnet*, falls:

$$\forall j \in \mathbb{N} \; \exists U_j \in \mathcal{U} : \operatorname{supp} \alpha_j \subset U_j$$

$\left(\operatorname{supp} \alpha_j := \overline{\{U \in M \mid \alpha_j(u) \neq 0\}}\right)$ ist die *Trägerfunktion*.

Satz 1 (Existenz von Zerlegung der Eins). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{U}$ eine bzgl. M offene Überdeckung von M, dann existiert Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ von M, die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist.*

Bemerkung:

- α_j ist in Wahrheit in C^∞.
- Betrachte später Überdeckung $\mathcal{U}$ eine Mannigfaltigkeit M aus Kartengebieten.

Beweis. Sei $\mathcal{U} = \{\alpha \in A \mid U_\alpha \in \mathcal{U}\}$.

(a) $U_\alpha \in \mathcal{U}$ offen bzgl. $M \implies \exists W_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ offen: $U_\alpha = W_\alpha \cap M$. Setze $W := \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$, ist offenbar offen in $\mathbb{R}^n$. Sei $K_j := \{u \in W \mid \operatorname{dist} W \subset U \geq \frac{1}{j}\} \cap \overline{B_j(0)}$, offenbar kompakt. $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1} \; \forall j \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = W$. $\{K_j\}$ heißt auch *kompakte Ausschöpfung* von W.

(b) Sei $U \in \underbrace{K_{j+1} \backslash \operatorname{int} K_j}_{\text{kompakt}} \subset \operatorname{int} K_{j+2} \backslash K_{j-1}$

$$\begin{aligned}
&\implies \exists \alpha \in A : u \in W_\alpha \\
&\implies \exists \text{ Kugel } B_r(u) \text{ offen in } \mathbb{R}^n \; (r > 0) : B_r(u) \subset W_\alpha \cap \underbrace{(\operatorname{int} K_{j+2} \backslash K_{j-1})}_{\text{offen}} \\
&\implies K_{j+1} \backslash \operatorname{int} K_j \text{ wird von endlich vielen } B_r(u) \text{ überdeckt} \\
&\implies \exists \text{ Folge } \{u_j\} \text{ in } W \text{ mit } \bigcup_{j=1}^\infty B_{r_j}(u_j) = W.
\end{aligned}$$

Für $u \in W$ existiert Umgebung $U : U \cap B_{r_j}(u_j) \neq \emptyset$ nur für endlich viele j.

(c) Betrachte $\gamma_j : W \to [0,1]$ mit

$$\gamma_j(r) := \begin{cases} \dfrac{1}{e^{|r-u_j|-r_j}} & \text{für } |r-u_j| \leq r_j, \\ 0 & \text{sonst, } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Offenbar $\gamma_j(r) > 0$ auf $B_{r_j}(u_j), \gamma_j \in C^\infty(W)$. Setze

$$\gamma(u) := \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j(u),\ \gamma_j(u) := \frac{\gamma_j(u)}{\gamma(u)}\ \forall u \in W.$$

Offenbar ist $\{\alpha_j\}$ Z.d.E. von W und damit auch von M und U untergeordnet.

■

Sein $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R},\ \operatorname{supp} f \subset U \subset M,\ U$ Kartengebiet von M. Funktion f heißt *integrierbar auf M* falls Einschränkung $f\big|_U$ integrierbar auf Kartengebiet U ist und

$$\int_M f \,\mathrm{d}a := \int_U f\big|_U \,\mathrm{d}a \tag{1}$$

heißt *Integral von f auf M*.

Lemma 2 (Kriterium für Integrierbarkeit). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit, $f : M \to \mathbb{R}$, $\operatorname{supp} f \subset U \subset M$, U Kartengebiet von M und sei $\{\alpha_j\}$ Z.d.E. auf M. Dann:*

$$f \text{ integrierbar auf } M \iff \begin{array}{ll} \text{(i)} & f_{\alpha_j} \text{ integrierbar auf } M\ \forall j \in \mathbb{N}, \\ \text{(ii)} & \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \,\mathrm{d}a < \infty. \end{array}$$

$$\implies \int_M f \,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a. \tag{2}$$

Beweis. Zu (a): Sei f integrierbar auf $M \overset{\text{Satz 30.7}}{\implies}$ i. und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \,\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \int_M |f|\alpha_j \,\mathrm{d}a \overset{\text{Satz 7}}{\leq} \int_M |f| \cdot 1 \,\mathrm{d}a < \infty \implies \text{ii.}$$

Zu (b): Gelten i., ii. $\underset{\text{Konvergenz}}{\overset{\text{monotone}}{\implies}}$ $|f|$ ist integrierbar $\implies f$ ist integrierbar.

■

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit und $\mathcal{U}$ offene Überdeckung (bzgl. M) von M mit Kartengebieten. Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar auf M* falls Zerlegung der Eins $\{\alpha_j\}$ auf M existiert, die $\mathcal{U}$ untergeordnet ist (sage α_j ist Z.d.E. zu Mannigfaltigkeit M) mit:

(i) $f\alpha_j$ ist integrierbar auf M $\forall j \in \mathbb{N}$,

(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f| \alpha_j \,\mathrm{d}a < \infty$.

$$\int_M f \,\mathrm{d}a := \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f \alpha_j \,\mathrm{d}a. \tag{3}$$

heißt *Integral von f auf M*.

Satz 3 (Rechtfertigung des Integralbegriffes). *Definitionen "f integrierbar auf M"und*
"$\int_M f \,\mathrm{d}a$" sind unabhängig von konkreter Überdeckung $\mathcal{U}$ und Z.d.E. $\{\alpha_j\}$.

Beweis. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ integrierbar auf M mit $\{\alpha_j\}$, $\mathcal{U}$ wie in Definition. Sei $\{\tilde{\alpha}_j\}$ weitere Z.d.E., die Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}}$ durch Kartengebiete untergeordnet ist.

Es ist zu zeigen:

(i) $f\tilde{\alpha}_j$ ist integrierbar auf M $\forall j$,
(ii) $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f| \tilde{\alpha}_j \,\mathrm{d}a < \infty$,
(iii) $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M f \alpha_j \,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f \tilde{\alpha}_j \,\mathrm{d}a$.

Zu i.: f_{α_j} ist integrierbar auf M nach Voraussetzung

$$\overset{\textit{Satz 30.7}}{\Longrightarrow} f\tilde{\alpha}_k\alpha_j \text{ ist integrierbar auf } M \ \forall k,j \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f\tilde{\alpha}_k| \alpha_j \,\mathrm{d}a \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f| \alpha_j \,\mathrm{d}a \overset{\text{ii.}}{<} \infty \ \forall k,j \in \mathbb{N}$$

$$\overset{\textit{Lemma 2}}{\Longrightarrow} f\tilde{\alpha}_k \text{ und } |f\tilde{\alpha}_k| \text{ sind integrierbar auf } M \ \forall k$$

$$\Longrightarrow \ i. \text{ und}$$

$$\int_M f\tilde{\alpha}_k \,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\tilde{\alpha}_k\alpha_j \,\mathrm{d}a \text{ bzw. } \int_M |f|\tilde{\alpha}_k \,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\tilde{\alpha}_k\alpha_j \,\mathrm{d}a \ \forall k. \tag{$*$}$$

Zu ii.: $f\alpha_j$ ist integrierbar nach Voraussetzung

$$\underset{\text{mit } \{\tilde{\alpha}_j\}}{\overset{\textit{Lemma 2}}{\Longrightarrow}} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M f\alpha_j\tilde{\alpha}_k \,\mathrm{d}a \ \forall j \tag{$**$}$$

und analog für $|f|$

$$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j\tilde{\alpha}_k \,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f|\alpha_j \,\mathrm{d}a \overset{\text{ii.}}{<} \infty. \tag{\#}$$

Doppelreihensatz, ($**$) mit $|f|$ und ii. erlauben Vertauschung der Summationen in (#)

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f| \tilde{\alpha}_k \, \mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f| \alpha_j \, \mathrm{d}a \tag{+}$$

$$\overset{(\#)}{\Longrightarrow} \text{ii.}$$

Analog erhält man (+) mit f statt $|f| \implies$ iii.

■

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ Teilmenge.

- Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar auf* A falls

$$f_A := \begin{cases} f \text{ auf } A, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

  integrierbar auf M ist. $\int_A f \, \mathrm{d}a := \int_M f_A \, \mathrm{d}a$ heißt dann *Integral von f auf A.*
- Menge $A \subset M$ heißt *(endlich) messbar* in M falls Funktion f auf A integrierbar ist und $V_d(A) := \int_A \mathrm{d}a$ heißt dann d-dimensionaler Inhalt (d-dimensionales Maß) von A. Beachte: Für $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesque-messbar ist $\mathcal{L}^n(A) = \infty$ möglich. Hier ist $V_d(A) < \infty$ für $A \subset M$ messbar.
- $A \subset M$ heißt d-Nullmenge falls $V_d(A) = 0$. Beachte: d-Nullmengen auf M entsprechen $\mathcal{L}^d$-Nullmengen im Parameterbereich.

Satz 4. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ kompakt bzgl. M, $f : A \to \mathbb{R}$ stetig $\implies$ f ist integrierbar auf A.*

Hinweis:

- $A \subset M$ ist kompakt bzgl. M falls $A = \varphi(K)$ für Parametrisierung φ und $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt.
- Somit sind alle kompakte Teilmengen $A \subset M$ messbar.

Beweis. (a) Sei $A \subset U$ für Kartengebiet $U \subset M$ mit zugehöriger Parametrisierung $\varphi : V \subset \mathbb{R}^d \to U$

$$\implies B := \varphi^{-1}(A) \text{ ist kompakt in } \mathbb{R}^d \text{ (da } \varphi \text{ homöomorph ist)}$$

da $f(\varphi(\cdot))\sqrt{g^{\varphi}(\cdot)}$ stetig auf B ist, ist es auch integrierbar auf B und damit auch integrierbar auf A.

(b) Allgemeiner Fall: Sei $\{\alpha_j\}$ Z.d.E. zu A. Für alle $v \in A$ existiert offene Umgebung $U(v) \subset M : \alpha_j = 0$ auf $U(v)$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\{U(v)\}_{v\in A} \text{ ist offene Überdeckung von } A &\implies \text{bereits endlich viele überdecken } A \\ &\implies \exists m \in \mathbb{N} : \alpha_j = 0 \text{ auf } A\ \forall j > m \\ &\implies f_A(u) = \sum_{j=1}^{m} f_A(u)\alpha_j(u)\ \forall u \in M.\end{aligned}$$

$\operatorname{supp} f_A\alpha_j$ ist abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge A

$$\implies A \text{ ist selbst kompakt} \implies f_A\alpha_j \text{ ist integrierbar auf } A\ \forall j.$$

Wegen $\sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f_A|\alpha_j \,\mathrm{d}a = \lim\limits_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \int_M |f_A|\alpha_j\tilde{\alpha}_k \,\mathrm{d}a < \infty \overset{\text{Def.}}{\implies} f_A$ ist integrierbar auf M.

■

Satz 5 (Eigenschaften des Integrals). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Mannigfaltigkeit und $f, g, f_k : M \to \mathbb{R}$. Dann*

(1) *f ist integrierbar auf $M \iff |f|$ ist integrierbar auf M*
$\iff f^+$ und f^- sind integrierbar auf M.
(2) *f, g sind integrierbar auf M, $c \in \mathbb{R} \implies \int_M cf \pm g \,\mathrm{d}a = c\int_M f \,\mathrm{d}a \pm \int_M g \,\mathrm{d}a$.*
(3) *f, g sind integrierbar auf M, g beschränkt auf $M \implies f \cdot g$ ist integrierbar auf M.*
(4) (Monotone Konvergenz) *Seien $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ auf M, alle f_k integrierbar auf M, Folge $\left\{\int_M f_k \,\mathrm{d}a\right\}$ sei beschränkt und $f(u) := \lim_{k\to\infty} f_k(u)\ \forall u \in M \implies f$ ist integrierbar auf M mit $\int_M f \,\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}a$.*
(5) (Majorisierte Konvergenz) *Seien g, f_k integrierbar auf M, $|f_k| \leq g$ auf $M\ \forall k$, $f(u) := \lim_{k\to\infty} f_k(u)\ \forall u \in M \implies f$ ist integrierbar auf M mit $\int_M f \,\mathrm{d}a = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}a$.*

Beweis. Sei $\{\alpha_j\}$ Z.d.E. zu M.

Beachte: f ist integrierbar $\overset{\text{Def.}}{\iff} f\alpha_j$ ist integrierbar auf Kartengebiet $U_j \subset M$; damit folgen (1)-(3) leicht aus *Satz 30.7*.

Zu (5): Fixiere $j \in \mathbb{N}$: $f_k\alpha_j$ ist integrierbar auf Kartengebiet $\forall k$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(u) = f(u)\alpha_j(u)$.

$$|f_k\alpha_j| \leq g\alpha_j \overset{\text{Satz 30.7}}{\implies} f\alpha_j \text{ integrierbar und } \lim_{k\to\infty} \int_M f_k\alpha_j \,\mathrm{d}a = \int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a. \quad (*)$$

Wegen $|f\alpha_j| \leq g\alpha_j\ \forall j : \sum_{j=1}^{\infty} \int_M |f\alpha_j| \,\mathrm{d}a \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_M g\alpha_j \,\mathrm{d}a \underset{\text{integr.}}{\overset{g \text{ ist}}{<}} \infty \implies f$ ist integrierbar mit $\int_M f \,\mathrm{d}a = \lim\limits_{j\to\infty} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{d}a$. Sei $\epsilon > 0$ fest, dann existiert $m \in \mathbb{N}$

mit $\left|\sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{da}\right| < \epsilon$, $\left|\sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M g\alpha_j \,\mathrm{da}\right| < \epsilon$ und es existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left|\int_M f\alpha_j \,\mathrm{da} - \int_M f_k\alpha_j \,\mathrm{da}\right| < \frac{\epsilon}{m}$ $\forall j = 1, ..., m$ $\forall k \geq k_0$ (vgl. $(*)$)

$$\begin{aligned}
\implies \quad \left|\int_M f \,\mathrm{da} - \int_M f_k \,\mathrm{da}\right| \leq &\left|\sum_{j=1}^{m} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{da} - \int_M f_k\alpha_j \,\mathrm{da}\right| \\
&+ \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M f\alpha_j \,\mathrm{da}\right| + \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} \int_M g\alpha_j \,\mathrm{da}\right| \\
\leq &m \cdot \frac{\epsilon}{m} + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon \ \forall k \geq k_0
\end{aligned}$$

$$\underset{\text{bel.}}{\overset{e>0}{\Longrightarrow}} \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{da} = \int_M f \,\mathrm{da}.$$

Zu (4) ähnlich zu (5). ■

Bemerkung: Für explizite Berechnungen von $\int_M f \,\mathrm{d}a$ benutzt man i.d.R. keine Z.d.E. sondern zerlegt $M = \bigcup_j M_j$ mit M_j paarweise disjunkt und berechnet alle $\int_{M_j} f \,\mathrm{da}$:

$$\int_M f \,\mathrm{da} = \sum_{j=1}^{k} \int_{M_j} f \,\mathrm{da} = \sum_{j=1}^{k} \int_M f \cdot \chi_{M_j} \,\mathrm{da}.$$

32 Integralsätze von Gauß und Stokes

Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt $x \in \partial\Omega$ *regulärer Randpunkt* von Ω falls er offene Zylinderumgebung $Q \subset \mathbb{R}^n$ besitzt, so dass nach evtl. Drehung des Koordinatensystems gilt: $Q = Q' \times I$ für $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, beschränkt und $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall und es existiert C^1-Funktion $h : \tilde{Q}' \to I$ mit $\tilde{Q}'$ Umgebung von Q' in $\mathbb{R}^{n-1}$ und

$$\begin{aligned} \Omega \cap Q &= \{(x', x_n) \in Q' \times I \mid x_n \geq h(x')\} \text{ und} \\ \partial\Omega \cap Q &= \{(x', x_n) \in Q' \times I \mid x_n = h(x')\}. \end{aligned} \tag{1}$$

- $\partial_r\Omega \subset \partial\Omega$ bezeichne *Menge aller regulären Randpunkte.*
- $\partial_s\Omega := \partial\Omega \backslash \partial_r\Omega$ heißt *Menge der singulären Randpunkte.*
- $\Gamma := \partial\Omega \cap Q \subset \partial_r\Omega$ gemäß *(1)* heißt *glatter (regulärer) Teilrand von* Ω falls $\mathcal{L}^{n-1}(\partial Q') = 0$ für zugehöriges $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

Beachte: Dies heißt $\partial_r\Omega$ ist lokal Graph einer C^1-Funktion und somit $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit nach *Satz 29.1.*

Für glatten Teilrand $\Gamma \subset \partial_r\Omega$ gilt: $V_{n-1}(\overline{\Gamma}\backslash\Gamma) = 0$. $\big(\varphi(x') := (x', h(x'))$ ist Parametrisierung der Mannigfaltigkeit und $\overline{\Gamma}\backslash\Gamma$ ist Bild der $(n-1)$-Nullmenge $\partial Q'$. $\big)$

Man hat äquivalente Formulierung zu *(1)* mittels $\gamma(x) := h(x') - x_n \ \forall (x', x_n) \in Q$ (Q und h wie oben) durch

$$\begin{aligned} \Omega \cap Q &= \{x \in Q \mid \gamma(x) \leq 0\}, \\ \partial\Omega \cap Q &= \{x \in Q \mid \gamma(x) = 0\}. \end{aligned} \tag{2}$$

(dies ist lokal Darstellung von $\partial_r\Omega$ als Niveaumenge und liefert gemäß *Satz 29.4* Mannigfaltigkeit, beachte $\gamma'(x) \neq 0$)

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ hat *stückweise glatten Rand*, falls es glatte Teilränder $\Gamma_1, ..., \Gamma_m \subset \partial\Omega$ von Ω gibt mit $\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^m \overline{\Gamma}_j$.

Z.B. Würfel, Polyeder haben Stückweise glatten Rand. Gemäß *Beispiel 29.10* erhält man Einheitsnormalen auf $\partial_r\Omega$ (mit γ wie in *(2)* bzw. h wie in *(1)*)

$$\nu(x) = \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} = \frac{(h'(x'), -1)}{|(h'(x'), -1)|} \ \forall x \in \partial_r\Omega. \tag{3}$$

Beachte: Koordinaten in (1),(2),(3) evtl. bzgl. eines gedrehten Koordinatensystem.

Lemma 1. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n, r$ *gemäß* (3). *Dann* $\forall x \in \partial_r\Omega \ \exists \delta = \delta(x) > 0$ *mit*

$$x + t\nu(x) \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \ x - t\nu(x) \in \Omega \ \forall t \in (0, \delta). \tag{4}$$

Beweis. Fixiere $x \in \partial_r\Omega$ und betrachte $\varphi(t) := \gamma(x + t\nu(x))$ ($\in Q$ für $|t|$ klein). Offenbar $\varphi(0) = \gamma(x) = 0$ und $\varphi'(t) = \gamma'(x + t\nu(x)) \cdot \nu r(x) \implies \varphi'(0) = \gamma'(x) \cdot \frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} = |\gamma'(x)| > 0 \implies \exists \delta > 0 : \varphi(t) \gtrless 0$ für $\pm\, t \in (0, \delta)$. Mit (2) folgt Behauptung. ■

Da in jedem $x \in \partial_r\Omega$ nur zwei Einheitsnormalen existieren, da $\gamma'(\cdot)$ stetig und wegen (4) liefert (3) Einheitsnormalenfeld auf Mannigfaltigkeit $\partial_r\Omega$ (insbesondere ist $\nu(\cdot)$ stetig auf $\partial_r\Omega$). Da alle $\nu(x)$ nach "außen" zeigen, heißt ν aus (3) *äußeres Einheitsnormalenfeld* von $\partial_r\Omega$ (damit ist $\partial_r\Omega$ mit ν orientierte $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit). Abbildung $F : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt auch *Vektorfeld* ($F = (F^1, ..., F^n)$).

– (Divergenz) Falls F differenzierbar in $x \in M$ ist, heißt

$$\operatorname{div} F(x) := F^1_{x_1}(x) + ... + F^n_{x_n}(x) = \operatorname{tr}\big(F'(x)\big)$$

Divergenz des Vektorfeldes F im Punkt x. (Wichtig in Anwendungen!)

Beispiel: $\triangle f = \operatorname{div}(Df)$ ist Laplace-Operator.

Satz 2 (Gaußscher Integralsatz, Spezialfall). *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbares Vektorfeld, U offen, $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $\overline{Q} \subset U$*

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_Q \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{(Lebesque-Integral in } \mathbb{R}^n)} = \underbrace{\int_{\partial Q} F(x)\cdot\nu(x)\,\mathrm{d}a.}_{\substack{\text{(Integral auf } (n-1)\text{-}\\ \text{-dimensionalen Fläche } \partial Q)}} \tag{5}$$

Bemerkung: Gelegentlich schreibt man auch $\int_M F\,\overrightarrow{\mathrm{d}a}$ statt rechte Seite in (5) und bezeichnet $\overrightarrow{\mathrm{d}a} = \nu\cdot\mathrm{d}a$ als *vektorielles Flächenelement* auf ∂Q.

Interpretation für $n = 1$: $Q = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $\operatorname{div} F(x) = F'(x)$. $\partial Q = \{a, b\}$ kann als 0-dimensionale Mannigfaltigkeit betrachtet Werden mit $\nu(b) = 1, \nu(a) = -1$ und (5) wäre dann

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung! D.h. der Gaußscher Satz ist eine Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung für höhere Dimensionen.

Beweis. (Von *Satz 2.*) Sei $\nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_n(x))$. Wir zeigen für beliebige C^1-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, dass gilt:

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial Q} f(x)\nu_k(x)\,\mathrm{d}a. \tag{6}$$

Ersetzt man hier f durch F^k und summiert über k, so folgt (5).

Zeige (6) (o.B.d.A. $k = n$): seien $Q = Q' \times (a, b)$, $Q' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Quader. Auf $\partial_r\Omega$ hat man

$$\nu_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{auf } Q' \times \{b\}, \\ -1 & \text{auf } Q' \times \{a\}, \\ 0 & \text{auf } \partial Q' \times (a, b) \end{cases} \quad \Longrightarrow \int_{\partial Q} f\nu_n\,\mathrm{d}a = \int_{Q'\times\{b\}} f\,\mathrm{d}a - \int_{Q'\times\{a\}} f\,\mathrm{d}a.$$

Parametrisierung der Mannigfaltigkeit $Q' \times \{b\}$ durch $x' \to (x', b)$ bzw. $x' \to (x', a)$ auf $Q' \times \{a\}$ $\forall x' \in Q'$. Offenbar ist Gramsche Determinante jeweils 1.

$$\begin{aligned}
\int_{\partial Q} f \nu_n \,\mathrm{d}a &= \int_{Q'} f'(x', b)\,\mathrm{d}x' - \int_{Q'} f(x', a)\,\mathrm{d}x' \\
&\overset{\substack{\text{Hauptsatz}}}{\underset{\text{Diff. Int.}}{=}} \int_Q \left(\int_a^b \frac{\partial}{\partial x_n} f(x', \xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}x' \\
&\overset{\text{Satz von}}{\underset{\text{Fubini}}{=}} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_n} f(x)\,\mathrm{d}x \implies (b) \implies \text{ Behauptung.}
\end{aligned}$$

■

Interpretation von $\operatorname{div} F$: Sei $F(\cdot)$ Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeiten, dann:

- $\int_{\partial Q} F \cdot \nu \,\mathrm{d}a$ ist *Maß für Massetransport* durch ∂Q (pro Zeiteinheit).
- $\frac{1}{V_n(Q)} \int_{\partial Q} F \cdot \nu \,\mathrm{d}a$ ist *(skaliertes) Mittelwert.* ("> 0" Abfluss, "< 0" Zufluss, "$= 0$" ausgeglichene Bilanz).

Lemma 3. *Sei $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbares Vektorfeld, U offen, $\tilde{x} \in U$ und sei $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ Folge von Quadern $\overline{Q}_k \subset U$ mit $\tilde{x} \in Q_k$ $\forall k$ und $\nu_k \overset{k\to 0}{\longrightarrow} 0$. Wobei ν_k jeweils größte Kantenlänge von Q_k ist*

$$\implies \lim_{k\to\infty} \frac{1}{V_n(Q_k)} \int_{\partial Q_k} F \cdot \nu \,\mathrm{d}a = \operatorname{div} F(\tilde{x}). \tag{7}$$

Beweis. Da $\overline{Q}_k$ Kompakt und $F(\cdot)$ stetig existieren, $a_k := \min_{x\in\overline{Q}_k} \operatorname{div} F(x), b_k := \max_{x\in\overline{Q}_k} \operatorname{div} F(x)$

$$\begin{aligned}
a_k V_n(Q_k) \leq \int_Q \operatorname{div} F \,\mathrm{d}x = \int_{\partial Q} & F \cdot \nu \,\mathrm{d}a \\
\leq & b_k V_n(Q_k).
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} = \operatorname{div} F(\tilde{x})$ folgt Behauptung. ■

Somit nennt man Punkt x *Quelle* von F falls $\operatorname{div} F(x) > 0$, *Senke* von F falls $\operatorname{div} F(x) < 0$ und $\operatorname{div} F(x)$ heißt auch *Quelldichte* von F. (5) besagt somit, dass "Summe" der in Q erzeugten bzw. vernichteten Flüssigkeit durch Rand ∂Q ab- bzw. zufließen muss. (Bilanzausgleich - grundlegend in Physik.)

Theorem 4 (Gaußscher Satz). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$. $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ sein stetig, stetig differenzierbar auf Ω und $\operatorname{div} F$ integrierbar auf Ω*

$$\Longrightarrow \int_\Omega \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}a. \tag{8}$$

Bemerkung:

(1) Falls $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist und U offene Umgebung von $\overline{\Omega}$, dann erfüllt F alle Voraussetzungen von *Theorem 4*.
(2) *Theorem 4* bleibt richtig, falls Ω *Lipschitzrand* hat (vgl. Literatur).

Gelegentlich wird *Gaußscher Satz* in folgender Form formuliert:

Satz 5 (Variante des Gaußschen Satzes). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig, stetig differenzierbar auf Ω und $\frac{\partial}{\partial x_k} f$ integrierbar auf Ω (für ein k)*

$$\Longrightarrow \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot \nu_k\,\mathrm{d}a \tag{9}$$

wobei $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$.

Beweis. Definiere Vektorfeld $F(x) := (0, ..., 0, \overbrace{f(x)}^{k\text{-te Stelle}}, 0, ..., 0)$. F erfüllt Voraussetzungen von *Theorem 4* und $\operatorname{div} F = f_{x_k}, F \cdot \nu = f\nu_k$. Somit liefert (8) gerade (9). ∎

Bemerkung: Satz 5 würde auch *Theorem 4* implizieren (falls unabhängig bewiesen), denn mit $F = (F^1, ..., F^n)$ erfüllen alle $f = F^k$ Voraussetzungen von *Satz 5* und (9) liefert

$$\int_\Omega F^k_{x_k}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} F^k \cdot \nu_k\,\mathrm{d}a \ \forall k.$$

Summation liefert (8).

Theorem 6 (partielle Integration). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$. Dann:*

(1) *$f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig, stetig differenzierbar auf Ω und f_{x_k}, g_{x_k} integrierbar auf Ω*

$$\Longrightarrow \int_\Omega f_{x_k} g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x) g_{x_k}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)\nu_k(x)\,\mathrm{d}a. \tag{10}$$

(2) *$F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ jeweils stetig differenzierbar auf Ω, stetig auf $\overline{\Omega}$ und $\operatorname{div} F, \mathrm{D}g$ integrierbar auf Ω*

$$\Longrightarrow \int_\Omega F(x)\mathrm{D}g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g(x) \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g(x)F(x)\nu(x)\,\mathrm{d}a. \tag{11}$$

Beweis. Zu (1): Wende (9) auf $f \cdot g$ an.

Zu (2): Wende (8) auf Vektorfeld $g \cdot F$ an und beachte $\operatorname{div}(g \cdot F) = g \cdot \operatorname{div} F + F \cdot \mathrm{D}g$ nach Produktregel.

■

In Potentialtheorie (Theorie der P.D.Gl. $\triangle u = f$) sind folgende Formeln wichtig:

Satz 7 (Greensche Formeln). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$ und $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ stetig und C^2 auf Ω. Dann gilt falls jeweilige Integrale existieren:*

$$\int_\Omega \mathrm{D}f(x) \cdot \mathrm{D}g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega f(x) \cdot \triangle g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot \mathrm{D}g(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}a, \tag{12}$$

$$\int_\Omega f(x) \cdot \triangle g(x) - g(x) \cdot \triangle f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} f(x) \cdot \mathrm{D}g(x) \cdot \nu(x) - g(x) \cdot \mathrm{D}f(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}a. \tag{13}$$

Wobei $\triangle f(x) := \operatorname{div} \mathrm{D}f(x) = \sum_{k=1}^n f_{x_k x_k} = \operatorname{tr} f''(x)$ *(vgl.* Laplace Operator*).*

Beweis. (11) mit $(\mathrm{D}g, f)$ statt (F, g) $\Longrightarrow$ (12). Subtrahiere (12) mit (f, g) und (g, f) $\Longrightarrow$ (13). ■

Beweis. (Von *Theorem 4.*) *Strategie:* Zeige Behauptung für F mit kompaktem Träger in (a) Ω, (b) Quader gemäß (1); allgemeinen Fall in (c).

(a) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{K}$ für ein $K \subset \Omega$ kompakt, dann

$$\int_\Omega f_{x_k}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \forall k = 1, ..., n. \tag{$*$}$$

Denn sei $\tilde{f} := \begin{cases} f \text{ auf } \Omega, \\ 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \backslash \Omega, \end{cases}$ Q Quader, $\Omega \subset Q$

$$\Longrightarrow \tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}^n), \int_\Omega f_{x_k}(x)\,\mathrm{d}x = \int_Q f_{x_k}(x)\,\mathrm{d}x \overset{(6)}{=} 0.$$

Da $\tilde{f} = 0$ auf $\partial Q \implies (*) \implies F$ erfüllt (8) falls $\operatorname{supp} F \subset K$ (Randintegral=0).

(b) Sei $x \in \partial_r\Omega$ und $Q = Q' \times (a, b)$, $h : Q' \to (a, b)$ gemäß (1) und $\operatorname{supp} F \subset K$ für ein $K \subset \overline{\Omega} \cap Q$ Kompakt. Sei $Z_\epsilon := \{(x', x_n) \in Q' \times (a, b) \mid x_n \geq h(x') + \epsilon\}$ für $\epsilon > 0$. *Ziel:* Zeige (8) für $Z := Z_0$ (und damit würde (8) auch mit Ω gelten). Nach *Fubini* gilt:

$$\int_{Z_\epsilon} \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^n \overbrace{\left(\int_{Q'} \int_{h(x')+\epsilon}^b F^k_{x_k}(x', x_n)\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x' \right)}^{I_k}. \tag{\#}$$

$k = n$: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) $I_n = -\int_{Q'} F^n(x', h(x') + \epsilon)\,\mathrm{d}x'$.

$k < n$: Setze $f(x') := \varphi(x', h(x') + \epsilon)$ mit $\varphi(x', \xi) := \int_\xi^b F^k(x', x_n)\,\mathrm{d}x_n$. f ist C^1-Funktion auf Q' mit

$$\begin{aligned} f_{x_k}(x') =& \varphi_{x_k}(x', h(x') + \epsilon) + \varphi_{x_n}(x', h(x') + \epsilon) \cdot h_{x_k}(x') \\ =& \int_{h(x')+\epsilon}^b F^k_{x_k}(x', x_n)\,\mathrm{d}x_n - F^n(x', h(x') + \epsilon) \cdot h_{x_k}(x'). \end{aligned}$$

$f : Q' \to \mathbb{R}$ hat kompakten Träger $K' = \{x' \in Q' \mid (x', x_n) \in K\}$ in Q'. $(*)$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ liefert:

$$\int_{Q'} f_{x_k}(x')\,\mathrm{d}x' = 0 \text{ für } k < n \implies I_k := \int_{Q'} F^k(x', h(x') + \epsilon) \cdot \underbrace{h_{x_k}(x')}_{N_k(x')}\,\mathrm{d}x' + \underbrace{\int_{Q'} f_{x_k}(x)\,\mathrm{d}x}_{=0} \text{ für } k < n.$$

Nach (3) ist $N(x') := \big(h_{x_1}(x'), ..., h_{x_{n-1}}(x'), -1\big)$ äußere Normale auf $\partial\Omega \cap Q$

$$\overset{(\#)}{\Longrightarrow} \int_{Z_\epsilon} \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{Q'} F(x', h(x') + \epsilon) \cdot N(x)\,\mathrm{d}x' \qquad (\times)$$

Mit $g_\epsilon := \begin{cases} \operatorname{div} F & \text{auf } Z_\epsilon, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$ $(\epsilon \geq 0)$ ist $|g_\epsilon(x)| \leq |\operatorname{div} F(x)|\ \ \forall x \in \Omega$ und

$$\int_{Z_\epsilon} \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{Z_0} g_\epsilon(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\substack{\textit{major.}\\ \textit{Konvergenz}}]{\epsilon \downarrow 0} \int_{Z_0} g_0(x)\,\mathrm{d}x = \int_{Z_0} \operatorname{div} F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da $(x', \epsilon) \to F(x', h(x') + \epsilon) \cdot N(x')$ stetig auf kompakter Menge $\overline{Q'} \times [0, \epsilon_0]$ für ein $\epsilon_0 > 0$, ist beschränkt und *majorisierte Konvergenz* liefert:

$$\begin{aligned} \int_{Q'} F(x', h(x') + \epsilon) \cdot N(x')\,\mathrm{d}x' \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} & \underbrace{\int_{Q'} F(x', h(x')) \cdot N(x')\,\mathrm{d}x'} \\ =& \int_{Q'} F(...) \cdot \frac{N(x')}{|N(x')|} |N(x')|\,\mathrm{d}x' \\ =& \int_{\partial Z_0 \cap \partial\Omega} F(x) \cdot \nu(x)\,\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

Denn $x' \to (x', h(x'))$ ist Parametrisierung ψ der Mannigfaltigkeit $\partial Z_0 \cap \cap \Omega$ mit

$$\sqrt{\det \psi'^T(x')\psi'(x')} \overset{\text{vgl. Beweis}}{\underset{\textit{Satz 30.5}}{=}} |(h'(x'), -1)| = |N(x')| \text{ und } \nu(x') = \frac{N(x')}{|N(x')|}$$

$$\overset{\epsilon\downarrow 0 \text{ in } (x)}{\underset{\substack{F=0 \text{ auf} \\ \partial Z_0 - \partial Z}}{\Longrightarrow}} \int_{Z_0} \operatorname{div} F \,\mathrm{d}x = \int_{\partial Z_0} F(x) \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}a.$$

Achtung: Obige Betrachtung evtl. bzgl. gedrehtem Koordinatensystem: $\operatorname{div} F$?
Sei $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare Koordinatentransformation, d.h. $y = Cx$ für eine reguläre, (orthogonale) Matrix C. Sei $\tilde{F} = (\tilde{F}^1, ..., \tilde{F}^n)$ Darstellung von $F = (F^1, ..., F^n)$ bzgl. Koordinate y

$$\Longrightarrow \tilde{F}(Cx) = C \cdot F(x)$$

$$\overset{\frac{\partial}{\partial x}}{\Longrightarrow} \tilde{F}'(Cx) = X \cdot F'(x) \cdot C^{-1}, \text{ lineare Alg. liefert: } \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} C \cdot A \cdot C^{-1} \ \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{div}_x F = \operatorname{div}_y \tilde{F} \text{ ist unabhängig von Koordinatensystem (Invarianz!).}$$

(c) Sei $\tilde{\Omega} := \overline{\Omega} \backslash \partial_s \Omega = \Omega \cup \partial_r \Omega$, wähle $\forall x \in \tilde{\Omega}$ offene Umgebung $U(x) \subset \mathbb{R}^n$ von x mit $U(x) = \Omega$ für $x \in \Omega$; $U(x) =$ Zylinder Q gemäß (1) für $x \in \partial_r \Omega$ liefert offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_l\}$ von $\tilde{\Omega}$ (endlich viele wegen Stückweise glattem Rand)

$$\overset{\textit{Satz 31.1}}{\Longrightarrow} \text{ existiert Z.d.E. } \{\alpha_j\} \text{ von } \tilde{\Omega}, \text{ die } \mathcal{U} \text{ untergeordnet ist}$$

$$\overset{\text{lokal}}{\underset{\text{endlich}}{\Longrightarrow}} \exists m : \alpha_j \equiv 0 \ \forall j \geq m+1$$

$$F(x) = \sum_{j=1}^{m} F(x)\alpha_j(x) \ \forall x \in \tilde{\Omega}. \tag{+}$$

Offenbar erfüllt $F\alpha_j$ (8) entweder nach (a) oder (b) $\forall j$. Wegen (+) ist $\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{div}(F\alpha_j)$ und wegen

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \,\mathrm{d}a = \int_{\partial_r \Omega} F \cdot r \,\mathrm{d}a = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial_r \Omega} (F\alpha_j) \cdot \nu \,\mathrm{d}a$$

folgt (8) für F.

■

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wie in *Theorem 4*, $F(x) = x \ \forall x \in \overline{\Omega}$. Offenbar ist $\operatorname{div} F(x) = n$ auf Ω

$$\overset{(8)}{\Longrightarrow} n \cdot V_n(\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}a. \tag{14}$$

Beachte: Integral rechts ist unabhängig von Gestalt von $\partial\Omega$

(a) $\Omega = B_r(0):\ x \times \nu(x) = 1$ auf $\partial\Omega \overset{(14)}{\Longrightarrow} n \cdot \kappa_n = \omega_n$.

(b) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega$ sei C^1-Kurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ mit

$$\nu\left(x(t), y(t)\right) = \frac{(y'(t), -x'(t))}{|(y'(t), -x'(t))|} \overset{(14)}{\Longrightarrow} V_2(\Omega) = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sei $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Ω offen, C^1-Vektorfeld, $F = \left(F^1, F^2, F^3\right)$ das Vektorfeld $\operatorname{rot} F(x) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{rot} F(x) := \left(F^3_{x_2}(x) - F^2_{x_3}(x), F^1_{x_3}(x) - F^3_{x_1}(x), F^2_{x_1}(x) - F^1_{x_2}(x)\right) \tag{15}$$

heißt *Rotation (Zirkulation)* von F (engl.: $\operatorname{curl} F$). Mit *Nabla-Operator* $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, d.h. $\nabla f(x) = f'(x)$ ist

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{pmatrix} \begin{aligned} &= e_1 \cdot F^3_{x_2}(x) - e_1 \cdot F^2_{x_3}(x) \\ &+ e_2 \cdot F^1_{x_3}(x) - e_2 \cdot F^3_{x_1}(x) \\ &+ e_3 \cdot F^2_{x_1}(x) - e_3 \cdot F^1_{x_2}(x). \end{aligned} \tag{15'}$$

Beispiel 2. Betrachte Vektorfeld $F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x_2 \\ \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $(F(x) \perp x)$ "rotiert" mit Geschwindigkeit α um x_3-Achse:

$$\operatorname{rot} F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Interpretation: Falls $\operatorname{rot} F(x) \neq 0$, besitzt Vektorfeld F einen "Anteil", der nahe x um Achse $\{x + t \operatorname{rot} F(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ "rotiert" (mathematisch Positiv).

$|\operatorname{rot} F(x)|$ ist Maß für Rotationsgeschwindigkeit (man sagt auch F hat Wirbel in x).

Satz 8 (Rechenregeln). *Seien $F, G : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Ω offen, C^1-Vektorfeld, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ C^1-Funktion*

$\Longrightarrow$ (1) $\operatorname{rot}(\alpha F + \beta G) = \alpha \operatorname{rot} F + \beta \operatorname{rot} G\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

(2) $\operatorname{rot}(gF) = g \operatorname{rot} F + \mathrm{D}g \times F$,

(3) $\operatorname{rot}(\mathrm{D}g) = 0$ $\left(\operatorname{rot}(\operatorname{grad} g) = 0\right)$,

(4) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Beweis. Nachrechnen. ■

Bemerkung:

(1) $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot}(F + \tilde{F})$ falls $\tilde{F} = \mathrm{D}g$ (d.h. $\tilde{F}$ ist Gradientenfeld),
(2) $\operatorname{div} F = \operatorname{div}(F + \tilde{F})$ falls $\tilde{F} = \operatorname{rot} G$ (d.h. Rotation eines Vektorfeldes).

- Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ 2-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Einheitsnormalenfeld ν und $W \subset M$ offen bzgl. M. $\partial_M W$ bezeichne Rand von W bzgl. M.
- Randpunkt $u \in \partial_M W$ heißt *regulär* falls für Kartengebiet U und zugehörige Parametrisierung φ $x = \varphi^{-1}(u)$ regulärer Randpunkt von $\varphi^{-1}(U \cap W) \subset \mathbb{R}^2$ ist (da Kartenwechsel Diffeomorphismus ist, ist Definition unabhängig von φ)
- $W \subset M$ hat *glatten Rand* $\partial_M W$ bzgl. M falls alle $u \in \partial_M W$ regulär sind.

In diesem Fall: $\partial_M W$ ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit (denn $\partial(\varphi^{-1}(U \cap W))$ ist 1-dimensionale Mannigfaltigkeit und dann auf $\varphi(...)$). Somit ist $\partial_M W$ lokal als reguläre Kurve darstellbar und es existiert Tangente $t(u)$.

- $t : \partial_M W \to \mathbb{R}^3$ orientiert $\partial_M W$ *kohärent zu* M, falls $t(u)$ Einheitsvektor an $\partial_M W$ $\forall u$ ist, Abbildung t stetig ist und $\nu(u) \times t(u) \in T_u M$ "zeigt zur Menge W" $\forall u$. (Man sagt auch W liegt "links vom Rand".)

Theorem 9 (Integralsatz von Stokes, klassisch im $\mathbb{R}^3$). *Sei $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Ω offen, C^1-Vektorfeld, sei $M \subset \Omega$ 2-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Einheitsnormalenfeld ν und $W \subset M$ beschränkt mit glattem Rand $\partial_M W$ bzgl. M kohärent orientiert zu M ist mit t*

$$\implies \int_W \operatorname{rot} F(u) \cdot \nu(u) \, \mathrm{d}a = \int_{\partial_M W} F(u) \cdot t(u) \, \mathrm{d}a. \tag{16}$$

Interpretation: Integral über Wirbel des Vektorfeldes F "in der Fläche" W (d.h. $\nu \cdot \operatorname{rot} F$) ist gleich der Zirkulation von F entlang des Randes $\partial_M W$.

Beweis. W möge im Kartengebiet U von M liegen (sonst mittels Z.d.E.), zugehörige Parametrisierung ist $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \to U$, Koordinaten $x = (x_1, x_2)$ in V, $u = (u_1, u_2, u_3)$ in M bzw. Ω, $G := \varphi^{-1}(w) \subset V$ offen, beschränkt, mit glatten Rand ∂G.

Strategie: Zurückführung von (16) auf Gaußschen Satz in $G \subset \mathbb{R}^2$. Man hat

$$\nu(\varphi(x)) = \frac{\varphi_{x_1}(x) \times \varphi_{x_2}(x)}{|\varphi_{x_1}(x) \times \varphi_{x_2}(x)|}$$

(vgl. *Beispiel 29.12*), $a \wedge b \overset{\mathbb{R}^3}{=} a \times b$). $\sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)} = |\varphi_{x_1}(x) \times \varphi_{x_2}(x)|$ (vgl. *30.1*, *30.2*). Als Integral auf Mannigfaltigkeit W ist somit linke Seite in (16):

$$\begin{aligned}
\int_W \operatorname{rot} F(x) \cdot \nu(x) \,\mathrm{d}a &\overset{\text{Def.}}{=} \int_G \operatorname{rot}_U F(\varphi(x)) \cdot \nu(\varphi(x)) = \frac{\varphi_{x_1}(x) \times \varphi_{x_2}(x)}{|\varphi_{x_1}(x) \times \varphi_{x_2}(x)|} \cdot \sqrt{\det \varphi'(x)^T \varphi'(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_G \operatorname{rot}_U F(\varphi(x)) \cdot (\varphi_{x_1}(x) \times \varphi_{x_2}(x)) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_G \begin{pmatrix} F_2^3 - F_3^2 \\ F_3^1 - F_1^3 \\ F_1^2 - F_2^1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1^2 \varphi_2^3 - \varphi_1^3 \varphi_2^2 \\ \varphi_1^3 \varphi_2^1 - \varphi_1^1 \varphi_2^3 \\ \varphi_1^1 \varphi_2^2 - \varphi_1^2 \varphi_2^1 \end{pmatrix} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

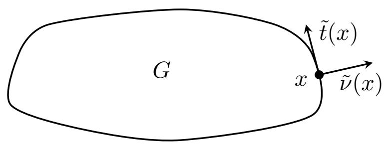
(Hier $F_l^k := F_{x_l}^k, \varphi_l^k := \varphi_{x_l}^k$, $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$.) Schreibe nur Terme F^1 auf:

$$= \int_G F_1^1 \cdot 0 + F_2^1 (\varphi_1^2 \varphi_2^1 - \varphi_1^1 \varphi_2^2) + F_3^1 (\varphi_1^3 \varphi_2^1 - \varphi_1^1 \varphi_2^3) + \ \dots \ \mathrm{d}x. \qquad (*)$$

- Für rechte Seite in (16) sei $s \mapsto \tilde{x}(s) = (\tilde{x}_1(s), \tilde{x}_2(s))$ Parametrisierung der 1-dimensionaler Mannigfaltigkeit ∂G mit $s \in I \subset \mathbb{R}$

  $\implies$ $s \mapsto \psi(s) := \varphi(\tilde{x}(s))$ ist Parametrisierung der 1-dimensionaler Mannigfaltigkeit $\partial_M W$ und $t(\psi(s)) = \frac{\psi'(s)}{|\psi'(s)|}$, $\psi'(s) = \varphi'(\tilde{x}(s)) \cdot \tilde{x}'(s)$

  $$\begin{aligned}
  \implies \int_{\partial_M W} F \cdot t \,\mathrm{d}a &\overset{\text{Def.}}{=} \int_I F(\psi(s)) \cdot t(\psi(s)) \cdot \underbrace{\sqrt{\det \psi'(s)^{\mathrm{T}} \psi'(s)}}_{=|\psi'(s)|} \mathrm{d}s \\
  &= \int_I F(\varphi(\tilde{x}(s))) \cdot \Bigg(\varphi'(\tilde{x}(s)) \cdot \underbrace{\frac{\tilde{x}'(s)}{|\tilde{x}'(s)|}}_{=:\tilde{t}(\tilde{x}(s))} \Bigg) |\tilde{x}'(s)| \,\mathrm{d}s
  \end{aligned}$$



$$\tilde{\nu}(s) = \frac{1}{|\tilde{x}'(s)|} \begin{pmatrix} \tilde{x}_2'(s) \\ -\tilde{x}_1'(s) \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{Def.}}{=} \int_{\partial G} F(\varphi(x)) \cdot \left(\varphi'(x) \cdot \tilde{t}(x)\right) \,\mathrm{d}a = \int_{\partial G} F^1(\varphi(x)) \cdot \left(\varphi_1^1 \tilde{x}_1' + \varphi_2^1 \tilde{x}_2'\right) \frac{1}{|\tilde{x}'|} + \ldots \,\mathrm{d}a \\
&= \int_{\partial G} F^1(\varphi(x)) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_2^1 \tilde{x}_2' \\ -\varphi_1^1 \tilde{x}_1' \end{pmatrix} \cdot \tilde{\nu}(x) + \ldots \,\mathrm{d}a \\
&\underset{\textit{Gauß}}{\overset{\textit{Satz von}}{=}} \int_G \mathrm{div}_x \left(F^1(\varphi(x)) \begin{pmatrix} \varphi_2^1(x) \\ -\varphi_1^1(x) \end{pmatrix} \right) + \ldots \,\mathrm{d}x \\
&= \int_G D_u F^1 \cdot \varphi_{x_1} \varphi_2^1 + \underline{F^1 \varphi_{21}^1} - D_u F^1 \cdot \varphi_{x_2} \cdot \varphi_1^1 - \underline{F^1 \varphi_{12}^1} + \ldots \,\mathrm{d}x \\
&\underset{\textit{Schwarz}}{\overset{\textit{Satz von}}{=}} \int_G F_1^1 \left(\varphi_1^1 \varphi_2^1 - \varphi_2^1 \varphi_1^1\right) + F_2^1 \left(\varphi_1^2 \varphi_2^1 - \varphi_2^2 \varphi_1^1\right) + F_3^1 \left(\varphi_1^3 \varphi_2^1 - \varphi_2^3 \varphi_1^1\right) + \ldots \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Vergleich mit $(*)$ liefert Behauptung (16).

■

Bemerkung (Hauptsatz der Vektoranalysis). *Falls für unbekanntes Vektorfeld* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *die Quelle, Wirbel und der Fluss durch* $\partial\Omega$ *bekannt sind, dann ist* F *dadurch eindeutig bestimmt, d.h. für gegebene Funktionen* $f : \Omega \to \mathbb{R},\ G : \Omega \to \mathbb{R}^3,\ \varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *gelte* $\operatorname{div} F = f,\ \operatorname{rot} F = G$ *auf* Ω, $F \cdot \nu = \varphi$ *auf* $\partial\Omega$, *dann wäre* F *eindeutig bestimmt* (Ω, f, G, φ *ausreichend regulär*).

(Wichtig in Elektrodynamik!)

33 Gradientenfelder

Abbildung $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω offen heißt *Gradientenfeld*, falls differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit $F(x) = f'(x)^{\mathrm{T}}\ \forall x \in \Omega$. *Frage:* Welche Vektorfelder sind Gradientenfelder?

Satz 1 (Notwendige Bedingung). *Sei $F = (F^1, ..., F^n) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \Omega$ offen, stetig differenzierbar und Gradientenfeld*

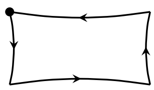
$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j} F^i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} F^j(x)\ \forall x \in \Omega,\ i, j = 1, ..., n. \tag{1}$$

(1) heißt auch *Integrabilitätsbedingung.*

Beweis. Sei $F = f'$ für $f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f \in C^2(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad F^i_{x_j}(x) = f_{x_1 x_j}(x) \underset{\textit{Schwarz}}{\overset{\textit{Satz von}}{=}} f_{x_j x_i}(x) = F^j_{x_i}(x)$. ■

Hinweis: Für $n = 3$: (1) $\iff$ $\operatorname{rot} F = 0$. Kurve $C = \varphi([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$ mit stetiger Parametrisierung $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *stückweise regulär*, falls es $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$ gibt, sodass $\varphi((t_{j-1}, t_j)) =: C_j$ 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind $\forall j = 1, ..., k$.

- O.B.d.A. sei φ die jeweils zugehörige Parametrisierung auf (t_{j-1}, t_j) und somit φ in C^1 mit $|\varphi'(t)| \neq 0$ jeweils auf (t_{j-1}, t_j). Abbildung $t : C_j \to \mathbb{R}$ mit $t(\varphi(t)) = \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|}$ liefert uns die Einheitstangente an C_j.
- Kurve $C = \varphi([a, b])$ heißt *geschlossen*, falls $\varphi(a) = \varphi(b)$.



geschlossene Kurve

- Für stückweise reguläre Kurve $C = \varphi([a, b])$ und Vektorfeld $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\int_C F(x) \cdot t(x)\,\mathrm{da}$$

  Integral von F längs C.

Offenbar:

$$\int_C F(x) \cdot t(x)\,\mathrm{da} = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \frac{\varphi'(t)}{|\varphi'(t)|} \cdot |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Satz 2. *Sei $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \Omega$ Gebiet (offen, zusammenhängend) und stetig. Dann: F ist Gradientenfeld*

$$\iff \int_C F(x) \cdot t(x)\,\mathrm{da} = 0\ \forall \text{ stückweise reguläre geschlossene Kurven } C \subset \Omega, \tag{3}$$

$$\iff \int_C F(x)\cdot t(x)\,\mathrm{d}a \textit{ ist } \text{wegunabhängig,} \tag{4}$$

d.h: $\int_{C_1} F(x)\cdot t(x)\,\mathrm{d}a = \int_{C_2} F(x)\cdot t(x)\,\mathrm{d}a$ *für stückweise reguläre Kurven* C_1, C_2 *mit* $\varphi_1(a) = \varphi_2(a),\ \varphi_1(b) = \varphi_2(b)$ *für zugehörige* $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Beweis. (a) Sei $F = f'$ für ein $f \in C^1(\Omega)$, C geschlossene, stückweise reguläre Kurve mit Parametrisierung φ

$$\Longrightarrow \int_C F\cdot t\,\mathrm{d}a = \int_a^b \frac{d}{ds}\left(f(\varphi(s))\right)\mathrm{d}s \underset{\textit{Int.-rechnung}}{\overset{\textit{Hauptsatz d.}}{=}} f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) \overset{\varphi(a)=\varphi(b)}{=} 0 \tag{\#}$$

$\Longrightarrow$ (3)

(b) Gelte (3), seien $\tilde{x}, x \in \Omega$ und C_1, C_2 Kurven mit $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = \tilde{x}, \varphi_1(b) = \varphi_2(b) = x$

$$\Longrightarrow \psi(t) := \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{falls } t \in (a,b), \\ \varphi_2(2b-t) & \text{falls } t \in (b, 2b-a) \end{cases} \quad \text{ist die Kurve } C = C_1 - C_2$$

$$\Longrightarrow 0 = \int_C F\cdot t\,\mathrm{d}a = \int_{C_1} F\cdot t\,\mathrm{d}a + \int_{-C_2} F\cdot t\,\mathrm{d}a = \int_{C_1} F\cdot t\,\mathrm{d}a - \int_{C_2} F\cdot t\,\mathrm{d}a \implies (4).$$

(c) Gelte (4), fixiere $\tilde{x} \in \Omega$, sei C Kurve mit $\varphi(a) = \tilde{x}, \varphi(b) = x$,

$$f(x) := \int_C F\cdot t\,\mathrm{d}a \text{ ist wohldefiniert nach (4) } \forall x \in \Omega. \tag{$*$}$$

Fixiere $x \in \Omega$, sei $\varphi(\tau) = x + \tau e_j$ ($e_j \cong j$-te Einheitsvektor), $C(s) = \varphi([0,s])$

$$\Longrightarrow \frac{1}{s}\left(f(x+se_j) - f(x)\right) \underset{(4)}{\overset{(*)}{=}} \frac{1}{s}\int_{C(s)} F\cdot t\,\mathrm{d}a \overset{(2)}{=} \frac{1}{s}\int_0^s F(\varphi(\tau))\cdot e_j \mathrm{d}\tau \underset{\text{für } \tilde{s}\in(0,s)}{\overset{MWS}{=}} \frac{1}{s} F(\varphi(\tilde{s}))\cdot e_j s$$

$$\overset{s\to 0}{\Longrightarrow} f_{x_0}(x) = F(x)\cdot e_j \cdot s = F'(x) \underset{\text{stetig}}{\overset{F \text{ ist}}{\Longrightarrow}} f \in C^1 \implies F = f' \implies \text{Behauptung.}$$

■

Betrachte (#) und ($*$).

Satz 3. *Sei* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *Gradientenfeld mit* $F = f'$ *für* $f \in C^1(\Omega)$, Ω *Gebiet,* $x_0 \in \Omega$, $\varphi : [a,b] \to \Omega$ *stückweise reguläre Kurve mit* $\varphi(a) = x_0, \varphi(b) = x$

$$\implies f(x) = f(x_0) + \int_{\varphi([a,b])} F\cdot t\,\mathrm{d}a \overset{(2)}{=} f(x_0) + \int_a^b F(\varphi(\tau))\cdot\varphi'(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Hinweis: Da Stammfunktion nur bis auf additive Konstante bestimmt ist liefert jede Wahl von $f(x_0)$ eine Stammfunktion f. Geschlossene Kurve $C = \varphi([a,b]) \subset \Omega$ heißt *zusammenziehbar in* Ω, falls stetige Abbildung $h : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$ und $x_0 \in \Omega$ existieren mit

(i) $h(\tau,0) = \varphi(\tau);\ h(\tau,1) = x_0\ \forall \tau \in [a,b]$,
(ii) $h(a,s) = h(b,s)\ \forall s \in [0,1]$.

Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls jede geschlossene Kurve C in Ω zusammenziehbar ist. ($\Longrightarrow$ einfach zusammenhängende Gebiete haben keine Löcher!)

Satz 4. *Sei $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, Ω einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann:*

$$F \text{ ist Gradientenfeld } \iff \text{Integrabilitätsbedingung (1) gilt.}$$

Beweis. "$\Longrightarrow$": Vgl. *Satz 1.*

"$\Longleftarrow$": Sei C geschlossene stückweise reguläre Kurve in Ω, h wie oben.

Beachte: h kann stets so gewählt werden, dass alle Ableitungen und Integrale unten existieren.

Sei $\psi(s) = \int_a^b F(h(\tau,s)) \cdot h_s(\tau,s) \mathrm{d}\tau\ \forall s \in [0,1]$

$$\Longrightarrow \psi \text{ ist stetig auf } [0,1],\ \psi(0) = \int_C F \cdot t\, \mathrm{d}a,\ \psi(1) \overset{h_\tau(t,1)=0}{=} 0 \qquad (*)$$

$$\psi'(s) = \int_a^b \sum_{j,k=1}^n F^k_{x_i} h^k_\tau \mathrm{d}\tau + \underbrace{\int_a^b \sum_{j=1}^n F^j h^j_{\tau s} \mathrm{d}\tau}_{\underset{\text{Satz v. Schwarz}}{\overset{\text{part. Int.}}{=}} - \int_a^b \sum_{j,k=1}^n F^j_{x_k} h^k_\tau h^j_s \mathrm{d}\tau + \underbrace{\left[F\left(h(\tau,s)\right) h_s(\tau,s)\right]_{\tau=a}^b}_{=0, \text{ da } h(\cdot,s) \text{ geschl. Kurve}}}$$

$$\Longrightarrow \psi'(s) = \int_a^b \sum_{j,k=1}^n \left(F^k_{x_j} - F^j_{x_k}\right) h^j_s h^k_\tau \mathrm{d}\tau \overset{(1)}{=} 0$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \int_C F \cdot t\, \mathrm{d}a = 0 \overset{\text{Satz 2}}{\Longrightarrow} \text{Behauptung.}$$

■

Beispiel 1. Sei $F : \Omega := \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x) := \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{|x|^2} \\ \frac{x_1}{|x|^2} \end{pmatrix}$. Es ist

$$F^1_{x_2}(x) = F^2_{x_1}(x) \quad \left(= \frac{x_2^2 - x_1^2}{|x|^4} \right),$$

d.h. (1) ist erfüllt. Betrachte geschlossene Kurve $C = \varphi([0, 2\pi])$ mit $\varphi(t) = (r\cos t, r\sin t)$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow |\varphi(t)| = r, \varphi'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \\
&\Longrightarrow \int_C F \cdot t \, \mathrm{d}a = \int_0^{2\pi} F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad\qquad = \frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad\qquad = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi \neq 0 \\
&\overset{\textit{Satz 2}}{\Longrightarrow} F \text{ ist kein Gradientenfeld obwohl (1) erfüllt ist.}
\end{aligned}$$

Beachte: Ω ist nicht einfach zusammenhängend.

Teil II
Gewöhnliche Differentialgleichungen

34 Einführung

Differentialgleichung ist Gleichung in der unbekannte Funktionen, deren Ableitungen und deren Argumente auftreten. Z.B. $u'(x) - x = u(x)$ oder $u(x) + u''(x) = x$. Ziel: Bestimme Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die Gleichung zumindest in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ erfüllt. Insbesondere müssen dabei auftretende Ableitungen existieren.

– *(ODE)* Falls u nur von einem Argument $x \in \mathbb{R}$ abhängt, so spricht man von einer *gewöhnlichen Differentialgleichung (GDgl.)* (engl. *ODE*).

$$f(x, u(x), u'(x), ..., u^{(k)}(x)) = 0 \qquad (f \text{ gegebene Funktion})$$

ist allgemeine Form einer GDgl. k-ter Ordnung, d.h. es treten Ableitungen bis zur k-ten Ordnung auf. In spezieller Form

$$u^{(k)}(x) = \tilde{f}\left(x, u(x), u'(x), ..., u^{(k-1)}(x)\right)$$

heißt die GDgl. *explizit*, sonst *implizit*.

– *(PDE)* Falls mehrere Argumente auftreten, so hat man *partielle Differentialgleichungen (PDgl.)* (engl. *PDE*). Z.B. $v_x + v_y = x + y$ für gesuchtes $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

– Mehrere GDgl. für mehrere gesuchte Funktionen (die alle gleiches Argument x haben) nennt man *System gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Z.B. $u'(x) = v(x)$, $v'(x) = -u(x)$. Gesucht sind $u(x), v(x)$. In der Regel nutzt man $u(\cdot)$ statt $u(x)$.

Frage: Wie erhält man Dgl.?

(A) Mathematische Rätsel. Differenziere bekannte Funktion und leite daraus Dgl. ab. Z.B.

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x &&\Longrightarrow u' = u \text{ oder } u'' = u, \\ u(x) &= x^2 &&\Longrightarrow xu' = 2u \text{ oder } u'' = 2, \\ u(x) &= -\frac{1}{x} &&\Longrightarrow u' = u^2 \text{ oder } u'' = -2u^3. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x) &= \tan x \\ v(x) &= \sin x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow u' = \frac{1}{v^2}, v' = u \cdot v.$$

(B) Prozesse in der Natur und Technik werden in natürlicher Weise durch Dgl. beschrieben, deshalb ist Studium von Dgl. fundamental für Mathematik, Naturwissenschaften, Technik und Ökonomie.

Grundprinzip: Dgl. beschreibt ein Naturgesetz “im Kleinen”, Lösung $u(x)$ beschreibt Naturvorgang “im Großen”.

Beispiel 1 (Exponentielles Wachstum). $u(t)$ sei Große einer Population (Z.B. Bakterien, Weltbevölkerung,...) zur Zeit t. Nach Zeitspanne $\triangle t$ ergibt sich Zuwachs $\triangle u = u(z + \triangle t) - u(t)$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \triangle u = \alpha \cdot u \cdot \triangle t && (\alpha \text{ Proportionalitätsfaktor}) \\ &\Longrightarrow \frac{\triangle u}{\triangle t} = \alpha u. \end{aligned}$$

Mathematik liefert mittels Grenzprozess $\triangle t \longrightarrow 0$ Dgl. $u'(t) = \alpha \cdot u(t)$, die Modellannahme (in Kleinem) widerspiegelt. Allgemeine Lösung: $u(t) = c \cdot e^{\alpha t}$, $c \in \mathbb{R}$ beliebige Konstante (wird später gezeigt), konkrete Lösungen erhält man Z.B. bei Kenntnis von $u(0) = u_0$, dann ist $u(t) = u_0 \cdot e^{\alpha t}$. Wachstumsrate α kann als Differenz von Geburtenrate γ und Todesrate τ angesehen werden, d.h. $u' = \gamma u - \tau u$. Spezialfall: $\gamma = 0 \implies \alpha = -\tau < 0$ beschreibt radioaktiven Zerfall.

Beispiel 2 (logistisches Wachstum). (gebremst) $u(t)$ sei Große einer Population, berücksichtige nun hemmende Faktoren (beschränkte Ressourcen, Krankheiten, Kriege,...). Modellannahme: Wegen beschränkter Kapazität kann $u(t)$ Maximalgröße M nicht überschreiten, $\triangle u$ ist proportional zu $u, \triangle t$ und $M - u$

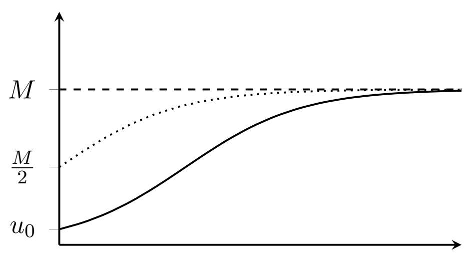
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \triangle u = \alpha \cdot u(M-u) \cdot \triangle t \\ &\underset{\text{oben}}{\overset{\text{wie}}{\Longrightarrow}} u' = \gamma u - \tau u^2 && (\gamma = \alpha M, \tau = \alpha). \end{aligned}$$

Interpretation: Wachstum u' wird durch Term $-\tau u^2$ für große u stärker gebremst als für kleine u. Allgemeine Lösung: (vgl. später) Für $u(0) = u_0$ ist

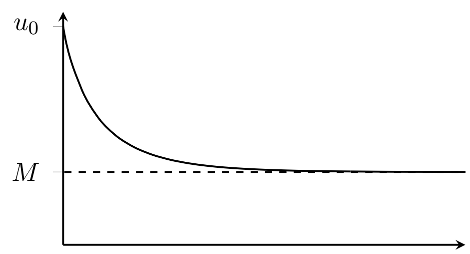
$$u(t) = \frac{\gamma}{\tau + \left(\frac{\gamma}{u_0} - \tau\right) e^{-\gamma t}} = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{u_0} - 1\right) e^{-\alpha M t}}.$$

Seien $\alpha, M > 0 \implies u(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} M$. Falls $u_0 = M \implies u(t) = M\ \forall t$, sonst:

Fall $u_0 \in (0,M)$



Fall $u_0 > M$



Insbesondere beschreibt logistisches Wachstum: Gewichtszunahme bei Ratten, Höhenwachstum der Sonnenblume, Verbreitung von Gerüchten.

Beispiel 3 (freier Fall). Sei m Masse eines Gewichts, $v(t) = u'(t)$ Geschwindigkeit in Abhängigkeit von Zeit t. Modellannahme: *Newtonsches Kraftgesetz* liefert $K = m \cdot u''$. Schwerkraft nahe Erdoberfläche ist $K = m \cdot g$ (g ist Gravitationskonstante).

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow u'' = g \text{ bzw. } v' = g \\
&\Longrightarrow v(t) = v_0 + g \cdot t && , v_0 = v(0) \\
&\Longrightarrow u(t) = u_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 && , u_0 = u(0).
\end{aligned}
$$

Offenbar liefert die Vorgabe $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$ eindeutige Lösung der Dgl. (Anfangswertproblem) Alternativ könnte man $u(0) = u_0$ und $u(t_1) = u_1$ ($t_1 \neq 0$) vorschreiben

$$
\Longrightarrow \; u_1 = u_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2 \; \Longrightarrow \; \frac{u_1 - u_0 - \frac{1}{2} g t_1^2}{t_1} = v_0.
$$

D.h. man erhält wieder eindeutige Lösung (Randwertproblem).

Beispiele geben Einblick wie Modelle in natürlicher Weise auf Definitionen führen.

34.1 Wichtige Fragestellungen bei Behandlung von Differentialgleichungen

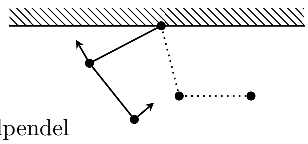
Existenz einer Lösung: Explizite Lösung findet man nur in einigen Spezialfällen (führt zu Näherungslösungen mittels Computer). Existenz einer Lösung kann aber sehr allgemein abstrakt gezeigt werden (zumindest lokal), d.h. man macht qualitative Untersuchung. Z.B. Fortsetzbarkeit, asymptotisches Verhalten, Stabilität, Regularität, Periodizität,... .

Eindeutigkeit einer Lösung: Obige Beispiele zeigen, dass in allgemeinen Lösungen in der Regel Parameter auftreten, d.h. es gibt unendlich viele Lösungen. Durch Vorgabe von geeigneten Anfangswerten ($u(0) = u_0, u'(0) = u_1, ...$) bzw. von geeigneten Randwerte ($u(t_0) = u_0, u(t_1) = u_1$) ergibt sich "häufig" eindeutige Lösung. Manche Probleme haben in natürlicher Weise keine eindeutige Lösung.

Stetige Abhängigkeit der Lösungen von Parametern

(Parameter = Anfangswerte, Koeffizienten,...)

Problem: Parameter sind nie exakt messbar! Damit die Dgl. sinnvoll ist, sollte kleine Störung der Parametern nur kleine Veränderung der Lösung bewirken d.h. Lösung sollte stetig von den Parametern abhängen. (Anderenfalls ist die Dgl. nutzlos. Z.B. Chaos.)



Doppelpendel

Man sagt: Ein Problem ist *korrekt gestellt*, wenn eine Lösung existiert (Existenz), eindeutig ist (Eindeutigkeit) und stetig von Parametern abhängt (Stabilität).

Literatur: *Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer,*
Henser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Teubner.

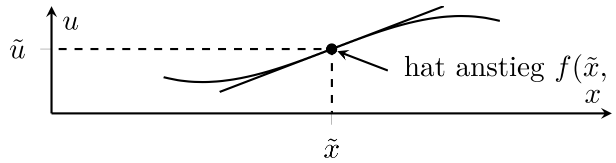
35 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Allgemeine Form: $f(x, u(x), u'(x)) = 0$.

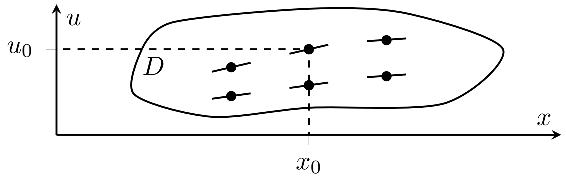
35.1 Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung, integrierbare Fälle

Allgemeine explizite Differentialgleichung 1. Ordnung: $u'(x) = f(x, u(x))$. Annahme: $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig (R^2 als x, u-Ebene). Lösungsbegriff: Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall. Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ ist Lösung der Differentialgleichung in I, falls $u \in I$ differenzierbar ist, $(x, u(x)) \in D \; \forall x \in I$ und $u'(x) = f(x, u(x))$.

(i) Vorbemerkung: (Richtungsfeld, Polygonzug) Sei u Lösung mit $(\tilde{x}, u(\tilde{x})) = (\tilde{x}, \tilde{u}) \in D$. Dann gibt $f(\tilde{x}, \tilde{u})$ Anstieg der Kurve $u(\cdot)$ in $\tilde{x}$.



$(x, u, f(x, u))$ heißt *Richtungsfeld*. Ohne Kenntnis der Lösung gibt es den Anstieg von $u(\cdot)$ in x für den Fall, dass (x, u) zu Graphen von $u(\cdot)$ gehört.



Problem: Suche Kurve $u(\cdot)$, die zum Richtungsfeld passt. Anfangswert: In "vielen" Fällen geht durch jedem Punkt $(x, y) \in D$ genau eine Kurve, d.h. Vorgabe von $(x_0, y_0) = (x_0, u(x_0))$ liefert eindeutige Lösung. Näherungslösungen: Polygonzug. Wähle $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, ..., n$ (h-schrittweise), $u_0 = u(x_0)$ wird als Anfangswert vorgegeben. Schrittweise $u_k = u_{k-1} + hf(x_{k-1}, u_{k-1})$, $k = 1, ..., n$.

In "vielen" Fällen konvergiert Polygonzug für $h \to 0$ gegen Lösung. Für Numerik wird anderes Verfahren verwendet (siehe *Runge-Kutta*).

(ii) $u'(x) = f(x) \implies u$ ist Stammfunktion von f. Sei f im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert und stetig, $x_0 \in I$. Allgemeine Lösung:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + u_0, \;\; u_0 \in \mathbb{R}.$$

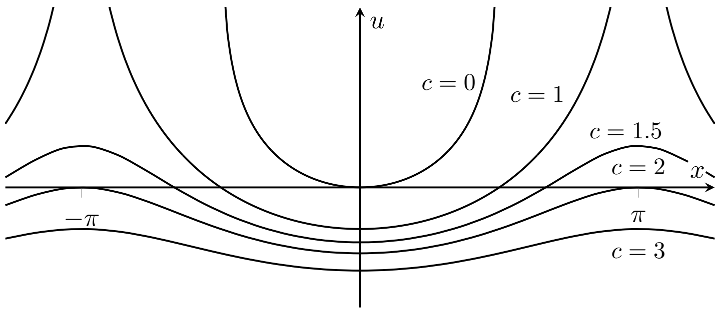
Vorgabe von u_0 entspricht gerade A.W. $u(x_1) = u_0$.

(iii) **Dgl. mit getrennten Variablen:** $u'(x) = f(x) \cdot g(u(x))$ (kurz $u' = f(x) \cdot g(u)$). Heuristik: $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f(x) \cdot g(u) \implies \frac{1}{g(u)}\mathrm{d}u = f(x) \cdot \mathrm{d}x$. Integration liefert $\int \frac{1}{g(u)}\mathrm{d}u = \int f(x)\,\mathrm{d}x$. Um A.W.P. $u(x_0) = u_0$ zu lösen, muss man Grenzen einsetzen:

$$\int_{u_0}^{u} \frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Auflösung von (1) nach u liefert Lösung $u = u(x)$.

Beispiel. $u' = e^u \sin x, u(x_0) = u_0 \implies \int_{u_0}^{u} e^{-s}\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \sin t\,\mathrm{d}t \implies -e^{-s}\big|_{u_0}^{u} = -\cos\big|_{x_0}^{x} \implies e^{-u} = \cos x - \cos x_0 + e^{-u_0} \implies u(x) = -\ln(\cos x + \underbrace{e^{-u_0} - \cos x_0}_{=:c})$.



Beachte: Abhängig von Anfangswerten ändert sich der Definitionsbereich der Lösungen (entweder ganz $\mathbb{R}$ oder beschränktes Intervall). Probe: $u' = \frac{\sin x}{(\cos x + e^{-u_0} - \cos x_0)} = e^u \cos x$, offenbar $u(x_0) = u_0$.

Rechtfertigung der Heuristischen Methode

Satz 1. *Sei $f : I_x \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : I_u \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, I_x, I_u Intervalle, $x_0 \in I_x$, $u_0 \in \operatorname{int} I_u$, $g(u_0) \neq 0 \implies$ Anfangswertproblem $u' = f(x)g(u)$, $u(x_0) = u_0$ besitzt eindeutige Lösung auf (evtl. einseitiger) Umgebung von x_0 in I_x, die man durch Auflösung von* (1) *nach u erhält.*

Beweis. Wiederholdung: $\varphi : I \subset \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar im offenen Intervall I und $\varphi'(x) \neq 0$ in $I \implies$ es existiert stetig differenzierbare Umkehrfunktion φ^{-1}. Setze

$$G(u) := \int_{u_0}^{u} \frac{1}{g(s)}\mathrm{d}s, \;\; F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Wegen $g(u_0) \neq 0$ existiert G in Umgebung von u_0 und $G' = \frac{1}{g} \neq 0$ dort

$$\begin{aligned} &\implies G^{-1} \text{ existiert und ist stetig differenzierbar mit } G^{-1}(0) = u_0 \\ &\implies G(u) = F(x) \text{ hat lokale Lösung } u(x) = G^{-1}(F(x)). \end{aligned}$$

Wegen $F(x_0) = 0 : u(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = u_0$, d.h. Anfangswert erfüllt.

Erfüllt u die Differentialgleichung? Differenziere $G(u(x)) = F(x)$:

$$G'(u(x)) \cdot u'(x) = F'(x) = f(x) \overset{G'=\frac{1}{g}}{\Longrightarrow} u'(x) = g(x)g(u(x)) \implies \text{Dgl. erfüllt.}$$

Eindeutigkeit: Sei $v(x)$ andere Lösung $\implies g(v(x)) \neq 0$ in Umgebung von x_0

$$\implies \frac{v'(x)}{g(v(x))} = f(x) \underset{\text{-tion}}{\overset{\text{Integra-}}{\Longrightarrow}} \int_{x_0}^{x} \frac{v'(t)}{g(v(t))} \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \underset{s=v(t)}{\overset{\text{Subst.}}{\Longrightarrow}} \int_{u_0}^{v(x)} \frac{1}{g(s)} \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\implies G(v(x)) = F(x) \implies v(x) = G^{-1}(F(x)) = u(x), \text{ d.h. Eindeutigkeit.}$$

■

Bemerkung: Falls $g(u_0) = 0$, dann ist $u(x) = u_0$ stets Lösung auf dem Definitionsintervall von f. Weitere Lösungen sind aber möglich.

– Durch Substitution kann man gewisse Fälle auf Differentialgleichungen mit getrennten Variablen zurückführen:

(iv) $u' = f(ax+bu+c)$, $b \neq 0$ (sonst trivial). *Ansatz:* $v(x) = ax+bu(x)+c$. Welche Differentialgleichung erfüllt v? $v' = ax+bu' = a+bf(v)$ liefert eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Bestimme die Lösung $v(x)$, dann löst

$$u(x) := \frac{1}{b}(v(x) - ax - c)$$

die ursprüngliche Gleichung.

Beispiel. $u' = (x+u)^2$, setze $v(x) = x + u(x)$

$$\implies v' = 1 + v^2 \implies \int_{v_0}^{v} \frac{1}{1+s^2} \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \implies \arctan v = x + c \text{ (c geeignete Konstante)}$$
$$\implies v(x) = \tan(x+c) \implies u(x) = \tan(x+c) - x.$$

Probe: $u' = \frac{1}{\cos^2(x+c)} - 1 = \frac{\sin^2(x+c)}{\cos^2(x+c)} = (u+x)^2$.

(v) **Homogene Differentialgleichung:** $u' = f(\frac{u}{x})$, $x \neq 0$. Ansatz: $v(x) = \frac{u(x)}{x}$ $\underset{v}{\overset{\text{Dgl. für}}{\Longrightarrow}} v' = \frac{u'x-u}{x^2} = \frac{u'}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{u}{x} = \frac{f(v)-v}{x}$ liefert Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Bestimme Lösung $v(x)$, dann löst

$$u(x) := x \cdot v(x)$$

die homogene Differentialgleichung.

Beispiel. $u' = \frac{u}{x} - \frac{x^2}{a^2}$, $u(1) = 1$ $(x > 0)$. Setze $v(x) = \frac{u(x)}{x}$

$$\implies v(1) = 1 \implies v' = -\frac{1}{xv^2} \implies \int_1^v s^2 \mathrm{d}s = -\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \implies \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{3} = -\ln x$$
$$\implies v(x) = \sqrt[3]{1 - 3\ln x} \text{ (falls } 1 - 3\ln x > 0) \implies u(x) = \sqrt[3]{1 - 3\ln x}.$$

Probe: $u(1) = 1, u' = \sqrt[3]{1 - 3\ln x} + x \cdot \frac{1}{3}(1 - 3\ln x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-\frac{3}{x}\right) = \frac{u(x)}{x} - \frac{x^2}{u^2}$.

– **Bernoullische Differentialgleichung:** $u' = f(x)y(x) + g(x)y^{\alpha}(x),\ \alpha \notin \{0, 1\}$. Ansatz: $v(x) = (u(x))^{1-\alpha} \implies$ Lösung der linearen Differentialgleichung $v'(x) = (1-\alpha)(f(x)v(x) + g(x))$ liefert Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung:

$$u(x) = v(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Ferner besitzt die Bernoullische Differentialgleichung für jedes $\alpha > 0$ trivialerweise $u \equiv 0$ als Lösung für $u_0 = 0$. (Vgl. ÜA)

35.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Allgemeine Form: $u'(x) = g(x) \cdot u(x) + f(x)$ $(u' = gu + f)$.

– Falls $f \equiv 0$, dann ist die Differentialgleichung homogen, sonst inhomogen.

Funktionen f, g seien stetig auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$.

(i) **Homogene lineare Differentialgleichung:** $u' = f(x)u$ mit $u(x_0) = u_0$. Trennung der Variablen liefert ($u_0 \neq 0$): $\int_{u_0}^{u} \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$

$$\implies u(x) = u_0 e^{G(x)}\ \forall x \in I \text{ mit } G(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

Beachte: Lösung ändert die Vorzeichen nicht.

Fall $u_0 = 0$: triviale Lösung $u(x) = 0\ \forall x$ (beachte: (2) liefert auch diese Lösung). Wie sehen andere Lösungen aus? Sei $v(x)$ Lösung mit $v(x_0) = 0$ und $v(x_1) = v_1 \neq 0$ für ein $x_1 \neq x_0$. Betrachte Anfangswertproblem $v' = g(x)v,\ v(x_1) = v_1$. *Satz 1* liefert eindeutige Lösung

$$v(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t}$$

$\implies v(x_0) \neq 0 \implies \lightning \implies$ (2) liefert eindeutige Lösung des Anfangswertproblems für homogene lineare Differentialgleichung auf I.

(ii) **Inhomogene lineare Differentialgleichung:** $u'(x) = g(x) \cdot u(x) + f(x)$ mit $u(x_0) = u_0$.

Methode der Variation der Konstanten (Lagrange)

Ansatz:

$$u(x) = c(x) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \left(= c(x) \cdot e^{G(x)}\right),$$

d.h. in allgemeinen Lösung (2) der homogenen Differentialgleichung wird Konstante u_0 durch Funktion $c(x)$ ersetzt.

Frage: Gibt es eine Funktion $c(x)$, so dass Ansatz Lösung der inhomogenen Differentialgleichung liefert? Es muss gelten: $u' - gu = c'e^{G(x)} + gce^{G(x)} - gce^{G(x)} \implies c' = f(x) \cdot e^{-G(x)}$, Anfangswert: $c(x_0) = u_0 \implies c(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)e^{-G(t)}\,\mathrm{d}t$

$$\implies u(x) = \left(u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t) \cdot e^{-G(t)}\,\mathrm{d}t\right) \cdot e^{G(x)} \tag{3}$$

wobei $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(s)\mathrm{d}s$.

Satz 2. *Seien f, g stetig im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$, dann hat Anfangswertproblem $u'(x) = g(x) \cdot u(x) + f(x)$, $u(x_0) = u_0$ eindeutige Lösung* (3) *auf I.*

Beachte: Lösung existiert auf gesamtem Intervall I.

- Menge aller Lösungen einer Differentialgleichung heißt *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung (d.h. allgemeine Lösung enthält Parameter, die Durch Vorgabe der Anfangswerte bestimmt werden Können).
- Für lineare Differentialgleichung gilt das *Superpositionsprinzip*:

$$\underbrace{u_{\text{inh.}}(x)}_{\substack{\text{allgemeine Lösung}\\\text{der inh. Dgl.}}} = \underbrace{u_{\text{hom.}}(x)}_{\substack{\text{allgemeine Lösung}\\\text{der hom. Dgl.}}} + \underbrace{u_{\text{spez. inh.}}(x)}_{\substack{\text{spezielle Lösung}\\\text{der inh. Dgl.}}}.$$

Begründung: Seien u_1, u_2 Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung, dann löst $u := u_1 - u_2$ die homogene Differentialgleichung, denn $u' = u_1' - u_2' = g(u_1 - u_2) = gu$.

Folglich: Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung und eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung liefert alle Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung.

Beweis. (*Satz 2*) Offenbar sind alle Ausdrucke in (3) definiert. Differentiation von (3):

$$u' = f(x)e^{-G(x)}e^{G(x)} + ge^{G(x)}\underbrace{\left(u_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)e^{-G(t)}\,\mathrm{d}t\right)}_{=ue^{-G(t)} \text{ nach (3)}} = f + gu.$$

$\implies$ Differentialgleichung ist erfüllt und Anfangswerte offenbar auch. Eindeutigkeit: Sei v andere Lösung des Anfangswertproblems und $w := u - v \implies w' - gw = u' - v' - gu + gv = f - f = 0,\ w(x_0) = u(x_0) - v(x_0) = u_0 - u_0 = 0$ d.h. w löst homogene lineare Differentialgleichung mit $w_0 = w(x_0) = 0 \overset{(2)}{\implies}$ eindeutige Lösung $w(x) = 0\ \forall x \implies u(x) = v(x)\ \forall x$, d.h. Eindeutigkeit. ∎

Beispiel. $u' = -u\sin x + \sin^3 x,\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_0,\ G(x) = \cos x$

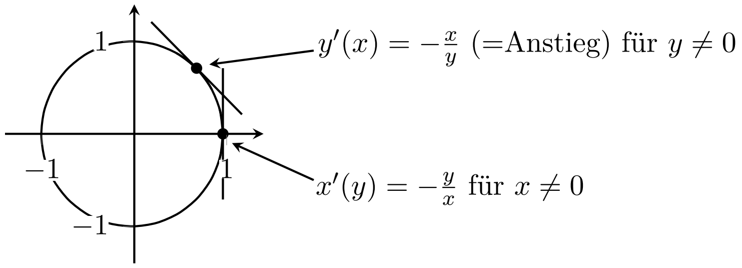
$$\implies u(x) = \left(u_0 + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^3 t e^{-\cos t}\,\mathrm{d}t\right) e^{\cos x} = \left(u_0 + \int_0^{\cos x} (1-s^2)e^{-s}\mathrm{d}s\right) e^{\cos x}$$
$$= \left(u_0 + \left[(s^2+2s+1)e^{-s}\right]_0^{\cos x}\right) e^{\cos x} = u_0 e^{\cos x} - \cos^2 x - 2\cos x - 1 + e^{\cos x}$$

Probe: Selbststudium.

35.3 Exakte Differentialgleichungen

Idee: Versuche Lösungskurven einer Differentialgleichung als Niveaulinien einer Funktion $F(x)$ zu beschreiben.

Beispiel (Konzentrische Kreise). $F(x,y) = x^2 + y^2 = r^2$ sind Lösungen von:



Betrachte allgemeine Differentialgleichung der Form:

$$\text{(a) } g(x) + h(x,y)y' = 0 \quad \text{oder} \quad \text{(b) } g(x,y)x' + h(x,y) = 0.$$

Formale Schreibweise für beide Fälle: $g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$ (4)
Differentialgleichung heißt *exakt* im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, falls (g,h) Grandientenfeld ist, d.h. es existiert Funktion $F \in C^1(D,\mathbb{R})$ mit $F_x = g, F_y = h$ in D. F wird Stammfunktion genannt (Existenz, Berechnung vgl. *Kapitel 33*).

Satz 3. *Seien g,h stetig im Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, (4) sei exakt, F sein zugehörige Stammfunktion*

$\implies$ (a) $y = y(x)$ *ist Lösung von* (4) *g.d.w.* $F(y, y(x))$ *ist konstant,*
(b) $x = x(y)$ *ist Lösung von* (4) *g.d.w.* $F(x(y), x)$ *ist konstant.*

Beweis. Zu (a): Es ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y(x)) = F_x + F_y y' = g + hy'$, d.h. $F(x,y(x))$ ist konstant für alle x g.d.w. $y(x)$ Differentialgleichung erfüllt.

Zu (b): Analog.

∎

Beispiel. Sei $2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$, d.h. $g(x,y) = 2xy,\ h(x,y) = x^2$. Integrabilitätsbedingung ist mit $g_y = 2x,\ h_x = 2x$ erfüllt. Berechne Stammfunktion (vgl. *Kapitel 33*). Wähle (x_0, y_0), als Kurve z.B. $\xi(s) = sx$, $\eta(s) = sy$

$$\Longrightarrow F(x,y) = \int_0^1 \big(2(sx)\cdot(sy)x + (sx)^2 y\big)\,\mathrm{d}s = x^2y \int_0^1 (2s^2+s^2)\mathrm{d}s = x^2y\left[s^3\right]_0^1 = x^2y.$$

Löse $F(x,y) = x^2y = c$:

(a) $F_y = x^2 \neq 0$ für $x \neq 0$: $y = \frac{c}{x^2}$,

(b) $F_y = 2xy \neq 0$ für $x, y \neq 0$: $x = \pm\sqrt{\frac{c}{y}}$, $(xy > 0)$.

Hinweis: Falls (4) nicht exakt ist, kann das gelegentlich durch Multiplikation mit geeigneter Funktion $M(x)$ bzw. $M(y)$ erreicht werden. (M-integrieren des Faktors, Selbststudium.)

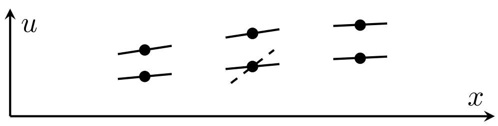
$\big($Betrachte z.B. $(2x^2 + 2xy^2 + 1)y\,\mathrm{d}x + (3y^2 + x)\,\mathrm{d}y = 0.\big)$

35.4 Implizite Differentialgleichungen

Allgemeine Form:

$$f(x, u, u') = 0, u(x_0) = u_0. \tag{5}$$

Funktion f sei stetig in $D \subset \mathbb{R}^3$. Problem: Differentialgleichung in (5) liefert eventuell kein eindeutiges Richtungsfeld, d.h. zu festem Punkt (x, u) hat man verschiedene Anstiege u'.



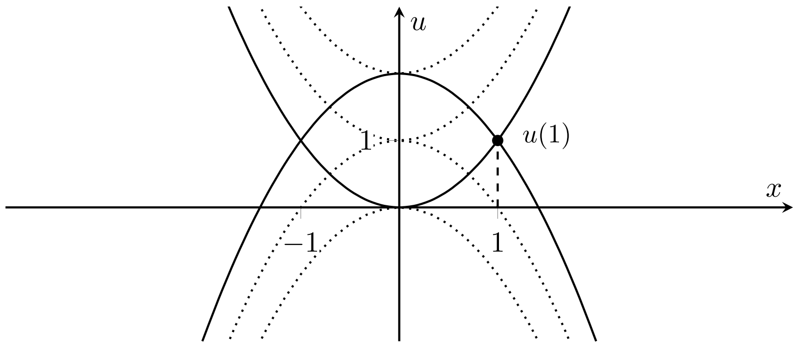
Ausweg: Fixiere "Lösungsweg" durch lokale Auflösung von $f(x, u, p) = 0$ nach p. *Satz über implizite Funktion* liefert:

Lemma 4. *Funktionen f, f_p seien stetig in Umgebung von $(x_0, u_0, p_0) \in D$ und $f(x_0, u_0, p_0) = 0$, $f_p(x_0, u_0, p_0) \neq 0 \implies$ Gleichung $f(x, u, p) = 0$ besitzt auf (kleiner) Umgebung U von (x_0, u_0) eine eindeutige stetige Lösung $p = \tilde{f}(x, u)$, d.h. $f(x, u, \hat{f}(x, u,)) = 0$ auf U, $p_0 = \hat{f}(x_0, u_0)$.*

Folglich ist (5) lokal äquivalent zu expliziten Differentialgleichung $u' = f(x, u)$ (kann mit bisherigen Methoden Behandelt werden).

Erkenntnis: Bei Mehrdeutigkeit in (5) muss man neben Anfangswert $u(x_0) = u_0$ noch einen möglichen Lösungsweg auswählen. Dies kann man i.a. durch Wahl eines der möglichen Werte $u'(x_0)$ tun.

Beispiel. Betrachte $u'^2 - 4x^2 = 0$. Es ergibt sich $u' = 2x$ oder $u' = -2x$ und damit $u(x) = x^2 + c$ oder $u(x) = -x^2 + c$. Anfangswertproblem $u(1) = 1$ liefert $u_1(x) = x^2$, $u_2(x) = 2 - x^2$. Auswahl einer Lösung z.B. mittels $u'(1) = \pm 2$.



Aber: Falls $x_0 = 0$, dann $f(x_0, u_0, p_0) = p_0^2 - 4x_0^2 = 0 \implies p_0 = 0$. Wegen $f_p(x_0, u_0, p_0) = 2p_0 = 0$ für $p_0 = 0 \implies$ *Lemma 4* ist nicht anwendbar. D.h. für $(x_0, p_0) = (0, 0)$ besitzt $p^2 - 4x^2 = 0$ keine eindeutige Lösung $\implies$ Anfangswertproblem $u(0) = u_0$ kann durch Zusatzforderung $u'(0) = 0$ nicht eindeutig gelöst werden.

35.5 Potenzreihenansatz

Explizite Lösungen von Differentialgleichungen sind häufig nicht möglich. Als Näherungslösung werden (abgebrochene) Potenzreihen genutzt. (*Stillschweigende Annahme:* Lösung sei analytisch.)

$$u'(x) = f(x, u(x)), \;\; u(x_0) = u_0.$$

Ansatz: $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \implies a_k = \frac{u^{(k)}(x_0)}{k!}$ (Anfangswert $a_0 = u_0$).

Methoden:

(i) Differentiation der Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
u'(x_0) &= f(x_0, u(x_0)) && \implies \quad a_1 = \ldots \\
u''(x_0) &= f_x(x_0, u(x_0)) + f_u(x_0, u(x_0)) \cdot \overbrace{u'(x_0)}^{=f(x_0,u(x_0))} && \implies \quad a_2 = \ldots \\
u'''(x_0) &= f_{xx} + f_{xu}u' + f_{ux}u' + f_{uu}u'^2 + f_u u'' && \implies \quad a_3 = \ldots \\
& && \quad\vdots
\end{aligned}$$

(ii) Falls f analytisch ist, d.h. $f(x, u) = \sum_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}(x - x_0)^k (u - u_0)^l$. Dann ergibt Differentialgleichung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k,l=0}^{\infty} b_{kl} (x - x_0)^k \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \right)^l .$$

Koeffizientenvergleich liefert Rekursionsformel für a_k.

Beispiel. Sei $u' = x^2 + u^2,\ u(0) = 1$. Nach (i) ist:

$$\begin{aligned} u'\big|_{x=0} &= (x^2+u^2)\big|_{x=0} &&= 1, \\ u''\big|_{x=0} &= (2x + 2u \cdot u')\big|_{x=0} &&= 2, \\ u'''\big|_{x=0} &= (2 + 2u'^2 + 2u \cdot u'')\big|_{x=0} &&= 8, \\ u''''\big|_{x=0} &= (x^2+u^2)\big|_{x=0} &&= 28 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ u(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \ldots$. Nun nach (ii) :

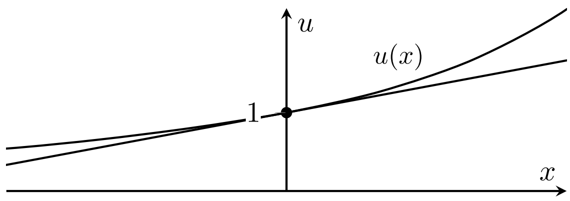
$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = x^2 + \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^2 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k = x^2 + \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{l=0}^{k} a_l a_{k-1}$$

$$\Longrightarrow (k+1)a_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} a_l a_{k-l} \underbrace{+1}_{\text{für } k=2},\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Anfangswert $a_0 = 1$:

$$\begin{aligned} k = 0:&\quad a_1 = a_0^2 \Longrightarrow a_1 = 1 \\ k = 1:&\quad 2a_2 = 2a_0a_1 \Longrightarrow a_2 = 1 \\ k = 2:&\quad 3a_3 = 2a_0a_2 + a_1^2 + 1 \Longrightarrow a_3 = \tfrac{4}{3} \\ k = 3:&\quad 4a_4 = 2a_0a_3 + 2a_1a_2 \Longrightarrow a_4 = \tfrac{7}{6} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow\ u(x) = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \ldots$. Dies liefert lokale Information über Lösung.



36 Existenztheorie und allgemeine Eigenschaften

36.1 Einführung

Motivation: Bewegung eines Massenpunktes im Kraftfeld f.

Gegeben sei Masse m, Kraftfeld $f : \overbrace{\mathbb{R}^3}^{\text{Ort}} \times \overbrace{\mathbb{R}^3}^{\text{Zeit}} \rightarrow \overbrace{\mathbb{R}^3}^{\substack{\text{Kraft-}\\\text{-vektor}}}$, $f(u,t) = (f_1(u,t), f_2(u,t), f_3(u,t))^{\mathrm{T}}$. Gesucht ist Bewegungskurve $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^{\mathrm{T}}$. *Newtonsches Bewegungsgesetz* lautet:

$$\begin{aligned} mu_1''(t) &= f_1(u_1(t), u_2(t), u_3(t), t), \\ &\vdots \\ mu_3''(t) &= f_3(u_1(t), u_2(t), u_3(t), t). \end{aligned}$$

D.h. System von Differentialgleichungen 2. Ordnung. Eindeutige Lösung sollte existieren, falls Ort $u(t_0)$ und Geschwindigkeit $u'(t_0)$ für ein t_0 vorgesehen werden (d.h. 6 skalare Bedingungen).

Problematik:

- Behandlung von Systemen von Differentialgleichungen,
- Behandlung höherer Ableitungen.

Betrachte zunächst Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung. Differentialgleichungen und Systeme höherer Ordnung später.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, d.h. $u(x) = \big(u_1(x), ..., u_n(x)\big)^{\mathrm{T}}$, $u'(x) = \big(u_1'(x), ..., u_n'(x)\big)^{\mathrm{T}}$, $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(u,x) = \big(f_1(u_1, ..., u_n, x), ..., f_n(u_1, ..., u_n, x)\big)^{\mathbb{T}}$. Betrachte Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung (explizite Form)

$$\left.\begin{aligned} u_1'(x) &= f_1(u_1(x), ..., u_n(x), x), \\ &\vdots \\ u_n'(x) &= f_n(u_1(x), ..., u_n(x), x), \end{aligned}\right. \quad \text{für } x \in I, \tag{1a}$$

d.h.: Suche n stetig differenzierbare Funktionen $u_1(x), ..., u_n(x)$, sodass obige Gleichungen erfüllt sind für gegebene Funktionen $f_1, ..., f_n$.

(1a) in Vektorenschreibweise:

$$u'(x) = f(u(x), x) \text{ für } x \in I. \tag{1b}$$

Beachte: x ist kein Vektor! Geometrische Interpretation: (vgl. *35.1*)

Betrachte stetig differenzierbare Kurve $x \mapsto (u(x), x) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (x Kurvenparameter) mit Tangente $(u'(x), 1) = (f(u(x), x), 1)$, d.h. $(f(u, x), 1)$ ist Richtungsfeld in $\mathbb{R}^{n+1}$ liefert etwaigen Tangentenvektor (Richtungsvektor) in Punkt $(u, x) \in D \implies$ Schar von Kurven als Lösung der Differentialgleichung.

I.d.R. sollte durch (u_0, x_0) genau eine Kurve verlaufen. Betrachte somit Anfangswertproblem (AWP)

$$u'(x) = f(u(x), x) \text{ für } x \in I,\ u(x_0) = u_0 \tag{2}$$

wobei $x_0 \in I$, $u_0 = (u_{01}, ..., u_{0n})$ (d.h. für $u_i(x)$) hat man Anfangsbedingung $u_i(x_0) = u_{0i}$). System von Differentialgleichungen heißt *autonom*, falls f nicht explizit von x abhängt, d.h. $u'(x) = f(u(x))$. Bezeichnung:

- $|a|$ ist Euklidische Norm für $a \in \mathbb{R}^n$, d.h. $|u(x)| = \sqrt{u_1^2(x) + ... + u_n^2(x)}$, $|f(u, x)| = ...$,
- $\int_{x_0}^{x} f(u(\xi), \xi)\mathrm{d}\xi = \left(\int_{x_0}^{x} f_1(u(\xi), \xi)\mathrm{d}\xi, ..., \int_{x_0}^{x} f_n(u(\xi), \xi)\mathrm{d}\xi\right)^{\mathrm{T}}$.

36.2 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Betrachte Anfangswertproblem (für Systeme)

$$u'(x) = f(u(x), x) \text{ für } x \in I,\ u(x_0) = u_0, \tag{2}$$

wobei $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ stetig, $(u_0, x_0) \in D$ gegeben. Gesucht ist $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Ziel: Anwendung des *Fixpunktsatzes von Hahn Banach*.

Wiederholung:

- $X = C([x_0, x_1], \mathbb{R}^n)$ ist Banachraum mit Norm $\|u\|_C = \max_{x \in [x_0, x_1]} |u(x)|$ (existent nach *Satz von Weierstraß*),
- Abbildung $T : M \subset X \to X$ heißt *kontraktiv* falls Konstante $k \in [0, 1)$ existiert mit $\|T(u) - T(v)\| \leq k\|u - v\|\ \forall u, v \in M$.

Satz 1 (Fixpunktsatz von Hahn Banach, Kontraktionsprinzip). *Sei X Banachraum, $M \subset X$ abgeschlossen, $\neq \emptyset$, Abbildung $T : M \to X$ kontraktiv und $T(M) \subset M \implies T$ besitzt auf M genau einen Fixpunkt $u \in M$ (d.h. $T(u) = u$).*

Problem: (2) ist kein Fixpunktproblem! Trick: Integriere (2).

Lemma 2. *Sei $u \in C([x_0, x_1], \mathbb{R}^n)$ mit $(u(x), x) \in D\ \forall x \in [x_0, x_1]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$u \in C^1([x_0, x_1], \mathbb{R}^n)$ und u löst Anfangswertproblem (2),*

(ii) *u löst folgende* Integralgleichung *(System):*

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(u(\xi), \xi\right) \mathrm{d}\xi \ \forall x \in [x_0, x_1]. \tag{3}$$

Beachte: (3) ist Fixpunktgleichung $u = T(u)$!

Beweis. Selbststudium. ■

Betrachte Anfangswertproblem $u' = f(u, x),\ u(x_0) = u_0$. Für Anwendung des *Banachschen Fixpunktsatzes* benötigt man gewisse *Lipschitz-Bedingung* von f bzgl. Argument und da man Lösungen lokal sucht, reicht eine *lokale Lipschitz-Bedingung.* Funktion f genügt *lokaler Lipschitz-Bedingung bzgl. u in D* falls für jedes $(\overline{u}, \overline{x}) \in D$ eine Umgebung $U = U(\overline{u}, \overline{x}) \subset D$ und eine Lipschitz-Konstante $L = L(\overline{u}, \overline{x}) \geq 0$ existiert mit

$$|f(u, x) - f(v, x)| \leq L|u - v| \ \forall (u, x) \in U. \tag{$*$}$$

f erfüllt *(globale) Lipschitz-Bedingung bzgl. u in D* falls $(*)$ für $U = D$ gilt. Beachte folgendes:

Beispiel:

(a) $f(u, x) = u$ ist global Lipschitz-stetig bzgl. u, denn $|u-v| \leq 1|u-v| \ \forall (u, x), (v, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. D.h. man kann stets $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ wählen.

(b) $f(u, x) = u^2$ ist nicht global, aber lokal Lipschitz-stetig bzgl. u, denn $|u^2 - v^2| = \overbrace{|u + v|}^{\substack{\leq L \text{ nur auf} \\ \text{beschr. Menge}}} \cdot |u - v|$. D.h. in $(*)$ muss man (beschränkte) Umgebung $U = (u_1, u_2) \times \mathbb{R}$ wählen.

Lemma 3 (Hinreichende Bedingung für Lipschitz-Bedingung). *(vgl. auch* Kapitel 19*) Sei f auf $D = B_\alpha(\tilde{u}) \times B_\beta(\tilde{x})$ stetig differenzierbar in u für alle x mit $\|f_u(u, x)\| \leq L \ \forall (u, x) \in D$ ($\|\cdot\|$ steht für Norm einer Matrix). Dann erfüllt f Lipschitz-Bedingung bzgl. u auf D mit Lipschitz-Konstante L.*

Beweis. Sei $u, v \in B_\alpha(\tilde{u}),\ x \in B_\beta(\tilde{x})$. $\varphi(t) := f(tu + (1-t)v, x)$ ist stetig differenzierbar auf $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} |f(u, x) - f(v, x)| &= |\varphi(1) - \varphi(0)| = \left| \int_0^1 \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^1 f_u(tu - (1-t)v, x) \cdot (u - v)\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^1 |f_u(tu + (1-t)v, x)| \cdot |u - v|\, \mathrm{d}t \leq L|u - v| \cdot 1. \end{aligned}$$

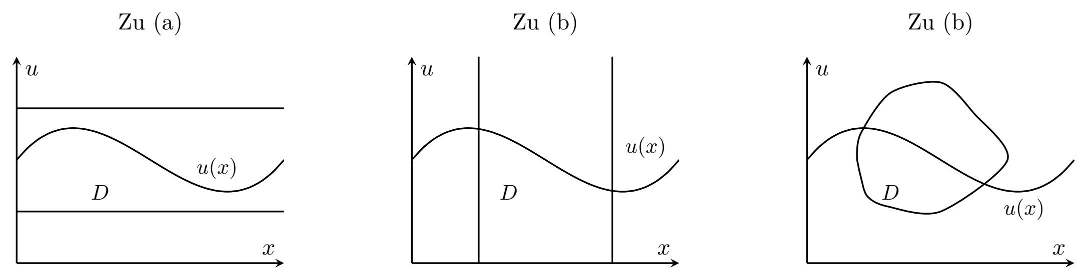
■

Theorem 4 (Picard-Lindelöf). *Seien $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, f genüge lokaler Lipschitz-Bedingung bzgl. u auf D. Dann hat Anfangswertproblem* (2) $u' = f(u,x),\ u(x_0) = u_0,\ (u_0, x_0) \in D$ *eindeutige Lösung $u(x)$, die auf D nicht fortsetzbar ist und nach links und rechts dem Rand von D beliebig nahe kommt. Der Definitionsbereich von u ist ein (evtl. unbeschränktes) offenes Intervall* $(x_{\min}, x_{\max})$.

Erklärungen:

- "nicht fortsetzbar": Es gibt keine Lösung des Anfangswertproblems in D, sodass u echte Einschränkung ist.
- "kommt dem Rand von D beliebig nahe": D.h. wenigstens einer der folgenden Fälle tritt auf:
  (a) $x_{\max} = +\infty$.
  (b) $x_{\max} < \infty$ und $\limsup\limits_{x \uparrow x_{\max}} |u(x)| = \infty$.
  (c) $x_{\max} < \infty$ und $\liminf\limits_{x \uparrow x_{\max}} \rho(u(x), x) = 0$ ($\rho(\overline{u}, \overline{x})$ ist Abstand des Punktes $(\overline{u}, \overline{x})$ vom Rand ∂D).
  Und analoge Fälle bzgl. $x_{\min}$.

Beispiel:



Beweis. (a) Existenz einer eindeutigen Lösung: es $\exists \epsilon > 0, \delta > 0$ mit f ist Lipschitz-stetig in u auf $B_\epsilon(u_0) \times B_\delta(x_0) = D_0$ mit Lipschitz-Konstante L_0 und $\overline{D_0} \subset D$. Sei

$$\max_{(u,x) \in \overline{D_0}} |f(u,x)|,\ \tilde{\delta} := \min\left(\delta, \frac{\epsilon}{t}, \frac{1}{2u_0}\right) \qquad (*)$$

(o.B.d.A. $F > 0$, sonst trivial). Setze für $u \in M := \Big\{v \in C\left([x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta}], \mathbb{R}^n\right) \mid |v(x) - u_0| \leq \epsilon\ \forall x\Big\}$:

$$(Tu)(x) := u_0 + \int_{x_0}^{x} f(u(\xi), \xi) \mathrm{d}\xi$$

$\implies Tu : [x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta}] \to \mathbb{R}^n$ ist stetige Funktion. D.h. $T : M \subset$

$C\left([x_0-\tilde{\delta},x_0+\tilde{\delta}],\mathbb{R}^n\right)\to C\left([x_0-\tilde{\delta},x_0+\tilde{\delta}],\mathbb{R}^n\right).$

$$|(Tu)(x)-u_0|\le\int_{x_0}^{x}|f(u(\xi),\xi)|\mathrm{d}\xi\le F\cdot\tilde{\delta}\overset{(*)}{\le}\epsilon$$

$\Longrightarrow$ $T:M\to M$, offenbar M abgeschlossen in $C\left([x_0-\tilde{\delta},x_0+\tilde{\delta}],\mathbb{R}^n\right)$. Für $u,v\in M$ gilt:

$$\begin{aligned}|(Tu)(x)-(Tv)(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x_0} f(u(\xi),\xi)-f(v(\xi),\xi)\mathrm{d}\xi\right|\\ &\le \int_{x_0}^{x_0}|f(u(\xi),\xi)-f(v(\xi),\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\ &\underset{\textit{Bed.}}{\overset{\textit{Lipsch.}}{\le}} \int_{x_0}^{x_0} L_0\,|u(\xi)-v(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\\ &\le L_0\cdot\tilde{\delta}\cdot\max_{\xi\in[x_0=\tilde{\delta},x_0+\tilde{\delta}]}|u(\xi)-v(\xi)| = L_0\tilde{\delta}\|u-v\|_C\ \forall x\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\|Tu-Tv\|_C=\max_{x\in[x_0-\tilde{\delta},x_0+\tilde{\delta}]}|(Tu)(x)-(Tv)(x)|\overset{(*)}{\le}\frac{1}{2}\|u-v\|_C\overset{\textit{Satz 1}}{\Longrightarrow}$ (3) und somit besitzt auch Anfangswertproblem (2) eindeutige Lösung auf $[x_0-\tilde{\delta},x_0+\tilde{\delta}]$.

(b) Fortsetzung: Grundidee: Falls u Lösung im kompakten Intervall $[x_0,x^+]$ ist $\Longrightarrow$ in $x=x^+$ stets fortsetzbar. Wegen $(\overline{u},\overline{x})=(u(x^+),x^+)\in D$, D offen, kann man (a) auf Anfangswertproblem $u(\overline{x})=\overline{u}$ anwenden $\Longrightarrow$ man erhält maximales offenes Lösungsintervall $(x_{\min},x_{\max})$ mit $x_{\min},x_{\max}\in[-\infty,\infty]$.

Fallunterscheidung für $x_{\max}$ (analog für $x_{\min}$):

- falls $x_{\max}=\infty$ $\Longrightarrow$ nicht fortsetzbar,
- falls $x_{\max}<\infty$, $\limsup_{x\uparrow x_{\max}}|u(x)|=\infty$ $\Longrightarrow$ es gibt keine stetige Fortsetzung von u auf $x=x_{\max}$ $\Longrightarrow$ nicht fortsetzbar,
- sei nun $x_{\max}<\infty$, $|u(x)|\le c\ \forall x\in[x_0,x_{\max})$, zu Zeigen ist (c): $G:=\left\{(u(x),x)\in D\mid x\in[x_0,x_{\max})\right\}$ ist Graph von u. Angenommen (c) ist falsch $\Longrightarrow$ $\overline{G}\subset D$, $\overline{G}$ ist kompakt. Da f stetig ist: $|f|\le\tilde{c}$ auf $\overline{G}\overset{\text{Dgl.}}{\Longrightarrow}|u'(x)|\le\tilde{c}\ \forall x\in[x_0,x_{\max})$ $\Longrightarrow$ u ist gleichmäßig stetig auf $[x_0,x_{\max})$ $\Longrightarrow$ $\overline{u}=\lim_{x\uparrow x_{\max}}u(x)$ existiert und $(\overline{u},x_{\max})\in\overline{G}$. Betrachte Anfangswertproblem für $u(x_{\max})=\overline{u}\overset{(a)}{\Longrightarrow}$ Lösung auf $[x_{\max},x_{\max}+\tilde{\delta}]$ $\Longrightarrow$ Fortsetzung existiert $\Longrightarrow$ $\lightning$ $\Longrightarrow$ maximale Lösung muss (c) erfüllen.

Eindeutigkeit: seien u,v 2 Lösungen des Anfangswertproblems, o.B.d.A. $x^v_{\max}\le x^u_{\max}$. Sei $x_1:=\inf\{x\in[x_0,x^v_{\max})\mid u(x)\neq v(x)\}<x^v_{\max}$. (a) mit Anfangswertproblem $u(x_1)=u_1$ liefert eindeutige Lösung auf $[x_1,x_1+\epsilon)$ $\Longrightarrow$ $\lightning$ $\Longrightarrow$ Eindeutigkeit, analog für $x_{\min}$.

■

Frage: Was ist falls f keiner lokalen Lipschitz-Bedingung bzgl. u genügt?

Beispiel: Betrachte $u' = \sqrt{|u|}$, $u(0) = 0$. Dieser Anfangswertproblem besitzt unendlich viele Lösungen!

Theorem 5 (Existenzsatz von Peano). *Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen $\Longrightarrow$ Anfangswertproblem (2) hat für alle $(u_0, x_0) \in D$ mindestens eine Lösung und jede Lösung lässt sich (links und rechts) bis zum Rand von D fortsetzen.*

Beachte:

- Keine Eindeutigkeit vorhanden! (Schlecht bei Anwendungen.)
- Verwende *Satz von Arzelá-Ascoli* für den Beweis.

Folge von (stetigen) Funktionen $\{v_1, v_2, ...\}$ auf $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *gleichgradig stetig* falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : |v_k(x) - v_k(y)| < \epsilon\ \forall x, y \in M \text{ mit } |x - y| < \delta\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Wiederholung: Falls (4) für eine Funktion v gilt, so ist v gleichmäßig stetig auf M.

Lemma 6 (Satz von Arzelá-Ascoli).
- *Sei $\{v_1, v_2, ...\}$ gleichgradig stetige Folge von Funktionen auf $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.*
- *Sei $|v_k(x)| \leq c\ \forall x \in M, k \in \mathbb{N}$ (man sagt Funktionenfolge $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist* gleichmäßig beschränkt *auf M).*

Dann existiert Teilfolge $\{v_{k_1}, v_{k_2}, ...\}$, die auf M gleichmäßig gegen eine (stetige) Funktion v konvergiert.

Bemerkung: Es gilt sogar die Umkehrung (d.h. *Satz von Arzelá-Ascoli* charakterisiert relativ kompakte Mengen in $C(M)$, vgl. Literatur - z.B. *Wolfgang Walter*).

Beweis. (Von *Theorem 5*) Da D offen ist, $\exists \beta > 0, \delta > 0 : \overline{D_0} \subset D$ mit $D_0 := B_\beta(u_0) \times B_\delta(x_0)$. Setze $\tilde{\delta} := \min\left\{\delta, \frac{\beta}{F}\right\}$ mit $F := \max_{(u,x)\in\overline{D_0}} |f(u, x)|$ (trivial für $F = 0$). Betrachte

$$M := \left\{v \in C\left([x_0, x_0 + \tilde{\delta}], \mathbb{R}^n\right)\ \mid v(x) \in \overline{B_\beta(u_0)}\ \forall x\right\}.$$

Ziel: Zeige Existenz einer Lösung $u \in M$ von

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(u(\xi), \xi)\mathrm{d}\xi. \tag{$*$}$$

Diese ist nach *Lemma 2* Lösung von Anfangswertproblems (2) auf $[x_0, x_0 + \tilde{\delta}]$. Analog erhält man Lösung auf $[x_0 - \tilde{\delta}, x_0]$ und analog zum Beweis von *Theorem 4* zeigt man Fortsetzbarkeit der Lösung bis zum Rand von D. *Zeige* $(*)$: Konstruiere zunächst $\forall \epsilon \in (0, \tilde{\delta})$ "Näherungslösung" v_ϵ von $(*)$ auf $[x_0 - \epsilon, x_0 + \tilde{\delta}]$ mit

$$v_\epsilon(x) = \begin{cases} u_0 & \text{für } x \in [x_0 - \epsilon, x_0], \\ u_0 + \int_{x_0}^{x} f(v_\epsilon(\xi - \epsilon), \xi)\mathrm{d}\xi & \text{für } x \in [x_0, x_0 + \tilde{\delta}]. \end{cases} \tag{$**$}$$

Erläuterung: Zunächst ist v_ϵ auf $[x_0 - \epsilon, x_0]$ definiert $\implies$ 2. Zeile in $(**)$ liefert v_ϵ auf $[x_0, x_0 + \epsilon]$, damit erhält man v_ϵ auf $[x_0 + \epsilon, x_0 + 2\epsilon]$ usw. Mann stellt fest, dass jeweils $|v_\epsilon(x) - u_0| \leq F \cdot \tilde{\delta} \leq \beta \; \forall x \implies$ nach endlich vielen Schritten erhält man stetige Funktion v_ϵ auf $[x_0 - \epsilon, x_0 + \tilde{\delta}]$ mit $(**) \implies v_\epsilon$ ist stetig differenzierbar auf $[x_0, x_0 + \tilde{\delta}]$ $\overset{(**)}{\implies} |v'_\epsilon(x)| \leq F \; \forall x \in [x_0, x_0 + \tilde{\delta}]$ (wegen $f(u, x) \leq F$ auf $\overline{D_0}$)

$$\underset{\textit{-satz}}{\overset{\textit{Schranken-}}{\implies}} |v_\epsilon(x) - v_\epsilon(y)| \leq F|x - y| \; \forall x, y \in [x_0, x_0 + \tilde{\delta}] \; \forall \epsilon \in (0, \tilde{\delta}). \tag{\#}$$

Offenbar gilt nach $(**)$: $|v_\epsilon(x)| \leq |u_0| + F\tilde{\delta} \; \forall x \in [x_0, x_0 + \tilde{\delta}]$, $\forall \epsilon \implies$ Folge $\{v_1, v_{\frac{1}{2}}, v_{\frac{1}{3}}, ...\}$ ist gleichgradig stetig auf $[x_0, x_0 + \tilde{\delta}]$ (nach (#)) und gleichmäßig beschränkt $\underset{\textit{-Ascoli}}{\overset{\textit{Arzelá-}}{\implies}} \exists$ Teilfolge $\{v_\epsilon, v_{\epsilon_2}, ...\}$ mit $v_{\epsilon_n} \longrightarrow u$ gleichmäßig auf $[x_0, x_0 + \tilde{\delta}]$, offenbar ist u stetig. Es ist $|v_{\epsilon_n}(x - \epsilon_n) - u(x)| \leq |v_{\epsilon_n}(x - \epsilon_n) - v_{\epsilon_n}(x)| + |v_{\epsilon_n}(x) - u(x)| \overset{(\#)}{\leq} F\epsilon_n + |v_{\epsilon_n} - u(x)| \; \forall x \in [x_0, x_0 + \tilde{\delta}] \implies$ auch $v_{\epsilon_n}(x - \epsilon_n) \longrightarrow u(x)$ gleichmäßig auf $[x_0, x_0 + \tilde{\delta}]$. Wegen $(**)$ ist $v_{\epsilon_n}(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(v_{\epsilon_n}(\xi - \epsilon_n), \xi) \mathrm{d}\xi \forall x \in [x_0, x_0 + \tilde{\delta}] \overset{n \to \infty}{\implies}$ (*beachte:* f ist gleichmäßig stetig auf $\overline{D_0}$ und v_{ϵ_n} konvergiert gleichmäßig) $u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(u(\xi), \xi) \mathrm{d}\xi \implies u$ ist stetige Lösung von $(*)$ auf $[x_0, x_0 + \tilde{\delta}] \implies$ Behauptung. ■

(Alternative zu diesem Beweis mittels *Schauderschem Fixpunktsatz.*)

36.3 Stetige Abhängigkeit

Sei $u(x)$ Lösung von $u'(x) = f(u(x), x)$ auf I, $u(x_0) = u_0$. (4')

Frage: (wichtig bei Anwendungen!) Verursacht kleine Änderung/Ungenauigkeit von f bzw. u_0 nur kleine Änderung der Lösung?

Beispiel. Sei $u' = (1 + \alpha)u, \; u(0) = 1 + \beta$, α, β kleine Störungen (z.B. von Messwerten). Lösung $u(x) = (1 + \beta)e^{(1+\alpha)x}$. Für x groß erhält man starke Abweichung der gestörten Lösung. Aber falls I beschränkt ist, dann

$$u(x) = e^x \cdot \underbrace{e^{\alpha x}}_{\approx 1} + \underbrace{\beta e^{(1+\alpha)x}}_{\approx 0} \approx e^x.$$

Für $|\alpha|, |\beta|$ klein wird der Fehler der Lösung klein, d.h. stetige Abhängigkeit der Lösung von Daten.

Bemerkung:

- Lösung des Anfangswertproblems nicht eindeutig $\implies$ keine stetige Abhängigkeit von Daten.
- Stetige Abhängigkeit für unbeschränktes I heißt auch *Stabilität.*

Für diesen Abschnitt sei: $I \subset \mathbb{R}$ beschränktes, abgeschlossenes Intervall, $x_0 \in I$, $u(x)$ sei Lösung des Anfangswertproblems (4'),

$$U_\alpha := \left\{(v,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in I, |v - u(x)| \leq \alpha\right\}$$

(abgeschlossene α-Umgebung des Graphen von u).

Lösung u von (4') *hängt stetig von Anfangswert* u_0 *und rechter Seite* f *ab*, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists \gamma = \gamma(\epsilon) > 0$ mit: Falls g stetig auf U_α ist, $|f(w,x) - g(w,x)| < \gamma$ auf U_α, $|u_0 - v_0| < \gamma$, dann existiert jede Lösung v des Anfangswertproblems $v' = g(v,x), v(x_0) = v_0$ auf ganzem I und $|u(x) - v(x)| < \epsilon\ \forall x \in I$.

Theorem 6 (stetige Abhängigkeit).
- *Sei u Lösung von Anfangswertproblem* (4') *auf kompaktem Intervall I,*
- *f sei stetig und genüge Lipschitz-Bedingung bzgl. u auf U_α für ein $\alpha > 0$*

$\Longrightarrow$ (1) *Lösung u hängt stetig von Anfangswert u_0 und rechter Seite f ab.*

(2) *Sei v Lösung von $v' = g(v,x)$, $v(x_0) = v_0$ auf ganzem I mit $(v(x),x) \in U_\alpha$ für ein stetiges g auf U_α, dann:*

$$|u(x) - v(x)| \leq (|u_0 - v_0| + \beta |x - x_0|) e^{L(x - x_0)}\ \forall x \in I, \tag{5}$$

$\beta := \max_{(w,x) \in U_\alpha} |f(w,x) - g(w,x)|$, *$L$ Lipschitz-Konstante von f bzgl. u auf U_α.*

Wichtiges Hilfsmittel:

Lemma 7 (Lemma von Gronwall).
- *Seien $p, q, r : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, q nicht fallend, $r \geq 0$.*
- *Es gelte*

$$p(x) \leq q(x) + \int_{x_0}^{x} r(\xi) p(\xi) \mathrm{d}\xi\ \forall x \in [a,b]. \tag{6}$$

$\Longrightarrow$ $p(x) \leq q(x) e^{R(x)}\ \forall x \in [a,b]$, $R(x) := \int_a^x r(\xi) \mathrm{d}\xi$.

Für Spezialfall $r(x) = c\ (\geq 0)$ hat man offenbar $p(x) \leq q(x) e^{c(x-a)}\ \forall x \in [a,b]$.

Beachte: Für $q(x) = p(a),\ r(x) = c$ besagt *Lemma* $p' \leq cp \implies p(x) \leq p(a) e^{c(x-a)}$ (vgl. lineare Differentialgleichung $p' = cp$).

Beweis. Sei p stetig auf kompaktem Intervall $[a,b] \implies |p(x)| \leq M$ auf $[a,b]$ für ein $M \geq 0 \overset{(6)}{\implies} p(x) \leq q(x) + MR(x)$ (beachte $r \geq 0$). Dies in (6) eingesetzt liefert

$$p(x) \leq q(x) + \underbrace{\int_a^x r(\xi)q(\xi)\mathrm{d}\xi}_{\substack{\leq q(x)R(x) \text{ da } q \\ \text{nicht fallend ist}}} + M\int_a^x r(\xi)R(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{$*$}$$

Offenbar $\int_a^x r(\xi)R(\xi)^k \mathrm{d}\xi = \frac{1}{k+1}\left[R(\xi)^{k+1}\right]_a^x = \frac{1}{k+1}R(x)^{k+1} \overset{(*)}{\implies} p(x) \leq q(x) + q(x) \cdot R(x) + M\frac{R(x)^2}{2!}$. Dies kann man wieder in (6) einsetzen, nach m Schritten kommt man auf folgende Abschätzung:

$$p(x) \leq q(x) \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{R(x)^k}{k!}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{R(x)}} + M \underbrace{\frac{R(x)^n}{n!}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall x \in [a,b]}.$$

Damit folgt Behauptung. ∎

Beweis. (Von *Theorem 6*)

Zu (2): Nach *Lemma 2*: $u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(u(\xi),\xi)\mathrm{d}\xi$, $v(x) = v_0 + \int_{x_0}^x g(v(\xi),\xi)\mathrm{d}\xi$

$$\begin{aligned} |u(x) - v(x)| &\leq |u_0 - v_0| + \int_{x_0}^x |f(u(\xi),\xi) - g(v(\xi),\xi)|\mathrm{d}\xi \\ &\leq |u_0 - v_0| + \int_{x_0}^x |f(u(\xi),\xi) - f(v(\xi),\xi)|\mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^x |f(v(\xi),\xi) - g(v(\xi),\xi)|\mathrm{d}\xi \\ &\leq |u_0 - v_0| + L\int_{x_0}^x |u(\xi) - v(\xi)|\mathrm{d}\xi + \beta|x - x_0|. \end{aligned}$$

Lemma 7 mit $p(x) = |u(x) - v(x)|$, $q(x) = |u_0 - v_0| + \beta|x - x_0|$, $r(x) = L$ liefert *(5)* (zunächst für $x \geq x_0$, aber geht auch für $x \leq x_0$ wegen speziellem q)

-----------BILD------------

Zu (1): Wähle $\epsilon \in (0,\alpha)$ und v sei Lösung von

$$v' = g(v,x),\ v(x_0) = v_0 \tag{$*$}$$

mit $|u_0 - v_0| < \gamma$, $|f(w,x) - g(w,x)| < \gamma$ auf U_α, g stetig auf U_α für γ klein $\overset{\text{Theorem 5}}{\implies}$ Lösung v von $(*)$ existiert und kann bis zum Rand von U_α fortgesetzt werden. Solange v in U verläuft gilt (5) $\underset{\text{klein}}{\overset{\gamma \text{ genügend}}{\implies}}$ $\big(v(\tilde{x}),\tilde{x}\big) \in \partial U_\alpha$ für $\tilde{x} \in \operatorname{int} I$ nicht möglich $\implies$ v existiert auf ganzem I und ist in U_α $\underset{(5)}{\overset{\gamma \text{ klein}}{\implies}}$ $|u(x) - v(x)| <$

$\epsilon \ \forall x \in I \implies$ stetige Abhängigkeit für $0 < \epsilon < \alpha$. Für $\epsilon \geq \alpha$ wähle $\gamma(\epsilon) := \gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

■

36.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Betrachte Differentialgleichung n-ter Ordnung (explizite Form)

$$u^{(n)}(x) = f(u(x), u'(x), ..., u^{(n-1)}(x), x) \text{ für } x \in I, \tag{7}$$

$I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ gegeben. Gesucht it (skalare) Funktion $u : I \to \mathbb{R}$, die n-mal stetig differenzierbar ist und (7) erfüllt. Betrachte folgende spezielle Systeme von n Differentialgleichungen 1. Ordnung für gesuchte Funktion $v(x) = \big(v_1(x), ..., v_n(x)\big)$:

$$\left.\begin{aligned} v_1'(x) &= v_2(x), \\ v_2'(x) &= v_3(x), \\ &\vdots \\ v_{n-1}'(x) &= v_n(x), \\ v_n'(x) &= f(v_1, v_2, ..., v_n, x), \end{aligned}\right. \qquad \text{für } x \in I. \tag{8}$$

Falls v Lösung von (8) ist $\implies v_1' = v_2,\ v_1'' = v_3, ..., v_1^{(n-1)} = v_n, v_1^{(n)} = f(v_1, v_1', ..., v_1^{(n-1)}, x)$, d.h. v_1 ist Lösung von (7). Sei u Losung von (7), setze $v_1 := u, v_2 := u', ..., v_n := u^{(n-1)} \implies v(x) = \big(v_1(x), ..., v_n(x)\big)$ ist Lösung von (8).

Satz 8. *Differentialgleichung* (7) *und System* (8) *sind äquivalent, d.h. falls u Lösung von* (7) *oder $v = (v_1, ..., v_n)$ Lösung von* (8) *ist, dann $v_1 = u, v_2 = u', ..., v_n = u^{(n-1)}$.*

Frage: Wie sehen Anfangswerte für Differentialgleichungen höherer Ordnung aus? Anfangswerte für System (8) wären $v_1(x_0) = u_{01}, ..., v_n(x_0) = u_{0n}$. Damit ergibt sich Anfangswertproblem für (7):

$$u^{(n)}(x) = f(u^{(n-1)}(x), ..., u'(x), u(x), x) \ \forall x \in I, \tag{9}$$

$u(x_0) = u_{01}, u'(x_0) = u_{02}, ..., u^{(n-1)}(x_0) = u_{0n}$ mit $x_0 \in I, u_0 = (u_{01}, ..., u_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ gegeben. *Strategie:* Wende *Theorem 4,5* auf System (8) an $\implies$ Existenzaussage für Anfangswertproblem (9).

Theorem 9. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Gebiet. Dann:*

(1) *Anfangswertproblem* (9) *hat für jedes $(u_0, x_0) \in D$ wenigstens eine Lösung und jede Lösung lässt sich bis zum Rand von D fortsetzen.*
(2) *Falls $f(w, x)$ zusätzlich lokale Lipschitz-Bedingung bzgl. w in D genügt, dann sind Lösungen in* (1) *eindeutig.*

Bemerkung:

(1) *Theorem 6* über stetige Abhängigkeit kann sinngemäß übertragen werden. Beachte, dass mit Lösung u auch Ableitungen $u', ..., u^{(n-1)}$ stetig von Anfangswert w_0 und rechter Seite abhängen.
(2) Bei Fortsetzung bis zum Rand kann $u^{(k)}$ für $0 \leq k \leq n-1$ restriktiv sein. d.h. $u^{(k)}$ "stößt an den Rand von D".

36.5 Qualitative Theorie: Einführung

Ziel: Bestimme Eigenschaften von Lösungen ohne explizite Bestimmung der Lösung. Betrachte System

$$u'(t) = f(u(t), t). \tag{10}$$

Häufig benutzt man für Zeit t statt x als Variable (gelegentlich schreibt man dann $\dot{u}$ statt u'). Dgl. (10) nennt man auch *dynamisches System*. System heißt *autonom*, falls f nicht explizit von t abhängt:

$$u'(t) = f(u(t)). \tag{11}$$

Lösung u von (10) beschreibt Kurve $t \to u(t)$, die sogenannte *Trajektorie*, im $\mathbb{R}^n$, dem sogenannten *Phasenraum*. Menge aller Trajektorien im Phasenraum heißt *Phasenportrait*. (Vgl. 36.1: dort sind Lösungen Kurven $t \to (u(t), t)$ im $\mathbb{R}^n$.) Eine *stationäre Lösung* (oder *Gleichgewichtslösung*) ist eine zeitunabhängige Lösung, d.h. für ein $\tilde{u} \in \mathbb{R}^n$ ist $u(t) = \tilde{u}\ \forall t$. Für autonome Systeme gilt offenbar:

Satz 10. *Stationäre Lösungen von* (11) *sind gerade Lösungen von* $f(u) = 0$.

Phasenportraits sind sehr anschaulich für $n = 2$, autonome Systeme. Betrachte nun

$$u'(t) = f(u(t), v(t)),\ v'(t) = g(u(t), v(t). \tag{12}$$

Frage: Wie erhält man Phasenportrait? Stetig differenzierbare Funktion $F(u, v)$ auf $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Stammfunktion* von (12) falls

$$F_u = -g,\ F_v = f. \tag{13}$$

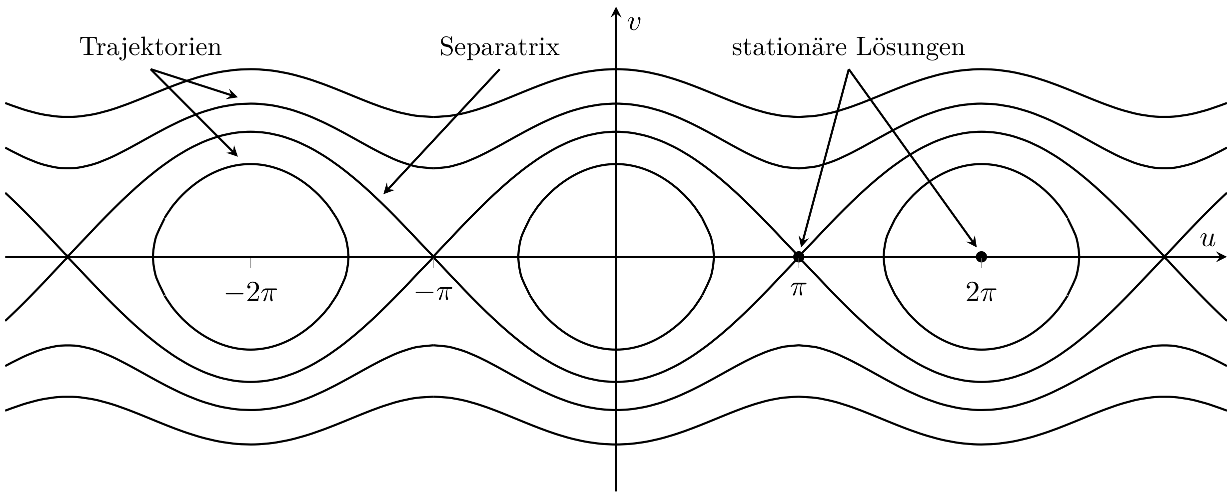
Für Lösung $u(t),\ v(t)$ von (12) gilt dann: $\frac{d}{dt}F(u(t), v(t)) = F_u u' + F_v v' = -gf + fg = 0$. Funktion $t \to F(u(t), v(t))$ ist konstant, d.h. $F(u, v)$ ist konstant entlang Trajektorie $\implies$ Niveaulinien von F liefern Phasenportrait. *Hinweis:* Existenz und Berechnung vgl. *Kapitel 33* - notwendige Integrabilitätsbedingung:

$$f_u = -g_v \text{ auf } D. \tag{14}$$

Beispiel (Pendel, nichtlinear) Sei $u(t)$ Auslenkungswinkel eines Pendels zur Zeit t, $a := \frac{g}{l}$ (g steht für Gravitationsbeschleunigung der Erde, l für Stabslänge) $\implies$ Physik liefert Differentialgleichung $u''(t) + a \sin u(t) = 0$. Mit $v(t) := u'(t)$:

$$\begin{aligned} u'(t) &= v(t) \\ v'(t) &= -a \sin u(t) \end{aligned} \tag{16}$$

ist autonomes dynamisches System. Stationäre Lösungen: $\tilde{u} = 0, \tilde{v} = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Stammfunktion: offenbar $f(u, v) = v$, $g(u, v) = -a \sin u \implies -g_v = 0 = f_u$, d.h. Integrabilitätsbedingung ist erfüllt. $F(u, v) = -a \cos u + \frac{1}{2} v^2$ ist Stammfunktion von (16). Phasenportrait: Betrachte Niveaumengen von $\frac{1}{2} v^2 - a \cos u = c$ für Konstante $c \in \mathbb{R}$ $(c \geq -a)$:



Trajektorien repräsentieren die periodische Lösungen, bei der Separatrix gibt es anschaulich kein “Hin- und Herpendeln”. Für die Richtung der Kurven gilt folgende Faustregel: “Wenn ich bei einer Kurve in eine Richtung gehe, muss ich bei der Nachbarkurve in derselben Richtung gehen.” Bemerkung: Untersuchung mittels Phasenportrait ist oftmals viel besser als jede Formelmäßige Lösung.

In der Praxis reduziert man oft durch lineare Approximation nichtlineare Probleme auf lineare, für die es einen allgemeinen Lösungsweg gibt. Z.B. betrachtet man in der Nahe von 0 statt (16): $u' = v$, $v' = -au$.

37 Lineare Differentialgleichungen

37.1 Allgemeine lineare Systeme

Betrachte spezielles System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= a_{11}(t)u_1(t) + ... + a_{1n}(t)u_n(t) + b_1(t), \\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad t \in I. \\ u_n'(t) &= a_{n1}(t)u_1(t) + ... + a_{nn}(t)u_n(t) + b_n(t), \end{aligned} \tag{1}$$

Gegeben sind $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $a_{ij}(t),\ b_i(t)$ stetige Funktionen auf I. Gesucht sind $u_1(t), ..., u_n(t)$ stetig differenzierbar auf I. (1) heißt *lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.* Verwende kompakte Schreibweise:

$$u(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix},\ b(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},\ A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Damit ist (1) äquivalent zu:

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t). \tag{1'}$$

Betrachte Anfangswertproblem

$$u'(t) = A(t)u(t) + b(t),\ u(t_0) = u_0 \tag{2}$$

für ein $t_0 \in I,\ u_0 \in \mathbb{R}^n$. Bemerkung: Euklidische Norm für $(n \times n)$-Matrix $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist

$$|C| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^2}$$

$(\implies |Cx| \leq |C||x|\ \forall x \in \mathbb{R}^n)$.

Theorem 1 (Existenz für lineare Systeme). *Seien $A(t),\ b(t)$ stetig im Intervall $I \subset \mathbb{R}$*

$\implies$ (i) *Anfangswertproblem (2) hat für alle $t_0 \in I$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $u(t)$ auf ganzem I. Die Lösung hängt auf jedem abgeschlossenem Intervall $I_0 \subset I$ stetig vom Anfangswert und rechter Seite ab,*

(ii) *Falls $I_0 \subset I$ beschränktes Intervall ist und $|A(t)| \leq \alpha$, $|b(t)| \leq \beta\ \forall t \in I_0$, dann:*

$$|u(t)| \leq (|u_0| + \beta|t - t_0|)\, e^{\alpha(t-t_0)}\ \forall t \in I_0.$$

Beweis. $f(u,t) := A(t)u + b(t)$ ist stetig auf $D = \mathbb{R}^n \times I$ und genügt lokaler Lipschitz-Bedingung bzgl. u in D (Selbststudium) $\overset{\text{Theorem 36.4}}{\implies}$ $\exists$ eindeutige Lösung $u(t)$ von Anfangswertproblem (2), ist bis zum Rand von D fortsetzbar. Angenommen u existiert auf beschränktem, abgeschlossenem Intervall $I_0 \subset I$ (evtl. $I_0 \neq I$)

$\overset{A,\, b \text{ sind}}{\underset{\text{stetig}}{\Longrightarrow}} \exists \alpha, \beta > 0 : |A(t)| \leq \alpha,\ \ |b(t)| \leq \beta\ \forall t \in I_0$. Wegen $u(t) = u_0\tau + \int_{t_0}^t A(\tau)u(\tau) + b(\tau)\mathrm{d}\tau$ (vgl. 36.3) folgt

$$|u(z)| \leq |u_0| + \int_{t_0}^t |\underbrace{A(\tau)u(\tau) + b(\tau)}_{\leq |A(\tau)||u(\tau)| + |b(\tau)|}|\mathrm{d}\tau \leq |u_0| + \beta|t - t_0| + \alpha \int_{t_0}^t |u(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

$\overset{\textit{Lemma von}}{\underset{\textit{Gronvall}}{\Longrightarrow}} |u(t)| \leq (|u_0| + \beta|t - t_0|)e^{\alpha(t-t_0)}\ \forall t \in I_0 \implies |u(t)|$ kann nicht auf beschränktem Intervall $\tilde{I} \subset I$ gegen ∞ gehen $\implies u$ existiert auf ganzem I. Stetige Abhängigkeit folgt aus *Theorem 36.6.* ∎

Lineare System (1) heißt *homogen*, falls $b(t) = 0\ \forall t$, d.h.

$$u'(t) = A(t)u(t), \tag{3}$$

sonst heißt (1) *inhomogen.*

Satz 2. *Sei $A(t)$ stetig im Intervall I, seien $u_1, ..., u_k$ Lösungen von (3). Dann:*

(i) *Falls $u(\tilde{t}) = 0$ für ein $\tilde{t} \in I \implies u \equiv 0$ auf I.*
(ii) (Superpositionsprinzip) *Linearkombination $v = c_1u_1 + ... + c_ku_k$ ist wieder eine Lösung von* (3) *$\forall c_j \in \mathbb{R}$.*
(iii) *$u_1, ..., u_k$ sind linear unabhängig (in einem Funktionenraum) $\implies u_1(t), ..., u_k(t)$ sind linear unabhängig in $\mathbb{R}^n\ \forall t \in I$.*
(iv) *$u_1(\tilde{t}), ..., u_k(\tilde{t})$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$ für ein $\tilde{t} \in I \implies u_1, ..., u_k$ sind linear unabhängig (in einem Funktionenraum).*
(v) *Alle Lösungen von* (3) *bilden n-dimensionalen Vektorraum (als Funktionen).*

Beweisskizze. (i) folgt aus eindeutiger Lösbarkeit. (ii) folgt aus Linearität der Gleichung. Für (iii), (iv) argumentiere indirekt und benutze (i), (ii). Zu (v): Seien $u_j(t)$ Lösungen von (3) mit $u(t_0) = e_j$ für ein $t_0 \in I$, $j = 1, ..., n$ (e_j Basisvektor) $\overset{(iv)}{\Longrightarrow}$ n linear unabhängige Lösungen. Nach (iii) gibt es höchstens n linear unabhängige Lösungen. ∎

System von n linear unabhängigen Lösungen $u_1, ..., u_n$ der homogenen Gleichungen (3) nennt man *Fundamentalsystem* (FS) und schreibt

$$U(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) & \cdots & u_n(t) \end{pmatrix}$$

($n \times n$-Matrix). Folglich ist $U'(t) = A(t)U(t) \ \forall t \in I$.

Bemerkung:

(1) U ist Fundamentalsystem $\overset{\textit{Satz 2,(iii)}}{\Longrightarrow} U(t)$ ist regulär $\forall t \in I$.
(2) Test auf Fundamentalsystem: Spalten von U sind Lösungen von (3), $U(\tilde{t})$ regulär für ein $\tilde{t} \in I \overset{\textit{Satz 2, (iv)}}{\Longrightarrow} U$ ist Fundamentalsystem.
(3) Bestimmung von Fundamentalsystemen: Bestimme Lösungen u_j von (3) mit Anfangswerten $u_j = u_0^j$, $j = 1, ..., n$, wobei $u_0^1, ..., u_0^n$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$ sind $\Longrightarrow \overset{\textit{Satz 2, (iv)}}{\Longrightarrow} u_j$ bilden Fundamentalsystem (folglich ist das Fundamentalsystem nicht eindeutig bestimmt).

Allgemeine Lösung:

(a) Jede Lösung u der homogenen Gleichung (3) lässt sich eindeutig darstellen durch

$$u(t) = U(t) \cdot c = c_1 u_1(t) + ... + c_n u_n(t) \ \forall t \in I, \tag{4}$$

wobei U gegebenes Fundamentalsystem ist und $c \in \mathbb{R}^n$. Lösung mit Anfangswert $u(t_0) = u_0$: $u(t) = U(t)U^{-1}(t_0) \cdot u_0$ (d.h. $c = U^{-1}(t_0)u_0$).
(b) Sei $u_{\text{inh.}}$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung (1). Dann erhält man alle Lösungen von (1) durch $u(t) = u_{\text{inh.}} + u_{\text{hom.}}$, wobei $u_{\text{hom.}}$ die Lösungen von (3) durchläuft (denn $u - u_{\text{inh.}}$ ist stets Lösung von (3)).

Frage: Wie gewinnt man spezielle Lösung $u_{\text{inh.}}$?

Methode der Variation der Konstanten:

Sei $U(t)$ ein Fundamentalsystem von (3). Dann gibt (4) alle Lösungen von (3), wobei $c \in \mathbb{R}^n$ Konstante ist. *Ansatz:* Suche Funktion $c(t)$, sodass $u(t) = U(t)c(t)$ Lösung der inhomogenen Gleichung $u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$ ist $\Longrightarrow u'(t) \overset{\text{Ansatz}}{=} U'(t)c(t) + U(t)c'(t) = A(t)U(t)c(t) + U(t)c'(t) = A(t)u(t) + U(t)c'(t) \overset{\text{Dgl.}}{=} A(t)u(t) + b(t) \Longrightarrow U(t)c'(t) = b(t) \Longrightarrow c'(t) = U(t)^{-1}b(t)$ (beachte: $U(t)^{-1}$ existiert und ist stetig in t). Wähle $c(t_0) = 0$ (da wir nur eine Lösung brauchen) $\Longrightarrow c(t) = \int_{t_0}^t U(\tau)^{-1}b(\tau)\mathrm{d}\tau$

$$\Longrightarrow u(t) = U(t) \cdot \int_{t_0}^t U(\tau)^{-1}b(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

ist eine spezielle Lösung von $u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$.

Satz 3. *Seien $A(t)$, $b(t)$ stetig in I und $U(t)$ Fundamentalsystem von $u'(t) = A(t)u(t)$ in I $\implies$ Anfangswertproblem $u'(t) = A(t)u(t) + b(t)$ in I, $u(t_0) = u_0$, $t_0 \in I$ hat eindeutige Lösung:*

$$u(t) = U(t)U(t_0)^{-1}u_0 + U(t) \cdot \int_{t_0}^{t} U(\tau)^{-1}b(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

Beweis. Benutze allgemeine Lösung von (1), (3) und spezielle Lösung (5). ■

Beispiel. Sei $u'(t) = -\frac{1}{2t}u(t) + \frac{1}{2t^2}v(t) + t$, $v'(t) = \frac{1}{2}u(t) + \frac{1}{2t}v(t) + t^2$ auf $I = (0, \infty)$, Anfangswert $u(1) = 0$, $v(1) = 2$.

(a) Löse zunächst homogenes System $u' = -\frac{u}{2t} + \frac{v}{2t^2}$, $v' = \frac{u}{2} + \frac{v}{2t}$. Beachte: es gibt keine allgemeine Strategie! Versuche $u' = 0 \implies u = \frac{v}{t} \implies v' = \frac{v}{t} \overset{\text{spezielle}}{\underset{\text{Lösung}}{\implies}} v_1 = t \implies u_1(t) = 1$. Oder: $v' = 0 \implies v = -ut \implies u' = -\frac{u}{t} \overset{\text{spezielle}}{\underset{\text{Lösung}}{\implies}} u_2 = \frac{1}{t} \implies v_2(t) = -1$ ("man spielt mit schlechteren Karten"). Dann haben wir 2 spezielle Lösungen der homogenen Gleichung.

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist dies Fundamentalsystem? $\det U(t) = -2 \neq 0$ $\forall t \in I \implies U(t)$ ist Fundamentalsystem.

(b) Bestimme spezielle Lösung des inhomogenen Systems: Z.B. mit (5), $b(t) = (t, t^2)^{\mathrm{T}}$. Lineare Algebra liefert:

$$U(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \\ \frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} u_{\text{inh.}} \\ v_{\text{inh.}} \end{pmatrix} = U(t)\int_1^t U(\tau)^{-1}b(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix} \cdot \int_1^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2t} \\ \frac{t}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \tau^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{t^3}{2} - \frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Lösung des Anfangswertproblems nach *Satz 3*: $u_0 = (0, 2)^{\mathrm{T}}$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = U(t)U(1)^{-1}u_0 + \begin{pmatrix} u_{\text{inh.}} \\ v_{\text{inh.}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{\text{inh.}} \\ v_{\text{inh.}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{t} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \\ 1 + t + \frac{t^3}{2} - \frac{t}{2} \end{pmatrix} \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Feststellung: Bestimmung eines Fundamentalsystems für $u'(t) = A(t)\cdot u(t)$ ist i.a. schwierig. Aber falls $A(t)$ unabhängig von t ist, dann allgemein möglich!

37.2 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Betrachte zunächst homogenes System

$$u'(t) = A(t)u(t), \tag{6}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ unabhängig von t ist. Existenz: (6) mit Anfangswert $u(t_0) = u_0$ hat eindeutige Lösung auf ganzem $\mathbb{R}$ $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ $\forall u_0 \in \mathbb{R}^n$. Ziel: Bestimme Fundamentalsystem von (6). Motivation: Sei λ Eigenwert von A zum Eigenvektor a, d.h. $Aa = \lambda a$. Setze $u(t) := e^{\lambda t}a \implies u'(t) = \lambda e^{\lambda t}a = e^{\lambda t}Aa = A(e^{\lambda t}a) = Au(t)$. D.h. u ist Lösung von (6) mit $u(0) = a$. *Hinweis:* Eventuell sind Eigenwert λ und Eigenvektor a komplex $\implies$ Lösung ist Komplex. Man kann damit rechnen wie bisher. Wiederholung: Für reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

- λ ist Eigenwert von A zu Eigenvektor $a \implies \overline{\lambda}$ ist Eigenwert von A zum Eigenvektor $\overline{a}$.
- Es gibt n Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (gerechnet mit algebraischer Vielfachheit gemäß $\det(A - \lambda\mathrm{id}) = 0$, geometrische Vielfachheit $\lambda_k \leq$ algebraische Vielfachheit von λ_k).

Bestimmung eines (reellen) Fundamentalsystems für (6):

Fall (1): $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von A mit Eigenvektor $a \in \mathbb{R}^n$

$$\overset{\text{Motiva-}}{\underset{\text{-tion}}{\implies}} u(t) = e^{\lambda t}a \tag{7}$$

ist Lösung von (6).

Fall (2): $\lambda = \beta + i\gamma \in \mathbb{C}$, $\gamma \neq 0$ ist Eigenwert zu Eigenvektor $a = b + ci \in \mathbb{C}^n$ ($\implies b, c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$). Analog zu (7) erhält man komplexe Lösungen von (6) $v_1(t) := e^{\lambda t}a$ und $v_2(t) := e^{\overline{\lambda}t}\overline{a} = \overline{v_1(t)}$. *Superpositionsprinzip:* Linearkombinationen von v_1, v_2 sind Lösungen von (6)

$$\implies \begin{aligned} u_1(t) :=& \ \tfrac{1}{2}\big(v_1(t) + v_2(t)\big) = \Re v_1(t), \\ u_2(t) :=& \ \tfrac{1}{2i}\big(v_1(t) + v_2(t)\big) = \Im v_1(t) \end{aligned}$$

sind sogar reelle Lösungen von (6). Offenbar:

$$\begin{aligned} v_1(t) =& e^{(\beta+i\gamma)t}(b + ci) = e^{\beta t}e^{i\gamma t}(b + ci) = e^{\beta t}(\cos(\gamma t) + i\sin(\gamma t))(b + ci) \\ =& e^{\beta t}(b\cos(\gamma t) - c\sin(\gamma t)) + ie^{\beta t}(b\sin(\gamma t) + c\cos(\gamma t)) \end{aligned}$$

$$\implies \begin{aligned} u_1(t) =& \ e^{\beta t}(b\cos\gamma t - c\sin\gamma t), \\ u_2(t) =& \ e^{\beta t}(b\sin\gamma t + c\cos\gamma t) \end{aligned} \tag{8}$$

sind zwei linear unabhängige Lösungen von (6) zu Eigenwerten $\lambda, \overline{\lambda}$. *Bemerkung:* Falls n linear unabhängige Eigenvektoren existieren $\Longrightarrow$ (7), (8) liefern bereits Fundamentalsystem.

Fall (3): Allgemeiner Fall. Es existiert reguläre (i.a. komplexe) Matrix C, sodass $B := C^{-1}AC$ die *Jordansche Normalform* von A ist, d.h.

$$B = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_n \end{pmatrix} \text{ mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$\lambda_1, ..., \lambda_k$ sind Eigenwerte von A ($B \in \mathbb{C}^{n\times n}$). Jordankästen J_i ist $(r_i \times r_i)$-Matrix, $r_1 + ... + r_k = n$. Setze $V(t) := C^{-1}U(t)$, wobei U Fundamentalsystem von (6) sei

$$\Longrightarrow V'(t) = C^{-1}U'(t) = C^{-1}AU(t) = C^{-1}ACV(t) = BV(t), \tag{9}$$

d.h. U ist Fundamentalsystem von (6) g.d.w. V Fundamentalsystem von (9) ist.

Betrachte zunächst Fundamentalsystem für

$$v'(t) = Bv(t). \tag{9'}$$

(9') zerfällt in k unabhängige Teilsysteme.

$$w'(t) = Jw(t) \iff \begin{cases} w_1' = & \lambda w_1 + w_2, \\ \vdots & \\ w_{r-1}' = & \lambda w_{r-1} + w_r, \\ w_r' = & \lambda w_r. \end{cases} \tag{10}$$

kann schrittweise gelöst werden (mit letzter Zeile beginnend, jeweils (inhomogene) lineare Differentialgleichung). Fundamentalsystem von (10):

$$W(t) = \begin{pmatrix} w^1(t) & \cdots & w^r(t) \end{pmatrix}, \ w^i(t) = (w_1^i(t), ..., w_r^i(t))^{\mathrm{T}}.$$

Anfangswert $w(0) = \mathrm{id}$ liefert Fundamentalsystem. Berechne $w^1 = (w_1^1, ..., w_r^1)^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{aligned} w_r^1(0) = 0 &\overset{(10)}{\Longrightarrow} w_r^1(t) = 0 \ \forall t, \\ w_{r-1}^1(0) = 0 &\overset{(10)}{\Longrightarrow} w_{r-1}^1(t) = 0 \ \forall t, \\ &\vdots \\ w_2^1(0) = 0 &\Longrightarrow w_2^1(t) = 0 \ \forall t, \\ w_1^1(0) = 1 &\Longrightarrow w_1^1(t) = e^{\lambda t} \ \forall t. \end{aligned}$$

Berechne $w^2 = (w_1^2, ..., w_r^2)$:

$$\begin{aligned} w_r^2(0) = 0 &\Longrightarrow w_r^2(t) = 0 \ \forall t, \\ &\vdots \\ w_3^2(0) = 0 &\Longrightarrow w_3^2(t) = 0 \ \forall t, \\ w_2^2(0) = 1 &\Longrightarrow w_2^2(t) = e^{\lambda t} \ \forall t. \end{aligned}$$

$w_1^2(0) \underset{w'=g(t)w+f(t)}{\overset{w'=\lambda w+e^{\lambda t}}{\Longrightarrow}} w_1^2(t) = (w_0 + \int_0^t f(\tau)e^{-G(\tau)}\mathrm{d}\tau)e^{G(t)} = \int_0^t e^{\lambda\tau}e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau e^{\lambda t} = te^{\lambda t} \ \forall t.$
Analog: $w_3^3(t) = e^{\lambda t},\ w_2^3(t) = te^{\lambda t},\ w_1^3(t) = \int_0^t \tau e^{\lambda\tau}e^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau \cdot e^{\lambda t} = \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t}$. Mit Anfangswert $w(0) = \mathrm{id}$ erhält man Fundamentalsystem W von (10):

$$W(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}e^{\lambda t} \\ & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{r-3}}{(r-3)!}e^{\lambda t} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \text{\Large 0} & & & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$\Longrightarrow$ Fundamentalsystem für (9') hat die Form

$$V(t) = \begin{pmatrix} W_1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & W_k \end{pmatrix}$$

mit W_j gemäß (11), wobei W_j den Jordankästen J_j in 3 entspricht $\Longrightarrow$ Fundamentalsystem von (6) hat die Form

$$U(t) = cV(t), \tag{12}$$

d.h. die Spalten $u(t)$ von $U(t)$ haben die Gestalt

$$u(t) = \begin{pmatrix} p_1(t)e^{\lambda_i t} \\ \vdots \\ p_n(t)e^{\lambda_i t} \end{pmatrix} = p(t)e^{\lambda_i t}$$

mit i.a. komplexen Polynomen $p_1, ..., p_n$ von Grad $p_j \leq r_{i-1}$. Reelles Fundamentalsystem von (6): Ersetze Spalten $u^1, ..., u^l$ zu komplexen λ_i in (12) durch $\Re u^j$, $\Im u^j$, $j = 1, ..., l$ und streiche alle Spalten mit $\overline{\lambda}_i \implies$ allgemeine Lösung von (6) hat die Form:

$$u(t) = \sum_{\substack{\text{reelle} \\ \lambda_j}} p^j(t) \cdot e^{\lambda_j t} + \sum_{\substack{\text{komplexe} \\ \lambda_j = \beta_j + i\gamma_j \\ (\text{entw. } \lambda_j \text{ oder } \overline{\lambda}_j)}} \left(p^j(t) \cos \gamma_j t + \tilde{p}^j(t) \sin \gamma_j t\right) \cdot e^{\beta_j t} \tag{13}$$

mit reellen Polynomen $p^j, \tilde{p}^j$ von Grad $p^j \leq$ (agebraische Vielfachheit von λ_j)-1 ($\leq$ größtes r_j zu λ^j).

Praktische Lösung von (6):

Verwende (13) als Ansatz. D.h. setze in Differentialgleichung (6) ein $\implies$ erhalte allgemeine Lösung $u(t)$ von (6) mit n skalaren Parametern:

(a) Setze die Anfangswerte in Anfangswertproblem ein, bestimme Parameter, erhalte Lösung des Anfangswertproblems.
(b) Fundamentalsystem: Wähle geeignete Parameter in allgemeiner Lösung zur Bestimmung von n linear unabhängigen Lösungen (z.B. Vorgabe von $u(0) = \text{id}$).

Beispiel 1. Bestimme Fundamentalsystem für $x' = y$, $y' = z$, $z' = 4x - 4y + z$. D.h. $u' = Au$ mit $u = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte von A:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + 4) = 0$$

$\implies \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$. Zugehörige Eigenvektoren: $a^1 = (1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $a^2 = (1, 2i, -4)^{\mathrm{T}}$, $a^3 = (1, -2i, -4)^{\mathrm{T}}$, d.h. drei verschiedene Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren (linear unabhängig) $\implies u'(t) = e^{\lambda_i t} a_i$ liefert drei linear unabhängige

Lösungen des Systems. Fundamentalsystem:

$$U(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{2it} & e^{-2it} \\ e^t & 2ie^{2it} & -2ie^{2it} \\ e^t & -4e^{2it} & -4e^{-2it} \end{pmatrix}.$$

Reelles Fundamentalsystem: Ersetze $u^2(t), u^3(t)$ durch $\Re u^2(t), \Im u^2(t)$:

$$u^2(t) = \begin{pmatrix} e^{2it} \\ 2ie^{2it} \\ -4e^{2it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ 2i(\cos 2t + i \sin 2t) \\ -4(\cos 2t + i \sin 2t) \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich folgendes reelles Fundamentalsystem:

$$\tilde{U}(t) = \begin{pmatrix} e^t & \cos 2t & \sin 2t \\ e^t & -2\sin 2t & 2\cos 2t \\ e^t & -4\cos 2t & -4\sin 2t \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2. Bestimme allgemeine Lösung, Fundamentalsystem und löse Anfangswertproblem für

$$\begin{aligned} x' &= -x + y - 2z, & x(0) &= 1, \\ y' &= 4x + y, & y(0) &= 1, \\ z' &= 2x + y - z, & z(0) &= 1, \end{aligned}$$

d.h. $u' = Au,\ u(0) = u_0$ mit

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte von A:

$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & -2 \\ 4 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0$$

$\implies \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1$. Ansatz gemäß (13):

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^t + (b_1 + c_1 t)e^{-t}, \\ y(t) &= a_2 e^t + (b_2 + c_2 t)e^{-t}, \\ z(t) &= a_3 e^t + (b_3 + c_3 t)e^{-t} \end{aligned}$$

bzw. vektoriell: $u(t) = ae^t + (b + ct)e^{-t}$ mit $a = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}},\ b = (b_1, b_2, b_3)^{\mathrm{T}},\ c = (c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}} \implies u'(t) = ae^t - be^{-t} + ce^{-t} - cte^{-t} \overset{u'=Au}{\implies} ae^t - be^{-t} + ce^{-t} - cte^{-t} = Aae^t + Abe^{-t} + Acte^{-t}$. Koeffizientenvergleich liefert:

$$Aa = a,\ Ac = c,\ Ab = c = b$$

($\iff$ $(A-(-1)\mathrm{id})b=c$), (j-ter Hauptvektor b^d $(A-\lambda\mathrm{id})b^d=b^{d-1}$, b^0 ist Eigenvektor zum Eigenwert λ), d.h. man muss Eigenvektor a,c zu Eigenwerte $\lambda=1$ bzw. $\lambda=-1$ und ggf. Hauptvektor b zu $\lambda_2=-1$. *Hinweis:* Evtl. wird $Ab+b=c$ nur für $c=0$ lösbar $\Longrightarrow$ $\exists$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren $b_1,\ b_2$; sonst bei $c\neq 0$ ist b Hauptvektor zu -1. Einfache Rechnung liefert: Eigenvektor zu $\lambda_1=1$ ist $a=\alpha(0,2,1)^{\mathrm{T}},\alpha\in\mathbb{R}$, Eigenvektor zu $\lambda_2=-1$ ist $c=\gamma(1,-2,-1)^{\mathrm{T}},\gamma\in\mathbb{R}$. Hauptvektor zu $\lambda_2=-1$ ist $b=(\beta,-\gamma-2\beta,-\gamma-\beta)^{\mathrm{T}},\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung ($u=ae^t+(b+c)e^{-t}$):

$$\begin{aligned} x(t) &= (\beta+\gamma t)e^{-t}, \\ y(t) &= 2\alpha e^t-(\gamma+2\beta+2\gamma t)e^{-t}, \qquad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}. \\ z(t) &= \alpha e^t-(\gamma+\beta+\gamma t)e^{-t}, \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert leicht: $\alpha=1,\beta=1,\gamma=-1$. Lösung des Anfangswertproblems:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)e^{-t}, \\ y(t) &= 2e^t-(1-2t)e^{-t}, \\ z(t) &= e^t+te^{-t}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangswerte $u^1(0)=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ u^2(0)=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ u_0^2(0)=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, d.h. $U(0)=\mathrm{id}$ liefert Fundamentalsystem:

$$U(t)=\begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 2e^t-2e^{-t} & 2e^t-(1+2t)e^{-t} & -2e^t+(2+4t)e^{-t} \\ e^t-e^{-t} & e^t-(1+t)e^{-t} & -e^t+(2+2t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Anfagswertproblem für inhomogenes System

$$u'(t)=Au(t)+b(t),\ u(t_0) \tag{14}$$

kann man gemäß *Satz 3* lösen, d.h.

$$u(t)=U(t)U(t_0)^{-1}u_0+U(t)\int_{t_0}^t U(\tau)^{-1}b(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

wobei U Fundamentalsystem von (14) ist. *Praktisch:* Bestimme Fundamentalsystem und führe Variation der Konstanten explizit aus.

Beispiel. Bestimme allgemeine Lösung von $u'=4u+v-36t,\ v'=-2u+v-2e^t$. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (erhält man analog zum vorigen Beispiel): $u_{\text{hom.}}(t)=\alpha e^{3t}+\beta e^{2t},\ v_{\text{hom.}}=-\alpha e^{3t}-2\beta e^{2t}$. Ansatz für spezielle Lösung des inhomogenen Systems: $u_{\text{inh.}}(t)=\alpha(t)e^{3t}+\beta(t)e^{2t},\ v_{\text{inh.}}(t)=-\alpha(t)e^{3t}-2\beta(t)e^{2t}$. Einsetzen in Differentialgleichung liefert: $\alpha' e^{3t}+\beta' e^{2t}=-36t,\ -\alpha' e^{3t}-2\beta' e^{2t}=-2e^t \Longrightarrow \alpha'=-72te^{-2t}-2e^{-2t},\ \beta'=36te^{-2t}+2e^{-t} \underset{\text{-tion}}{\overset{\text{Integra-}}{\Longrightarrow}} \alpha(t)=24te^{-3t}+8e^{-3t}+e^{-2t},\ \beta(t)=-18e^{-2t}-9e^{-2t}-2e^{-t} \Longrightarrow u_{\text{inh.}}(t)=6t-1-e^t,\ v_{\text{inh.}}(t)=12t+10+3e^t \Longrightarrow$

allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist:

$$u(t) = u_{\text{hom.}}(t) + u_{\text{inh.}}(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{2t} + 6t - 1 - e^t,$$
$$v(t) = v_{\text{hom.}}(t) + v_{\text{inh.}}(t) = -\alpha e^{3t} - 2\beta e^{2t} + 12t + 10 + 3e^t.$$

37.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung (inhomogen) hat allgemeine Form

$$u^{(n)}(t) = a_0(t)u(t) + ... + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + b(t). \tag{15}$$

(15) ist äquivalent zu System von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung (vgl. *Satz 36.8*). *Theorem 1* liefert dann:

Theorem 4. *Seien $a_0(t), ..., a_{n-1}, b(t)$ stetig im Intervall $I \subset \mathbb{R} \implies$ Anfangswertproblem für (15) mit $u(t_0) = u_{01}, ..., u^{(n-1)}(t_0) = u_{0n},\ t_0 \in I,\ u_0 = (u_{01}, ..., u_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ hat genau eine Lösung u auf ganz I. Dieser hängt auf jedem kompakten Intervall $I_0 \subset I$ stetig von Anfangswerten und von rechter Seite ab.*

Hinweis: Es gilt eine analoge Abschätzung zu *Theorem 1*, ii) für $v(t) = (u(t), u'(t), ..., u^{(n-1)}(t))$.

Homogene Gleichung zu (15) ist

$$u^{(n)}(t) = a_0(t)u(t) + ... + a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t). \tag{16}$$

Anwendung von *Satz 2* auf zu (16) gehörigen System:

Satz 5. *Sei $a_0(t), ..., a_{n-1}(t)$ stetig in $I \subset \mathbb{R}$. Dann:*

(1) (Superpositionsprinzip) *Linearkombination von Lösungen von* (16) *ist wieder Lösung von* (16).
(2) *Lösungen von* (16) *bilden einen n-dimensionalen Vektorraum.*

n linear unabhängige Lösungen von (16): $u_1(t), ..., u_n(t)$ nennt man Fundamentalsystem (n reelle Funktionen, keine Matrix). Alle Lösungen der inhomogenen Gleichung (15) hat folgende Form:

$$u(t) = u_{\text{inh.}}(t) + u_{\text{hom.}}(t),$$

wobei $u_{\text{inh.}}$ spezielle Lösung von (15) ist und $u_{\text{hom.}}$ durchläuft alle Lösungen von (16). Spezielle Lösung $u_{\text{inh.}}$ bekommt man mittels Variation der Konstanten, d.h. mit dem Ansatz $u(t) = c_1(t)u_1(t) + ... + c_n(t)u_n(t)$.

Konstante Koeffizienten

Betrachte homogene Differentialgleichung

$$u^{(n)}(t) = a_0 u(t) + ... + a_{n-1} u^{(n-1)}(t). \tag{17}$$

Ziel: Bestimmung des Fundamentalsystems (statt Untersuchung des zugehörigen Systems wird Fundamentalsystem direkt angegeben). $p(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - ... - a_1\lambda - a_0$ heißt *charakteristisches Polynom* von (17).

Satz 6. *Jede Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ des charakteristischen Polynoms mit Vielfachheit k liefert mit*

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, ..., t^{n-1}e^{\lambda t} \tag{18}$$

k linear unabhängige Lösungen von (17)*. Dies liefert insgesamt (evtl. komplexes) Fundamentalsystem. Reelles Fundamentalsystem: für k-fache komplexe Nullstellen $\lambda = \beta + i\gamma,\ \gamma \neq 0$ wählt man Real- und Imaginärteil der Lösung in* (18) *und streicht alle Lösungen zu $\overline{\lambda}$, d.h.*

$$\begin{aligned} &e^{\beta t}\cos\gamma t,\ te^{\beta t}\cos\gamma t, ..., t^{k-1}e^{\beta t}\cos\gamma t, \\ &e^{\beta t}\sin\gamma t,\ te^{\beta t}\sin\gamma t, ..., t^{k-1}e^{\beta t}\sin\gamma t. \end{aligned} \tag{19}$$

Beweis. Vgl. Literatur. ∎

Beispiel 1. Bestimme allgemeine Lösung für $u^{(5)} + 4u^{(4)} + 2u''' - 4u'' + 8u' + 16u = 0$. Nullstellen des charakteristischen Polynoms: $0 = \lambda^5 + 4\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda+1)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 2) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -2,\ \lambda_4 = 1 + i,\ \lambda_5 = 1 - i$. Komplexes Fundamentalsystem: $u_1 = e^{-2t},\ u_2 = te^{-2t},\ u_3 = t^2e^{-2t},\ u_4 = e^{(1+i)t},\ u_5 = e^{(1-i)t}$. Für reelles Fundamentalsystem extrahiere $\Re(u_4) = e^t\cos t,\ \Im(u_4) = e^t \sin t$ aus Lösung u_4.

Beispiel 2 (erzwungene Schwingung/Resonanz). Die Schwingung eines Federschwingers,
elektrischen Schwingkreises oder Pendels wird durch folgende Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben:

$$u'' + 2\beta u' + \omega_0^2 u = \alpha\cos(\omega t)$$

(lineare Schwingungsgleichung mit Dämpfung), $\omega_0 \neq 0$ steht für Eigenfrequenz (Federkonstante, Masse) bei ungedämpfter Schwingung, $\beta \geq 0$ ist Reibungskoeffizient ($2\beta u'$ bewirkt Dämpfung), $\alpha\cos(\omega t)$ ist externe Anregung des Systems und ω Erregerfrequenz. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0 \implies \lambda_{1/2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Starke Dämpfung: $\beta \geq \omega_0 \implies \lambda_{1/2} \in \mathbb{R},\ \lambda_{1/2} < 0$. Nach Ansatz:

$$u_{\text{hom.}} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$\implies$ keine Schwingung, $u_{\text{hom.}}(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (schnelles Abklingen der Bewegung). Starke Dämpfung/Grenzfall: $\beta = \omega_0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$, die Lösung ist

$$u_{\text{hom.}} = (c_1 + c_2 t)e^{-\beta t}$$

$\implies$ ebenfalls keine Schwingung. Schwache Dämpfung: $\beta < \omega_0 \implies \lambda_{1/2} = -\beta \pm \omega_1 i$ mit $\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ $(< \omega_0)$. Komplexe Lösung:

$$\tilde{u}_{\text{hom.}} = \tilde{c_1} e^{(-\beta+\omega_1 i)t} + \tilde{c_2} e^{(-\beta-\omega_1 i)t}.$$

Reelle Lösung:

$$u_{\text{hom.}}(t) = (c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t)e^{-\beta t}$$

$\implies$ Schwingung mit abklingender Amplitude. Frequenz $\omega_1 <$ Eigenfrequenz ω_0. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: Statt Variation der Konstanten führt häufig geeigneter Ansatz schneller zum Ziel.

Ansatz vom Typ der rechten Seite: Man schätze die Lösung ab, in dem die rechte Seite der Differentialgleichung als Vorlage dient.

Setze $u_{\text{inh.}}(t) = a\cos\omega t + b \sin\omega t$. Einsetzen in Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich liefert a, b:

$$\implies u_{\text{inh.}}(t) = \underbrace{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}_{=a} \cdot \cos\omega t + \underbrace{\frac{2\beta\omega\alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\beta^2\omega^2}}_{=b} \cdot \sin\omega t.$$

Genauer: Funktion $A = A(\omega)$ hat Maximum an der Stelle $\omega_{\text{max.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

$$\implies A_{\text{max.}} = A(\omega_{\text{max.}}) = \frac{\alpha}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}},$$

d.h. mechanisches System muss Amplitude $A_{\text{max.}}$ aushalten können. Anwendung:

- Nützlich: Schallübertragung (=erzwungene Schwingung am Trommelfell, Musik).
- Gefährlich: Brücken, Flugzeugflügel, Motorenteile (Klappern am Auto bei gewissen Drehzahlen).