Algebraische Topologie[1]

Dozent: Dr. V. Alekseev
LaTeX: rydval.jakub@gmail.com
Version: 1. Juli 2017
Technische Universität Dresden

[1] Math Ma ALGTOP: Algebraische Topologie, WS 2016/17

Inhaltsverzeichnis

1. Vorlesung, 12.10.2016

0 Einführung

Algebraische Topologie dient dazu, mittels algebraischen Methoden (Zuordnung von algebraischen Objekten) topologische Räume zu verstehen (Klassifizierung). Beispiele von algebraischen Objekten:

- $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *Einheitssphäre*,
- Π_2 *Torus*.

Ein Merkmal der Sphäre: jede Schleife $\gamma : [0,1] \longrightarrow S^2$ (stetig) ist zusammenziehbar. Auf dem Torus gibt es sogar zwei Arten nicht zusammenziehbarer Schleifen, die man ineinander nicht überführen Kann.

Literaturempfehlung:

- A. Hatcher: Algebraic Topology (`https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`),
- C. Kosniowski: A First Course in Algebraic Topology,
- A. Fomenko, D. B. Fuchs: Homotopic Topology.

1 Topologische Räume

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition. $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum, wenn $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen von X ist, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
(2) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
(3) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ heißt *Topologie*, Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Teilmengen* von X, $U_t \subset X$ heißt *Umgebung* von einem $t \in X$ wenn $\exists O \in \mathcal{T}$ s.d. $t \in O \subset U_t$. $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ heißt *Basis* von $\mathcal{T}$, falls $\forall O \in \mathcal{T} \exists J \subset I$ s.d. $O = \bigcup_{j \in J} O_j$. $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* gdw. $X \backslash A$ offen ist. Sei $(X, \mathcal{T}')$ ein weiterer topologischer Raum, dann ist $\mathcal{T}'$ *stärker* als $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ($\iff$ $\mathcal{T}$ *schwächer* als $\mathcal{T}'$)

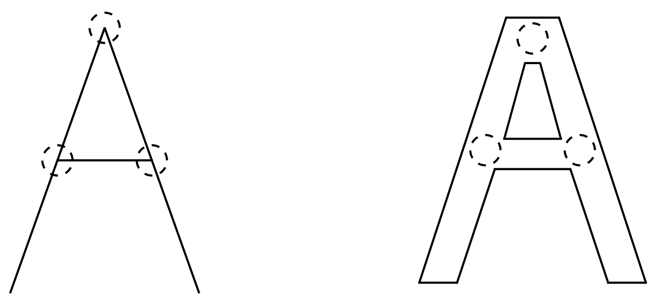
1.1.2 Beispiel.
- X beliebige Menge;
  - $\mathcal{T}_{\text{disc}} = \{$alle Teilmengen von X$\}$ *diskrete Topologie*,
  - $\mathcal{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, X\}$ *antidiskrete Toplogie.*
- (X, d) metrischer Raum;
  - $\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ s.d. } B(x, \varepsilon) \subset U\}$.

1.1.3 Definition. $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, Abb. $f : X \longrightarrow Y$ heißt

- *stetig in* $x \in X$ falls $\forall$ Umgeb. $U_{f(x)} \exists$ Umgeb. $U_x : f(U_x) \subset U_{f(x)}$,
- *stetig*, wenn $\forall U \in \mathcal{T}_Y$ gilt: $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$,
- *Homöomorphismus*, falls f stetig ist und $\exists g : Y \longrightarrow X$ stetig mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (insbesondere sind Homöomorphismen stets Bijektionen).

Bemerkung: Falls nicht explizit gesagt, wird ab jetzt Stetigkeit aller Abb. vorausgesetzt.

1.1.4 Beispiel.
- Eine "stetige Deformation" des Einheitskreises S_2 liefert einen Homöomorphismus zwischen den Parametrisierungen, die S_2 und das Endprodukt der Deformation beschreiben.
- Die Buchstaben



sind nicht homöomorph—die eindimensionale/“dünne” Version von A” verliert durch Wegname von kleiner Umgebung geschickt gewählter Punkten den Zusammenhang, die zweidimensionale/“dicke” Version nicht.

1.1.5 Definition. topologischer Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ heißt:

- *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung $X = X_1 \sqcup X_2$ in zwei disjunkte, nichtleere, offene Mengen gibt,
- *wegzusammenhängend*, wenn $\forall x, y \in X \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ stetig mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

1.1.6 Proposition. *Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.*

Beweis. (Beruhrt an der Tatsache, dass $[0,1]$ zusammenhängend ist.) $(X, \mathcal{T}_X)$ topologischer Raum, $X = X_1 \sqcup X_2$, X_1, X_2 offen, nichtleer $\implies \exists x \in X_1, y \in X_2$. Da X wegzusammenhängend ist: $\exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Es folgt $[0,1] = \gamma^{-1}(X) = \gamma^{-1}(X_1 \sqcup X_2) = \gamma^{-1}(X_1) \sqcup \gamma^{-1}(X_2)$. Die Tatsache, dass $\gamma^{-1}(X_1)$, $\gamma^{-1}(X_2)$ offen sind liefert einen Widerspruch. ∎

1.1.7 Definition. $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $A \subset X$.

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset F \subset X \\ \text{abgeschl.}}} F$$

ist der *Abschluss* von A. A liegt *dicht* in $X :\iff \overline{A} = X$.

1.1.8 Lemma. $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \ni x$ *offen gilt* $U \cap A \neq \emptyset\}$.

Beweis. Übung. ∎

1.1.9 Definition. $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum heißt *Hausdorffraum*, wenn

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x, U_y \text{ offen mit } x \in U_x,\ y \in U_y,\ U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Bemerkung: Metrische Räume sind Hausdorffräume.

1.1.10 Definition. $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn es für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X (also U_i offen, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$) eine endliche Teilüberdeckung $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ gibt ($\exists i_1, ..., i_n \in I$ s.d. U_i offen, $\bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = X$).

Bemerkung: Es ist sinnvoll, Kompaktheit nur auf Hausdorffräumen zu betrachten. Im Weiteren werden topologische Räume/ Hausdorffräume einfach mit X bezeichnet.

1.1.11 Definition. $(X, \mathcal{T}_X)$ topologischer Raum, $Y \subset X \implies (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist topologischer Raum mit *induzierter Topologie* (*Teilraumtopologie*) $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_X\}$.

1.1.12 Proposition. *X Hausdorffraum, $Y \subset X$ kompakt $\implies$ Y abgeschlossen.*

Beweis. X ist Hausdorffraum $\Longrightarrow$ $\forall x \in X\backslash Y \forall y \in Y \exists V_{x,y} \ni y$, $U_{x,y} \ni x$ offen mit $V_{x,y} \cap U_{x,y} = \emptyset$. Wenn $x \in X\backslash Y$ $\Longrightarrow$ $\bigcup_{y\in Y}(V_{x,y} \cap Y) = Y$, $V_{x,y} \cap Y$ offen in Y. Y ist kompakt $\Longrightarrow$ $\exists y_1, ..., y_n \in Y$ s.d. $\bigcup_{k=1}^{n}(V_{x,y} \cap Y) = Y$, $V_{x,y_k} \cap U_{x,y_k}$ $\Longrightarrow$ $U_{x,y_k} \cap Y = \emptyset$ $\Longrightarrow$ für $U_x := \bigcap_{k=1}^{n} U_{x,y_k}$ gilt $U_x \cap Y = \emptyset$. Nun ist $X\backslash Y = \bigcup_{x\in X\backslash Y} U_x$ offen $\Longrightarrow$ Y ist abgeschlossen. ■

1.1.13 Proposition. *X kompakt, Y Hausdorffraum, Abb. $f : X \longrightarrow Y$ stetig, injektiv $\Longrightarrow$ $f : X \longrightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. $f : X \longrightarrow f(X)$ ist stetig und bijektiv $\Longrightarrow$ man braucht zu zeigen, dass die inverse Abb. stetig ist, oder, dass f abgeschlossene Teilmengen von X auf abgeschlossene Teilmengen von $f(X)$ abbildet. Nun, wenn $X' \subset X$ abgeschlossen, dann auch kompakt $\Longrightarrow$ $f(X')$ kompakt, da Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt ($f(X') = \bigcup_{i\in I} U_i \Longrightarrow X' = \bigcup_{i\in I} f^{-1}U_i \overset{X' \text{ komp.}}{=} \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}U_{i_k} \Longrightarrow f(X') = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$) $\Longrightarrow$ $f(X') \subset Y$ abgeschlossen nach obiger Proposition. ■

1. Vorlesung, 12.10.2016

---

2. Vorlesung, 13.10.2016

2 Homotopie

2.1 Motivation

Das X :="dickes A" und Y :="dünnes A" aus Beispiel 1.4 sind nicht homöomorph aber doch irgendwie ähnlich. Manchmal ist Hömöomorphie eine zu strenge Forderung. Man hat eine Einbettung $\iota : X \longrightarrow Y$ mit einer Familie von Abbildungen $f_t : X \longrightarrow Y$, $t \in [0,1]$, s.d.

- $f_0 = \mathrm{id}_Y$,
- $f_1(Y) \subset \iota(X)$,
- die Abb. $F : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$, $(y,t) \mapsto f_t(y)$ ist stetig,
- $f_t|_{\iota(X)} = \mathrm{id}|_{\iota(X)}$.

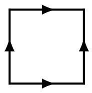
2.1.1 Definition. Sei Y ein topologischer Raum, $A \subset Y$ ein Teilraum. A heißt *Deformationsretrakt* von Y, wenn $\exists F : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ stetig, s.d.

- $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}_Y$,
- $F(y,1) \in A \forall y \in Y$,
- $F(a,t) = a \forall t \in [0,1] \forall a \in A$.

2.1.2 Beispiel. Einheitssphäre S_1 ist kein Deformationsretrakt von $\overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^2$.

2.1.3 Definition. Sei X ein topologischer Raum, $f : X \twoheadrightarrow Y$ (d.h. f surjektiv), dann kann man eine Topologie $\mathcal{T}_f := \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \subset X \text{ offen}\}$ auf Y definieren. Diese heißt *Quotiententopologie.*

2.1.4 Beispiel. $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation, $q : X \longrightarrow X/_R$ kanonische Abbildung liefern eine Quotiententopologie auf $X/_R$. Z.B. $X := [0,1]^2$, $\sim$ gegeben durch Identifizierung der Strecken $\{0\} \times [0,1]$ mit $\{1\} \times [0,1]$ und $[0,1] \times \{0\}$ mit $[0,1] \times \{1\}$. Die Menge $X/_\sim$ ist homöomorph zu dem Torus Π_2. Anschaulich:

 $\cong$ Torus.

2.1.5 Proposition (universelle Eigenschaft der Quotiententopologie). *Sei Y eine Menge, X ein topologischer Raum, $f : X \twoheadrightarrow Y$ (surjektive) Abbildung. Betrachte $(Y, \mathcal{T}_f)$. Dann gilt für alle topologische Räume Z: eine Abb. $g : Y \longrightarrow Z$ ist stetig $\iff$ $g \circ f : X \longrightarrow Z$ ist stetig.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, two heads, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. "$\Longrightarrow$" $U \subset Z$ offen $\Longrightarrow g^{-1}(U)$ offen $\Longrightarrow f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ offen, d.h. $g \circ f$ stetig.

"$\Longleftarrow$" $U \subset Z$ offen, $g \circ f$ stetig $\Longrightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen $\Longrightarrow g^{-1}(U)$ ist offen wegen $\mathcal{T}_f$.

$\blacksquare$

2.1.6 Beispiel. Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetig, Zylinder $Z_f := X \times [0,1] \sqcup Y \big/ \sim$, wobei $\sim$ Punkte $(x,1) \in X \times [0,1]$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert. Übung: $Y \subset Z_f$ ist ein Deformationsretrakt.

2.2 Homotopie zwischen Abbildungen

2.2.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ (stetig). Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit $F(\cdot, 0) = f_0$, $F(\cdot, 1) = f_1$.

2.2.2 Definition. Sei $A \subset X$ ein Teilraum. Dann heißt eine Abbildung $r : X \longrightarrow A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$ eine *Retraktion* von X auf A.

2.2.3 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ stetig, $A \subset X$ Teilraum mit $f_0|_A = f_1|_A$, f_0 und f_1 heißen *homotop relativ* zu A, wenn $\exists F : X \times [0,1] \longrightarrow Y$ Homotopie zwischen f_0 und f_1, sodass $F(a,t) = f_0(a) = f_1(a) \forall a \in A \forall t \in [0,1]$.

2.2.4 Beispiel. Aus der Funktionentheorie ist Bekannt: $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow B(0,1) \setminus \{0\}$, $t \mapsto 1/2 e^{i\pi t}$ ist homotop zu $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow B(0,1) \setminus \{0\}$, $t \mapsto 1/2 e^{-i\pi t}$, sie sind allerdings nicht homotop relativ zu $\{-1/2, 1/2\}$.

2.2.5 Definition. Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn $\exists f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$, sodass $f \circ g$ homotop zu id_Y und $g \circ f$ homotop zu id_X.

Notation: $X \simeq Y$ (X homotopieäquivalent zu Y), $X \cong Y$ (X homöomorph zu Y).

2.2.6 Proposition. *Sei Y ein topologischer Raum, $A \subset Y$ Teilraum. Wenn A ein Deformationsretrakt von Y ist, dann gilt $A \simeq Y$.*

Beweis. Die Abb. $F : Y \times [0,1] \longrightarrow Y$ ist eine Homotopie zwischen id_Y und $r : Y \longrightarrow A$, $r(y) := F(y,1)$, die eine Retraktion ist, weil $r(a) = F(a,1) = a \forall a \in A$. Betrachte $\iota : A \hookrightarrow Y$ Inklusion; $\iota \circ r \simeq \mathrm{id}_Y$ durch F, $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$. $\blacksquare$

2.2.7 Definition. Ein topologischer Raum heißt *kontrahierbar*, wenn $X \simeq \{*\}$.

2.2.8 Beispiel.
- $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar: $\{0\} \subset B(0,1)$ ist Deformationsretrakt via $F : B(0,1) \times [0,1] \longrightarrow B(0,1)$, $(x,t) \mapsto (1-t)x$.
- $\mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar, denn $B(0,1) \cong \mathbb{R}^n$ (analog $(0,1) \cong \mathbb{R}$ mittels $F : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \pi(x - 1/2)$),
- $S_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist nicht zusammenziehbar.

2. Vorlesung, 13.10.2016

---

3. Vorlesung, 19.10.2016

2.3 Konstruktionen und Beispiele

- Wiederholung: Torus lässt sich darstellen als

$$[0,1]\times[0,1]\big/_{(0,y)\sim(1,y)\wedge(x,0)\sim(x,1)}.$$

Sukzessives Zusammenkleben. Formales Vorgehen:

(0) Starte mit einem Punkt $\{*\}=: e^0$.

(1) Betrachte zwei Kopien von $[0,1]$: $e_a^1 := [0,1]$, $e_b^1 := [0,1] \implies \partial e_a^1 = \{0_a, 1_a\}$, $\partial e_b^1 = \{0_b, 1_b\}$. Abbildungen $\varphi_a : \partial e_a^1 \longrightarrow e^0 = \{*\}$, $\varphi_b : \partial e_b^1 \longrightarrow e^0 = \{*\}$. Betrachte

$$X^1 := e^0 \cup e_a^1 \cup e_b^1\big/_{\varphi_a(x)\sim x\wedge\varphi_b(x)\sim x}$$

(habe e_a^1, e_b^1 an e^0 angeklebt).

(2) Betrachte $e^2 := D^2$ $(=\overline{B(0,1)}\subset\mathbb{R}^2)$, $\partial e^2 := \partial D^2 = S^1$, $\varphi^2 : \partial e^2 \longrightarrow X^1$,

$$\implies X^2 := X^1 \cup e^2\big/_{\varphi^2(x)\sim x} = \Pi^2.$$

- Konstruktion einer Sphäre: Verklebe den gesamten Rand einer Kreisscheibe mit einem einzigen Punkt. $X^0 := \{*\}$, $X^1 := X^0$, $e_2 = D^2$, $\varphi^2 : \partial e^2 \longrightarrow X^1$, $x \mapsto * \implies X^2 := X^1 \cup e^2\big/_{\varphi^2(x)\sim x} = S^2$.

Notation:

- Zusammenkleben von Räumen längs einer Abbildung: Seien X, Y topologische Räume, $\varphi : A \subset X \longrightarrow Y$ stetig. Dann ist

$$X \cup_\varphi Y := X \sqcup Y\big/_{x\sim\varphi(x),\, x\in X}.$$

- $D^n := \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^n$.
- $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$.
- e_α^n bezeichnet stets eine Kopie von D^n. So eine Kopie heißt *n-Zelle*.

2.3.1 Definition. Ein *CW-Komplex* X ist ein topologischer Raum, der wie folgt entsteht:

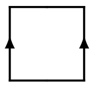
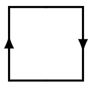
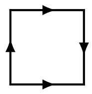
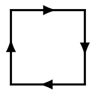
(0) Fange mit einem diskreten Raum $X^0 :=$ disjunkte Vereinigung von Punkten an.

(1) Definiere induktiv die Räume X^n (die sogenannte *n-Skelette / n-Gerüste* von X) für $n \geq 1$ folgendermaßen: für eine Familie $\{e_\alpha^n\}_{\alpha\in A}$ von n-Zellen fixiere stetige Abbildungen $\varphi_\alpha^n : \partial e_\alpha^n \longrightarrow X^{n-1}$ und definiere $X^n := (\bigsqcup_{\alpha\in A} e_\alpha^n) \cup_{\varphi_\alpha^n} X^{n-1}$.

(2) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ mit der *schwachen Topologie*: $Y \subset X$ offen $\iff$ $Y \cap X^n$ offen für alle n.

2.3.2 Definition. Eine topologische *Mannigfaltigkeit* von Dimension n ist ein Hausdorffraum X, sodass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \ni x$ besitzt, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

2.3.3 Beispiel (Flächen höheren Geschlechts). Anschaulich: Man schneidet aus der Sphäre S^2 zwei Kreise aus und klebt an die Löcher die kreisförmigen Enden eines Zylinders $[0,1]\times S^2$. Dieses Objekt ist homöomorph zu einem Torus. Eine Fläche Σ_g, die durch sukzessives Ankleben von g Handgriffen an die Sphäre S^2 heißt *Fläche von Geschlecht g*. Siehe z.B. Abbildung auf S. 5 in Hatcher: Algebraic Topology. Ferner:

 $\cong$ Zylinder  $\cong$ Möbius-band  $\cong$ Kleinsche Flasche  $\cong \mathbb{RP}^2$

Wiederholung: $\mathbb{RP}^2 := \{\text{Geraden } l \subset \mathbb{R}^3 \mid 0 \in l\}$ (topologisiert durch Winkelabstand) ist die *Projektive Ebene*. Andere Definition:

$$\begin{aligned}\mathbb{RP}^2 := \mathbb{R}^3\backslash\{0\}\big/_{v\,\sim\,\lambda v,\, \lambda\in\mathbb{R}^x} &= \{[x_1 : x_2 : x_3] \mid (x_1,x_2,x_3)\neq 0\}\\ &= \underbrace{\{[x_1 : x_2 : 1]\}}_{\mathbb{R}^2} \cup \underbrace{\{[x_1 : x_2 : 0]\}}_{\mathbb{RP}^1}\end{aligned}$$

oder $\mathbb{RP}^2 := S^2\big/_{x\,\sim\,-x}$. Allgemeiner Fall:

$$\mathbb{RP}^n := \{\text{Geraden } l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid l \ni 0\} = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}\big/_{v\,\sim\,\lambda v,\ \lambda\in\mathbb{R}^x} = S^n\big/_{x\,\sim\,-x}.$$

In sogenannten homogenen Koordinaten:

$$\{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \mid (x_0,\ldots,x_n)\neq 0\} = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{RP}^{n-1}.$$

Der kleinste Fall:

$$\mathbb{RP}^1 = \underbrace{\mathbb{R}}_{=e^1} \sqcup \underbrace{\{\infty\}}_{=e^0} = S^1\big/_{x\,\sim\,-x} \cong S^1.$$

$\mathbb{RP}^n$ ist also ein CW-Komplex mit einer Zelle in jeder Dimension und die Anklebeabbildungen sind die kanonischen Abbildunden $\varphi^k : S^k \longrightarrow \mathbb{RP}^k$.

3. Vorlesung, 19.10.2016

---

4. Vorlesung, 20.10.2016

2.4 Fundamentalgruppe

Sei X topologischer Raum (ab jetzt: alle Räume sind Hausdorff).

2.4.1 Definition. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ heißt *Weg* in X. Ein Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ heißt *Schleife* in X.

Konvention: Homotopie von Wegen wird immer relativ zu $\{0,1\}$ verstanden. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ wird verstanden als $\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2$. ($\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1 = \gamma_2(1)$, $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$ zwischen γ_1 und γ_2 muss $H(0,t) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $H(1,t) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$). Notation:

- $I := [0,1]$,

- $H : X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g, dann schreibe $H : f \rightsquigarrow g$.

2.4.2 Beispiel. Je zwei Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten in $\mathbb{R}^n$ sind homotop: $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = y$. Wähle $H(s,t) := t \cdot \gamma_2(s) + (1-t)\gamma_1(s) \implies H$ ist eine Homotopie.

2.4.3 Korollar. *Alle Schleifen an* $0 \in \mathbb{R}^n$ *sind homotop.*

2.4.4 Proposition. *Homotopie von Wegen mit festen Endpunkten* $x, y \in X$ *ist eine Äquivalenzrelation. Sei* $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \longrightarrow X$*. Wegen* $\gamma_1(0) = \gamma_1(0) = \gamma_3(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_1(1) = \gamma_3(1) = y$*:*

- $\gamma_1 \sim \gamma_2, \iff \gamma_2 \sim \gamma_1$
- $\gamma_1 \sim \gamma_1$
- $\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma_2 \sim \gamma_3 \implies \gamma_1 \sim \gamma_3$.

Beweis.
- $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$ Homotopie, dann ist $\overline{H}(s,t) := H(s, 1-t)$ eine Homotopie $\gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_1$.
- $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_1$: $H(s,t) := \gamma_1(s)$.
- $H_1 : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$, $H_2 : \gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_1$. Definiere

$$H(s,t) := \begin{cases} H_1(s, 2t), & t \in [0, 1/2], \\ H_2(s, 2t-1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_3.

■

Übung: Der Beweis funktioniert für beliebige stetige Abb. $\gamma : Z \longrightarrow X$ (Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf stetigen Abbildungen). Notation: $[\gamma]$ ist die Äquivalenzklasse des Wegen γ ($[f]$ ist die Äquivalenzklasse der Abb. f).

2.4.5 Definition. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow X$ zwei Wege s.d. $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$. Dann wird der Weg $\gamma := \gamma_2 \cdot \gamma_1$ so definiert:

$$\gamma(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s), & s \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2s-1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

γ heißt *Verknüpfung* von γ_1, γ_2.

2.4.6 Lemma. $\gamma_1 \sim \gamma_1' \implies \gamma_2 \cdot \gamma_1 \sim \gamma_2 \cdot \gamma_1', \gamma_2 \sim \gamma_2' \implies \gamma_2 \cdot \gamma_1 \sim \gamma_2' \cdot \gamma_1$.

Beweis. Wenn $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_1'$, $\gamma_{1,t}(\cdot) := H(\cdot, t)$, dann ist $H_{2,1}(s,t) := \gamma_2 \cdot \gamma_{1,t}(s)$ eine Homotopie $\gamma_2 \cdot \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 \cdot \gamma_1'$. Analog andersherum. ■

Sei $x_0 \in X$ fest. Def.: $\Omega(X, x_0) := \{\gamma : I \longrightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$ *Schleifen an* x_0. Die Verknüpfung definiert Operation $\cdot : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \longrightarrow \Omega(X, x_0)$, die aber nicht assoziativ ist:

2.4.7 Definition. $(\pi_1(X,x_0),\cdot)$, $\pi_1(X,x_0) := \{[\gamma] \mid \gamma \in \Omega(X,x_0)\}$, $\cdot$ ist die obige Verknüpfung, heißt *Fundamentalgruppe* von X an x_0.

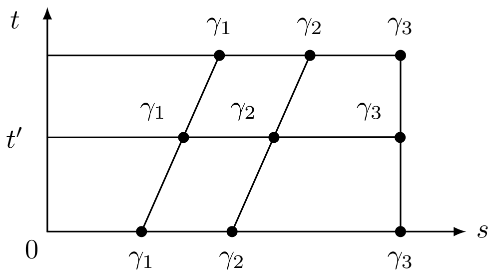
2.4.8 Proposition. *$\pi_1(X,x_0)$ ist eine Gruppe mit dem neutralen Element $e = [\underline{x_0}]$, $\underline{x_0} : I \longrightarrow X$, $t \mapsto x_0$. Das Inverse einer Klasse $[\gamma]$ ist gegeben durch $[\gamma]^{-1} = [\overline{\gamma}]$, $\overline{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$.*

Beweis. Assoziativität—zu zeigen ist $[\gamma_3\cdot(\gamma_2\cdot\gamma_1)] = [(\gamma_3\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_1]$. Die Abb.

$$\gamma_3\cdot(\gamma_2\cdot\gamma_1)(s) := \begin{cases} \gamma_1(4s), & s\in[0,1/4],\\ \gamma_2(4s-1), & s\in[1/4,1/2],\\ \gamma_3(2s-1), & s\in[1/2,1]. \end{cases}$$

$$(\gamma_3\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_1(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s), & s\in[0,1/2],\\ \gamma_2(4s-2), & s\in[1/4,3/4],\\ \gamma_3(4s-3), & s\in[3/4,1]. \end{cases}$$

sind äquivalent durch folgende Homotopie (zuerst anschaulich in der Bildnotation):



$$H(s,t) := \begin{cases} \gamma_1((4-2t)s), & s\in[0,1/(4-2t)],\\ \gamma_2(4s-t-1), & s\in\ldots,\\ \gamma_3((2+2t)s-1-2t), & s\in\ldots. \end{cases}$$

Neutrales Element: $[\underline{x_0}\cdot\gamma] = [\gamma\cdot\underline{x_0}] = [\gamma]$ offenbar. Inverses: $[\gamma\cdot\overline{\gamma}] = [\overline{\gamma}\cdot\gamma] = e$. Wähle

$$H(s,t) := \begin{cases} \gamma(2s(1-t)), & s\in[0,1/2]\\ \gamma((1-2s)(1-t)), & s\in[1/2,1] \end{cases}$$

Dann ist dies tatsächlich eine Homotopie $\overline{\gamma}\cdot\gamma \rightsquigarrow \underline{x_0}$ mit $H(s,1) = \gamma(0) = x_0$. Da $\overline{\overline{\gamma}}$, folgt das andere. ∎

2.4.9 Beispiel.
- $\pi_1(\mathbb{R}^n,0) \cong \{e\}$ (jede Schleife ist homotop zur konstanten Schleife).
- Wenn $X \cong \{*\}$, dann $\pi_1(X,*) \cong \{e\}$, denn: $\gamma : I \longrightarrow X$ eine Schleife an $*$, dann kann man die Homotopie zwsichen $f : X \longrightarrow X$, $x \mapsto *$ und $\mathrm{id} : X \longrightarrow X$ benutzen, um zu zeigen: $\gamma \sim \underline{*}$: Sei $\gamma : I \longrightarrow X$ gegeben, $H : X\times I \longrightarrow X$ Homotopie zwischen id und $f \implies H\circ(\gamma\times\mathrm{id}) : I\times I \longrightarrow X$ eine Homotopie zwischen γ und $\underline{*}$ (denn: $H\circ(\gamma\times\mathrm{id})(s,0) = H(\gamma(s),0) = \gamma(s)$, weil $H(\cdot,0) = \mathrm{id}$ und $H\circ(\gamma\times\mathrm{id})(s,1) = H(\gamma(s),1) = *$, weil $H(\cdot,1) = \gamma$.)

- $S^1 \subset \mathbb{C}$, dann $\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$. (Expliziter Homomorphismus $\phi : \pi_1(S^1,1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist gegeben z.B. durch Funktionentheorie: $[\gamma] \overset{\phi}{\mapsto} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z}$.)

2.4.10 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ stetig, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f(x_0) = y_0$. Dann gilt: die Abbildung $f_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$, $[\gamma] \mapsto [f\circ\gamma]$ ein Gruppenhomomorphismus. Außerdem: wenn $g : Y \longrightarrow Z$ stetig, $g(y_0) = z_0 \implies (g\circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(Z,z_0)$.*

Beweis. f_* ist wohldefiniert, weil $\gamma_1 \sim \gamma_2$ durch H, dann gilt $f\circ\gamma_1 \sim f\circ\gamma_2$ durch $f\circ H$. $f_*(\gamma_2\cdot\gamma_1) = [f\circ(\gamma_2\cdot\gamma_1)] = [(f\circ\gamma_2)\cdot(f\circ\gamma_1)] = [f\circ\gamma_2]\cdot[f\circ\gamma_1] = f_*(\gamma_2)\cdot f_*(\gamma_1)$. $(g\circ f)_*([\gamma]) = [g\circ f\circ\gamma] = g_*([f\circ g]) = (g_*\circ f_*)([\gamma])$. ■

4. Vorlesung, 20.10.2016

---

5. Vorlesung, 26.10.2016

2.4.11 Lemma. *$f, f' : X \longrightarrow Y$ zwei stetige Abb. mit $f(x_0) = f'(x_0) = y_0 \implies f \sim f'$ rel. zu $x_0 \implies f_* = f'_*$.*

Beweis. $f_*([\gamma]) = [f\circ\gamma]$. Erste Homotopie $f \rightsquigarrow f'$ induziert eine Homotopie $f\circ\gamma \rightsquigarrow f'\circ\gamma \implies f_*([\gamma]) = [f\circ\gamma] = [f'\circ\gamma] = f'_*([\gamma])$. ■

Die obigen Behauptungen motivieren die Frage: Wie hängt $\pi_1(X,x_0)$ von x_0 ab?

2.4.12 Lemma. *Sei X ein wegzusammenhängender Raum, $x_0, x_1 \in X$. Dann gilt: $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$. Genauer: Jede Homotopieklasse der Wege $\beta : I \longrightarrow X$, $\beta(0) = x_0$, $\beta(1) = x_1$ induziert einen solchen Isomorphismus $\Theta_{[\beta]} : \pi_1(X,x_0) \longrightarrow \pi_1(X,x_1)$, $[\gamma] \mapsto [\beta\cdot\gamma\cdot\beta^{-1}]$.*

Beweis. $\Theta_{[\beta]}$ ist wohldefiniert, denn: $\beta \sim \beta' \implies \beta^{-1} \sim \beta'^{-1}, \gamma\cdot\beta^{-1} \sim \gamma\cdot\beta'^{-1}, \beta\cdot\gamma\cdot\beta^{-1} \sim \beta'\cdot\gamma\cdot\beta'^{-1} \implies [\beta\cdot\gamma\cdot\beta^{-1}] = [\beta'\cdot\gamma\cdot\beta'^{-1}]$. $\Theta_{[\beta]}$ ist ein Gruppenhomomorphismus; $\Theta_{[\beta]}([\gamma_2]\cdot[\gamma_1]) = \Theta_{[\beta]}([\gamma_2\cdot\gamma_1]) = [\beta\cdot\gamma_2\cdot\gamma_1\cdot\beta^{-1}] = [\beta\cdot\gamma_2\cdot\beta^{-1}\cdot\beta\gamma_1\cdot\beta^{-1}] = [\beta\cdot\gamma_2\cdot\beta^{-1}]\cdot[\beta\cdot\gamma_1\cdot\beta^{-1}] = \Theta_{[\beta]}(\gamma_2)\cdot\Theta_{[\beta]}([\gamma_1])$. Ferner $\Theta_{[\beta^{-1}]} = \Theta_{[\beta]}^{-1}$, denn: $\Theta\circ\Theta_{[\beta^{-1}]}([\gamma]) = \Theta_{[\beta^{-1}]}([\beta\cdot\gamma\beta^{-1}]) = [\beta^{-1}\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\beta^{-1}\cdot\beta] = [\gamma]$, weil $\beta^{-1}\cdot\beta \sim \underline{x_0}$; analog folgt $\Theta_{[\beta]}\circ\Theta_{[\beta^{-1}]}([\gamma]) = [\gamma]$. ■

2.4.13 Definition. X wegzusammenhängend $\implies \pi_1(X)$ ist die Isomorphieklasse von $\pi_1(X,x_0)$ mit $x_0 \in X$.

2.5 Fundamentalgruppe von S^1

Wir wollen folgenden Satz zeigen:

2.5.1 Satz. *$\pi_1(S^1,1)$ (bzw. $S^1 \subseteq \mathbb{C}$) ist isomorph zu $\mathbb{Z}$, sie wird durch die Äquivalenzklasse der Schleife $\omega : I \longrightarrow S^1$, $s \mapsto e^{2\pi i s} = \cos(2\pi s) + i\sin(2\pi s)$ erzeugt.*

Was ist hier zu zeigen? $\omega^n \sim (\cos 2\pi n s + i \sin 2\pi n s = e^{2\pi i n s})$, $n \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen:

- Jede Schleife in S^1 ist homotop zu einer ω^n.

- $\omega^n \not\sim \underline{1}$.

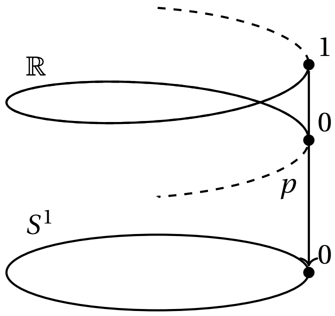
Betrachte $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ (hier hat man $p(x+n) = p(x) \forall n \in \mathbb{Z}$, also realisiert man $S^1 \simeq \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$). Idee: Für jede Schleife $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ gibt es einen eindeutigen Weg $\widetilde{\gamma} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = 0$, $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ (die sogenannte Hochhebung von γ). Nun kann man eine Abbildung $\gamma : \Omega(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\gamma \mapsto \widetilde{\gamma}(1)$ (Wdhlg. $\Omega(S^1, 1) := \{\gamma : I \longrightarrow S^1 \mid \gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$) definieren. Dann müsste man zeigen: φ induziert eine Abbildung $\overline{\varphi} : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$, die ein Isomorphismus ist (dazu sollte man zeigen, dass $\overline{\varphi}$ nur von der Homotopieklasse von γ abhängt).

2.5.2 Definition. Eine *Überlagerung* $p : Y \longrightarrow X$ ist eine surjektive stetige Abbildung mit folgenden Eigenschaften: Für jeden Punkt $x \in X$ ex. eine Umgebung $U \ni x$, so dass

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in I} V_j \subset Y,$$

wobei $V_j \subset Y$ offen und so dass $p|_{V_j} \longrightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

2.5.3 Beispiel.
- $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist eine Überlagerung, denn: p stetig, surjektiv, und für jedes $z = e^{i\varphi} \in S^1$ gilt: $p^{-1}(S^2 \backslash \{z\}) \cong (S^1 \backslash \{z\}) \times \mathbb{Z}$.



- Wenn man $S^1 \subset \mathbb{C}$ realisiert, kann man die Abb. $p_k : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \mapsto z^k$ $(e^{i\varphi} \mapsto e^{ki\varphi})$. Es ist $p^{-1}(S^1 \backslash \{-z\}) \cong (S^1 \backslash \{-z\}) \times \mathbb{Z}/_k$.

2.6 Hochhebung von Wegen und Homotopien

Fragestellung: Gegeben eine stetige Abbildung $f : Z \longrightarrow X$, finde *Hochhebungen* $\widetilde{f} : Z \longrightarrow Y$, $(f = p \circ \widetilde{f})$ und untersuche, ob sie eindeutig sind.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\exists ? \widetilde{f}"'] & X \\
Y \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

2.6.1 Proposition (Homotopiehochhebungseigenschaft von Überlagerungen). *Sei $p : Y \longrightarrow X$ eine überlagerung, $F : Z \times I \longrightarrow X$ stetig. Sei $\widetilde{F} : Z \times \{0\} \longrightarrow Y$ eine Abbildung mit $p \circ \widetilde{F} = F|_{Z\times\{0\}}$ (intuitiv: F ist eine Homotopie zwischen $F|_{Z\times\{0\}}$ und $F|_{Z\times\{1\}}$, und eine Hochhebung von der ersten Abbildung ist gegeben). Dann existiert eine Fortsetzung $\widetilde{F} : Z \times I \longrightarrow Y$ mit $p \circ \widetilde{F} = F$, von der obigen $\widetilde{F} : Z \times \{0\} \longrightarrow Y$.*

2.6.2 Korollar. (1) *Gegeben $\gamma : I \longrightarrow X$ und $y_0 \in Y$ s.d. $p(y_0) = \gamma(0)$, es ex. genau eine Hochhebung $\widetilde{\gamma} : I \longrightarrow Y$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$ ($Z = \{*\}, F = \gamma : I \longrightarrow X$, $\widetilde{F}|_{\{0\}} = y_0$).*

(2) *Gegeben $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow X$, eine Homotopie $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$ und $y_0 \in p^{-1}(\gamma_1(0)) = p^{-1}(\gamma_2(0)) \implies \exists! \widetilde{H} : I \times I \longrightarrow Y$ zwischen den Hochhebungen $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ s.d. $\widetilde{H}|_{I\times\{0\}} = H$.*

Beweis (der Homotopiehochhebungseigenschaft). Sei $z_0 \in Z$ fest. Wir werden erstmal $\widetilde{F}$ auf $N \times I$ fortsetzen, wobei $N \ni z_0$ eine Umgebung von z_0 ist. Die Abbildung

$$\begin{tikzcd} Z \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\widetilde{F}|_{Z\times\{0\}}"'] & X \\ Y \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

$F : Z \times I \longrightarrow X$ ist stetig, deswegen existiert für jedes $t \in X$ eine Umgebung $N_t \times (a_t, b_t) \subset Z \times I$ von (z_0, t), s.d. $F(N_t \times (a_t, b_t)) \subset U^t \subset X$ für eine Umgebung U^t von $F(z_0, t)$ mit $p^{-1}(U^t) = \bigsqcup_{j\in J} V_j^t$, wobei $p|_{V_j^t}$ ein Homöomorphismus ist (F stetig + Def. der Überlagerung). Sei $\bigcup_{t\in I}(a_t, b_t) = I$ eine off. Überdeckung, I kompakt $\implies$ es gibt eine endliche Teilüberdeckung, also $I = \bigcup_{i=1}^n (a_{t_i}, b_{t_i})$, o.B.d.A. $0 = a_{t_1} < b_{t_1} < \ldots < a_{t_n} < b_{t_n} = 1$. Sei $N := \bigcap_{i=1}^n N_{t_i} \subset Z$. Wir definieren $\widetilde{F}$ auf $N \times I$ induktiv: (o.B.d.A.) $F(N \times [a_{t_1}, b_{t_1})) \subset U^{t_1}$, deswegen $\exists! j$ s.d. $\widetilde{F}(N \times \{0\}) \subset V_j^{t_1}$; definiere $\widetilde{F}|_{N\times(a_{t_1}, b_{t_1})} := p_{j,1}^{-1} \circ F$, wobei $p_{j,1}^{-1} : U^{t_1} \longrightarrow V_j^{t_1}$ der inverse Homöomorphismus ist. Weiter: Wenn $\widetilde{F}$ auf $N \times \bigcup_{i=1}^k (a_{t_i}, b_{t_i})$ definiert ist, dann ist der Durchschnitt $(a_{t_k}, b_{t_k}) \cap (a_{t_{k+1}}, b_{t_{k+1}}) \neq \emptyset$ (evtl. nach Umnummerierung). Dann definiert man $\widetilde{F}|_{N\times(a_{t_{k+1}}, b_{t_{k+1}})} := p_{j,k+1}^{-1} \circ F$, wobei $p_{j,k+1} : U^{t_{k+1}} \longrightarrow V_j^{t_{k+1}}$ ein Homöomorphismus ist, $F(N \times (a_{t_k}, b_{t_k})) \subset V_j^{t_{k+1}}$. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir $\widetilde{F} : N \times I \longrightarrow Y$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, weil die Wahl von j in jedem Schritt eindeutig war. Schreibe jetzt $Z = \bigcup_{z\in Z} N_z$ (wiederhole für jede Wahl von z_0) $\implies$ erhalte $\widetilde{F}_z : N_z \times I \longrightarrow Y$ für jedes z. Sobald $N_z \cap N_{z'} \neq \emptyset$, gilt $\widetilde{F}_z = \widetilde{F}_{z'}$, weil die Fortsetzung eindeutig $\implies$ Definiere $\widetilde{F} : Z \times I \longrightarrow Y$ durch $\widetilde{F}|_{N_z\times I} = \widetilde{F}_z$ (wohldefiniert, weil $\widetilde{F}_z$ kompatibel und eindeutig, weil jedes $\widetilde{F}_z$ eindeutig). ■

5. Vorlesung, 26.10.2016

---

6. Vorlesung, 27.10.2016

Beweis (von Satz 2.5.1). $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist eine Überlagerung. Die Hochhebung $\widetilde{\omega}$ von ω mit $\widetilde{\omega}(0) = 0$ ist $\widetilde{\omega}(s) = s$ (damit $(p \circ \widetilde{\omega})(s) = e^{2\pi i s} = \omega(s)$). Entsprechend ist $\widetilde{\omega}^n(s) = n \cdot s$ die eindeutige Hochhebung von ω^n. Definiere eine Abbildung $\phi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ durch $\phi([\gamma]) := \widetilde{\gamma}(1)$, wobei $\widetilde{\gamma}$ die (eindeutige) Hochhebung von γ ist. Z.z.: ϕ ist wohldefiniert. Dazu:

(1) $\widetilde{\gamma}$ ist eine Hochhebung, also $p\circ\widetilde{\gamma}=\gamma \implies (p\circ\widetilde{\gamma})(1)=p(\widetilde{\gamma}(1))=\gamma(1)=1 \implies \widetilde{\gamma}(1)\in p^{-1}(1)=\mathbb{Z}$.

(2) Seien γ_1,γ_2 zwei homotope Schleifen an 1. Seien $\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2$ ihre Hochhebungen. Nach dem Korollar von oben sind auch $\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2$ homotop, und daher $\widetilde{\gamma}_1(1)=\widetilde{\gamma}_2(1)$.

Nun ist z.z.: ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus. Dazu erstmal: für jedes $\gamma\in\Omega(S^1,1)$ gibt es ein $n\in\mathbb{Z}$ s.d. $[\gamma]=[\omega^n]$. Dazu: hebe γ hoch zu $\widetilde{\gamma}$, sei $\phi([\widetilde{\gamma}])=n\in\mathbb{Z}$. Jetzt sind $\widetilde{\gamma}$ und $\widetilde{\omega}^n$ zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit den gleichen Anfangspunkten ($\widetilde{\gamma}(0)=0=\widetilde{\omega}^n(0)$) und Endpunkten ($\widetilde{\gamma}(1)=n=\widetilde{\omega}^n(1)$) $\implies \widetilde{\gamma}\sim\widetilde{\omega}^n$, weil je zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind (z.B. durch lineare Homotopie). Daher: $\gamma=p\circ\widetilde{\gamma}\sim p\circ\widetilde{\omega}^n=\omega^n$. Ferner $\phi([\omega^n])=n$. $\phi([\omega^n]\cdot[\omega^m])=\phi([\omega^{n+m}])=n+m=\phi([\omega^n])+\phi([\omega^m]) \implies \phi$ ist eine Homomorphismus, surjektiv. Bleibt: ϕ ist injektiv. Dazu $\phi([\omega^n])=0 \implies n=0$, $\omega^0=\underline{1}$. ■

2.6.3 Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe Polynom $p\in\mathbb{C}[z]$, $p(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0$, $n\geq 1$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Annahme: p hat keine Nullstellen in $\mathbb{C}$. Sei $r\geq 0$, betrachte

$$f_r(s)=\frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}\in S^1\subset\mathbb{C}\forall r.$$

So ist $f_r: I\longrightarrow S^1$ eine Schleife in S^1 an 1. Wenn r sich stetig verändert, verändert sich die Schleife stetig ($f:\mathbb{R}_{\geq 0}\longrightarrow S^1$, $(r,s)\mapsto f_r(s)$ ist stetig) $\implies [f_r]$ ist unabhängig von r.

$$f_0(s)=\frac{p(0)/p(0)}{|p(0)/p(0)|}=1 \implies [f_0]=e \text{ in } \pi_1(S^1,1).$$

Aber: $p(z)=z^n(1+\frac{a_{n-1}}{z}+\ldots+\frac{a_0}{z^n})=z^n r(z)$ und $|\frac{a_{n-1}}{z}+\ldots+\frac{a_0}{z^n}|<1$ für $|z|\geq R$ hinreichend groß $\implies r(z)\subset B(1,1) \implies r:\{|z|\geq R\}\longrightarrow\mathbb{C}$ ist homotop zur konstanten Abbildung $\widetilde{r}(z)=1$ durch Abbildungen $r_t(z)\neq 0$ auf $|z|\geq R \implies$ für hinreichend große r ist

$$f_r\sim\underbrace{\left(s\mapsto\frac{r^n e^{2\pi ins}}{r^n}=e^{2\pi ins}\right)}_{\omega^n}$$

$e=[f_r]=[\omega^n]\neq e$ in $\pi_1(S^1,1)$. Widerspruch. ■

2.6.4 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei $D^2\subset\mathbb{R}^2$ und sei $h:D^2\longrightarrow D^2$ stetig. Dann hat h einen Fixpunkt.*

Beweis. Widerspruchsbeweis. Wenn $h(x)\neq x\forall x\in D^2$. Definiere $r(x)\in S^1$ als den Punkt, wo der Strahl mit Richtung $h(x)-x$ den Rand Schneidet. Also gilt $r:D^2\longrightarrow S^1$, $r|_{S^1}=\mathrm{id}_{S^1}$ (r ist eine Retraktion von D^2 auf S^1). Sei $\iota:S^1\hookrightarrow D^2$ die Inklusionsabbildung. Nach Proposition 2.4.10 sind $r_*:\pi_1(D^2,x_0)\longrightarrow\pi_1(S^1,x_0)$, $\iota_*:\pi_1(S^2,x_0)\longrightarrow\pi_1(D^1,x_0)$ Homomorphismen. Es ist $r\circ\iota=\mathrm{id}_{S^1} \implies r_*\circ\iota_*=(r\circ\iota)_*=(\mathrm{id}_{S^1})_*=\mathrm{id}_{\pi_1(S^1,x_0)}$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^1,x_0) \arrow[r, "\iota_*"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{S^1}"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate] & \pi_1(D^2,x_0) \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, phantom, "\cong"] & \pi_1(S^1,x_0) \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\mathbb{Z} & \{e\} & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow$ $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ faktoriziert durch $\{e\}$. Widerspruch. ∎

2.6.5 Satz (Borsuk-Ulam). *Sei $f: S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann $\exists x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Widerspruchsbeweis. Wenn $f(x) \neq f(-x) \forall x \in S^2$, definiere

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \in S^1$$

$\Longrightarrow$ $g: S^2 \longrightarrow S^1$ ist stetig. Sei $\eta: I \longrightarrow S^2$ die Schleife $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0) \in S^2 \subset \mathbb{R}^2 \implies h := g \circ \eta$ ist eine Schleife in S^1. Wir setzen: $\{s + 1/2\} = s + 1/2 \mod 1$ ist der *Bruchteil* von $s + 1/2$. Es gilt $g(-x) = -g(x)\ \forall x \in S^2 \implies h(\{s+1/2\}) = -h(s)$, denn

$$h(s+1/2) = g(\eta(s+1/2)) = g((\cos(2\pi s + \pi), \sin(2\pi s + \pi), 0) = g(-\eta(s)) = -h(s)$$

und $h(0) = h(1) \implies$ wenn $\widetilde{h}: I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von h ist, dann gilt $\widetilde{h}(\{s+1/2\}) = \widetilde{h}(s) + q_s + 1/2$, wobei $q_s \in \mathbb{Z}$ ungerade. Es gilt $\mathbb{Z} \ni q_s = \widetilde{h}(\{s+1/2\}) - \widetilde{h}(s) - 1/2$ stetig $\implies q_s = q \forall s \in I \implies \widetilde{h}(\{s+1/2\}) - \widetilde{h}(s) = (2q+1)/2$, also gilt $\widetilde{h}(1) - \widetilde{h}(0) = 2q + 1 \neq 0$ (weil ungerade) $\implies [h] \neq [1]$ (sonst wäre $\widetilde{h}(1) = \widetilde{h}(0)$). Aber $e \neq [h] = [g \circ \eta] = g_*([\eta])$. Aber $[\eta] = e \in \pi_1(S^2, (1,0,0))$, weil man η über den "Nordpol" zusammenziehen kann. (Seien E_t Ebenen durch $(1,0,0)$ mit Normalenvektor $(\sin t, 0, \cos t)$ für $0 \leq t \leq \pi/2$, $\gamma_t :=$ Schleife an $(1,0,0)$ mit $\gamma_t(I) = E_t \cap S^2$, einmal durchgelaufen). Widerspruch. ∎

2.6.6 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Dann gilt: $\pi_1(X \times Y, (x_0, x_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Beweis. Jede Schleife γ in $X \times Y$ an (x_0, y_0) definiert durch Verknüpfung mit Projektionen $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X, (x,y) \mapsto x$, $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y, (x,y) \mapsto y$ zwei Schleifen $\pi_X \circ \gamma$, $\pi_Y \circ \gamma$. Umgedreht: ein Paar $(\gamma_x, \gamma_y) \in \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0)$ definiert Schleife $\gamma(s) := (\gamma_x(s), \gamma_y(s)) \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$. Diese Entsprechung respektiert Homotopien und Verknüpfungen (nachzurechnen) $\implies (\pi_X)_* \times (\pi_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ist ein Isomorphismus. ∎

2.6.7 Korollar. $\pi_1(\Pi^n) = \pi_1(\overbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}^{n\text{-mal}}) \cong \mathbb{Z}^n$.

6. Vorlesung, 27.10.2016

---

7. Vorlesung, 03.11.2016

2.7 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Wiederholung: Sei $p:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$ eine Überlagerung ($p(y_0)=x_0$), dann ist $p_*:\pi_1(Y,y_0)\longrightarrow\pi_1(X,x_0)$, $[\gamma]\mapsto[p\circ\gamma]$ der induzierte Gruppenhomomorphismus.

2.7.1 Proposition. *p_* ist injektiv, $p_*\big(\pi_1(Y,y_0)\big)\subset\pi_1(X,x_0)$ ist die Untergruppe der Homotopieklassen von Schleifen γ, deren Hochhebung $\widetilde{\gamma}$ mit $\widetilde{\gamma}(0)=y_0$ auch Schleife ist.*

Beweis. Sei $\hat{\gamma}\in\Omega(Y,y_0)$ mit $p_*([\hat{\gamma}])=e \implies p\circ\hat{\gamma}=\gamma\sim\underline{x_0}$. Wegen der Eindeutigkeit der Hochhebung gilt $\hat{\gamma}=\widetilde{\gamma}$ (Hochhebung von γ mit $\widetilde{\gamma}(0)=y_0$). Homotopiehochhebung liefert eine Homotopie von $\widetilde{\gamma}$ zu einer Hochhebung von $\underline{x_0}$, die nach Eindeutigkeit der Hochhebung gleich $\underline{y_0}$ ist $\implies \hat{\gamma}=\underline{y_0}\implies[\hat{\gamma}]=e\in\pi_1(Y,y_0)$. p_* ist also injektiv. Wenn $[\gamma]\in\mathrm{Im}(p_*)\implies[\widetilde{\gamma}]\in\pi_1(Y,y_0)$, weil $p_*([\widetilde{\gamma}])=[\gamma]\implies\widetilde{\gamma}\in\Omega(Y,y_0)$. ∎

Frage: Sei $\Gamma:=\pi(X,x_0)$, $\Lambda<\Gamma$ Untergruppe. Gibt es eine Überlagerung $p:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$ mit $p_*(\pi_1(Y,y_0))=\Lambda$?

2.7.2 Beispiel. $(X,x_0)=(S^1,1)\implies\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb{Z}=:\Gamma$, jedes $\Lambda<\mathbb{Z}$ hat die Form $n\mathbb{Z}$. Welche Überlagerung gehört zu $n\mathbb{Z}<\mathbb{Z}$?

- $p_n:(S^1,1)\longrightarrow(S^1,1)$, $z\mapsto z^n\implies(p_n)_*([\omega])=[\omega^n]\implies(p_n)_*(\mathbb{Z})=n\mathbb{Z}$.
- Sei $n=0$, d.h. wir betrachten $0<\mathbb{Z}$. Dann ist $p:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$, $x\mapsto e^{2\pi ix}$ die zugehörige Überlagerung.

2.7.3 Definition. Sei (X,x_0) ein punktierter Raum. Eine Überlagerung $\widetilde{p}:(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\longrightarrow(X,x_0)$ heißt *universelle Überlagerung*, falls $\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)=\{e\}$.

Bemerkung: Es ist sinnvoll, X als wegzusammenhängend vorauszusetzen (alles hängt nur von der Wegzusammenhangskomponente von x_0 ab).

Welche Eigenschaften von X sind notwendig für existenz einer universellen Überlagerung? Sei $\widetilde{p}:(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\longrightarrow(X,x_0)$ eine universelle Überlagerung, sei $\gamma\in\Omega(X,x_0)$, $\widetilde{\gamma}\in\Omega(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ eine Hochhebung von γ (also setzen wir voraus, dass γ zu einer Schleife hochgehoben wird). Dann ist $\widetilde{\gamma}\sim\underline{\widetilde{x}_0}$, weil $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist. Wenn $U\ni x_0$ eine Umgebung von x_0 derart ist, dass $p^{-1}(U)=\bigsqcup_{\alpha\in F}V_\alpha$ mit $p:V_\alpha\longrightarrow U$ Homöomorphismus, dann liegt $\widetilde{x}_0\in V_{\alpha_0}$, also hebt sich jede Schleife $\gamma\in\Omega(U,x_0)$ zu $\widetilde{\gamma}\in\Omega(V_{\alpha_0},\widetilde{x}_0)$. D.h. $\widetilde{\gamma}\sim\underline{\widetilde{x}_0}\implies\gamma\sim\underline{x_0}$.

Also gilt: Für jede offene Teilmenge $x\in W\subset X$ gibt es eine offene Teilmenge $x\in U\subset W\subset X$ s.d. jede Schleife $\gamma\in\Omega(U,x)$ homotop zur konstanten Schleife $\underline{x}$ ist. Dies ist eine Eigenschaft von X, die notwendig für die Existenz von einer universellen Überlagerung ist. Wenn X diese erfüllt, heißt X *semilokal einfach zusammenhängend.*

2.7.4 Definition. X heißt lokal *wegzusammenhängend*, wenn $\forall W\subset X$ offen eine offene Teilmenge $U\subset W$ ex. s.d. U wegzusammenhängend ist.

Bemerkung: CW-Komplexe erfüllen beide Eigenschaften automatisch (sie sind lokal zusammenziehbar, also hat jeder Punkt eine zusammenziehbare Umgebung).

Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender Raum, $x_0 \in X$ fest. Sei

$$\boxed{\widetilde{X} := \{[\gamma] \mid \gamma : I \longrightarrow X \text{ Weg mit } \gamma(0) = x_0\},}$$

$p : \widetilde{X} \longrightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, $\widetilde{x}_0 := \underline{x_0} \in \widetilde{X}$. Die Abb. p ist wohldefiniert und surjektiv, da X wegzusammenhängend. Wir brauchen eine Topologie auf $\widetilde{X}$, s.d. $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung ist. Dazu betrachten wir:

$$\mathcal{U} := \{U \subset X \text{ offen, wegzusammenhängend} \mid \iota_* : \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X) \text{ trivial}\}.$$

Bemerkung: $U \in \mathcal{U}$, $V \subset U$ offen, wegzusammenhängend $\Longrightarrow$ $V \in \mathcal{U}$ ($\iota_*^V : \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X)$ ist trivial, weil ι_*^U trivial).

Behauptung. *Sei X lokal wegzusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend $\Longrightarrow$ $\mathcal{U}$ ist eine Basis der Topologie auf X.*

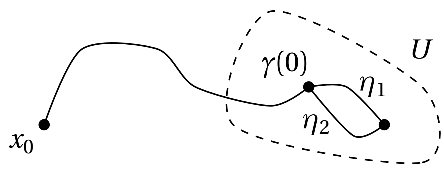
Beweis (der Behauptung). Es reicht zu zeigen: $\forall W \subset X$ offen, $\exists U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset W$. Sei W gegeben. Finde $U' \subset W$ s.d. jede Schleife in U' homotop zur konstanten Schleife in X ist (also $\iota_* : \pi_1(U') \longrightarrow \pi_1(X)$ ist trivial) und finde für dieses U' eine wegzusammenhängende offene Teilmenge U. Es folgt $U \in \mathcal{U}$, weil

$$\begin{tikzcd} \iota_*^U : \pi_1(U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \pi_1(X) \\ & \pi_1(U') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

∎

Wir beweisen nun den nächsten Satz. Sei $U \in \mathcal{U}$ und $[\gamma] \in \widetilde{X}$ mit $\gamma(1) \in U$. Definiere

$$U_{[\gamma]} := \{[\eta \cdot \gamma] \mid \eta : I \longrightarrow X \text{ mit } \eta(0) = \gamma(1) \text{ und } \eta(I) \subset U\}$$



(wohldefiniert, weil Homotopie verträglich mit Verknüpfung ist). Die Abbildung

$$p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$$

ist surjektiv, weil U wegzusammenhängend ist, auch injektiv, weil wenn $(\eta_1 \cdot \gamma)(1) = (\eta_2 \cdot \gamma)(1) \Longrightarrow [\eta_1 \cdot \gamma] = [\eta_2 \cdot \gamma]$. Sei jetzt $\mathcal{T}$ die Topologie auf $\widetilde{X}$, die $\{U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U}, [\gamma] \in \widetilde{X}\}$ als Basis hat. Dann gilt: $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ ist ein Homöomorphismus (wenn $V_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma]} \Longleftrightarrow V \subset U$). Also ist $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig, weil Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist. Sei jetzt $U \in \mathcal{U}$, wähle $x \in U$.

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma]} U_{[\gamma]}.$$ [1]

Weil: Sei $U_{[\gamma_1]} \cap U_{[\gamma_2]} \neq \emptyset$. D.h. $[\eta_1 \cdot \gamma_1] = [\eta_2 \cdot \gamma_2]$ für gewisse $\eta_1, \eta_2 : I \longrightarrow U$, $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow X$.

[1] Vereinigung über Homotopieklassen von Wegen $\gamma : I \longrightarrow X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x \in U$

Sei $[\eta' \cdot \gamma_1] \in U_{[\gamma_1]}$. Dann gilt

$$[\eta' \cdot \gamma_1] = [\eta' \cdot \overline{\eta_1} \cdot \eta_1 \cdot \gamma_1] = [\eta' \cdot \overline{\eta_1} \cdot \eta_2 \cdot \gamma_2] = [\eta'' \cdot \gamma_2] \in U_{[\gamma_2]}$$

$\Longrightarrow U_{[\gamma_1]} = U_{[\gamma_2]}$. Also: $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ ist eine Überlagerung. Bleibt zu zeigen: $\widetilde{X}$ ist einfach zusammenhängend.

(1) $\widetilde{X}$ ist wegzusammenhängend. Sei $[\gamma] \in \widetilde{X}$. Wir brauchen einen Weg $\widetilde{\gamma} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}_0$, $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma$. Def.

$$\widetilde{\gamma}(t) := s \mapsto \begin{cases} \gamma(s) & \text{falls } s \in [0, t], \\ \gamma(t) & \text{falls } s \in [t, 1] \end{cases} \qquad \text{(tautologische Definition)}$$

$\Longrightarrow \widetilde{\gamma}(0) = \underline{x_0}$, $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma$.

(2) Es reicht zu zeigen: $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) = \{e\} < \pi_1(X, x_0)$, da p_* injektiv ist. Das Bild $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0))$ besteht aus Homotopieklassen $[\gamma]$ von Wegen $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, deren Hochhebung $\widetilde{\gamma} \in \Omega(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. Wenn $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, sei $\hat{\gamma} : I \longrightarrow \widetilde{X}$ wie oben definiert. $\hat{\gamma}$ ist eine Hochhebung von γ mit $\hat{\gamma}(0) = \underline{x_0}$ und $\{\hat{\gamma}(t)\}_{t \in I}$ ist eine Homotopie zwischen $\widetilde{x}_0$ und $\widetilde{\gamma}$. D.h.: $[\widetilde{\gamma}] = [\underline{\widetilde{x}_0}] \Longrightarrow \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \{e\}$.

2.7.5 Satz. *Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum. Dann existiert eine universelle Überlagerung $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ (für jedes $x_0 \in X$).*

Bemerkung: Ab jetzt betrachten wir nur Räume, die lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend sind (s.d. jede Wegzusammenhangskomponente eine universelle Überlagerung besitzt).

Beobachtung: Sei $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Dann wirkt Γ von rechts auf $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ durch

$$\underset{\underset{\widetilde{X}}{\Cap}}{[\gamma]} \cdot \underset{\underset{\Gamma}{\Cap}}{[\beta]} = [\gamma \cdot \beta].$$

7. Vorlesung, 03.11.2016

---

8. Vorlesung, 09.11.2016

Letztes mal haben wir gesehen: Wenn (X, x_0) ein hinreichend guter topologischer Raum ist, dann existiert eine universelle Überlagerung $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$. Um aus $\widetilde{X}$ eine andere Überlagerung zu konstruieren, brauchen wir folgenden Begriff: Sei Γ eine Gruppe, Y ein topologischer Raum.

2.7.6 Definition.
- $\mathrm{Homeo}(Y) := \{f : Y \longrightarrow Y \mid f \text{ ist Homöomorphismus}\}$.
- Eine *Wirkung* von Γ auf Y ist ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Homeo}(Y)$. Bezeichnung: $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y$.

2.7.7 Beispiel. Sei $\Gamma := \mathbb{Z}$. Dann ist $\alpha : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$, $n \mapsto (x \mapsto x + n)$ eine Wirkung.

Sei $\Gamma \overset{\alpha}{\frown} Y$ eine Wirkung. Sei $R_{\Gamma \overset{\alpha}{\frown} Y} := \{(y, \alpha(g)(y)) \mid y \in Y, g \in \Gamma\}$.

$$\Gamma\backslash Y := R_{\Gamma \overset{\alpha}{\frown} Y}\backslash Y = {}_{\substack{y \sim \alpha(g)(y), \\ y \in Y, g \in \Gamma}}\backslash Y$$

heißt *Quotientenraum* der Wirkung (der Raum aller Orbits).

Bemerkung: Der obige Begriff der Wirkung heißt manchmal Linkswirkung, weil die Abbildung α eine Abbildung $\widetilde{\alpha} : \Gamma \times X \longrightarrow X$, $(g, y) \mapsto \alpha(g)(y)$ induziert. $\widetilde{\alpha}$ erfüllt $\alpha(gh, x) = \widetilde{\alpha}(g, \widetilde{\alpha}(h, x))$. Wenn die Wirkung fest ist, schreibt man $g \cdot x$ für $\alpha(g)(x)$. Entsprechend gibt es den Begriff der Rechtswirkung $\widetilde{\beta} : X \times \Gamma \longrightarrow X$ mit $(x, g) \mapsto \widetilde{\beta}(x, g)$ mit Abkürzung $\widetilde{\beta}(x, g) = x \cdot g$. Es gilt $\widetilde{\beta}(x, gh) = \widetilde{\beta}(\widetilde{\beta}(x, g), h)$. Zu einer Rechtswirkung $\widetilde{\beta}$ gehört auch ein Homomorphismus $\beta : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Homeo}(Y)$, $g \mapsto \widetilde{\beta}(x, g^{-1})$.

Rechtswirkungen bezeichnet man durch $Y \overset{\beta}{\frown} \Gamma$. Entsprechend bezeichnet man den Quotientenraum durch Y/Γ für die Rechtswirkung.

2.7.8 Beispiel. Sei G eine Gruppe, $Y := G$. Dann ist $L : G \times Y \longrightarrow G$, $(g, h) \mapsto g \cdot h$ eine Linkswirkung, $R : Y \times G \longrightarrow G$, $(h, g) \mapsto h \cdot g$ ist eine Rechtswirkung.

2.7.9 Beispiel. Sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, $\alpha_\omega : \Gamma \frown X$ gegeben durch $\alpha_\omega(n)(z) := e^{i\omega n} \cdot z$ für $\omega \in \mathbb{R}$.

(i) $\omega/2\pi \in \mathbb{Q} \implies$ jede Bahn ist endlich $\implies S^1/\mathbb{Z} \cong S^1$. (Eigentlich $\cong ([0,1])$ aber 0 ist mit 1 verklebt.)

(ii) $\omega/2\pi \notin \mathbb{Q} \implies$ jede Bahn ist dicht in S^1. $X_\omega := S^1/\mathbb{Z}$ ist schwer verständlich. Die Topologie auf X_ω viel besser: Wenn $f : X_\omega \longrightarrow Z$ stetig $\implies \overline{f} := f \circ q$ ist stetig (Eigenschaft der Quotiententopologie—die feinste Topologie, für die die Abbildung q stetig ist).

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, dashed, "\overline{f} = f \circ q"] & \\
S^1/\mathbb{Z} \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Aber $\overline{f}$ ist nach Konstruktion $\mathbb{Z}$-invariant: $\overline{f} \circ \alpha_\omega(n) = \overline{f} \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\overline{f}(\alpha_\omega(n)(x)) = \overline{f}(x) \forall x \in S^1, \forall n \in \mathbb{Z} \implies \overline{f}(y) = \overline{f}(x) \forall x, y \in S^1,$$

da die Bahn von x dicht ist und $\overline{f}$ stetig $\implies \overline{f}$ ist konstant $\implies f$ ist konstant $\implies X_\omega$ hat triviale Topologie (die antidiskrete Topologie) und ist somit z.B. nicht Hausdorff.

2.7.10 Definition. Sei X ein topologischer Raum, $\alpha : \Gamma \frown X$ eine Wirkung. Dann heißt α eine *Überlagerungswirkung*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \ni x$ hat s.d. $\forall g_1 \neq g_2 \in \Gamma$ gilt $g_1 U \cap g_2 U = \emptyset$ ($g_1 U = \alpha(g_1)(U)$, $g_2 U = \alpha(g_2)(U)$).

2.7.11 Proposition. *$\alpha : \Gamma \curvearrowright X$ ist eine Überlagerungswirkung $\Longrightarrow$ $q : X \longrightarrow {}_{\Gamma}\backslash^{X}$ ist eine Überlagerung.*

Beweis. Sei $x \in X$, $U \ni x$ aus der Def. der Überlagerungswirkung. Dann gilt für $V := q(U)$.

$$q^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in \Gamma} gU,$$

denn:

- $q(x) \in V \iff \exists g \in \Gamma$ s.d. $g \cdot x \in U$ (Def. des Quotientenraumes).
- die Vereinigung ist disjunkt, denn: $g_1 U \cap g_2 U \neq \emptyset \Longrightarrow g_1 = g_2$ nach Definition eine Überlagerungswirkung.
- $q|_{gU} : gU \longrightarrow V$ ist ein Homöomorphismus nach Definition der Quotiententopologie. (Inverse stetig wegen Injektivität).

■

Sei (X, x_0) topologischer Rum, $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ eine universelle Überlagerung, $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Wir haben folgende Rechtswirkung von Γ auf $(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$:

$$\boxed{\widetilde{\beta} : \widetilde{X} \times \Gamma \longrightarrow \widetilde{X}, ([\gamma], [\delta]) \longrightarrow [\gamma \cdot \delta].}$$

Dies ist tatsächlich eine Wirkung, denn $[(\gamma \cdot \delta_1) \cdot \delta_2] = [\gamma \cdot (\delta_1 \cdot \delta_2)]$. Es ist ebenfalls eine Überlagerungswirkung: Für jedes $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ gibt es eine Umgebung $U_{[\gamma]}$ (bei der Konstruktion von $\widetilde{X}$ benutzt) mit: $[\gamma_1] \neq [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0) \Longrightarrow U_{[\gamma]} \cdot \gamma_1 \cap U_{[\gamma]} \cdot \gamma_2 = \emptyset$ (wurde bei Konstruktion von $\widetilde{X}$ bewiesen).

2.7.12 Korollar. *Sei $\Lambda < \Gamma := \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Dann gilt: die Abbildung $q_\Lambda : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)/\Lambda =: X_\Lambda$ ist eine Überlagerung.*

Also haben wir:

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \arrow[d, "\widetilde{p}"'] \arrow[dr, "q_\Lambda"] & \\
(X, x_0) & (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \arrow[l, "p_\Lambda"]
\end{tikzcd}$$

Wenn $\widetilde{x} \cdot g = \widetilde{y}$ für ein $g \in \Lambda$ mit $\widetilde{x} = [\gamma]$, $\widetilde{y} = [\gamma']$, $g = [\delta]$. Dann $[\gamma'] = [\gamma \cdot \delta] \Longrightarrow \gamma'(1) = \gamma(1) \Longrightarrow \widetilde{p}(\widetilde{y}) = \widetilde{p}(\widetilde{x}) \Longrightarrow \exists p_\Lambda : (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig (nach universellen Eigenschaft von Quotientenraum) $p_\Lambda([\gamma] \cdot \Lambda) = \gamma(1)$.

2.7.13 Proposition. *p_Λ ist eine Überlagerung.*

Beweis. Zu zeigen: $\forall x \in X \exists U \ni x$ s.d. $p_\Lambda^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ s.d. $p_\Lambda|_{V_j} : V_j \xrightarrow{\cong} U$ ein Homöomorphismus. Nimm U aus der Überlagerungseigenschaft von $\widetilde{p} \Longrightarrow \widetilde{p}(U) = \bigsqcup_{k \in K} \widetilde{V}_k \subset \widetilde{X}$ s.d. $\widetilde{p}|_{\widetilde{V}_k}$ Homöomorphismus $\Longrightarrow V_j := q_\Lambda(\widetilde{V}_k)$, wo $\widetilde{V}_{k_j}$ einzeln (aus jeder Λ-Bahn wird eine gewählt) aus Λ-Bahnen von $\widetilde{V}_k' s$ gewählt werden. ■

2.7.14 Proposition. $(p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) = \Lambda < \pi_1(X, x_0)$ *(insbesondere gibt es für jede $\Lambda < \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung, die Λ realisiert).*

Beweis. Wir haben folgende Charakterisierung von $(p_\lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda))$: $[\gamma] \in (p_\lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) \iff \widetilde{\gamma}$ ist eine Schleife in X_Λ (Hochhebung nach X_Λ). D.h. $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}(0) = x_0^\Lambda$. Sei $\widetilde{\widetilde{\gamma}}$ die Hochhebung von γ nach $\widetilde{X}$ (es gilt: $q_\Lambda(\widetilde{\widetilde{\gamma}}) = \widetilde{\gamma}$).

$\gamma(1) = x_0^\Lambda \iff \widetilde{\widetilde{\gamma}}(1)$ liegt in der Λ-Bahn von $\widetilde{x}_0$, also $\exists [\delta] \in \Lambda$ s.d. $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1) = \widetilde{x}_0 \cdot [\delta] = [\delta]$. Aber $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1) = [\gamma] \in \widetilde{X}$ (wenn $\gamma : I \longrightarrow X$ Weg, ist $\widetilde{\widetilde{\gamma}} : I \longrightarrow \widetilde{X}$, $t \mapsto [\gamma|_{[0,t)}]$ die Hochhebung von γ) $\implies [\gamma] = [\delta] \in \Lambda$. ∎

2.7.15 Definition. Zwei Überlagerungen $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, $p' : (Y', y_0') \longrightarrow (X, x_0)$ heißen $\boxed{\textit{isomorph}}$, wenn $\exists h : Y \longrightarrow Y'$ Homöomorphismus mit $p' \circ h = p$.

Frage: Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine (stetige) Abbildung. Wann existiert eine Hochhebung $\overline{f} : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ $(p \circ \overline{f} = f)$?

Beobachtung: Wenn $\overline{f}$ existiert, dann gilt: $f_* = p_* \circ \overline{f}_* : \pi_1(Z, z_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \implies \operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Im} p_* \subset \pi_1(X, x_0)$.

2.7.16 Proposition. *Sei p, f wie oben, Z wegzusammenhängend. Eine Hochhebung $\overline{f}$ existiert genau dann, wenn $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$.*

Beweis. Notwendigkeit erledigt. Sei $f : (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ gegeben, sei $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Sei $z \in Z$ gegeben, sei $\gamma_z : I \longrightarrow Z$ ein Weg von z_0 nach z. $f \circ \gamma_z$ ist ein Weg in X mit Anfang x_0. Sei $\overline{\gamma}_z$ die Hochhebung von $f \circ \gamma_z$ nach Y mit Anfang y_0. Sei $\overline{f}(z) := \overline{\gamma}_z(1)$. Dann $p \circ \overline{f}(z) = f(z)$ nach Eigenschaften von $\overline{\gamma}_z$.

Frage: Warum ist $\overline{f}$ wohldefiniert? Sei γ_z' ein anderer Weg von z_0 nach z, $f \circ \gamma_z', \overline{\gamma}_z'$ entsprechend. Zu zeigen: $\overline{\gamma}_z(1) = \overline{\gamma}_z'(1)$. Es ist $\gamma_z'^{-1} \circ \gamma_z \in \Omega(Z, z_0) \implies f \circ (\gamma_z'^{-1} \circ \gamma_z) \in \Omega(X, x_0)$. Also $[f \circ (\gamma_z'^{-1} \circ \gamma_z)] = f_*([\gamma_z'^{-1} \circ \gamma_z]) \subset \operatorname{Im} p_*$ nach Voraussetzung $\implies \gamma_z'^{-1} \circ \gamma_z$ hebt sich zu einer Schleife hoch; nach Eindeutigkeit ist diese Schleife gleich $\overline{\gamma}_z'^{-1} \circ \overline{\gamma}_z \implies \overline{\gamma}(z)(1) = \overline{\gamma}_z'(1)$. ∎

8. Vorlesung, 09.11.2016

---

9. Vorlesung, 10.11.2016

2.7.17 Satz. *Seien $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, $p' : (Y', y_0') \longrightarrow (X, x_0)$ wegzusammenhängende Überlagerungen mit $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = p'_*(\pi_1(Y', y_0')) \subset \pi_1(X, x_0)$. Dann gilt: $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ und $p' : (Y', y_0') \longrightarrow (X, x_0)$ sind isomorph.*

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[rr, shift right, "\overline{p}"'] \arrow[dr, "p"'] & & (Y', y_0) \arrow[ll, shift right, "\overline{p}'"'] \arrow[dl, "p'"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Satz über Hochhebung von Abbildungen liefert Hochhebungen $\overline{p}:(Y,y_0)\longrightarrow(Y',y_0')$, $\overline{p}':(Y',y_0)\longrightarrow(Y,y_0)$. Wir wollen zeigen, dass $\overline{p}\circ\overline{p}'=\mathrm{id}_{Y'}$, $\overline{p}'\circ\overline{p}=\mathrm{id}_Y$. Dazu: $\overline{p}\circ\overline{p}'(y_0')=y_0'$, d.h. die Menge $A':=\{y'\in Y' \mid \overline{p}\circ\overline{p}'=y'\}\neq\emptyset$. Wir zeigen: A' ist offen und abgeschlossen:

- A' abgeschlossen, denn $A'=((\overline{p}\circ\overline{p}')\times\mathrm{id})^{-1}(\Delta)$, wobei $\Delta:=\{(y',y')\mid y'\in Y'\}\subseteq Y'\times Y'$.
- A' ist offen, denn $\overline{p}\circ\overline{p}' : (Y',y_0')\longrightarrow(Y',y_0')$ ist eine Hochhebung von der $p':(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$, denn $p'\circ\overline{p}\circ\overline{p}'=p\circ\overline{p}'=p'$.

$$\begin{tikzcd}
 & (Y',y_0') \arrow[d, "p'"] \\
(Y',y_0') \arrow[ur, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "\overline{p}\circ\overline{p}'"'] \arrow[r, "p'"'] & (X,x_0)
\end{tikzcd}$$

Sei $U\subset X$ eine offene Teilmenge s.d. $p^{-1}(U)=\bigsqcup_{j\in J}V_j$ s.d. $p'|_V : V_j \xrightarrow{\cong} U$ lokaler Homöomorphismus ist. Sei $y'\in Y'$ s.d. $p'(y')\in U$, s.d. $\mathrm{id}(y')=\overline{p}\circ\overline{p}'(y')$. Es $\exists j$ s.d. $y'\in V_j$. Daher bildet $\overline{p}\circ\overline{p}'$ das V_j in V_j ab. Das heißt, dass $\overline{p}\circ\overline{p}'|_{V_j}=\mathrm{id}|_{V_j} \implies A'$ ist offen (mit jedem Punkt enthält sie eine Umgebung). Nun ist Y' ist wegzusammenhängend $\implies A'=Y' \implies \overline{p}\circ\overline{p}'=\mathrm{id}$; aus Symmetriegründen folgt auch $\overline{p}'\circ\overline{p}=\mathrm{id}_Y$. ∎

2.7.18 Satz (Klassifikationssatz für Überlagerungen). *Es gibt eine* $1:1$*-Korrespondenz zwsichen*

$$\left(\begin{array}{c}\textit{Isomorphieklassen von Überlagerungen}\\ p:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)\ \textit{(wegzusammenhängend)}\end{array}\right)\quad \textit{und}\quad \left(\begin{array}{c}\textit{Untergruppen}\\ \Lambda<\pi_1(X,x_0)\end{array}\right)$$

Die Korrespondenz ordnet einer Überlagerung $p:(Y,y_0)\longrightarrow(X,x_0)$ *die Untergruppe* $p_*(\pi_1(Y,y_0))\subseteq\pi_1(X,x_0)$ *zu.*

Beweis. Es folgt aus

(1) Existenz von Überlagerungen zu jeder Untergruppe von $\pi_1(X,x_0)$.
(2) Überlagerungen, die zu gleicher Untergruppe gehören, sind isomorph.

∎

2.7.19 Beispiel (Klassifikation von Überlagerungen von S^1). Wir wissen schon: $\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $\Lambda\subset\mathbb{Z}$ ist von der Form $n\mathbb{Z}$ für ein $n\in\mathbb{N}$.

- $n=0:\Lambda=0<\mathbb{Z}$. Dazu gehört die universelle Überlagerung $\widetilde{p}:\mathbb{R}\longrightarrow S^1$, $x\mapsto e^{2\pi i x}$.
- $n\neq 0$: $\Lambda=n\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$, $p_n:S^1\longrightarrow S^1$, $z\mapsto z^n$.

Notation: $\Gamma:=\pi_1(X,x_0)$, $\Lambda<\Gamma \implies (X_\Lambda,x_0^\Lambda)$ ist die (eindeutig bestimmte) wegzusammenhängende Überlagerung, die zu Λ gehört.

Erinnerung:

$$\begin{tikzcd}
 & (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = (X_{\{1\}}, x_0^{\{1\}}) \arrow[dl, "\widetilde{p}"'] \arrow[dr, "q_\Lambda"] & \\
(Y, y_0) & & (X_\Lambda, X_0^\Lambda) \arrow[ll, "p_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

2.7.20 Lemma. $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \Gamma$*, dann gilt: es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(X_{\Lambda_1}, x_0^{\Lambda_1}) \arrow[dd, "p_{\Lambda_1}"'] \arrow[dr, "\exists q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} \text{ Überlagerung}"] & \\
 & (X_{\Lambda_2}, x_0^{\Lambda_2}) \arrow[dl, "p_{\Lambda_2}"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Entsprechend: Wenn es eine stetige Abbildung $q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1}$ *gibt, die das obige Diagramm kommutativ macht, dann gilt* $\Lambda_1 < \Lambda_2$.

Beweis. $X_{\Lambda_1} = \widetilde{X}/\Lambda_1$, $X_{\Lambda_2} = \widetilde{X}/\Lambda_2$. Wenn $\Lambda_1 < \Lambda_2$, dann erhalten wir eine kanonische stetige Abbildung

$$q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} : X_{\Lambda_1} = \widetilde{X}/\Lambda_1 \longrightarrow X_{\Lambda_1} = \widetilde{X}/\Lambda_2,$$

$p_{\Lambda_1} = p_{\Lambda_2} \circ q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1}$ nach Konstruktion von p_{Λ_1}, p_{Λ_2}. Die Umkehrung folgt aus Eindeutigkeit der Korrespondenz zwischen Gruppen mit Überlagerungen. ∎

2.7.21 Definition. Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung mit (X, x_0) wegzusammenhängend. Die Mächtigkeit von $p^{-1}(x_0)$ heißt *Anzahl der Blätter* der Überlagerung (wohldefiniert, da $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x)| \forall x \in X$ wegen X zusammenhängend).

2.7.22 Lemma. *Sei* $p_\Lambda : (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \longrightarrow (X, x_0)$ *eine Überlagerung (zur* $\Lambda < \pi_1(X, x_0) =: \Gamma$*). Dann gilt:* $|p_\Lambda^{-1}(x_0)| = [\Gamma : \Lambda]$.

Beweis. Sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $\widetilde{\gamma} : I \longrightarrow X_\Lambda$ die Hochhebung davon. Wenn $[\lambda] \in \Lambda \implies \widetilde{\lambda} \in \Omega(X_\Lambda, x_0^\Lambda)$, das heißt, $\widetilde{\gamma} \cdot \widetilde{\lambda}$ hat gleichen Endpunkt wie $\widetilde{\gamma}$. Definiere jetzt $\phi : \Gamma/\Lambda \longrightarrow p_\Lambda^{-1}(x_0)$, $[\gamma] \cdot \Lambda \mapsto \widetilde{\gamma}(1)$. Abb. ϕ ist bijektiv, denn:

- ϕ ist injektiv: $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}'(1) \implies \widetilde{\gamma}'^{-1} \circ \widetilde{\gamma} \in \Omega(X_\Lambda, x_0^\Lambda) \implies [\gamma'^{-1} \circ \gamma] \in \Lambda \implies [\gamma] \in [\gamma'] \cdot \Lambda$.
- ϕ ist surjektiv: X_Λ wegzusammenhängend $\implies \forall y \in p^{-1}(x_0) \exists \widetilde{\gamma} : I \longrightarrow X_\Lambda$, ein Weg von x_0^Λ nach y; $p_\Lambda \circ \widetilde{\gamma} \in \Omega(X, x_0)$ mit Hochhebung $\widetilde{\gamma}$, $\phi([p_\Lambda \circ \widetilde{\gamma}] \cdot \Lambda) = \widetilde{\gamma}(1) = y$.

∎

2.7.23 Korollar. *Die Anzahl der Blätter der universellen Überlagerung ist gleich* $|\pi_1(X, x_0)|$.

2.7.24 Definition. Sei $(Y, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ eine Überlagerung. Eine *Decktransformation* $h : Y \longrightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus mit $p \circ h = p$ (anders gesagt: $h : (Y, y_0) \longrightarrow (Y, h(y_0))$ ist ein Isomorphismus von Überlagerungen).

Die Decktransformationen bilden eine Gruppe, die durch $\mathrm{Aut}(p)$ bezeichnet wird.
Frage: Was ist $\mathrm{Aut}(p_\Lambda)$ in Termen von $\Lambda < \pi_1(X, x_0)$?

2.7.25 Definition. Eine Überlagerung $(Y, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ heißt *normal*, wenn die Gruppe von Decktransformationen $\mathrm{Aut}(p)$ *transitiv* auf $p^{-1}(x_0)$ wirkt ($\forall x_0' \in p^{-1}(x_0) \exists h \in \mathrm{Aut}(p)$ mit $h(x_0) = x_0'$).

2.7.26 Proposition. *Sei $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, s.d. beide Räume wegzusammenhängend sind, sei $\Lambda := p_*(\pi_1(Y, y_0)) < \pi_1(X, x_0) =: \Gamma$ die zugehörige Untergruppe. Dann gilt:*

(1) *p ist normal* $\Longleftrightarrow$ $\Lambda \triangleleft \Gamma$ *Normalteiler.*
(2) $\mathrm{Aut}(p) \cong N(\Lambda)/\Lambda$, *wobei*

$$N(\Lambda) := \{g \in \Gamma \mid g\Lambda g^{-1} = \Lambda\},$$

der Normalisator *von* Λ *in* Γ.
(3) *Insbesondere gilt: p normal* $\Longrightarrow$ $\mathrm{Aut}(p) \cong \Gamma/\Lambda$,

$$\mathrm{Aut}(\widetilde{p}) \cong \Gamma.$$

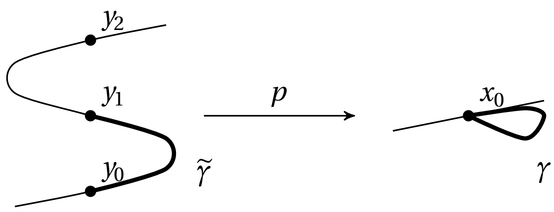
2.7.27 Korollar. $\mathrm{Aut}(\widetilde{p}) \cong \pi_1(X, x_0) = \Gamma$.

9. Vorlesung, 10.11.2016

---

10. Vorlesung, 17.11.2016

Erinnerung: p heißt normal, wenn $\mathrm{Aut}(p)$ transitiv auf $p^{-1}(x_0)$ wirkt, also $\forall y \in p^{-1}(x_0) \exists h \in \mathrm{Aut}(p)$ s.d. $h(y_0) = y_1$.



Beweis (der Proposition). Sei $h \in \mathrm{Aut}(p)$, dann haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} h: (Y, y_0) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (Y, y_1) \arrow[dl] \\ & (X, x_0) & \end{tikzcd}$$

$\Lambda = p_*\pi_1(Y, y_0) = p_*h_*\pi_1(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_1)$, weil h_* ein Isomorphismus ist.

Sei $\tilde{\gamma}$ ein Weg in Y von y_0 nach y_1, $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$. Es gibt einen Isomorphismus $\phi_\gamma : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_1)$, $[\delta] \mapsto [\tilde{\gamma} \cdot \delta \cdot \tilde{\gamma}^{-1}]$.

p_* ist injektiv $\Longrightarrow$ $p_*\pi_1(Y, y_0)$ und $p_*\pi_1(Y, y_1)$ sind durch $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ konjugiert:

$$[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = p_*\pi_1(Y, y_1).$$

Wenn jetzt $h \in \mathrm{Aut}(p)$ mit $h(y_0) = y_1$, so ist $p_*\pi_1(Y, y_1) = \Lambda$ nach obiger Beobachtung $\Longrightarrow$ $[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = \Lambda \iff [\gamma] \in N(\Lambda)$.

Das heißt: Wenn p normal ist, nimm ein beliebiges $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, lifte das zu $\tilde{\gamma}$ in Y mit Anfang y_0. Sei y_1 das Ende von $\tilde{\gamma}$. Nach Normalität von p $\exists h \in \mathrm{Aut}(p)$ mit $h(y_0) = y_1$ $\Longrightarrow$ $[\gamma] \in N(\Lambda)$. Da $[\gamma]$ beliebig war, folgt $N(\Lambda) = \Gamma \Longrightarrow \Lambda \trianglelefteq \Gamma$.

Umgekehrt: Wenn $\Lambda \trianglelefteq \Gamma$ normal, $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ gegeben. Nimm $\tilde{\gamma}$ in Y von y_0 nach y_1 $\Longrightarrow$ $\gamma := p \circ \tilde{\gamma}$ erfüllt $[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = \Lambda$. Da $[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = p_*\pi_1(Y, y_1)$, $\exists h : (Y, y_0) \longrightarrow (Y, y_1)$ mit $p \circ h = p$. Aus Symmetriegründen existiert $g : (Y, y_1) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit $p \circ g = p$. Da h, g eindeutig sind und jeweils p hochheben, gilt $g \circ h = \mathrm{id}$, $h \circ g = \mathrm{id}$ $\Longrightarrow$ $h \in \mathrm{Aut}(p)$.

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend left=50, "g \circ h"] \arrow[rr, bend left=25, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "p"'] & (Y, Y_1) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"] & (Y, Y_0) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, X_0) &
\end{tikzcd}$$

Damit ist (1) bewiesen.

Für (2): Wie betrachten die Abbildung $\varphi : N(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Aut}(p)$, $[\gamma] \mapsto h_{[\gamma]}$, $h_{[\gamma]}$ ist die eindeutig bestimmte Hochhebung

$$\begin{tikzcd}
& (Y, y_1) \arrow[d, "p"] \\
(Y, y_0) \arrow[ur, "h_{[\gamma]}"] \arrow[r, "p"'] & (X, x_0)
\end{tikzcd}$$

wobei $y_1 = \tilde{\gamma}(1)$, $\tilde{\gamma}$ ist die Hochhebung von γ.

γ ist wohldefiniert:

- $\tilde{\gamma}(1)$ kommt nur auf $[\gamma]$ an (homotope Wege haben homotope Hochhebungen).
- $h_{[\gamma]} \in \mathrm{Aut}(p)$ wie in (1). $h_{[\gamma]} \cdot h_{[\gamma]^{-1}}$ ist die Hochhebung der $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ und ist daher gleich id.
- φ ist ein Homomorphismus: $h_{[\gamma_2 \cdot \gamma_1]}$ und $h_{[\gamma_2]} \cdot h_{[\gamma_1]}$ heben $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ nach (Y, y_2) hoch $\Longrightarrow$ Gleichheit wegen Eindeutigkeit.

- φ ist surjektiv: Sei $h \in \mathrm{Aut}(p)$,

$$\begin{tikzcd} h:\ (Y,y_0) \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & (Y,y_1) \arrow[dl, "p"] \\ & (X,x_0) & \end{tikzcd}$$

  Sei $\widetilde{\gamma}$ ein Weg von y_0 nach y_1 in Y, $\gamma := p \circ \widetilde{\gamma}$. Dann ist $h = h_{[\gamma]}$ nach Konstruktion.
- $\ker \varphi = \{[\gamma] \in N(\Lambda) \mid h_{[\gamma]} = \mathrm{id}\} = \{[\gamma] \in N(\Lambda) \mid \widetilde{\gamma}(1) = y_0\}$. ($\Lambda$ besteht aus Schleifen unten, die sich zu Schleifen hochheben.) D.h. $\varphi : N(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Aut}(p)$ surjektiv, $\ker(\varphi) = \Lambda \implies \mathrm{Aut}(p) \cong N(\Lambda)/\Lambda$ nach dem Homomorphiesatz. ■

Erinnerung: $\Gamma \curvearrowright Y$ ist eine Überlagerungswirkung. Dann ist $q : (Y, y_0) \longrightarrow \left(Y/\Gamma, \overline{y_0}\right)$ eine Überlagerung.

Beobachtung: Jedes $g \in \Gamma$ definiert ein Element $\alpha(g) \in \mathrm{Aut}(q)$:

$$\begin{tikzcd} h:\ (Y,y_0) \arrow[rr, "\alpha(g)"] \arrow[dr, "q"'] & & (Y,\alpha(g)(y_0)) \arrow[dl, "q"] \\ & \left(Y/\Gamma, \overline{y_0}\right) & \end{tikzcd}$$

2.7.28 Proposition. *In der obingen Situation gilt:*

(1) $\mathrm{Aut}(q) \cong \Gamma$, *wenn* Y *wegzusammenhängend.*

(2) $\Gamma \cong \pi_1\left(Y/\Gamma\right)/q_*\pi_1(Y)$, *wenn* Y *wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Die Überlagerung $q : (Y, y_0) \longrightarrow \left(Y/\Gamma, \overline{y_0}\right)$ ist normal, weil $q^{-1}(\overline{y_0}) = y_0 \cdot \Gamma$, und Γ wirkt darauf transitiv.

$$\mathrm{Aut}(q) \cong \pi_1\left(Y/\Gamma\right)/q_*\pi_1(Y)$$

nach dem Satz oben.

Nun haben wir: Wenn $h \in \mathrm{Aut}(q)$

$$\begin{tikzcd} h:\ (Y,y_0) \arrow[rr] \arrow[dr, "q"'] & & (Y,y_1) \arrow[dl, "q"] \\ & \left(Y/\Gamma, \overline{y_0}\right) & \end{tikzcd}$$

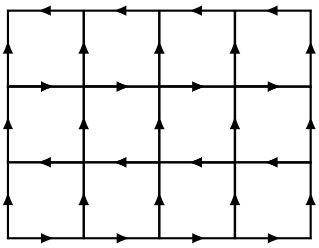
$\exists g \in \Gamma$ s.d. $y_1 = \alpha(g)y_0$. Aber dann ist $\alpha(g)$ auch eine Hochhebung von $q : (Y, y_0) \longrightarrow \left(Y/\Gamma, \overline{y_0}\right)$ nach $(Y, y_1) \implies h = \alpha(g) \implies \mathrm{Aut}(q) \cong \Gamma$. ■

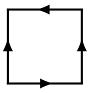
2.7.29 Korollar. *Wenn* $\Gamma \curvearrowright Y$ *eine Überlagerungswirkung ist,* Y *einfach zusammenhängend (*Y *wegzusammenhängend,* $\pi_1(Y) \cong \{1\}$*). Dann gilt:*

$$\pi_1(Y/\Gamma) \cong \Gamma.$$

2.7.30 Beispiel. • Es ist $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \mathbb{Z}/_2$. Denn $\mathbb{RP}^n \cong S^n/\mathbb{Z}/_2$, $\mathbb{Z}/_2 \curvearrowright S^n$ durch $t \cdot x = -x$ für $t = 1$.

- Sei $Y = \mathbb{R}^2$, dann $\mathbb{R}^2/_{\mathbb{Z}^2} \cong \Pi^2 \implies \pi_1(\Pi^2) \cong \mathbb{Z}^2$. Wirkung ist $t \cdot x := (x \mapsto x + t)$
- Sei $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ die Automorphismengruppe von diesen Graphen:



$\mathbb{R}^2/_\Gamma =$  $=$ die kleinsche Flasche F, $\pi_1(F) \cong \Gamma$.

Frage: Gibt es für jede Gruppe Γ einen wegzusammenhängenden Raum X mit $\pi_1(X) \cong \Gamma$? Wir werden für diese Frage die Cayley-Graphen betrachten und daraus den Raum X wie oben konstruieren.

2.7.31 Definition. Sei Γ eine Gruppe, $S \subset \Gamma$ Teilmenge,

$$\langle S \rangle := \bigcup_{\Lambda < \Gamma, S \subseteq \Lambda} \Lambda$$

die durch S erzeugte Untergruppe von Γ. S heißt *Erzeugendenmenge* von Γ, wenn $\langle S \rangle = \Gamma$. (Übung: $\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N},\ s_i \in S, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$).

2.7.32 Beispiel. $\Gamma = (\mathbb{Z}, +)$, $S = (2, 4)$, $\langle S \rangle = 2\mathbb{Z}$. $S' = \{3, 5\} \implies \langle S \rangle = \mathbb{Z}$.

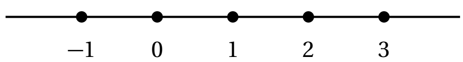
2.7.33 Definition. Sei Γ eine Gruppe, $S \subseteq \Gamma$, $\langle S \rangle = \Gamma$. $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist der Graph mit

- Ecken $V(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) = \Gamma$,
- Kanten $E(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) = \{(g, gs) \mid g \in \Gamma, s \in S\}$.

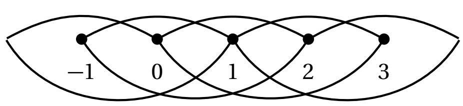
Entsprechend können wir $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ als einen 1-dimensionalen CW-Komplex auffassen (Ecken=0-Zellen, Kanten=1-Zellen).

2.7.34 Beispiel. $\Gamma = (\mathbb{Z}, +)$

- $S = \{1\}$:



- $S = \{2, 3\}$:



Die Linkswirkung von Γ auf sich selbst induziert eine Wirkung $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ($g \in \Gamma = V(\mathrm{Cay}(\Gamma, S))$, $\alpha(h)(g) = h \cdot g$).

$(g, gs) \in E(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) \rightsquigarrow \alpha(h)(g, gs) = (h, hgs) \in E(\mathrm{Cay}(\Gamma, S))$. Die Wirkung $\Gamma \curvearrowright \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist eine Überlagerung (Übung).

Den Quotientenraum ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathrm{Cay}(\Gamma, S)}$ kann man leicht verstehen; Γ wirkt transitiv auf Γ, also bleibt im Quotienten nur eine Ecke [1], an dieser Ecke bekommen wir $|S|$ Schleifen;

Sei X ein Punkt mit $|S|$ Schleifen. Was ist $\pi_1(X)$?

Beobachtung: Wenn $\pi_1(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) \cong \{1\} \implies \pi_1(X_S) \cong \Gamma$ nach Proposition. $\pi_1(X_1) = \pi(\;) \cong \mathbb{Z}$. Um $\pi(\;)$ zu berechnen, brauche ich eine Gruppe $\Gamma = \langle a, b\rangle$, s.d. $\pi_1(\mathrm{Cay}(\Gamma, \{a, b\})) \cong \{1\}$ (ohne Schleifen).

10. Vorlesung, 17.11.2016

---

11. Vorlesung, 23.11.2016

Frage: $\pi\Big(\underbrace{\qquad}_{{}_{\Gamma}\backslash^{\mathrm{Cay}(\Gamma, S)}}\Big)$ =? Wenn $\pi_1(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) = \{1\}$ ist $\Gamma \cong \pi_1(X_S)$.

2.8 Gruppen angegeben durch Erzeuger und Relationen; freie Gruppen

Fragestellung: Sei Γ eine Gruppe erzeugt durch $S \subseteq \Gamma$ ($\Gamma = \langle S\rangle$). Welche “Rechenregeln” gelten für Elemente in S. Kann man Γ anhand von S und dessen “Rechenregeln” beschrieben?

2.8.1 Beispiel. $\Gamma := \langle a, b\rangle$. Wenn in Γ gilt: $ab = ba$, was folgt über Γ? In Γ gilt: Jedes $g \in \Gamma$ kann man schreiben als $g = a^{\varepsilon_1} \cdot b^{\varepsilon_2} \cdot a^{\varepsilon_3} \cdots$, $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$. Nach der Rechenregel oben erhalten wir $g = a^n \cdot b^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Es kann sein, dass $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2 = \langle (0, 1), (1, 0)\rangle$ oder $\Gamma \cong \{1\}$, wenn $a = b$. Der Unterschied besteht darin, ob es weitere “Rechenregeln” gibt, die $a^n \cdot b^m$ verfeinern können.

2.8.2 Beispiel. $\Gamma := \langle a, b\rangle$ “ohne Rechenregeln”. Es gilt $\Gamma \ni g = a^{\varepsilon_1} \cdot b^{\varepsilon_2} \cdot a^{\varepsilon_3} \cdots$, $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$. Elemente sind z.B. $aba^{-1}b^{-1}$, $ab^2a^{-2}b^{-3}$ etc. Alle diese Wörter müssen unterschiedliche Elemente geben, denn: wenn z.B. $aba^{-1}b^{-1} = ab^2a^{-2}b^{-3} \iff b^3a^2b^{-2}a^{-1}aba{-}1b^{-1} = b^3a^2b^{-1}a^{-1}b^{-1} = 1$.

2.8.3 Definition. Sei S eine Menge,

$$X = S \sqcup \underbrace{\overline{S}}_{\substack{\text{Eine andere}\\ \text{Kopie von } S}}$$

Ein Wort im Alphabet X ist eine endliche Folge $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ von Elementen von X, $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0 \implies w = \underline{\varepsilon} = \underline{1}$ *leeres Wort*). Wort w heißt *reduziert*, wenn es kein Teilwort von der Form $s \cdot \overline{s}$ oder $\overline{s} \cdot s$ hat, $s \in S$. Z.B. $S = \langle a, b\rangle$, $a\overline{b}\overline{a}b$ reduziert, $a\overline{a}$ nicht reduziert.

Die Menge der Wörter bezeichnet man X^*. Die reduzierten Wörter bezeichnet man X^*_r. Wenn $v, w \in X^*$, $v = v_1 \cdots v_m$, $w = w_1 \cdots w_n$, $v_i, w_i \in X$ dann $v\,w := v_1 \cdots v_n\, w_1 \cdots w_n$. Die Reduktion eines Wortes $w = v\,s\,\overline{s}\,u$, $s \in S$, $v, u \in X^*$ ist das Wort $w' = v\,u$; die Reduktion von $w = v\,\overline{s}\,s\,u$ ist $w = v\,u$

2.8.4 Lemma. *Jedes Wort kann man durch endlich viele Reduktionsschritte auf ein reduziertes Wort bringen, dieses ist eindeutig.*

Bezeichnung: $r : X^* \longrightarrow X^*_r$, $w \longmapsto$ (reduzierte Form von w).

2.8.5 Proposition und Definition. $(X^*_r, \cdot)$, *$w \cdot v := r(w\,v)$ ist eine Gruppe. Sie heißt f r e i e G r u p p e mit dem Erzeugendensystem S.*

Beweis. Assoziativität folgt aus Assoziativität der Konkatenation und Eindeutigkeit der reduzierten Form: $w \cdot v \cdot u = r(w \cdot v \cdot u) = r(r(w \cdot v) \cdot u) = r(w \cdot r(v \cdot u))$. Sei $\overline{} : X \longrightarrow X$, $S \ni a \mapsto \overline{a} \in \overline{S}$, $\overline{S} \ni \overline{a} \mapsto a \in S$. Dann gilt mit $w^{-1} := \overline{w_n} \cdots \overline{w_1}$:

$$w^{-1} \cdot w = r(\overline{w_n} \cdots \overline{w_1} \cdot w_1 \cdots w_n) = \underline{1} = r(w_n \cdots w_1 \cdot \overline{w_1} \cdots \overline{w_n}) = w \cdot w^{-1}.$$

■

Bezeichnung: $\mathbb{F}_S$ freie Gruppe auf dem Erzeugendensystem S. Je zwei unterschiedliche reduzierte Wörter sind unterschiedliche Elemente von der Gruppe nach Konstruktion.

2.8.6 Proposition (Universelle Eigenschaft der freien Gruppe). *Sei S eine Menge, $\mathbb{F}_S$ freie Gruppe auf S. Dann gilt: für jede Gruppe Γ und jede Abbildung $\varphi : S \longrightarrow \Gamma$ $\exists!$ Homomorphismus $\phi : \mathbb{F}_S \longrightarrow \Gamma$ s.d. $\phi|_S = \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{F}_S \arrow[d, dashed, "\exists!\Phi"] \\ & \Gamma \end{tikzcd}$$

Bemerkung: Analog dazu gilt: V Vektorraum, $B \subseteq V$ Basis, $\forall$ Vektorräume W $\forall \varphi : B \longrightarrow W \exists! \phi : V \longrightarrow W$ linear mit $\phi|_B = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & V \arrow[d, dashed, "\exists!\Phi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $\varphi : S \longrightarrow \Gamma$ gegeben. Definiere $\Phi(w_1, ..., w_n) = \varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n)$, $w_i \in S = S \cup S^{-1}$. Sei $\varphi(w^{-1}) := \varphi(w)^{-1}$ (auf S^{-1} fortgesetzt). Dann gilt $\Phi(r(w \cdot v)) = \Phi(w \cdot v) = \Phi(w) \cdot \Phi(v)$ weil $\varphi(s) \cdot \varphi(s^{-1}) = \varphi(s) \cdot \varphi(s)^{-1} = 1 \implies \Phi$ ist eine Homomorphismus.

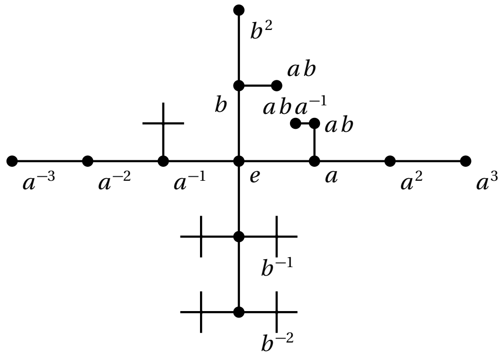
Eindeutigkeit: Wenn $\Psi : \mathbb{F}_S \longrightarrow \Gamma$ ist Homomorphismus mit $\Psi|_S = \varphi$, dann gilt: $\Psi(s^{-1}) = \Psi(s)^{-1} = \varphi(s)^{-1} = \Phi(s)^{-1}$, $s \in S$. Dann gilt: $\Psi(w_1 \cdots w_n) = \Psi(w_1) \cdot \Psi(w_n) = \varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n) = \Phi(w_1) \cdots \Phi(w_n) = \Phi(w)$. ■

2.8.7 Korollar. *Wenn* $|S| = |S'|$, *dann gilt* $\mathbb{F}_S \cong \mathbb{F}_{S'}$.

Beweis. Übung. ∎

2.8.8 Korollar. *Wenn* $\Gamma = \langle S \rangle$, *dann ist* Γ *ein Quotient von* $\mathbb{F}_S$: $\exists q : \mathbb{F}_S \twoheadrightarrow \Gamma$. *Nach universellen Eigenschaft:* q *surjektiv, weil* $\Gamma > q(\mathbb{F}_S) \supseteq dS \implies q(\mathbb{F}_s) \supseteq \langle S \rangle = \Gamma$.

Sei $\mathbb{F}_2 := \langle a, b \rangle$ frei auf 2 Erzeugern. Was ist $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$?



2.8.9 Proposition. $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$ *ist ein* 4*-regulärer Baum.*

Beweis. (1) Jede Ecke ist mit 4 anderen Knoten verbunden (durch a, b, a^{-1}, b^{-1}).

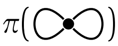
(2) Es ist ein Baum, denn: ein Zyklus an $w \in \mathbb{F}_2$ ist eine Sequenz $w, wa^{\varepsilon_1}, wa^{\varepsilon_2}b^{\varepsilon_2}, \ldots, w \cdot v = w \iff v = 1$, wobei v reduziert ist, weil wir Rückgänge nicht erlauben, somit ist v trivial $\implies$ es gibt keine Zyklen.

∎

2.8.10 Korollar. $\pi_1(\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})) \cong \{1\}$.

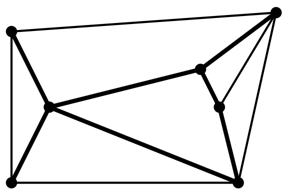
Beweis. $(\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\}))$ ist zusammenziehbar: wir müssen eine Homotopie zwischen id und $c : \mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2) \longrightarrow e$ konstruieren. Sei h_t, $t \in [0, 1]$ eine Familie der Abbildungen, die die 4 Kanten an 1 zusammenzieht?

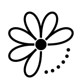
$h_t^{(1)}$ sei die Familie von Abbildungen, die diese neuen Kanten an e zusammenzieht. Die gewünschte topologie entsteht durch Ausführung von $h_t^{(n)}$ auf dem Intervall $t \in [1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}]$ und Verkleben. ∎

2.8.11 Korollar. $\pi($$) \cong \mathbb{F}_2$; *analog (Übung):* $\pi($$) \cong \mathbb{F}_S$.

$\mathbb{F}_2 \backslash \mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$ $\quad$ $|S|$ *viele*

Tatsächlich gilt noch mehr: die Fundamentalgruppe von jedem Graphen ist frei (Übung). Idee: $G = (V, E)$ hat einen maximalen Baum $T \subseteq G$, T wird zusammenziehbar



$\implies G \sim {}^{G}/_{T} =$ 

2.9 Angabe der Gruppen durch Erzeuger und Relationen.

2.9.1 Definition. Sei Γ eine Gruppe, $F \subseteq \Gamma$ eine Teilmenge. Die *normale Hülle* von F ist die kleinste normale Untergruppe $N \triangleleft \Gamma$, welche F enthält. Bezeichnung:

$$\langle\langle F\rangle\rangle = \bigcap_{N' \trianglelefteq \Gamma, N' \supseteq F} N'.$$

2.9.2 Proposition. *Sei Γ eine Gruppe, $F \subseteq \Gamma$ eine Teilmenge. Die normale Hülle $\langle\langle F\rangle\rangle$ hat folgende Eigenschaft: $\forall$ Homomorphismen $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ mit $F \subseteq \ker\varphi$ gilt: $\langle\langle F\rangle\rangle \subseteq \ker\varphi$, und $\langle\langle F\rangle\rangle$ ist die größte normale Untergruppe von Γ mit dieser Eigenschaft.*

Beweis. $\ker\varphi \triangleleft \Gamma \implies \big(F \subseteq \ker\varphi \implies \langle\langle F\rangle\rangle \subseteq \ker\varphi \big)$. Maximalität:

$$q : \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma/_{\langle\langle F\rangle\rangle}, \ \ker q = \langle\langle F\rangle\rangle.$$

■

2.9.3 Definition. Sei S eine Menge, $R \subseteq \mathbb{F}_S$. Die Gruppe $\Gamma = \langle S|R\rangle$ definiert durch Erzeuger S mit Relationen R ist

$$\Gamma = \langle S|R\rangle := \mathbb{F}_S/_{\langle\langle R\rangle\rangle}.$$

2.9.4 Proposition. *$\Gamma = \langle S|R\rangle$ hat folgende universelle Eigenschaft: $\forall$ Gruppen Λ und jede Abbildung $\varphi : S \longrightarrow \Lambda$ s.d. $\ker\phi \supseteq \langle\langle R\rangle\rangle$, wobei $\phi : \mathbb{F}_S \longrightarrow \Lambda$ der durch φ induzierter Homomorphismus ist, existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\overline{\phi} : \Gamma \longrightarrow \Lambda$. Die Abbildung kann man auf Erzeuger angeben, wenn Relationen erfüllt sind.*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook] \arrow[ddr, "\varphi"'] & \mathbb{F}_S \arrow[d, "q"] \arrow[dd, bend left, "\phi"] \\
& \Gamma \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{\phi}"] \\
& \Lambda
\end{tikzcd}$$

Beweis. Übung. ■

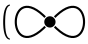
2.9.5 Beispiel. $\Gamma = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle \ \big(= \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1\rangle = \langle a, b \mid ab = ba\rangle . \big)$ Behauptung: $\Gamma \cong \mathbb{Z}^2$. Ein Homomorphismus ist $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, $a \mapsto (1,0)$, $b \mapsto (0,1)$ ist surjektiv, weil $(1,0), (0,1)$ das $\mathbb{Z}^2$ erzeugen, die inverse Abbildung ist $\Psi : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \Gamma$, $(1,0) \mapsto a$, $(0,1) \mapsto b$.

11. Vorlesung, 23.11.2016

---

12. Vorlesung, 24.11.2016

Letztes mal: Da Cayley-Graphen von freien Gruppen Bäume sind: $\pi_1\big($$\big) \cong \mathbb{F}_S$, $\underbrace{\hphantom{xxx}}_{|S| \text{ viele}}$. Frage:

Kann man diese Tatsache auch folgendermaßen verstehen: $\pi_1(X_1) = \pi\big($$\big) \cong \mathbb{Z} = \langle a \rangle$ und $\pi_1(X_1) = \pi_1\big($$\big) \cong \mathbb{Z} = \langle b \rangle \implies \pi_1\big($$\big) \cong \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$. Genauer: Wie berechnet man $\pi(U_1 \cup U_2)$ in Termen von $\pi_1(U_1)$ und $\pi_1(U_2)$? Die Antwort auf diese Frage ist der Satz von Seifert—van Kampen.

2.9.6 Definition. Seien $\Gamma_1, \Gamma_2, \Lambda$ drei Gruppen und seien die Homomorphismen $\varphi_1 : \Lambda \longrightarrow \Gamma_1$, $\varphi_2 : \Lambda \longrightarrow \Gamma_2$ gegeben. Also ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & \end{tikzcd}$$

Eine Gruppe Γ zusammen mit Homomorphismen $\psi_1 : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma$, $\psi_2 : \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma$ heißt *Pushout* von diesem Diagramm, wenn

(1) $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.
(2) $\forall$ Gruppen G mit Homomorphismen $\theta_1 : \Gamma_1 \longrightarrow G$, $\theta_2 : \Gamma_2 \longrightarrow G$ mit $\theta_1 \circ \varphi_1 = \theta_2 \circ \varphi_2$ $\exists! \phi : \Gamma \longrightarrow G$, welcher das Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\psi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\ \Gamma_2 \arrow[r, "\psi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \Gamma \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\ & & G \end{tikzcd}$$

Pushouts kann man auch für

- Mengen $\longrightarrow$ Mengenabbildungen,
- Vektorräume $\longrightarrow$ lineare Abbildungen,
- topologische Räume $\longrightarrow$ stetige Abbildungen,

definieren. Auf Mengen:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & Y_1 \arrow[d, "\psi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\
Y_2 \arrow[r, "\psi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & Y \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

$$Y := Y_1 \sqcup_{\varphi_1,\varphi_2} Y_2 = {Y_1 \sqcup Y_2}\big/_{\varphi_1(x)\sim\varphi_2(x)\forall x\in X}.$$

Gegeben θ_1,θ_2 mit $\theta_1\circ\varphi_1=\theta_2\circ\varphi_2 \implies \theta_1(\varphi_1(x))=\theta_2(\varphi_2(x)) \implies \theta_1,\theta_2$ sind konstant auf Äquivalenzklassen von $\sim \implies \exists\phi : Y \longrightarrow Z$, $y_1\mapsto\theta_1(y_1)$, $y_2\mapsto\theta_2(y_2)$.

2.9.7 Beispiel. $\Lambda=\{1\}$, $\Gamma_1=\Gamma_2=\mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \mathbb{Z}=\langle b\rangle \\
\langle a\rangle = \mathbb{Z} &
\end{tikzcd}$$

Behauptung: Pushout von dem obigen Diagramm ist $\Gamma=\mathbb{F}_2=\langle a,b\rangle$ mit $\psi_1:\mathbb{Z}=\langle a\rangle\hookrightarrow\mathbb{F}_2$, $\psi_2:\mathbb{Z}=\langle b\rangle\hookrightarrow\mathbb{F}_2$. Beweis: Gegeben eine Gruppe G, $\theta_1:\mathbb{Z}=\langle a\rangle\hookrightarrow\mathbb{F}_2$, $\theta_2:\mathbb{Z}=\langle b\rangle\hookrightarrow\mathbb{F}_2$

$$\begin{tikzcd}
S=\{a,b\} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \mathbb{F}_2 \arrow[d, "\exists!\phi"] \\
 & G
\end{tikzcd}
\qquad a \mapsto \theta_1(a),\quad b \mapsto \theta_2(b)$$

$$\phi(a)=\theta_1(a),\quad \phi(b)=\theta_2(b).$$

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \mathbb{Z}=\langle a\rangle \arrow[d, "\psi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\
\langle b\rangle=\mathbb{Z} \arrow[r, "\psi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \mathbb{F}_2 \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

2.9.8 Proposition. *Jedes Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \\
\Gamma_2 &
\end{tikzcd}$$

hat einen Pushout. Den kann man folgendermaßen konstruieren: Seien $\Gamma_1=\langle S_1|R_1\rangle$, $\Gamma_2=\langle S_2|R_2\rangle$. *Dann ist der Pushout*

$$\Gamma := \langle S_1\cup S_2 | R_1\cup R_2\cup\{\underbrace{\varphi_1(\lambda)}_{\in\Gamma_1}\underbrace{\varphi_2(\lambda)^{-1}}_{\in\Gamma_2} \mid \lambda\in\Lambda\}$$

Insbesondere ist der Pushout bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, ψ_1, ψ_2 sind induziert durch Inklusionen $S_1, S_2 \hookrightarrow S_1 \cup S_2$.

Beweis. Nach Proposition vom letzten Mal ist ein Homomorphismus $\phi : \Gamma \longrightarrow G$ bestimmt durch $\phi(S_1 \cup S_2)$, falls die Relationen im Kern des induzierten Homomorphismus $\overline{\phi} : \mathbb{F}_{S_1 \cup S_2} \longrightarrow G$ liegen.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\psi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\
\Gamma_2 \arrow[r, "\psi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \Gamma \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

Wir müssen nachrechnen, dass $R_1 \cup R_2 \cup \{\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \ker \overline{\phi}$, wobei $\phi(s_1) := \theta_1(s_1)$, $\phi(s_2) := \theta_2(s_2)$.

R_1, $R_2 \subseteq \ker \phi$, denn θ_1, θ_2 induzieren Homomorphismen $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$ auf freien Gruppen $\mathbb{F}_{S_1}$, $\mathbb{F}_{S_2}$, s.d. R_1 bzw. R_2 im Kern von $\overline{\theta}_1$ bzw. $\overline{\theta}_2$ liegt.

$$\overline{\phi}(\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)^{-1}) = \overline{\phi}(\varphi_1(\lambda))\overline{\phi}(\varphi_1(\lambda))^{-1} = \overline{\theta}_1(\varphi_1(\lambda))\overline{\theta}_2(\varphi_2(\lambda))^{-1} = 1,$$

weil $\theta_1 \circ \varphi_1 = \theta_2 \circ \varphi_2$. Γ ist durch $S_1 \cup S_2$ erzeugt $\implies \phi$ eindeutig bestimmt. ■

2.9.9 Definition. Der Pushout vom Diagramm

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_1 \\
\Gamma_2 &
\end{tikzcd}$$

heißt *freies Produkt* von Γ_1 und Γ_2. Bezeichnung: $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$.

Konkret: $\Gamma_1 = \langle S_1 | R_1 \rangle$, $\Gamma_2 = \langle S_2 | R_2 \rangle \implies \Gamma_1 * \Gamma_2 = \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$.

2.9.10 Beispiel. $\langle a_1, ..., a_n \rangle = \mathbb{F}_n = \mathbb{Z} * ... * \mathbb{Z}$.

2.9.11 Definition. Seien Γ_1, Γ_2 Gruppen, $\Lambda < \Gamma_1$, $\Lambda < \Gamma_2$. Der Pushout von

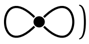
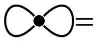
$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, hook, "\iota_2"'] & \Gamma_1 \\
\Gamma_2 &
\end{tikzcd}$$

heißt *amalgamiertes freies Produkt* von Γ_1, Γ_2 über Λ; Bezeichnung: $\Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$.

2.9.12 Satz (Seifert—van Kampen). *Sei $X = U_1 \cup U_2$ eine Vereinigung von zwei offenen Teilmengen, s.d. U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend sind. Sei $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt: $\pi_1(X, x_0)$ ist der Pushout von*

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r, hook, "(\iota_1)_*"] \arrow[d, hook, "(\iota_2)_*"'] & \pi_1(U_1, x_0) \\
\pi_1(U_2, x_0) &
\end{tikzcd}$$

wobei $\iota_1 : U_1 \hookrightarrow X$, $\iota_2 : U_2 \hookrightarrow X$ Inklusionsabbildungen sind.

2.9.13 Korollar. *$\pi_1\big($$\big) \cong \mathbb{F}_2$ (denn  $=$  $\cup$  mit einem gemeinsamen Mittelpunkt $\Longrightarrow \pi_1(U_1 \cap U_2) \cong 1$ und $\pi_1(U_1) = \pi_1(U_2) = \mathbb{F}_1$). Analoge Aussage hat man für n hintereinander geschachtelte Schleifen.*

Zur Idee des Beweises vom Satz von Seifert—van Kampen: Wir wollen zeigen, dass $\pi_1(X, x_0)$ ein Pushout ist d.h., $\forall G$ und $\forall \theta_1 : \pi_{U_1,x_0} \longrightarrow G$, $\theta_2 : \pi_{U_2,x_0} \longrightarrow G$ mit $\theta_1 \circ (\iota_1)_* = \theta_2 \circ (\iota_2)_* \exists! \phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$.

Frage: Wie interpretiert man einen Homomorphismus $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ geometrisch (topologisch)?

Konstruktion: Sei (Y, y_0) ein punktierter Raum, $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ ein Homomorphismus. Betrachte

$$Z := \widetilde{Y} \times_\theta G = \widetilde{Y} \times G \big/ (y \cdot [\gamma], g) \sim (y, \theta([\gamma])g), [\gamma] \in \pi_1(Y, y_0), g \in G \cdot$$

Alternativ:

$$Z := \widetilde{Y} \times G \big/ \pi_1(Y, y_0),$$

wobei $\pi_1(Y, y_0)$ von rechts auf $\widetilde{Y} \times G$ wirkt:

$$(y, g) \cdot [\gamma] = (y[\gamma], \theta([\gamma])^{-1} g).$$

$p : Z \longrightarrow Y$, $[(y,g)] \mapsto \widetilde{p}(y)$, $\widetilde{p} : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ dann ist $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerungsabbildung ($z_0 = [(\widetilde{y}_0, 1)]$), weil $\widetilde{p}$ eine Überlagerung war. Außerdem trägt Z eine rechte G-Wirkung durch Decktransformationen:

$$[(y, g)] \cdot h := [(y, gh)].$$

Außerdem gilt: $Z \big/ G \cong Y$. Fazit: Aus einem Homomorphismus $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ haben wir eine Überlagerung $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit einer G-Wirkung durch Decktransformation bekommen, s.d. $Z \big/ G \cong Y$.

2.9.14 Definition. Seien $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung mit einer G-Wirkung, $p' : (Z', z_0') \longrightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung mit einer G-Wirkung. Ein Homomorphismus $h : Z \longrightarrow Z'$ s.d. $p' \circ h = p$ und $h(z \cdot g) = h(z) \cdot g \forall z \in Z$, $g \in G$ heißt *Isomomorphismus* (von Überlagerungen mit G-Wirkung).

2.9.15 Proposition. *Homomorphismen $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ entsprechen eindeutig Isomorphieklassen von Überlagerungen $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit G-Wirkung s.d. $Z/G \cong Y$.*

Beweis. Inverse Konstruktion zur obigen. Wenn: $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine G-Überlagerung mit $Z/G \cong Y$. Sei $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ gegeben durch $[\gamma] \mapsto g_{[\gamma]}$ s.d. $z_0 \cdot g_\gamma = \widetilde{\gamma}(1)$, wobei $\widetilde{\gamma}$ die eindeutig bestimmte Hochhebung von γ ist. Diese Konstruktion ist invers zur obigen (wir zeigen allerdings nur eine Richtung) Wenn $Z = \widetilde{Y} \times_\theta G$, sei $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$, die Hochhebung $\widetilde{\gamma}$ von γ nach $\widetilde{Y}$ erfüllt $\widetilde{\gamma}(1) = [\gamma]$. D.h., die Hochhebung $\widetilde{\gamma}_z$ von γ nach Z erfüllt

$$\widetilde{\gamma}_z(1) = [(z_0[\gamma], 1)] = [(z_0, \theta([\gamma]))] = [(z_0, 1)] \cdot \theta([\gamma]) \implies g_{[\gamma]} = \theta([\gamma]).$$

■

12. Vorlesung, 24.11.2016

---

13. Vorlesung, 07.12.2016

Beweis (von dem Satz 2.9.12). Bedeutung von Satz von Seifert—van Kampen: Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r, "(\iota_1)_*"] \arrow[d, "(\iota_2)_*"'] & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\varphi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

φ_1, φ_2 seien Homomorphismen induziert durch $U_1, U_2 \hookrightarrow X$. Brauchen: Universelle Eigenschaft: Sei G eine Gruppe, θ_1, θ_2 gegeben. Nach Proposition heben wir Überlagerungen $(U_1', x_1) \longrightarrow (U_1, x_0)$ und $(U_2', x_1) \longrightarrow (U_2, x_0)$ mit G-Wirkungen, die zu $\theta_1 : \pi_1(U_1, x_0) \longrightarrow G$, $\theta_2 : \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow G$ gehören. Die Einschränkungen dieser Überlagerungen auf $U_1 \cap U_2$ sind isomorph als G-Überlagerungen, denn sie gehören nach Proposition zu Hom. $\theta_1 \circ (\iota_1)_*$ bzw. $\theta_2 \circ (\iota_2)_*$: $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \longrightarrow G$, die gleich sind. D.h. $\exists$ Homöomorphismus $h : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$, der mit Projektionen kommutiert und mit G-Wirkungen verträglich ist. Definiere

$$X' := U_1' \cup U_2' = U_1' \sqcup U_2' / x \sim h(x),$$

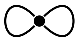
p_1, p_2 geben Abbildung $p : X' \longrightarrow X$. X' ist eine G-Überlagerung, weil U_1', U_2' es waren, h verträglich mit der G-Wirkung $\rightsquigarrow$ erhalte $\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow X$, der zu X' gehört. Es

gilt : $\phi \circ \varphi_2$ ist eindeutig durch die Struktur von X' über U_2 bestimmt $\Longrightarrow$ $\phi \circ \varphi_2 = \theta_2$.
Eindeutigkeit: Wenn $\phi' : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$ mit $\varphi' \circ \varphi_2 = \theta_2$, $\phi' \circ \varphi_1 = \theta_1$. Konstruiere eine Überlagerung $p : X'' \longrightarrow X$ zu ϕ.

- X'' ist über U_2 isomorph zu U_2', weil $\phi' \circ \varphi_2 = \theta_2$
- X'' ist über U_1 isomorph zu U_1', weil $\phi' \circ \varphi_1 = \theta_1$

$\Longrightarrow$ $X'' \cong X'$. ■

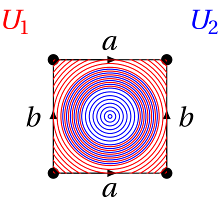
2.10 Konsequenzen des Satzes von Seifert–van Kampen

Erinnerung: $\pi_1($$, x_0) \cong \mathbb{F}_S$. $\pi_1($$, x_0)$ ein Pushout von

$|S|$ viele

$$\begin{tikzcd}
\{1\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; = \mathbb{F}_2
\end{tikzcd}$$

2.10.1 Beispiel. Wir betrachten den Torus $T = U_1 \cup U_2$, $\pi_1(T, x_0) \cong \mathbb{Z}^2$

$T =$ 

$\theta_1(aba^{-1}b^{-1}) = 1$ jedenfalls $\Longrightarrow \exists! \phi : \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
\langle t \rangle = \mathbb{Z} \cong & \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r, "t \,\mapsto\, aba^{-1}b^{-1}"] \arrow[d] & \pi_1(U_1, x_0) \; \cong \mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\
& \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \pi_1(T) \arrow[dr, dashed] & \\
& & \rotatebox{90}{$\cong$}\ \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle & G
\end{tikzcd}$$

Erweiterung zu einem mehrfachen Torus $\Sigma_g := U_1 \cup U_2$, wobei

- U_1 Umgebung von Schleifen $a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g$.
- U_2 die 2-Zelle, die längs $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ angeklebt wird.

$$\Sigma_g = \ldots = \prod_{k=1}^{g} [a_k, b_k].$$

Also man hat nach Seifert–van Kampen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}\cong \pi_1(U_1\cap U_2, x_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U_1, x_0) \cong \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\rangle \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\
1 \cong \pi_1(U_2, x_0) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \pi_1(\Sigma_g) \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

Wie beim Torus folgt $\pi_1(\Sigma_g)\cong\langle a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g \mid \prod_{k=1}^{g}[a_k,b_k]=1\rangle$. Die Fläche Σ_g von Geschlecht g entsteht, indem man an ein Bouquet von $2g$ Kreisen eine 2-Zelle angeklebt. Die Anklebeabbildung ist durch das Wort

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

bestimmt.

Sei $\Gamma = \langle S \mid R\rangle$ eine Gruppe gegeben durch Erzeuger und Relationen. Betrachte den CW-Komplex X_Γ gegeben durch:

- eine 0-Zelle e^0,
- $|S|$ 1-Zellen e_s^1, $s\in S$, die mit beiden Randpunkten an e^0 angeklebt werden,
- $|R|$ 2-Zellen e_r^2, $r\in R$ mit Anklebeabbildungen $\varphi_r : \partial e_r^2 \cong S^1 \longrightarrow e^0 \cup \bigcup_{s\in S} e_s^1$ (klebe e_r^2 längs des Weges r im Erzeuger $s\in S$ an). Wenn $r = s_1^{\alpha_1}\cdot s_2^{\alpha_2}\cdots s_k^{\alpha_k}$. Zerlege S^1 in $|\alpha_1|+\dots+|\alpha_k|$ gleiche Teile.

2.10.2 Beispiel.
- Wenn $\Gamma=\langle a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g \mid \prod_{k=1}^{g}[a_k,b_k]=1\rangle \implies X_\Gamma\cong\Sigma_g$.
- $\Gamma=\langle a \mid a^2=1\rangle \implies X_\Gamma \cong \mathbb{RP}^2$.

Frage/Verdacht: $\pi_1(X_\Gamma, e^0)\cong\Gamma$.

2.10.3 Proposition. *Sei X ein wegzusammenhängender Raum, sei*

$$Y = X\cup_{\varphi_\alpha}\left(\bigcup e_\alpha^2\right)_{\alpha\in A}$$

gleich X mit angeklebten Zellen e_α^2 durch Abbildung $\varphi_\alpha : S^1 \longrightarrow X$. Seien $x_\alpha\in\varphi_\alpha(S^1)$, $x_0\in X$, γ_α Weg von x_0 nach x_α. Sei $[\varphi_\alpha]\in\pi_1(X,x_\alpha)$ die Klasse von φ_α, $[\gamma_\alpha^{-1}\cdot\varphi_\alpha\cdot\gamma_\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$. Sei $N := \langle\langle[\gamma_\alpha^{-1}\cdot\varphi_\alpha\cdot\gamma_\alpha] \mid \alpha\in A\rangle\rangle \triangleleft \pi_1(X,x_0)$. Dann gilt:

(1) *Die Inklusion $X\hookrightarrow Y$ definiert eine Surjektion $\pi_1(X,x_0)\longrightarrow\pi_1(Y,x_0)$ mit Kern gleich N; also gilt $\pi_1(Y,x_0)\cong\pi_1(X,x_0)$.*
(2) *Wenn Y' von Y durch Ankleben von n-Zellen für $n>2$ erhalten wird, gilt: $Y\hookrightarrow Y'$ induziert einen Isomorphismus von Fundamentalgruppen.*
(3) *X CW-Komplex, dann gilt: die Inklusion $X^2\hookrightarrow X$ von dem 2-Skelett induziert einen Isomorphismus $\pi_1(X^2,x_1)\cong\pi_1(X,x_0)$.*

2.10.4 Korollar. *X CW-Komplex,*

$$X^2 = e^0 \cup \bigcup_{s\in S} e^1_s \cup_{\varphi_r} \bigcup_{r\in R} e^2_r$$

mit Anklebeabbildung φ_r. Seien $\overline{r} \in \mathbb{F}_s \cong \pi_1(X^1, e^0)$ induziert durch φ_r ($\overline{r} = [\varphi_r] \in \pi_1(X^1, e^0)$). Dann gilt: $\pi_1(X, x_0) \cong \langle S \mid \overline{r}, r \in R\rangle$.

13. Vorlesung, 07.12.2016

---

14. Vorlesung, 08.12.2016

Beweis (der letzten Proposition). Wähle $y_2 \in e^2_\alpha$. Schreibe $Z = U \cup V$, $U = Z \backslash \bigcup_\alpha \{y_\alpha\}$, $V = Z \backslash X \cong \{x'_0\}$. Dann

$$\underbrace{U \cap V}_{x'_0 := \{x_0\}\times 1 \in} = \bigcup_{\alpha\in A} e^2_\alpha \backslash \{y_\alpha\} \cup \bigcup_{\alpha\in A} (\operatorname{Im}\gamma_\alpha) \times (0,1].$$

$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Z, x'_0)$—Berechnung mit Seifert–van Kampen:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U\cap V, x'_0) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, x'_0) \arrow[d] & \cong \pi_1(X, x_0) \\
1 \cong \pi_1(V, x'_0) \arrow[r] & \pi_1(Z, x'_0) & \cong \pi_1(X, x_0)/N
\end{tikzcd}$$

$$\pi_1(U, x'_0) \cong \pi_1(X, x_0) \qquad \pi_1(U\cap V, x'_0) \cong \mathbb{F}_A = \langle a_\alpha \mid \alpha \in A\rangle.$$

Es gilt nach Konstruktion $\theta \circ \iota_*(a_\alpha) = [\gamma_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha \circ \gamma_\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Also $\pi_1(Z, x'_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N$, damit ist (1) bewiesen. (2) analog, wobei alle Gruppen im Diagramm trivial sind, da man in S^n für $n > 1$ schleifen zusammenziehen kann. (3): X CW-Komplex, dann gilt $\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$. ∎

2.10.5 Korollar. $\Gamma = \langle S \mid R\rangle$, $X_\Gamma = e^0 \cup \bigcup_{s\in S} e^1_s \cup_{\varphi_r} \bigcup_{r\in R} e^2_r$ *mit Anklebeabbildung φ_r durch Relationen gegeben, dann gilt*

$$\left(\mathbb{F}_S/\langle\langle R\rangle\rangle \cong\right) \pi_1(X_\Gamma) \cong \Gamma.$$

Für jeden CW-Komplex X kann man somit die Fundamentalgruppe in Termen on Erzeugern und Relationen aus der CW-Struktur bestimmen. Also gibt die Fundamentalgruppe nur Information über niedrigdimensionale Struktur von X. Somit kann man durch π_1 z.B. Flächen unterscheiden: $\pi_1(\Sigma_g)$ ist nicht isomorph zu $\pi_1(\Sigma_{g'})$ für $g \neq g'$, aber $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \ncong \pi_1(\mathbb{RP}^m)$ für $n \neq m$.

2.11 Höhere Homotopiegruppen

Nach Def. ist $\pi_1(X,x_0)=\{[\gamma]\mid\gamma:(S^1,1)\longrightarrow(X,x_0)\}$. Analog: $\pi_n(X,x_0)=\{[\gamma]\mid\gamma:(S^n,*)\longrightarrow(X,x_0)\}$.

2.11.1 Definition. (X,x_0), (Y,y_0) zwei punktierte Räume. Dann ist

$$X\vee Y := {X\sqcup Y}\big/_{x_0\sim y_0}$$

mit ausgewählten Punkten x_0, y_0 die *Ein-Punkt-Vereinigung*. Die Abbildung $S^1\xrightarrow{g}S^1\vee S^1$ definiert die Verknüpfung in der Fundamentalgruppe, gegeben $\gamma_1:S^1\longrightarrow X$, $\gamma_2:S^1\longrightarrow X$:

$$\gamma_1\vee\gamma_2:S^1\vee S^1\longrightarrow X \qquad \gamma_1\cdot\gamma_2:S^1\xrightarrow{g}S^1\vee S^1\xrightarrow{\gamma_1\vee\gamma_2}X$$

Analog hat man $q:S^n\longrightarrow S^n\vee S^n$. Verkbüpfung auf $\pi_n(X,x_0)$: f_1, $f_n\in\pi_n(X,x_0)$;

$$f_1\cdot f_2:S^n\xrightarrow{q}S^n\vee S^n\xrightarrow{f_1\vee f_2}(X,x_0).$$

Liefert Gruppenstruktur auf $\pi_n(X,x_0)$.

Hauptproblem: $\pi_n(S^k)$ sind unbekannt. Z.B. $\pi_3(S^2)$ ist nichttrivial $\Longrightarrow$ es existiert eine nichttriviale Abbildung $h:S^3\longrightarrow S^2$, die sogenannte *Hopf-Faserung*.

3 Homologie

3.1 Simplizialkomplexe

Wir beginnen mit dem *n-Simplex*:

$$\Delta^n := \left\{(t_i)_{i=0}^n \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^n t_i = 1\right\} = \overbrace{[v_0, v_1, ..., v_n]}^{\substack{\text{baryzentrische}\\ \text{Koordinaten}}},$$

$v_i := (0, ..., 1, ..., 0)$. Die *Facetten* f_k von Δ^n sind Simplizes $[v_0, ..., \hat{v}_k, ..., v_n]$, Simplizes von Dimension $n-1$.

Allgemeiner: Eine beliebige Teilmenge $I \subseteq \{0, ..., n\}$ definiert den Teilsimplex $\Delta_I \subset \Delta^n$; $\Delta_I := [v_i]_{i \in I}$. Gegeben beliebige Punkte $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, die affin unabhängig sind, hat man den Simplex

$$[a_0, ..., a_n] := \left\{\sum_{i=0}^n t_i a_i \mid t_i \geq 0,\ \sum_{i=0}^n t_i = 1\right\}.$$

Es gibt in diesem Fall eine kanonische affine Abbildung

$$\Delta^n \longrightarrow [a_0, ..., a_n],\ (t_i) \longrightarrow \left(\sum_{i=0}^n t_i a_i\right).$$

Die Ordnung der erzeugenden Ecken ist wichtig, wir unterscheiden zwischen $[a_0, ..., a_n]$ und $[a_1, a_0, ..., a_n]$ (der Simplex ist durch einige gewisse Ordnung auf den Ecken bestimmt).

3.1.1 Definition. Die Vereinigung von allen Facetten von Δ^n ist der Rand $\partial \Delta^n$,

$$\mathring{\Delta}^n := \Delta^n \setminus \partial \Delta^n.$$

3.1.2 Definition. Sei X ein topologischer Raum. X hat eine simpliziale Struktur (ist eine Simplizialkomplex), wenn eine Menge von Abbildungen $\sigma_\alpha : \Delta^{n(\alpha)} \longrightarrow X$ gegeben ist, so dass:

(1) $\sigma_\alpha\big|_{\mathring{\Delta}^n}$ ist injektiv, und jeder Punkt in X ist im Bild genau eines $\sigma_\alpha\big|_{\mathring{\Delta}^n}$.
(2) $\sigma_\alpha|_{f_k \subset \sigma_\alpha} = \sigma_\beta$ für ein geeignetes β. Hierbei benutzen wir die kanonische Identifizierung $[v_0', ..., v_{n-1}'] = \Delta^{n-1} \mapsto f_k = [v_0, ..., \hat{v}_k, ..., v_n]$.
(3) $A \subset X$ offen $\Longleftrightarrow$ $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ offen $\forall \alpha$.

Anschaulich: X ist Verklebung von Simplizes längs Ränder. Z.B.: Nicht erlaubt: Beispiele: Polyeder sind Simplizialkomplexe (eventuelle nach Unterteilungen von Facetten).

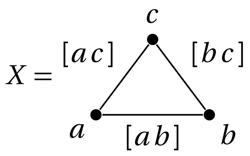
14. Vorlesung, 08.12.2016

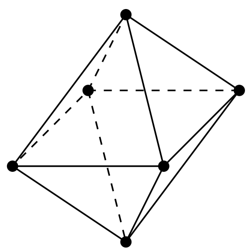
---

15. Vorlesung, 14.12.2016

3.2 Homologie für Simplizialkomplexe

Simplizialkomplexe: Zusammenkleben von Simplizes längs Facetten.





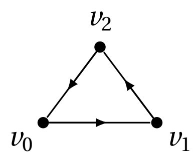
$2[ab]-3[bc]\in C_1^{\Delta}(X)$.

Intuitive Frage: Wie kann man Simplizialkomplexe topologisch unterscheiden? Geometrisch: Simplizialkomplexe können "Löcher verschiedener Dimensionen" haben. Kombinatorische Struktur auf Simplizes: Ränder. Der Standardsimplex:

$$\Delta^n := \left\{(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid t_i\geq 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\right\} = [v_0,\dots,v_n].$$

Die Facetten von Δ^n sind $[v_0,\dots,\hat{v}_k,\dots,v_n]$, die $(n-1)$-dimensionalen Teilsimplizes. Der Rand von Δ^n für kleinere n:

- $\Delta^0=\{*\}$, $\partial\Delta^0=\emptyset$.
- $\Delta^1=[v_0,v_1]$, $\partial\Delta^1=[v_1]-[v_0]\in\mathbb{Z}\cdot[v_0]\oplus\mathbb{Z}\cdot[v_1]$.
- $\Delta^2=[v_0,v_1,v_2]$; $\partial\Delta^2=[v_1,v_2]-[v_0,v_2]+[v_0,v_1]\in\mathbb{Z}[v_0,v_1]\oplus\mathbb{Z}[v_0,v_1]\oplus\mathbb{Z}[v_2,v_1]$.



Sei X ein Simplizialkomplex mit Strukturabbildungen $\sigma_\alpha:\Delta^n\longrightarrow X$.

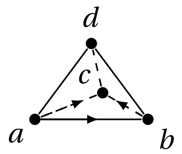
3.2.1 Definition. Die *simplizialen n-Ketten* von X sind Elemente der freien abelschen Gruppe erzeugt von den offenen n-Simplizes von X:

$$C_n^{\Delta}(X)=\bigoplus_{\sigma_\alpha:\Delta^n\longrightarrow X}\mathbb{Z}.$$

Sie sind als formale Summen darstellbar: $\sum_\alpha n_\alpha\sigma_\alpha,\ n_\alpha\in\mathbb{Z},\ \sigma_\alpha:\Delta^n\longrightarrow X$. Sei $\partial^n: C_n^{\Delta}(X)\longrightarrow C_{n-1}^{\Delta}(X)$ der *Randhomomorphismus* gegeben durch

$$\partial^n(\sigma_\alpha)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_\alpha\big|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}.$$

3.2.2 Beispiel. Wir betrachten

$X :=$ 

$C_0^{\Delta}(X) = \mathbb{Z}\cdot[a] \oplus \mathbb{Z}\cdot[b] \oplus \mathbb{Z}\cdot[c] \oplus \mathbb{Z}\cdot[d]$.

- 1-Simplizes: $[a\,b]$, $[b\,c]$, $[a\,c]$, $[a\,d]$, $[d\,b]$, $[d\,c]$.
- 2-Simplizes $[a\,b\,c]$, $[a\,b\,d]$, $[b\,c\,d]$, $[a\,c\,d]$.

Es gilt:

- $\partial[a\,b] = [b] - [a]$.
- $\partial[a\,b\,c] = [b\,c] - [a\,c] + [a\,b]$.
- $\partial(\partial[a\,b\,c]) = [c] - [b] - [c] + [a] + [b] - [a] = 0$.

3.2.3 Lemma. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1} \circ \partial_n(\sigma_\alpha) =& \partial_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_\alpha\big|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,v_n]}\right) \\
=& \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\sum_{j<i} (-1)^j \sigma_\alpha\big|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_j,\ldots,\hat{v}_i\ldots,v_n]}\right. \\
&\left. + \sum_{j>i} (-1)^{j-i} \sigma_\alpha\big|_{[v_0,\ldots,\hat{v}_i,\ldots,\hat{v}_j\ldots,v_n]}\right) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

■

3.2.4 Definition. Die Untergruppe $\ker \partial_n \subset C_n^{\Delta}(X)$ heißt die *Gruppe der n-Zykel* in X.

3.2.5 Definition. Die Untergruppe $\operatorname{Im} \partial_n \subset C_{n-1}^{\Delta}(X)$ heißt die *Gruppe der $(n-1)$-Ränder*.

Zum letzten Beispiel: $[b\,c\,d] - [a\,c\,d] + [a\,b\,d] - [a\,b\,c]$ ist ein 2-Zykel, aber kein Rand! (Übung) Beobachtung: Da $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, gilt $\operatorname{Im} \partial_n \subset \ker \partial_{n-1}$ (alle Ränder sind auch Zykel).

3.2.6 Definition. Die n-te *Simpliziele Homologiegruppe* von einem Simplizialkomplex X ist

$$H_n^{\Delta}(X) := {}^{\ker \partial_n}\big/_{\operatorname{Im} \partial_{n+1}} = {}^{n\text{-Zykel}}\big/_{n\text{-Ränder}}.$$

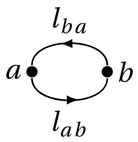
3.2.7 Definition. Eine Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Gruppen C_n mit Homomorphismen $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$, anschaulich

$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_n} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

heißt *Kettenkomplex*, falls $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

$H_n(C.) := {}^{\ker \partial_n}\big/_{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}$ ist die Homologie des Kettenkomplexes $C.$.

3.2.8 Beispiel. (1) Wir betrachten

$S^1 :=$ 

$C_0^\Delta(S^1) \cong \mathbb{Z}^2 = \langle a, b \rangle$, $C_1^\Delta(S^1) \cong \mathbb{Z}^2 = \langle l_{ab}, l_{ba} \rangle$, $C_n^\Delta(S^1) = 0$ für $n \geq 2$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z}l_{ab} \oplus \mathbb{Z}l_{ba} & & & & \\ & & & & \wr\| & & & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{\partial_0} & 0 \\ & & & & & & \wr\| & & \\ & & & & & & \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b & & \end{array}$$

Es gilt $\ker \partial_0 = C_0$, $\operatorname{Im} \partial_1 = \langle \partial\, l_{ab}, \partial\, l_{ba} \rangle = \langle b-a, a-b \rangle = \langle b-a \rangle \subset C_0 \implies$ simplizialer Kettenkomplex.

$$H_0^\Delta(S^1) \cong \underbrace{{}^{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b}\big/_{\langle b-a \rangle}}_{(na,mb) \mapsto n-m} \cong \mathbb{Z}.$$

Es gilt: $\partial_1(l_{ab}) = b - a$, $\partial_1(l_{ba}) = a - b$. Damit:

$$H_1^\Delta(S^1) := {}^{\ker \partial_1}\big/_{\operatorname{Im} \partial_2} = \ker \partial_1 = \underbrace{(n\, l_{ab} \oplus n\, l_{ba})}_{\cong \mathbb{Z}, \text{ erzeugt durch } l_{ab} + l_{ba}} \subset C_1.$$

(2) Torus:

$$C_2^\Delta(T^2) \cong \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}U \oplus \mathbb{Z} \cdot L$$

$$C_1^\Delta(T^2) \cong \mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z} \cdot b \oplus \mathbb{Z} \cdot c$$

$$C_0^\Delta(T^2) \cong \mathbb{Z} \cdot v.$$

$$\partial_2(L) = b + a + c$$

$$\partial_2(U) = -c - b - a$$

$$\partial_1(a) = \partial_1(b) = \partial_1(c) = v - v = 0.$$

$$H_0^\Delta(T^2) = {}^{\ker \partial_0}\big/_{\operatorname{Im} \partial_1} = {}^{C_0}\big/_{0} \cong C_0 \cong \mathbb{Z}.$$

$$H_1^\Delta(T^2) = {}^{\ker \partial_1}\big/_{\operatorname{Im} \partial_2} = {}^{C_1}\big/_{\operatorname{Im} \partial_2} \cong {}^{\mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \oplus \mathbb{Z}c}\big/_{\langle a+b+c \rangle} \cong \mathbb{Z}^2 = \langle [a], [b] \rangle.$$

$$H_2^\Delta(T^2) = {}^{\ker \partial_2}\big/_{\operatorname{Im} \partial_3} \cong \ker \partial_2 = \underbrace{\langle L + U \rangle}_{\cong \mathbb{Z}} \subset C_2$$

(3) Projektive Ebene:

$$C_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}U \oplus \mathbb{Z}L$$
$$C_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}^3 \cong \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}\cdot b \oplus \mathbb{Z}\cdot c$$
$$C_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}\cdot v \oplus \mathbb{Z}w.$$
$$\partial_2(L) = b - a - c$$
$$\partial_2(U) = c + b - a$$
$$\partial_1(a) = w - v,\ \partial_1(b) = w - v,\ \partial_1(c) = v - v = 0.$$
$$\partial_0 = 0.$$
$$H_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) = {C_0}\big/{\operatorname{Im} C_1} = {\mathbb{Z}_v \oplus \mathbb{Z}w}\big/{\langle w - v\rangle} \cong \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} H_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) = {\ker \partial_1}\big/{\operatorname{Im}\partial_2} = {C_1}\big/{\operatorname{Im}\partial_2} &\cong {\langle c, a-b\rangle}\big/{\langle c+b-a, b-a-c\rangle} \\ &= {\langle c, a-b\rangle}\big/{\langle c+b-a, 2c\rangle} \\ &= {\langle c, a-b-c\rangle}\big/{\langle c+b-a, 2c\rangle} \\ &= {\langle c, t\rangle}\big/{\langle t, 2c\rangle} \cong \mathbb{Z}\big/2. \end{aligned}$$

$$H_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) = {\ker\partial_2}\big/{\operatorname{Im}\partial_3} = \ker\partial_2 = 0.$$

15. Vorlesung, 14.12.2016

---

16. Vorlesung, 15.12.2016

Letztes mal: simpliziale Homologie. Fragen/Nachteile:

(1) $H_n^\Delta(X)$ hängen a priori von der Simplizialstruktur ab.
(2) $H_n^\Delta(X)$ nur für Simplizialkomplexe defininiert, man möchte sie für für andere Räume auch definieren!

Antwort: erweitere die Definition der Homologie!

3.2.9 Definition. Sei X ein topologischer Raum. Ein *singulärer n-Simplex* in X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$.

$$C_n(X) := \Big\{ \sum_i n_i\sigma_i \;\Big|\; n_i \in \mathbb{Z},\ \sigma_i : \Delta^n \longrightarrow X \text{ singuläre } n\text{-Simplizes}\Big\} = \bigoplus_{\sigma:\Delta^N \longrightarrow X} \mathbb{Z}.$$

Randhomomorphismus $\partial^n : C_n^\Delta(X) \longrightarrow C_{n-1}^\Delta(X)$ gegeben durch

$$\partial^n(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_\alpha\big|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}.$$

3.2.10 Lemma. $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Beweis. Wie vorher. ■

Wie vorher haben wir n-Zykel $Z_n := \ker \partial_n$, Ränder $B_n := \operatorname{Im} \partial_{n+1}$.

3.2.11 Definition. Die n-te singuläre Homotopiegruppe von X ist

$$H_n^{\Delta}(X) := \ker \partial_n \big/ \operatorname{Im} \partial_{n+1} = n\text{-Zykel} \big/ n\text{-Ränder}.$$

3.2.12 Definition. Die Sequenz

$$\longrightarrow \dots \longrightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_n} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

hießt *singulärer Kettenkomplex* von X

3.2.13 Lemma. *Wenn* $X = \bigsqcup_\alpha X_\alpha$. *Dann gilt:* $H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.

Beweis. Für jeden singulären Simplex $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ gilt: $\sigma(\Delta^n) \subset X_{\alpha_\sigma}$ für ein $\alpha_\sigma \implies C_n(X) = \bigoplus_\alpha C_n(X_\alpha)$, $\partial_n : C_n(X_\alpha) \longrightarrow C_{n-1}(X_\alpha) \implies H_n(X) = \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$. ■

3.2.14 Proposition. *Wenn* X *nichtleer und wegzusammenhängend ist, dann gilt:* $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Nach Definition gilt

$$H_0^{\Delta}(X) := \ker \partial_0 \big/ \operatorname{Im} \partial_1 = C_0 \big/ \operatorname{Im} \partial_1.$$

Definiere die Abbildung $\varepsilon : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\sum_i n_i \sigma_i \mapsto \sum_i n_i$. Diese ist surjektiv, weil $X \neq \emptyset$. Wir haben $\operatorname{Im} \partial_1 \subset \ker \varepsilon$: Für jeden singulären 1-Simplex $\sigma : \Delta^1 \longrightarrow X$—einen Weg in X—gilt $\partial_1 \sigma = \sigma(1) - \sigma(0) \overset{\varepsilon}{\mapsto} 0$. Es gilt auch $\ker \varepsilon \subset \operatorname{Im} \partial_1$: Sei $\sum_i n_i x_i \in \ker \varepsilon$, dann $\sum_i n_i = 0$. Wir wählen einen Punkt $x_0 \in X$ und Pfade $\tau_i : \Delta^1 \longrightarrow X$ mit $\tau_i(0) = x_0$, $\tau_i(1) = \sigma_i(v_0)$, und wir setzen $\sigma_0 : v_0 \mapsto x_0$. Dann ist τ_i singulärer 1-Simplex mit $\partial(\tau_i) = \sigma_i - \sigma_0$. Somit

$$\partial(\sum_i n_i \tau_i) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i,$$

denn $\sum_i n_i = 0$. Also ist $\sum_i n_i \sigma_i$ ein Rand. Also $\ker \varepsilon = \operatorname{Im} \partial_1 \implies H_0(X) = C_0 \big/ \operatorname{Im} \partial_1 \cong \operatorname{Im}(\varepsilon) = \mathbb{Z}$ nach dem Homomorphiesatz. ■

Bemerkung: $\varepsilon : C_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\sum_i n_i \sigma_i \mapsto \sum n_i$ heißt *Augmentationsabbildung.*

3.2.15 Proposition. *Es gilt:*

$$H_n(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Beweis. Es gibt für $\{*\}$ nur einen singulären Simplex $\sigma_n : \Delta^n \longrightarrow \{*\}$ in jeder Dimension. Also sieht der singuläre Kettenkomplex so aus:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& C_n & & & & C_0 &
\end{tikzcd}$$

$$\partial \sigma_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0, & n \text{ ungerade}, \\ \sigma_{n-1}, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Wir haben also

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & & C_2 & C_1 & C_0 &
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow H_0(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$, $H_n(X) = 0$, $n > 0$. ■

Beobachtung: Wenn X, Y topologische Räume sind und $f : X \longrightarrow Y$ stetig $\Longrightarrow f_* : C_n(X) \longrightarrow C_n(Y)$, $\sigma \mapsto f \circ \sigma$ und es gilt $\partial_n^Y \circ f_* = f_* \circ \partial_n^X$, weil

$$\partial_n(f \circ \sigma) = \sum (-1)^i f \circ \left(\sigma \big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right) = \sum (-1)^i \left(f \circ \sigma \big|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]} \right).$$

Dementsprechend gilt:

- $f_*(\ker \partial_n) \subset \ker \partial_n^Y$,
- $f_*(\operatorname{Im} \partial_n) \subset \operatorname{Im} \partial_n^Y$.

Wir bekommen also $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y), [e] \mapsto [f_* e]$.

3.2.16 Korrolar. $X \cong Y \implies H_n(X) \cong H_n(Y) \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. f, g inverse Homomorphismen $\implies f_* g_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ und $g_* f_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id}$. ■

Bemerkung: Algebraische Sichtweise: Wenn $C_{(\cdot)}, D_{(\cdot)}$ Kettenkomplexe

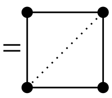
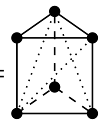
$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}^X"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n^X"'] \arrow[d, "f_{*n}"] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}^X"'] \arrow[d, "f_{*n-1}"] & C_{n-2} \arrow[r, "\partial_{n-2}^X"'] \arrow[d, "f_{*n-2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+1}^Y"'] & D_n \arrow[r, "\partial_n^Y"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}^Y"'] & D_{n-2} \arrow[r, "\partial_{n-2}^Y"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Eine Sequenz $f_{*n} : C_n \longrightarrow D_n$ on Homomorphismen heißt *Kettenabbildung*, wenn $\partial_n \circ f_{*n} = f_{*n-1} \circ \partial_n$.

3.2.17 Satz. *Seien X, Y topologische Räume, $f, g : X \longrightarrow Y$. Wenn $f \cong g$, dann gilt: $f_* = g_* : H_n(X) \longrightarrow H_m(Y)$.*

3.2.18 Korrolar. $X \cong Y \implies H_n \cong H_n(Y)$, $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Se $F : X \times I \longrightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g. Wir wollen aus F eine Abbildung zwischen $C_n(X)$ und $C_n(Y)$ bekommen. Wenn $\partial : \Delta^n \longrightarrow X$ ein singulärer Simplex ist, $\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \underset{g}{\xrightarrow{f}} Y$, $\Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma\times\mathrm{id}} X \times I \xrightarrow{F} Y$. Wir müssen $\Delta^n \times I$ in Simplizes zerlegen:

$\Delta^1 \times I =$  $\Delta^2 \times I =$ 

Allgemein: $\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^n [v_0, .., v_i, w_i, ..., w_n]$ (Nachrechnen!). Wir haben jetzt die Abbildung $F \circ (\sigma \times \mathrm{id}) : \Delta^n \times I \longrightarrow Y$ für jeden singulären Simplex $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$. Wir definieren nun die sogenannten *Prismoperatoren*

$$P_n(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \big(F \circ (\sigma \circ \mathrm{id})\big)\Big|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]} \in C_{n+1}(Y).$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, bend right, "f_*"'] \arrow[d, bend left, "g_*"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dl, "P_n"'] \arrow[d, bend right, "f_*"'] \arrow[d, bend left, "g_*"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "P_{n-1}"'] \arrow[d, bend right, "f_*"'] \arrow[d, bend left, "g_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wir zeigen jetzt folgende Identität: $\partial \circ P = g_* - f_* - P \circ \partial$. Indexverschiebung liefert:

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1} \circ P_n(\sigma) = &\sum_{j \le i} (-1)^j (-1)^i F \circ (\sigma \times \mathrm{id})\Big|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]} \\
&+ \sum_{j \ge i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times \mathrm{id})\Big|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat{w}_j,\dots,w_n]}
\end{aligned}$$

Terme $i = j$: Kürzen sich außer

$$F \circ (\sigma \times \mathrm{id})\Big|_{[\hat{v}_0,\dots,v_i,w_i,\dots,w_n]} - F \circ (\sigma \times \mathrm{id})\Big|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\hat{w}_n]} = g_* - f_*.$$

Die Terme mit $i \neq j$ vergleichen wir mit

$$\begin{aligned}
P \circ \partial(\sigma) = &P\Big(\sum_i (-1)^i \sigma\Big|_{[v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_n]}\Big) \\
= &\Big(\sum_i (-1)^i \sum_{j>i} (-1)^j (F \circ \sigma \times \mathrm{id})\Big|_{[v_0,\dots,v_j,w_j,\dots,\hat{w}_j,\dots,v_n]} \\
&+ \sum_i \sum_{j<i} (-1)^{i-1} (-1)^j (F \circ \sigma \times \mathrm{id})\Big|_{[v_0,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_j,w_j,\dots,v_n]}\Big)
\end{aligned}$$

Also gilt: $\partial \circ P = g_* - f_* - P \circ \partial$. Wir wollen zeigen: $f_* = g_*$ auf Homologie. Dazu sei $\alpha \in Z_n(X)$ (ein Zykel)

$$f_{*n}(\alpha) - g_{*n}(\alpha) = \partial \circ P(\alpha) + p \circ \partial(\alpha) = \partial \circ P(\alpha) \in \operatorname{Im} \partial$$

$\implies f_{*n}(\alpha) - g_{*n}(\alpha) \in B_n(Y) \implies f_*([\alpha]) = g_*([\alpha]) \in H_n(Y) \implies f_* = g_*$, da in $H_n(Y)$ durch $\operatorname{Im}\partial$ faktorisiert wird. ■

3.2.19 Definition. Seien $C_{(\cdot)}$, $D_{(\cdot)}$ Kettenkomplexe, $f_{(\cdot)}$, $g_{(\cdot)}$: $C_{(\cdot)} \longrightarrow D_{(\cdot)}$ Kettenabbildungen. Eine Sequenz $(P_n): C_n \longrightarrow D_{n+1}$ heißt *Kettenhomotopie* zwischen $f_{(\cdot)}$, $g_{(\cdot)}$, wenn $f_n - g_n = \partial_{n+1} \circ P_n - P_{n-1} \circ \partial_n$.

3.2.20 Lemma. $f_{(\cdot)}, g_{(\cdot)}$ *Kettenhomotop* $\implies f_* = g_* : H_n(C) \longrightarrow H_n(D)$.

Beweis. $\alpha \in Z_n \subset C_n \implies f_n(\alpha) - g_n(\alpha) = \partial_{n+1} \circ P_n(\alpha) - P_{n-1} \circ \partial(\alpha)$. Rest in dem letzten Beweis enthalten. ■

Was ist die Relation zwischen Homologiegruppen von X, $A \subset X$ und $X/_A$? Algebraische Vorbereitung: lange exakte Sequenzen.

3.2.21 Definition. Eine Sequenz von abelschen Gruppen A_n zusammen mit Homomorphismen $f_n : A_n \longrightarrow A_{n-1}$ heißt *exakt*, wenn $\ker f_n = \operatorname{Im} f_{n+1}$ ($\iff H_n(A_{(\cdot)}) = 0 \forall n$)

Demzufolge beschreibt Homologie, wie inexakt eine Sequenz ist.

3.2.22 Beispiel. Eine kurze exakte Sequenz ist eine exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 \tag{$*$}$$

3.2.23 Lemma. $(*)$ *kurze exakte Sequenz* $\iff$ f *injektiv,* g *surjektiv,* $B/_A \xrightarrow[\cong]{g} C$.

3.2.24 Definition. Ein Paar von topologischen Räumen (X, A), $(A \subset X)$ heißt *gutartig*, wenn A abgeschlossen ist und A ein Deformationsretrakt einer Umgebung $U \supset A$ ist.

3.2.25 Satz. *Wenn* (X, A) *ein gutartiges Paar ist, so haben wir eine lange exakte Sequenz:*

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n\left(X/_A\right) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

(i_* steht für kanonische Inklusion, p_* für kanonische Projektion.)

3.2.26 Beispiel. $(X, A) = (D^k, S^{k-1}) \rightsquigarrow$ Berechnung von $H_n(S^k)$.

16. Vorlesung, 15.12.2016

---

17. Vorlesung, 21.12.2016

Letztes mal: (X, A) gutartig, dann hat man folgende lange exakte Homologiesequenz:

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\iota_*} H_n(X) \xrightarrow{p_*} H_n\left(X/_A\right) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

3.2.27 Beispiel. $X = D^d$, $A = \partial D^d = S^{d-1} \subset D^d$. X ist zusammenziehbar

$$\Longrightarrow H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Denn mit $D^d/_{S^{d-1}} = S^d$:

$$\longrightarrow H_n(S^{d-1}) \xrightarrow{\iota_*} \underbrace{H_n(D^d)}_{=0} \xrightarrow{p_*} H_n(S^d) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(S^{d-1}) \longrightarrow \underbrace{H_{n-1}(D^d)}_{=0}$$

folgt:

$$\partial_n : H_n(S^d) \xrightarrow{\cong} H_n(S^{d-1})$$

ist ein Isomorphismus, das heißt: $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$; $\underbrace{H_k(S^1)}_{H_{k+d-1}(S^d)} \cong 0$ für $k > 1$. Also:

$$H_n(S^d) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0,\ n \neq d, \\ \mathbb{Z}, & n = d. \end{cases}$$

3.2.28 Korollar (Analogon des Brouwerschen Fixpunktsatzes für höhere Dimensionen). *∂D^d ist kein Retrakt von D^d; insbesondere hat jede stetige Abbildung $f : D^d \longrightarrow D^d$ einen Fixpunkt.*

Beweis. Durch Widerspruch. Sei $r : D^d \longrightarrow \partial D^d$ eine Retraktion $\Longrightarrow \overbrace{r \circ \iota}^{=\mathrm{id}} : \partial D^d \longrightarrow \partial D^d$. Es folgt: $\overbrace{r \circ \iota}^{=r_* \circ \iota_*} \longrightarrow$ ■

Strategie des Beweises:

(1) Rein algebraischer Teil: eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $0 \longrightarrow C.(A) \longrightarrow C.(X) \longrightarrow C.(X)/_{C.(A)} \longrightarrow 0$ gibt eine lange exakte Homologiesequenz.

(2) In dieser Homologiesequenz wir statt $H_n\left(X/_A\right)$ die sogenannte relative Homologie $H_n(X, A)$ stehen. Diese Gruppen müssen wir vergleichen.

3.2.29 Definition. Seien (A_n), (B_n), (C_n) Kettenkomplexe (jeweils mit Randabbildung $\partial_n(A)$, $\partial_n(B)$, $\partial_n(C)$). Eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist eine Familie von kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \longrightarrow 0,$$

die mit Randabbildungen verträglich sind, d.h. das Diagramm

3.2.30 Beispiel. $A \subset X$ Unterraum, $C_n(A)$—singuläre Ketten in A, $C_n(X)$—singuläre Ketten in X, $f_n : C_n(A) \longrightarrow C_n(X)$. Durch Inklusion induziert: $\sigma : \Delta^n \longrightarrow A \subset X$

$$\begin{tikzcd}
0 & C_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_n"] & C_n(X)/C_n(A) \\
0 \arrow[r] & C_{n-1}(A) \arrow[r] & C_{n-1}(X) \arrow[r] & C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)
\end{tikzcd}$$

3.2.31 Satz (Fundamentalsatz der homologischen Algebra). *Sei*

$$0 \longrightarrow A. \xrightarrow{f.} B. \xrightarrow{g.} C. \longrightarrow 0$$

eine Erweiterung von Kettenkomplexen. Es gibt eine lange exakte Homologiesequenz

$$\ldots \longrightarrow H_n(A.) \xrightarrow{f_*} H_n(B.) \xrightarrow{g_*} H_n(C.) \longrightarrow \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A.) \longrightarrow \ldots$$

Beweis. (1) Bestimmung der Randabbildung.

$$H_n(C.) = \ker \partial_n^C / \operatorname{Im} \partial_n^C.$$

Sei $[x] \in H_n(C.) \implies \exists x \in \ker \partial_n \subset C_n$, welches $[x]$ repräsentiert. $g_n : B_n \twoheadrightarrow C_n$ surjektiv $\implies \exists b \in B_n$ mit $f_n(b) = x$. Wegen Kommutativität gilt $g_{n-1} \circ \partial_n(b) = 0$, wegen Exaktheit der unteren Zeile gilt: $\exists a \in A_{n-1}$ mit $f_{n-1}(a) = \partial_n(b)$. Setze $\partial_*([x]) = [a] \in H_{n-1}(A.)$. Wohldefiniertheit: $f_{n-1}\partial_{n-1}(a) = \partial_{n-1} f_{n-1}(a) = \partial_{n-1}\partial_n(b) = 0$. Unabhängig von der Wahl von x: Sei $x' \in \partial_n^C$ mit $x' - x = c' \in \operatorname{Im} \partial_{n+1} \implies \exists c'' \in C_{n+1}$ mit $\partial_{n+1}(c'') = c'$. Sei $b'' \in B_{n+1}$ s.d. $g_{n+1}(b'') = c'' \implies x$ liefert zu $b' := b + \partial_{n+1}(b'') \in B_n \implies \partial_n(b') = \partial_n(b) + \partial_n \circ \partial_{n+1}(b'') = \partial_n(b)$. Unabhängig von der Wahl von b: Wenn $g_n(\widetilde{b}) = x$, dann gilt: $\widetilde{b} - b = \partial_n \circ f_n(\widetilde{a}) \in \operatorname{Im} \partial_n$, $\partial_*([x])$ ist unabhängig von der Wahl von b. Nun müssen wir zeigen, dass die Homologiesequenz exakt ist. Also z.z.:

$$\begin{aligned}
&\ker f_* \overset{(\supset)}{=} \operatorname{Im} \partial_* \\
&\ker g_* \overset{(\supset)}{=} \operatorname{Im} f_* : g. \circ f. : A. \longrightarrow C. \\
&\ker \partial_* \overset{(\supset)}{=} \operatorname{Im} g_* : g_*([b]) = [g_n(b)], \partial_* g_*([b]) = [0]
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
0 & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & C_{n+1} \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] & B_n \arrow[r] & C_n & 0
\end{tikzcd}$$

Die umgekehrten Inklusionen ($\subset$): $\ker g_* \subseteq \operatorname{Im} f_*$. Sei $\underset{\in H_n(B.)}{[b]} \in \ker g_*$, repräsentiert durch $b \in B_n$

$g_n(b) = \partial_{n+1}(c) = \partial_{n+1}(g_{n+1}(b')) = g_n(\partial_n(b')) \implies g_n(b - \partial_n(b')) = 0 \implies \exists a \in A_n$ s.d. $f_n(a) = b - \partial_{n-1}(b')$.

$f_{n-1}(\partial_n(a)) = \partial_n(f_n)(a) = \partial_n(b - \partial_{n+1}(b')) = 0 \implies \partial_n(a) = 0 \implies [a] \in H_n(A.)$
$f_*([a]) = [f_n(a)] = [b - \partial_{n+1}(b)] = [b]$.
$\ker f_* \subset \operatorname{Im} \partial_*$. Sei $[a] \in \ker f_* \implies a \in \ker \partial_n$, $f_n(a) \in \operatorname{Im} \partial_{n+1} \implies \exists b \in B_{n+1}$ mit $\partial_{n+1}(b) = a$.

$$\begin{tikzcd}
0 & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & C_{n+1} \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] & B_n \arrow[r] & C_n & 0
\end{tikzcd}$$

Sei $[g_{n+1}(b)] =: [x] \in H_{n+1}(C.)$. $(\partial_{n+1} \circ g_{n+1}(b) = g_n \circ \partial_{n+1}(b) = g_n \circ f_n(a) = 0.)$ $\partial_*[x] = [a]$ nach Definition der Randabbildung. Es bleibt noch: $\ker \partial_* \subset \operatorname{Im} g_*$. Sei $[x] \in \ker \partial_*$ mit $\partial_*[x] = 0$. D.h. wenn $b \in B_n$ mit $g_n(b) = x$ und $\partial_n(b) = f_{n-1}(a)$, dann gilt $a \in \operatorname{Im} \partial_n \implies \exists a' \in A_n$ s.d. $a = \partial_n(a')$.

$$\begin{tikzcd}
0 & A_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & B_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & C_{n+1} \arrow[d, "\partial_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r] & B_n \arrow[r] & C_n & 0
\end{tikzcd}$$

Sei $b' := f_n(a')$, $\partial_n(b') = f_{n-1}(a) = \partial_n(b)$. Das heißt $\partial_n(b - b') = 0$, $[b - b'] \in H_n(B.)$; $\partial_n(g_n(b - b')) = g_{n-1}(\partial_n(b - b')) = 0 \implies g_*([b - b']) \in H_n(C.)$, $g_n(b - b') = x - g_n(b') = x - g_n(f_n(a')) = x$.

■

Also haben wir:

$$0 \longrightarrow A. \longrightarrow B. \longrightarrow C. \longrightarrow 0$$

$$\implies \ldots \longrightarrow H_n(A.) \xrightarrow{f_*} H_n(B.) \xrightarrow{g_*} H_n(C.) \longrightarrow \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A.) \longrightarrow \ldots$$

3.2.32 Korrolar. *Wenn $A \subset X$, dann hat man eine lange exakte Homologiesequenz*

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots,$$

wobei

$$H_n(X, A) = H_n\left(C.(X) / C.(A)\right),$$

die sogenannte relative Homologiegruppe. $H_n(X, A) \ni [x]$ heißt $\partial_n(x) \in C.(A)$