

Algebraische Topologie¹

Dozent: Dr. Vadim Alekseev
L^AT_EX: rydval.jakub@gmail.com
Version: 11. November 2016
Technische Universität Dresden

¹Math Ma ALGTOP: Algebraische Topologie, WS 2016/17

Inhaltsverzeichnis

0	Einführung	1
1	Topologische Räume	2
1.1	Grundlagen	2
2	Homotopie	5
2.1	Motivation	5
2.2	Homotopie zwischen Abbildungen	6
2.3	Konstruktionen und Beispiele	7
2.4	Fundamentalgruppe	9
2.5	Fundamentalgruppe von S^1	12
2.6	Hochhebung von Wegen und Homotopien	13
2.7	Überlagerungen und Fundamentalgruppe	16

0 Einführung

Algebraische Topologie dient dazu, mittels algebraischen Methoden (Zuordnung von algebraischen Objekten) topologische Räume zu verstehen (Klassifizierung). Beispiele von algebraischen Objekten:

- $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *Einheitssphäre*,
- Π_2 *Torus*.

Ein Merkmal der Sphäre: jede Schleife $\gamma : [0, 1] \rightarrow S^2$ (stetig) ist zusammenziehbar. Auf dem Torus gibt es sogar zwei Arten nicht zusammenziehbarer Schleifen, die man ineinander nicht überführen kann.

Literaturempfehlung:

- A. Hatcher: Algebraic Topology (<https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>),
- C. Kosniowski: A First Course in Algebraic Topology,
- A. Fomenko, D. B. Fuchs: Homotopic Topology.

1 Topologische Räume

1.1 Grundlagen

1.1.1 Definition. (X, \mathcal{T}) ist ein topologischer Raum, wenn \mathcal{T} ein System von Teilmengen von X ist, das folgende Eigenschaften hat:

- (1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,
- (2) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
- (3) $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T} \implies \bigcup_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

\mathcal{T} heißt *Topologie*, Elemente von \mathcal{T} heißen *offene Teilmengen* von X , $U_t \subset X$ heißt *Umgebung* von einem $t \in X$ wenn $\exists O \in \mathcal{T}$ s.d. $t \in O \subset U_t$. $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ heißt *Basis* von \mathcal{T} , falls $\forall O \in \mathcal{T} \exists J \subset I$ s.d. $O = \bigcup_{j \in J} O_j$. $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* gdw. $X \setminus A$ offen ist. Sei (X, \mathcal{T}') ein weiterer topologischer Raum, dann ist \mathcal{T}' *stärker* als \mathcal{T} , wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ($\iff \mathcal{T}$ *schwächer* als \mathcal{T}')

1.1.2 Beispiel. • X beliebige Menge;

- $\mathcal{T}_{\text{disc}} = \{\text{alle Teilmengen von } X\}$ *diskrete Topologie*,
- $\mathcal{T}_{\text{triv}} = \{\emptyset, X\}$ *antidiskrete Topologie*.
- (X, d) metrischer Raum;
 - $\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ s.d. } B(x, \varepsilon) \subset U\}$.

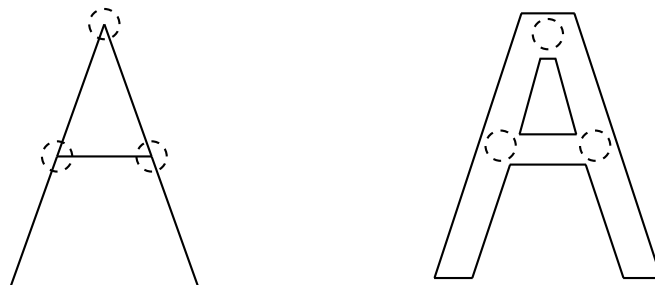
1.1.3 Definition. $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, Abb. $f : X \rightarrow Y$ heißt

- *stetig in* $x \in X$ falls \forall Umgeb. $U_{f(x)} \exists$ Umgeb. $U_x : f(U_x) \subset U_{f(x)}$,
- *stetig*, wenn $\forall U \in \mathcal{T}_Y$ gilt: $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$,
- *Homöomorphismus*, falls f stetig ist und $\exists g : Y \rightarrow X$ stetig mit $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$ (insbesondere sind Homöomorphismen stets Bijektionen).

Bemerkung: Falls nicht explizit gesagt, wird ab jetzt Stetigkeit aller Abb. vorausgesetzt.

1.1.4 Beispiel. • Eine “stetige Deformation” des Einheitskreises S_2 liefert einen Homöomorphismus zwischen den Parametrisierungen, die S_2 und das Endprodukt der Deformation beschreiben.

- Die Buchstaben



sind nicht homöomorph—die eindimensionale/“dünne” Version von A verliert durch Wegnahme von kleiner Umgebung geschickt gewählter Punkten den Zusammenhang, die zweidimensionale/“dicke” Version nicht.

1.1.5 Definition. topologischer Raum (X, \mathcal{T}_X) heißt:

- *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung $X = X_1 \sqcup X_2$ in zwei disjunkte, nichtleere, offene Mengen gibt,
- *wegzusammenhängend*, wenn $\forall x, y \in X \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X$ stetig mit $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

1.1.6 Proposition. Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.

Beweis. (Beruht an der Tatsache, dass $[0, 1]$ zusammenhängend ist.) (X, \mathcal{T}_X) topologischer Raum, $X = X_1 \sqcup X_2$, X_1, X_2 offen, nichtleer $\implies \exists x \in X_1, y \in X_2$. Da X wegzusammenhängend ist: $\exists \gamma : [0, 1] \rightarrow X, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Es folgt $[0, 1] = \gamma^{-1}(X) = \gamma^{-1}(X_1 \sqcup X_2) = \gamma^{-1}(X_1) \sqcup \gamma^{-1}(X_2)$. Die Tatsache, dass $\gamma^{-1}(X_1), \gamma^{-1}(X_2)$ offen sind liefert einen Widerspruch. ■

1.1.7 Definition. (X, \mathcal{T}) topologischer Raum, $A \subset X$.

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset F \subset X \\ \text{abgeschl.}}} F$$

ist der *Abschluss* von A . A liegt *dicht* in $X : \iff \overline{A} = X$.

1.1.8 Lemma. $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \ni x \text{ offen gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$.

Beweis. Übung. ■

1.1.9 Definition. (X, \mathcal{T}) topologischer Raum heißt *Hausdorffraum*, wenn

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x, U_y \text{ offen mit } x \in U_x, y \in U_y, U_x \cap U_y = \emptyset.$$

Bemerkung: Metrische Räume sind Hausdorffräume.

1.1.10 Definition. (X, \mathcal{T}) topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn es für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X (also U_i offen, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$) eine endliche Teilüberdeckung U_{i_1}, \dots, U_{i_n} gibt ($\exists i_1, \dots, i_n \in I$ s.d. U_i offen, $\bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = X$).

Bemerkung: Es ist sinnvoll, Kompaktheit nur auf Hausdorffräumen zu betrachten. Im Weiteren werden topologische Räume/ Hausdorffräume einfach mit X bezeichnet.

1.1.11 Definition. (X, \mathcal{T}_X) topologischer Raum, $Y \subset X \implies (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist topologischer Raum mit *induzierter Topologie* (*Teilraumtopologie*) $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_X\}$.

1.1.12 Proposition. X Hausdorffraum, $Y \subset X$ kompakt $\implies Y$ abgeschlossen.

Beweis. X ist Hausdorffraum $\implies \forall x \in X \setminus Y \forall y \in Y \exists V_{x,y} \ni y, U_{x,y} \ni x$ offen mit $V_{x,y} \cap U_{x,y} = \emptyset$. Wenn $x \in X \setminus Y \implies \bigcup_{y \in Y} (V_{x,y} \cap Y) = Y$, $V_{x,y} \cap Y$ offen in Y . Y ist kompakt $\implies \exists y_1, \dots, y_n \in Y$ s.d. $\bigcup_{k=1}^n (V_{x,y_k} \cap Y) = Y$, $V_{x,y_k} \cap U_{x,y_k} \implies U_{x,y_k} \cap Y = \emptyset \implies$ für $U_x := \bigcap_{k=1}^n U_{x,y_k}$ gilt $U_x \cap Y = \emptyset$. Nun ist $X \setminus Y = \bigcup_{x \in X \setminus Y} U_x$ offen $\implies Y$ ist abgeschlossen. ■

1.1.13 Proposition. X kompakt, Y Hausdorffraum, Abb. $f : X \rightarrow Y$ stetig, injektiv $\implies f : X \rightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. $f : X \rightarrow f(X)$ ist stetig und bijektiv \implies man braucht zu zeigen, dass die inverse Abb. stetig ist, oder, dass f abgeschlossene Teilmengen von X auf abgeschlossene Teilmengen von $f(X)$ abbildet. Nun, wenn $X' \subset X$ abgeschlossen, dann auch kompakt $\implies f(X')$ kompakt, da Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt ($f(X') = \bigcup_{i \in I} U_i \implies X' = \bigcup_{i \in I} f^{-1}U_i \stackrel{X' \text{ komp.}}{=} \bigcup_{k=1}^n f^{-1}U_{i_k} \implies f(X') = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$) $\implies f(X') \subset Y$ abgeschlossen nach obiger Proposition. ■

2 Homotopie

2.1 Motivation

Das $X :=$ “dickes A” und $Y :=$ “dünnes A” aus Beispiel 1.4 sind nicht homöomorph aber doch irgendwie ähnlich. Manchmal ist Homöomorphie eine zu strenge Forderung. Man hat eine Einbettung $\iota : X \rightarrow Y$ mit einer Familie von Abbildungen $f_t : X \rightarrow Y$, $t \in [0, 1]$, s.d.

- $f_0 = \text{id}_Y$,
- $f_1(Y) \subset \iota(X)$,
- die Abb. $F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$, $(y, t) \mapsto f_t(y)$ ist stetig,
- $f_t|_{\iota(X)} = \text{id}|_{\iota(X)}$.

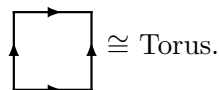
2.1.1 Definition. Sei Y ein topologischer Raum, $A \subset Y$ ein Teilraum. A heißt *Deformationsretrakt* von Y , wenn $\exists F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ stetig, s.d.

- $F(\cdot, 0) = \text{id}_Y$,
- $F(y, 1) \in A \forall y \in Y$,
- $F(a, t) = a \forall t \in [0, 1] \forall a \in A$.

2.1.2 Beispiel. Einheitssphäre S_1 ist kein Deformationsretrakt von $\overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^2$.

2.1.3 Definition. Sei X ein topologischer Raum, $f : X \twoheadrightarrow Y$ (d.h. f surjektiv), dann kann man eine Topologie $\mathcal{T}_f := \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \subset X \text{ offen}\}$ auf Y definieren. Diese heißt *Quotiententopologie*.

2.1.4 Beispiel. $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation, $q : X \rightarrow X/R$ kanonische Abbildung liefern eine Quotiententopologie auf X/R . Z.B. $X := [0, 1]^2$, \sim gegeben durch Identifizierung der Strecken $\{0\} \times [0, 1]$ mit $\{1\} \times [0, 1]$ und $[0, 1] \times \{0\}$ mit $[0, 1] \times \{1\}$. Die Menge X/\sim ist homöomorph zu dem Torus Π_2 . Anschaulich:



2.1.5 Proposition (universelle Eigenschaft der Quotiententopologie). Sei Y eine Menge, X ein topologischer Raum, $f : X \twoheadrightarrow Y$ (surjektive) Abbildung. Betrachte (Y, \mathcal{T}_f) . Dann gilt für alle topologische Räume Z : eine Abb. $g : Y \rightarrow Z$ ist stetig $\iff g \circ f : X \rightarrow Z$ ist stetig.

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\
f \downarrow & \nearrow g & \\
Y & &
\end{array}$$

Beweis. “ \implies ” $U \subset Z$ offen $\implies g^{-1}(U)$ offen $\implies f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ offen, d.h. $g \circ f$ stetig.

“ \impliedby ” $U \subset Z$ offen, $g \circ f$ stetig $\implies (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen $\implies g^{-1}(U)$ ist offen wegen \mathcal{T}_f . ■

2.1.6 Beispiel. Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, Zylinder $Z_f := X \times [0, 1] \sqcup Y / \sim$, wobei \sim Punkte $(x, 1) \in X \times [0, 1]$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert. Übung: $Y \subset Z_f$ ist ein Deformationsretrakt.

2.2 Homotopie zwischen Abbildungen

2.2.1 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ (stetig). Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $F(\cdot, 0) = f_0$, $F(\cdot, 1) = f_1$.

2.2.2 Definition. Sei $A \subset X$ ein Teilraum. Dann heißt eine Abbildung $r : X \rightarrow A$ mit $r|_A = \text{id}_A$ eine *Retraktion* von X auf A .

2.2.3 Definition. Seien X, Y topologische Räume, $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ stetig, $A \subset X$ Teilraum mit $f_0|_A = f_1|_A$, f_0 und f_1 heißen *homotop relativ zu A* , wenn $\exists F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ Homotopie zwischen f_0 und f_1 , sodass $F(a, t) = f_0(a) = f_1(a) \forall a \in A \forall t \in [0, 1]$.

2.2.4 Beispiel. Aus der Funktionentheorie ist Bekannt: $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow B(0, 1) \setminus \{0\}$, $t \mapsto 1/2e^{i\pi t}$ ist homotop zu $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow B(0, 1) \setminus \{0\}$, $t \mapsto 1/2e^{-i\pi t}$, sie sind allerdings nicht homotop relativ zu $\{-1/2, 1/2\}$.

2.2.5 Definition. Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn $\exists f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$, sodass $f \circ g$ homotop zu id_Y und $g \circ f$ homotop zu id_X .

Notation: $X \simeq Y$ (X homotopieäquivalent zu Y), $X \cong Y$ (X homöomorph zu Y).

2.2.6 Proposition. Sei Y ein topologischer Raum, $A \subset Y$ Teilraum. Wenn A ein Deformationsretrakt von Y ist, dann gilt $A \simeq Y$.

Beweis. Die Abb. $F : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ ist eine Homotopie zwischen id_Y und $r : Y \rightarrow A$, $r(y) := F(y, 1)$, die eine Retraktion ist, weil $r(a) = F(a, 1) = a \forall a \in A$. Betrachte $\iota : A \hookrightarrow Y$ Inklusion; $\iota \circ r \simeq \text{id}_Y$ durch F , $r \circ \iota = \text{id}_A$. ■

2.2.7 Definition. Ein topologischer Raum heißt *kontrahierbar*, wenn $X \simeq \{*\}$.

- 2.2.8 Beispiel.** • $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ ist zusammenziehbar: $\{0\} \subset B(0, 1)$ ist Deformationsretrakt via $F : B(0, 1) \times [0, 1] \rightarrow B(0, 1)$, $(x, t) \mapsto (1 - t)x$.
- \mathbb{R}^n ist zusammenziehbar, denn $B(0, 1) \cong \mathbb{R}^n$ (analog $(0, 1) \cong \mathbb{R}$ mittels $F : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan \pi(x - 1/2)$),
 - $S_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist nicht zusammenziehbar.

2. Vorlesung, 13.10.2016

3. Vorlesung, 19.10.2016

2.3 Konstruktionen und Beispiele

- Wiederholung: Torus lässt sich darstellen als

$$[0, 1] \times [0, 1] / (0, y) \sim (1, y) \wedge (x, 0) \sim (x, 1).$$

Sukzessives Zusammenkleben. Formales Vorgehen:

- (0) Starte mit einem Punkt $\{*\} =: e^0$.
- (1) Betrachte zwei Kopien von $[0, 1]$: $e_a^1 := [0, 1]$, $e_b^1 := [0, 1] \implies \partial e_a^1 = \{0_a, 1_a\}$, $\partial e_b^1 = \{0_b, 1_b\}$. Abbildungen $\varphi_a : \partial e_a^1 \rightarrow e^0 = \{*\}$, $\varphi_b : \partial e_b^1 \rightarrow e^0 = \{*\}$. Betrachte

$$X^1 := e^0 \cup e_a^1 \cup e_b^1 / \varphi_a(x) \sim x \wedge \varphi_b(x) \sim x$$

(habe e_a^1, e_b^1 an e^0 angeklebt).

- (2) Betrachte $e^2 := D^2 (= \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^2)$, $\partial e^2 := \partial D^2 = S^1$, $\varphi^2 : \partial e^2 \rightarrow X^1$,

$$\implies X^2 := X^1 \cup e^2 / \varphi^2(x) \sim x = \Pi^2.$$

- Konstruktion einer Sphäre: Verklebe den gesamten Rand einer Kreisscheibe mit einem einzigen Punkt. $X^0 := \{*\}$, $X^1 := X^0$, $e_2 = D^2$, $\varphi^2 : \partial e^2 \rightarrow X^1$, $x \mapsto * \implies X^2 := X^1 \cup e^2 / \varphi^2(x) \sim x = S^2$.

Notation:

- Zusammenkleben von Räumen längs einer Abbildung: Seien X, Y topologische Räume, $\varphi : A \subset X \rightarrow Y$ stetig. Dann ist

$$X \cup_{\varphi} Y := X \sqcup Y / x \sim \varphi(x), x \in X.$$

- $D^n := \overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^n$.
- $\partial D^n = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$.
- e_{α}^n bezeichnet stets eine Kopie von D^n . So eine Kopie heißt n -Zelle.

2.3.1 Definition. Ein *CW-Komplex* X ist ein topologischer Raum, der wie folgt entsteht:

- (0) Fange mit einem diskreten Raum $X^0 :=$ disjunkte Vereinigung von Punkten an.

- (1) Definiere induktiv die Räume X^n (die sogenannte n -Skelette / n -Gerüste von X) für $n \geq 1$ folgendermaßen: für eine Familie $\{e_\alpha^n\}_{\alpha \in A}$ von n -Zellen fixiere stetige Abbildungen $\varphi_\alpha^n : \partial e_\alpha^n \rightarrow X^{n-1}$ und definiere $X^n := (\bigsqcup_{\alpha \in A} e_\alpha^n) \cup_{\varphi_\alpha^n} X^{n-1}$.
- (2) $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$ mit der *schwachen Topologie*: $Y \subset X$ offen $\iff Y \cap X^n$ offen für alle n .

2.3.2 Definition. Eine topologische *Mannigfaltigkeit* von Dimension n ist ein Hausdorffraum X , sodass jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \ni x$ besitzt, die homöomorph zu \mathbb{R}^n ist.

2.3.3 Beispiel (Flächen höheren Geschlechts). Anschaulich: Man schneidet aus der Sphäre S^2 zwei Kreise aus und klebt an die Löcher die kreisförmigen Enden eines Zylinders $[0, 1] \times S^2$. Dieses Objekt ist homöomorph zu einem Torus. Eine Fläche Σ_g , die durch sukzessives Ankleben von g Handgriffen an die Sphäre S^2 heißt *Fläche von Geschlecht g* . Siehe z.B. Abbildung auf S. 5 in Hatcher: Algebraic Topology. Ferner:



Wiederholung: $\mathbb{RP}^2 := \{\text{Geraden } l \subset \mathbb{R}^3 \mid 0 \in l\}$ (topologisiert durch Winkelabstand) ist die *Projektive Ebene*. Andere Definition:

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^2 &:= \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / v \sim \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}^\times = \{[x_1 : x_2 : x_3] \mid (x_1, x_2, x_3) \neq 0\} \\ &= \underbrace{\{[x_1 : x_2 : 1]\}}_{\mathbb{R}^2} \cup \underbrace{\{[x_1 : x_2 : 0]\}}_{\mathbb{RP}^1} \end{aligned}$$

oder $\mathbb{RP}^2 := S^2 / x \sim -x$. Allgemeiner Fall:

$$\mathbb{RP}^n := \{\text{Geraden } l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid l \ni 0\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / v \sim \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}^\times = S^n / x \sim -x.$$

In sogenannten homogenen Koordinaten:

$$\{[x_0 : x_1 : \dots : x_n] \mid (x_0, \dots, x_n) \neq 0\} = \mathbb{R}^n \sqcup \mathbb{RP}^{n-1}.$$

Der kleinste Fall:

$$\mathbb{RP}^1 = \underbrace{\mathbb{R}}_{=e^1} \sqcup \underbrace{\{\infty\}}_{=e^0} = S^1 / x \sim -x \cong S^1.$$

\mathbb{RP}^n ist also ein *CW-Komplex* mit einer Zelle in jeder Dimension und die Anklebeabbildungen sind die kanonischen Abbildungen $\varphi^k : S^k \rightarrow \mathbb{RP}^k$.

3. Vorlesung, 19.10.2016

4. Vorlesung, 20.10.2016

2.4 Fundamentalgruppe

Sei X topologischer Raum (ab jetzt: alle Räume sind Hausdorff).

2.4.1 Definition. Eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ heißt *Weg* in X . Ein Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ heißt *Schleife* in X .

Konvention: Homotopie von Wegen wird immer relativ zu $\{0, 1\}$ verstanden. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ wird verstanden als $\gamma_1 \sim_{\{0,1\}} \gamma_2$. ($\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1 = \gamma_2(1)$, $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ zwischen γ_1 und γ_2 muss $H(0, t) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $H(1, t) = \gamma_1(1) = \gamma_2(1)$). Notation:

- $I := [0, 1]$,
- $H : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen f und g , dann schreibe $H : f \rightsquigarrow g$.

2.4.2 Beispiel. Je zwei Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten in \mathbb{R}^n sind homotop: $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = y$. Wähle $H(s, t) := t \cdot \gamma_2(s) + (1 - t)\gamma_1(s) \implies H$ ist eine Homotopie.

2.4.3 Korollar. Alle Schleifen an $0 \in \mathbb{R}^n$ sind homotop.

2.4.4 Proposition. Homotopie von Wegen mit festen Endpunkten $x, y \in X$ ist eine Äquivalenzrelation. Sei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 : I \rightarrow X$. Wegen $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_3(0) = x$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \gamma_3(1) = y$:

- $\gamma_1 \sim \gamma_2, \iff \gamma_2 \sim \gamma_1$
- $\gamma_1 \sim \gamma_1$
- $\gamma_1 \sim \gamma_2, \gamma_2 \sim \gamma_3 \implies \gamma_1 \sim \gamma_3$.

Beweis. • $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$ Homotopie, dann ist $\overline{H}(s, t) := H(s, 1 - t)$ eine Homotopie $\gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_1$.

- $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_1: H(s, t) := \gamma_1(s)$.
- $H_1 : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2, H_2 : \gamma_2 \rightsquigarrow \gamma_1$. Definiere

$$H(s, t) := \begin{cases} H_1(s, 2t), & t \in [0, 1/2], \\ H_2(s, 2t - 1), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie zwischen γ_1 und γ_3 . ■

Übung: Der Beweis funktioniert für beliebige stetige Abb. $\gamma : Z \rightarrow X$ (Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf stetigen Abbildungen). Notation: $[\gamma]$ ist die Äquivalenzklasse des Weges γ ($[f]$ ist die Äquivalenzklasse der Abb. f).

2.4.5 Definition. Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$ zwei Wege s.d. $\gamma_2(0) = \gamma_1(1)$. Dann wird der Weg $\gamma := \gamma_2 \bullet \gamma_1$ so definiert:

$$\gamma(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s), & s \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(2s - 1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

γ heißt *Verknüpfung* von γ_1, γ_2 .

2.4.6 Lemma. $\gamma_1 \sim \gamma'_1 \implies \gamma_2 \cdot \gamma_1 \sim \gamma_2 \cdot \gamma'_1$, $\gamma_2 \sim \gamma'_2 \implies \gamma_2 \cdot \gamma_1 \sim \gamma'_2 \cdot \gamma_1$.

Beweis. Wenn $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma'_1$, $\gamma_{1,t}(\cdot) := H(\cdot, t)$, dann ist $H_{2,1}(s, t) := \gamma_2 \cdot \gamma_{1,t}(s)$ eine Homotopie $\gamma_2 \cdot \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2 \cdot \gamma'_1$. Analog andersherum. ■

Sei $x_0 \in X$ fest. Def.: $\Omega(X, x_0) := \{\gamma : I \rightarrow X \mid \gamma(0) = \gamma(1) = x_0\}$ *Schleifen an x_0* . Die Verknüpfung definiert Operation $\cdot : \Omega(X, x_0) \times \Omega(X, x_0) \rightarrow \Omega(X, x_0)$, die aber nicht assoziativ ist:

2.4.7 Definition. $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$, $\pi_1(X, x_0) := \{[\gamma] \mid \gamma \in \Omega(X, x_0)\}$, \cdot ist die obige Verknüpfung, heißt *Fundamentalgruppe* von X an x_0 .

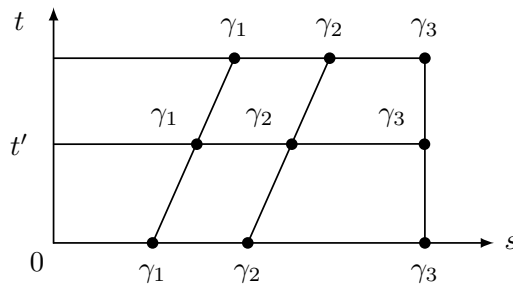
2.4.8 Proposition. $\pi_1(X, x_0)$ ist eine Gruppe mit dem neutralen Element $e = [\underline{x_0}]$, $\underline{x_0} : I \rightarrow X$, $t \mapsto x_0$. Das Inverse einer Klasse $[\gamma]$ ist gegeben durch $[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}]$, $\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t)$.

Beweis. Assoziativität—zu zeigen ist $[\gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)] = [(\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1]$. Die Abb.

$$\gamma_3 \cdot (\gamma_2 \cdot \gamma_1)(s) := \begin{cases} \gamma_1(4s), & s \in [0, 1/4], \\ \gamma_2(4s - 1), & s \in [1/4, 1/2], \\ \gamma_3(2s - 1), & s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

$$(\gamma_3 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1(s) := \begin{cases} \gamma_1(2s), & s \in [0, 1/2], \\ \gamma_2(4s - 2), & s \in [1/2, 3/4], \\ \gamma_3(4s - 3), & s \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

sind äquivalent durch folgende Homotopie (zuerst anschaulich in der Bildnotation):



$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma_1((4 - 2t)s), & s \in [0, 1/(4 - 2t)], \\ \gamma_2(4s - t - 1), & s \in \dots, \\ \gamma_3((2 + 2t)s - 1 - 2t), & s \in \dots \end{cases}$$

Neutrales Element: $[\underline{x_0} \cdot \gamma] = [\gamma \cdot \underline{x_0}] = [\gamma]$ offenbar. Inverses: $[\gamma \cdot \bar{\gamma}] = [\bar{\gamma} \cdot \gamma] = e$. Wähle

$$H(s, t) := \begin{cases} \gamma(2s(1 - t)), & s \in [0, 1/2] \\ \gamma((1 - 2s)(1 - t)), & s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Dann ist dies tatsächlich eine Homotopie $\bar{\gamma} \cdot \gamma \rightsquigarrow \underline{x_0}$ mit $H(s, 1) = \gamma(0) = x_0$. Da $\bar{\bar{\gamma}}$, folgt das andere. ■

2.4.9 Beispiel. • $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) \cong \{e\}$ (jede Schleife ist homotop zur konstanten Schleife).

- Wenn $X \cong \{*\}$, dann $\pi_1(X, *) \cong \{e\}$, denn: $\gamma : I \rightarrow X$ eine Schleife an $*$, dann kann man die Homotopie zwischen $f : X \rightarrow X$, $x \mapsto *$ und $\text{id} : X \rightarrow X$ benutzen, um zu zeigen: $\gamma \sim *$: Sei $\gamma : I \rightarrow X$ gegeben, $H : X \times I \rightarrow X$ Homotopie zwischen id und $f \implies H \circ (\gamma \times \text{id}) : I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen γ und $*$ (denn: $H \circ (\gamma \times \text{id})(s, 0) = H(\gamma(s), 0) = \gamma(s)$, weil $H(\cdot, 0) = \text{id}$ und $H \circ (\gamma \times \text{id})(s, 1) = H(\gamma(s), 1) = *$, weil $H(\cdot, 1) = f$.)
- $S^1 \subset \mathbb{C}$, dann $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. (Expliziter Homomorphismus $\phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist gegeben z.B. durch Funktionentheorie: $[\gamma] \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$.)

2.4.10 Proposition. Seien X, Y topologische Räume, $f : X \rightarrow Y$ stetig, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f(x_0) = y_0$. Dann gilt: die Abbildung $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ ein Gruppenhomomorphismus. Außerdem: wenn $g : Y \rightarrow Z$ stetig, $g(y_0) = z_0 \implies (g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$.

Beweis. f_* ist wohldefiniert, weil $\gamma_1 \sim \gamma_2$ durch H , dann gilt $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ durch $f \circ H$. $f_*(\gamma_2 \cdot \gamma_1) = [f \circ (\gamma_2 \cdot \gamma_1)] = [(f \circ \gamma_2) \cdot (f \circ \gamma_1)] = [f \circ \gamma_2] \cdot [f \circ \gamma_1] = f_*(\gamma_2) \cdot f_*(\gamma_1)$. $(g \circ f)_*([\gamma]) = [g \circ f \circ \gamma] = g_*([f \circ \gamma]) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$. ■

4. Vorlesung, 20.10.2016

5. Vorlesung, 26.10.2016

2.4.11 Lemma. $f, g : X \rightarrow Y$ zwei stetige Abb. mit $f(x_0) = f'(x_0) = y_0 \implies f \sim f'$ rel. zu $x_0 \implies f_* = f'_*$.

Beweis. $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Erste Homotopie $f \sim f'$ induziert eine Homotopie $f \circ \gamma \sim f' \circ \gamma \implies f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma] = [f' \circ \gamma] = f'_*([\gamma])$. ■

Die obigen Behauptungen motivieren die Frage: Wie hängt $\pi_1(X, x_0)$ von x_0 ab?

2.4.12 Lemma. Sei X ein wegzusammenhängender Raum, $x_0, x_1 \in X$. Dann gilt: $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$. Genauer: Jede Homotopieklasse der Wege $\beta : I \rightarrow X$, $\beta(0) = x_0$, $\beta(1) = x_1$ induziert einen solchen Isomorphismus $\Theta_{[\beta]} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, $[\gamma] \mapsto [\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}]$.

Beweis. $\Theta_{[\beta]}$ ist wohldefiniert, denn: $\beta \sim \beta' \implies \beta^{-1} \sim \beta'^{-1}$, $\gamma \cdot \beta^{-1} \sim \gamma \cdot \beta'^{-1}$, $\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1} \sim \beta' \cdot \gamma \cdot \beta'^{-1} \implies [\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}] = [\beta' \cdot \gamma \cdot \beta'^{-1}]$. $\Theta_{[\beta]}$ ist ein Gruppenhomomorphismus; $\Theta_{[\beta]}([\gamma_2] \cdot [\gamma_1]) = \Theta_{[\beta]}([\gamma_2 \cdot \gamma_1]) = [\beta \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_1 \cdot \beta^{-1}] = [\beta \cdot \gamma_2 \cdot \beta^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma_1 \cdot \beta^{-1}] = [\beta \cdot \gamma_2 \cdot \beta^{-1}] \cdot [\beta \cdot \gamma_1 \cdot \beta^{-1}] = \Theta_{[\beta]}([\gamma_2]) \cdot \Theta_{[\beta]}([\gamma_1])$. Ferner $\Theta_{[\beta^{-1}]} = \Theta_{[\beta]}^{-1}$, denn: $\Theta \circ \Theta_{[\beta^{-1}]}([\gamma]) = \Theta_{[\beta^{-1}]}([\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}]) = [\beta^{-1} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1} \cdot \beta] = [\gamma]$, weil $\beta^{-1} \cdot \beta \sim \underline{x_0}$; analog folgt $\Theta_{[\beta]} \circ \Theta_{[\beta^{-1}]}([\gamma]) = [\gamma]$. ■

2.4.13 Definition. X wegzusammenhängend $\implies \pi_1(X)$ ist die Isomorphieklasse von $\pi_1(X, x_0)$ mit $x_0 \in X$.

2.5 Fundamentalgruppe von S^1

Wir wollen folgenden Satz zeigen:

2.5.1 Satz. $\pi_1(S^1, 1)$ (bzw. $S^1 \subseteq \mathbb{C}$) ist isomorph zu \mathbb{Z} , sie wird durch die Äquivalenzklasse der Schleife $\omega : I \rightarrow S^1$, $s \mapsto e^{2\pi is} = \cos(2\pi s) + i \sin(2\pi s)$ erzeugt.

Was ist hier zu zeigen? $\omega^n \sim (\cos 2\pi ns + i \sin 2\pi ns = e^{2\pi ins})$, $n \in \mathbb{Z}$. Zu zeigen:

- Jede Schleife in S^1 ist homotop zu einer ω^n .
- $\omega^n \approx \underline{1}$.

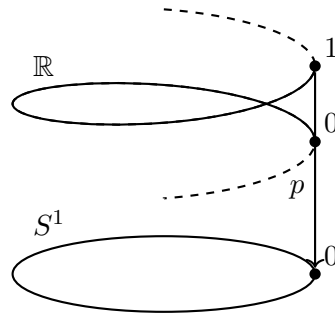
Betrachte $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi ix}$ (hier hat man $p(x+n) = p(x) \forall n \in \mathbb{Z}$, also realisiert man $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Idee: Für jede Schleife $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ gibt es einen eindeutigen Weg $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = 0$, $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ (die sogenannte Hochhebung von γ). Nun kann man eine Abbildung $\gamma : \Omega(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}(1)$ (Wdhlg. $\Omega(S^1, 1) := \{\gamma : I \rightarrow S^1 \mid \gamma(0) = \gamma(1) = 1\}$) definieren. Dann müsste man zeigen: φ induziert eine Abbildung $\bar{\varphi} : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$, die ein Isomorphismus ist (dazu sollte man zeigen, dass $\bar{\varphi}$ nur von der Homotopieklasse von γ abhängt).

2.5.2 Definition. Eine Überlagerung $p : Y \rightarrow X$ ist eine surjektive stetige Abbildung mit folgenden Eigenschaften: Für jeden Punkt $x \in X$ ex. eine Umgebung $U \ni x$, so dass

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in I} V_j \subset Y,$$

wobei $V_j \subset Y$ offen und so dass $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

2.5.3 Beispiel. • $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi ix}$ ist eine Überlagerung, denn: p stetig, surjektiv, und für jedes $z = e^{i\varphi} \in S^1$ gilt: $p^{-1}(S^1 \setminus \{z\}) \cong (S^1 \setminus \{z\}) \times \mathbb{Z}$.



- Wenn man $S^1 \subset \mathbb{C}$ realisiert, kann man die Abb. $p_k : S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^k$ ($e^{i\varphi} \mapsto e^{ki\varphi}$). Es ist $p^{-1}(S^1 \setminus \{-z\}) \cong (S^1 \setminus \{-z\}) \times \mathbb{Z}/k$.

2.6 Hochhebung von Wegen und Homotopien

Fragestellung: Gegeben eine stetige Abbildung $f : Z \rightarrow X$, finde *Hochhebungen* $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$, ($f = p \circ \tilde{f}$) und untersuche, ob sie eindeutig sind.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \exists? \tilde{f} & \nearrow p & \\ Y & & \end{array}$$

2.6.1 Proposition (Homotopiehochhebungseigenschaft von Überlagerungen). Sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung, $F : Z \times I \rightarrow X$ stetig. Sei $\tilde{F} : Z \times \{0\} \rightarrow Y$ eine Abbildung mit $p \circ \tilde{F} = F|_{Z \times \{0\}}$ (intuitiv: F ist eine Homotopie zwischen $F|_{Z \times \{0\}}$ und $F|_{Z \times \{1\}}$, und eine Hochhebung von der ersten Abbildung ist gegeben). Dann existiert eine Fortsetzung $\tilde{F} : Z \times I \rightarrow Y$ mit $p \circ \tilde{F} = F$, von der obigen $\tilde{F} : Z \times \{0\} \rightarrow Y$.

- 2.6.2 Korollar.** (1) Gegeben $\gamma : I \rightarrow X$ und $y_0 \in Y$ s.d. $p(y_0) = \gamma(0)$, es ex. genau eine Hochhebung $\tilde{\gamma} : I \rightarrow Y$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ ($Z = \{*\}$, $F = \gamma : I \rightarrow X$, $\tilde{F}|_{\{0\}} = y_0$).
- (2) Gegeben $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$, eine Homotopie $H : \gamma_1 \leadsto \gamma_2$ und $y_0 \in p^{-1}(\gamma_1(0)) = p^{-1}(\gamma_2(0)) \implies \exists! \tilde{H} : I \times I \rightarrow Y$ zwischen den Hochhebungen $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ s.d. $\tilde{H}|_{I \times \{0\}} = \tilde{H}$.

Beweis (der Homotopiehochhebungseigenschaft). Sei $z_0 \in Z$ fest. Wir werden erstmal \tilde{F} auf $N \times I$ fortsetzen, wobei $N \ni z_0$ eine Umgebung von z_0 ist. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} Z \times I & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow \tilde{F}|_{Z \times \{0\}} & \nearrow p & \\ Y & & \end{array}$$

$F : Z \times I \rightarrow X$ ist stetig, deswegen existiert für jedes $t \in X$ eine Umgebung $N_t \times (a_t, b_t) \subset Z \times I$ von (z_0, t) , s.d. $F(N_t \times (a_t, b_t)) \subset U^t \subset X$ für eine Umgebung U^t von $F(z_0, t)$ mit $p^{-1}(U^t) = \bigsqcup_{j \in J} V_j^t$, wobei $p|_{V_j^t}$ ein Homöomorphismus ist (F stetig + Def. der Überlagerung). Sei $\bigcup_{t \in I} (a_t, b_t) = \tilde{I}$ eine off. Überdeckung, I kompakt \implies es gibt eine endliche Teilüberdeckung, also $I = \bigcup_{i=1}^n (a_{t_i}, b_{t_i})$, o.B.d.A. $0 = a_{t_1} < b_{t_1} < \dots < a_{t_n} < b_{t_n} = 1$. Sei $N := \bigcap_{i=1}^n N_{t_i} \subset Z$. Wir definieren \tilde{F} auf $N \times I$ induktiv: (o.B.d.A.) $F(N \times [a_{t_1}, b_{t_1})) \subset U^{t_1}$, deswegen $\exists! j$ s.d. $\tilde{F}(N \times \{0\}) \subset V_j^{t_1}$; definiere $\tilde{F}|_{N \times (a_{t_1}, b_{t_1})} := p_{j,1}^{-1} \circ F$, wobei $p_{j,1}^{-1} : U^{t_1} \rightarrow V_j^{t_1}$ der inverse Homöomorphismus ist. Weiter: Wenn \tilde{F} auf $N \times \bigcup_{i=1}^k (a_{t_i}, b_{t_i})$ definiert ist, dann ist der Durchschnitt $(a_{t_k}, b_{t_k}) \cap (a_{t_{k+1}}, b_{t_{k+1}}) \neq \emptyset$ (evtl. nach Umm Nummerierung). Dann definiert man $\tilde{F}|_{N \times (a_{t_{k+1}}, b_{t_{k+1}})} := p_{j,k+1}^{-1} \circ F$, wobei $p_{j,k+1} : U^{t_{k+1}} \rightarrow V_j^{t_{k+1}}$ ein Homöomorphismus ist, $F(N \times (a_{t_k}, b_{t_k})) \subset V_j^{t_{k+1}}$. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir $\tilde{F} : N \times I \rightarrow Y$. Diese Fortsetzung ist eindeutig, weil die Wahl von j in jedem Schritt eindeutig war. Schreibe jetzt $Z = \bigcup_{z \in Z} N_z$ (wiederhole für

jede Wahl von z_0) \implies erhalte $\tilde{F}_z : N_z \times I \rightarrow Y$ für jedes z . Sobald $N_z \cap N_{z'} \neq \emptyset$, gilt $\tilde{F}_z = \tilde{F}_{z'}$, weil die Fortsetzung eindeutig \implies Definiere $\tilde{F} : Z \times I \rightarrow Y$ durch $\tilde{F}|_{N_z \times I} = \tilde{F}_z$ (wohldefiniert, weil \tilde{F}_z kompatibel und eindeutig, weil jedes \tilde{F}_z eindeutig). ■

5. Vorlesung, 26.10.2016

6. Vorlesung, 27.10.2016

Beweis (von Satz 2.5.1). $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist eine Überlagerung. Die Hochhebung $\tilde{\omega}$ von ω mit $\tilde{\omega}(0) = 0$ ist $\tilde{\omega}(s) = s$ (damit $(p \circ \tilde{\omega})(s) = e^{2\pi i s} = \omega(s)$). Entsprechend ist $\tilde{\omega}^n(s) = n \cdot s$ die eindeutige Hochhebung von ω^n . Definiere eine Abbildung $\phi : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $\phi([\gamma]) := \tilde{\gamma}(1)$, wobei $\tilde{\gamma}$ die (eindeutige) Hochhebung von γ ist. Z.z.: ϕ ist wohldefiniert. Dazu:

- (1) $\tilde{\gamma}$ ist eine Hochhebung, also $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma \implies (p \circ \tilde{\gamma})(1) = p(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = 1 \implies \tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.
- (2) Seien γ_1, γ_2 zwei homotope Schleifen an 1. Seien $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ ihre Hochhebungen. Nach dem Korollar von oben sind auch $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$ homotop, und daher $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$.

Nun ist z.z.: ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus. Dazu erstmal: für jedes $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$ gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ s.d. $[\gamma] = [\omega^n]$. Dazu: hebe γ hoch zu $\tilde{\gamma}$, sei $\phi([\tilde{\gamma}]) = n \in \mathbb{Z}$. Jetzt sind $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{\omega}^n$ zwei Wege in \mathbb{R} mit den gleichen Anfangspunkten ($\tilde{\gamma}(0) = 0 = \tilde{\omega}^n(0)$) und Endpunkten ($\tilde{\gamma}(1) = n = \tilde{\omega}^n(1)$) $\implies \tilde{\gamma} \sim \tilde{\omega}^n$, weil je zwei Wege in \mathbb{R} mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind (z.B. durch lineare Homotopie). Daher: $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} \sim p \circ \tilde{\omega}^n = \omega^n$. Ferner $\phi([\omega^n]) = n$. $\phi([\omega^n] \cdot [\omega^m]) = \phi([\omega^{n+m}]) = n + m = \phi([\omega^n]) + \phi([\omega^m]) \implies \phi$ ist ein Homomorphismus, surjektiv. Bleibt: ϕ ist injektiv. Dazu $\phi([\omega^n]) = 0 \implies n = 0$, $\omega^0 = \underline{1}$. ■

2.6.3 Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe Polynom $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$, $n \geq 1$ hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis. Annahme: p hat keine Nullstellen in \mathbb{C} . Sei $r \geq 0$, betrachte

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi i s})/p(r)}{|p(re^{2\pi i s})/p(r)|} \in S^1 \subset \mathbb{C} \forall r.$$

So ist $f_r : I \rightarrow S^1$ eine Schleife in S^1 an 1. Wenn r sich stetig verändert, verändert sich die Schleife stetig ($f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow S^1$, $(r, s) \mapsto f_r(s)$ ist stetig) $\implies [f_r]$ ist unabhängig von r .

$$f_0(s) = \frac{p(0)/p(0)}{|p(0)/p(0)|} = 1 \implies [f_0] = e \text{ in } \pi_1(S^1, 1).$$

Aber: $p(z) = z^n(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}) = z^n r(z)$ und $|\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}| < 1$ für $|z| \geq R$ hinreichend groß $\implies r(z) \subset B(1, 1) \implies r : \{|z| \geq R\} \rightarrow \mathbb{C}$ ist homotop zur konstanten Abbildung $\tilde{r}(z) = 1$ durch Abbildungen $r_t(z) \neq 0$ auf $|z| \geq R \implies$ für hinreichend große r ist

$$f_r \sim \underbrace{\left(s \mapsto \frac{r^n e^{2\pi i n s}}{r^n} = e^{2\pi i n s} \right)}_{\omega^n}$$

$e = [f_r] = [\omega^n] \neq e$ in $\pi_1(S^1, 1)$. Widerspruch. \blacksquare

2.6.4 Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Sei $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ und sei $h : D^2 \rightarrow D^2$ stetig. Dann hat h einen Fixpunkt.*

Beweis. Widerspruchsbeweis. Wenn $h(x) \neq x \forall x \in D^2$. Definiere $r(x) \in S^1$ als den Punkt, wo der Strahl mit Richtung $h(x) - x$ den Rand schneidet. Also gilt $r : D^2 \rightarrow S^1$, $r|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$ (r ist eine Retraktion von D^2 auf S^1). Sei $\iota : S^1 \hookrightarrow D^2$ die Inklusionsabbildung. Nach Proposition 2.4.10 sind $r_* : \pi_1(D^2, x_0) \rightarrow \pi_1(S^1, x_0)$, $\iota_* : \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \pi_1(D^2, x_0)$ Homomorphismen. Es ist $r \circ \iota = \text{id}_{S^1} \implies r_* \circ \iota_* = (r \circ \iota)_* = (\text{id}_{S^1})_* = \text{id}_{\pi_1(S^1, x_0)}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{id}_{S^1} & & \\
 & \nearrow & \text{---} & \searrow & \\
 \pi_1(S^1, x_0) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(D^2, x_0) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(S^1, x_0) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 \mathbb{Z} & & \{e\} & & \mathbb{Z}
 \end{array}$$

$\implies \text{id}_{\mathbb{Z}}$ faktorisiert durch $\{e\}$. Widerspruch. \blacksquare

2.6.5 Satz (Borsuk-Ulam). *Sei $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung. Dann $\exists x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Widerspruchsbeweis. Wenn $f(x) \neq f(-x) \forall x \in S^2$, definiere

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|} \in S^1$$

$\implies g : S^2 \rightarrow S^1$ ist stetig. Sei $\eta : I \rightarrow S^2$ die Schleife $s \mapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0) \in S^2 \subset \mathbb{R}^2 \implies h := g \circ \eta$ ist eine Schleife in S^1 . Wir setzen: $\{s + 1/2\} = s + 1/2 \pmod{1}$ ist der Bruchteil von $s + 1/2$. Es gilt $g(-x) = -g(x) \forall x \in S^2 \implies h(\{s + 1/2\}) = -h(s)$, denn

$$h(s + 1/2) = g(\eta(s + 1/2)) = g((\cos(2\pi s + \pi), \sin(2\pi s + \pi), 0)) = g(-\eta(s)) = -h(s)$$

und $h(0) = h(1) \implies$ wenn $\tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hochhebung von h ist, dann gilt $\tilde{h}(\{s + 1/2\}) = \tilde{h}(s) + q_s + 1/2$, wobei $q_s \in \mathbb{Z}$ ungerade. Es gilt $\mathbb{Z} \ni q_s = \tilde{h}(\{s + 1/2\}) - \tilde{h}(s) - 1/2$ stetig $\implies q_s = q \forall s \in I \implies \tilde{h}(\{s + 1/2\}) - \tilde{h}(s) = (2q + 1)/2$, also gilt $\tilde{h}(1) - \tilde{h}(0) = 2q + 1 \neq 0$ (weil ungerade) $\implies [h] \neq [1]$ (sonst wäre $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(0)$). Aber $e \neq [h] = [g \circ \eta] = g_*([\eta])$. Aber $[\eta] = e \in \pi_1(S^2, (1, 0, 0))$, weil man η über den "Nordpol" zusammenziehen kann. (Seien E_t Ebenen durch $(1, 0, 0)$ mit Normalenvektor $(\sin t, 0, \cos t)$ für $0 \leq t \leq \pi/2$, $\gamma_t :=$ Schleife an $(1, 0, 0)$ mit $\gamma_t(I) = E_t \cap S^2$, einmal durchgelaufen). Widerspruch. \blacksquare

2.6.6 Proposition. *Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Dann gilt: $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Beweis. Jede Schleife γ in $X \times Y$ an (x_0, y_0) definiert durch Verknüpfung mit Projektionen $\pi_X : X \times Y \rightarrow X, (x, y) \mapsto x, \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y, (x, y) \mapsto y$ zwei Schleifen $\pi_X \circ \gamma, \pi_Y \circ \gamma$. Umgedreht: ein Paar $(\gamma_x, \gamma_y) \in \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0)$ definiert Schleife $\gamma(s) := (\gamma_x(s), \gamma_y(s)) \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$. Diese Entsprechung respektiert Homotopien und Verknüpfungen (nachzurechnen) $\implies (\pi_X)_* \times (\pi_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ist ein Isomorphismus. ■

2.6.7 Korollar. $\pi_1(\Pi^n) = \pi_1(\overbrace{S^1 \times \dots \times S^1}^{n\text{-mal}}) \cong \mathbb{Z}^n$.

6. Vorlesung, 27.10.2016

7. Vorlesung, 03.11.2016

2.7 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Wiederholung: Sei $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung ($p(y_0) = x_0$), dann ist $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), [\gamma] \mapsto [p \circ \gamma]$ der induzierte Gruppenhomomorphismus.

2.7.1 Proposition. p_* ist injektiv, $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ ist die Untergruppe der Homotopieklassen von Schleifen γ , deren Hochhebung $\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$ auch Schleife ist.

Beweis. Sei $\hat{\gamma} \in \Omega(Y, y_0)$ mit $p_*([\hat{\gamma}]) = e \implies p \circ \hat{\gamma} = \gamma \sim x_0$. Wegen der Eindeutigkeit der Hochhebung gilt $\hat{\gamma} = \tilde{\gamma}$ (Hochhebung von γ mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$). Homotopiehochhebung liefert eine Homotopie von $\tilde{\gamma}$ zu einer Hochhebung von x_0 , die nach Eindeutigkeit der Hochhebung gleich y_0 ist $\implies \hat{\gamma} = y_0 \implies [\hat{\gamma}] = e \in \pi_1(Y, y_0)$. p_* ist also injektiv. Wenn $[\gamma] \in \text{Im}(p_*) \implies [\tilde{\gamma}] \in \pi_1(Y, y_0)$, weil $p_*([\tilde{\gamma}]) = [\gamma] \implies \tilde{\gamma} \in \Omega(Y, y_0)$. ■

Frage: Sei $\Gamma := \pi(X, x_0)$, $\Lambda < \Gamma$ Untergruppe. Gibt es eine Überlagerung $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = \Lambda$?

2.7.2 Beispiel. $(X, x_0) = (S^1, 1) \implies \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} =: \Gamma$, jedes $\Lambda < \mathbb{Z}$ hat die Form $n\mathbb{Z}$. Welche Überlagerung gehört zu $n\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$?

- $p_n : (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1), z \mapsto z^n \implies (p_n)_*([\omega]) = [\omega^n] \implies (p_n)_*(\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$.
- Sei $n = 0$, d.h. wir betrachten $0 < \mathbb{Z}$. Dann ist $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$ die zugehörige Überlagerung.

2.7.3 Definition. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Eine Überlagerung $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ heißt *universelle Überlagerung*, falls $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{e\}$.

Bemerkung: Es ist sinnvoll, X als wegzusammenhängend vorauszusetzen (alles hängt nur von der Wegzusammenhangskomponente von x_0 ab).

Welche Eigenschaften von X sind notwendig für Existenz einer universellen Überlagerung? Sei $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine universelle Überlagerung, sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $\tilde{\gamma} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ eine Hochhebung von γ (also setzen wir voraus, dass γ zu einer Schleife hochgehoben wird). Dann ist $\tilde{\gamma} \sim \tilde{x}_0$, weil \tilde{X} einfach zusammenhängend ist. Wenn $U \ni x_0$

eine Umgebung von x_0 derart ist, dass $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in F} V_\alpha$ mit $p : V_\alpha \rightarrow U$ Homöomorphismus, dann liegt $\tilde{x}_0 \in V_{\alpha_0}$, also hebt sich jede Schleife $\gamma \in \Omega(U, x_0)$ zu $\tilde{\gamma} \in \Omega(V_{\alpha_0}, \tilde{x}_0)$. D.h. $\tilde{\gamma} \sim \tilde{x}_0 \implies \gamma \sim x_0$.

Also gilt: Für jede offene Teilmenge $W \subset X$ gibt es eine offene Teilmenge $U \subset W \subset X$ s.d. jede Schleife $\gamma \in \Omega(U, x)$ homotop zur konstanten Schleife \underline{x} ist. Dies ist eine Eigenschaft von X , die notwendig für die Existenz von einer universellen Überlagerung ist. Wenn X diese erfüllt, heißt X *semilokal einfach zusammenhängend*.

2.7.4 Definition. X heißt lokal *wegzusammenhängend*, wenn $\forall W \subset X$ offen eine offene Teilmenge $U \subset W$ ex. s.d. U *wegzusammenhängend* ist.

Bemerkung: CW-Komplexe erfüllen beide Eigenschaften automatisch (sie sind lokal zusammenziehbar, also hat jeder Punkt eine zusammenziehbare Umgebung).

Sei X ein *wegzusammenhängender*, *lokal wegzusammenhängender*, *semilokal einfach zusammenhängender* Raum, $x_0 \in X$ fest. Sei

$$\tilde{X} := \{[\gamma] \mid \gamma : I \rightarrow X \text{ Weg mit } \gamma(0) = x_0\},$$

$p : \tilde{X} \rightarrow X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, $\tilde{x}_0 := \underline{x}_0 \in \tilde{X}$. Die Abb. p ist wohldefiniert und surjektiv, da X *wegzusammenhängend*. Wir brauchen eine Topologie auf \tilde{X} , s.d. $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung ist. Dazu betrachten wir:

$$\mathcal{U} := \{U \subset X \text{ offen, wegzusammenhängend} \mid \iota_* : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X) \text{ trivial}\}.$$

Bemerkung: $U \in \mathcal{U}$, $V \subset U$ offen, *wegzusammenhängend* $\implies V \in \mathcal{U}$ ($\iota_*^V : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ ist trivial, weil ι_*^U trivial).

Behauptung. *Sei X lokal wegzusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend $\implies \mathcal{U}$ ist eine Basis der Topologie auf X .*

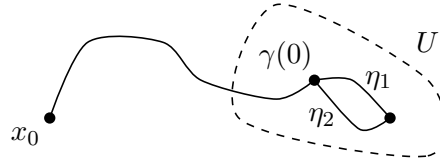
Beweis (der Behauptung). Es reicht zu zeigen: $\forall W \subset X$ offen, $\exists U \in \mathcal{U}$ mit $U \subset W$. Sei W gegeben. Finde $U' \subset W$ s.d. jede Schleife in U' homotop zur konstanten Schleife in X ist (also $\iota_* : \pi_1(U') \rightarrow \pi_1(X)$ ist trivial) und finde für dieses U' eine *wegzusammenhängende* offene Teilmenge U . Es folgt $U \in \mathcal{U}$, weil

$$\begin{array}{ccc} \iota_*^U : \pi_1(U) & \longrightarrow & \pi_1(X) \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \pi_1(U') & \end{array}$$

■

Wir beweisen nun den nächsten Satz. Sei $U \in \mathcal{U}$ und $[\gamma] \in \tilde{X}$ mit $\gamma(1) \in U$. Definiere

$$U_{[\gamma]} := \{[\eta \cdot \gamma] \mid \eta : I \rightarrow X \text{ mit } \eta(0) = \gamma(1) \text{ und } \eta(I) \subset U\}$$



(wohldefiniert, weil Homotopie verträglich mit Verknüpfung ist). Die Abbildung

$$p|_{U_{[\gamma]} : U_{[\gamma]} \rightarrow U$$

ist surjektiv, weil U wegzusammenhängend ist, auch injektiv, weil wenn $(\eta_1 \cdot \gamma)(1) = (\eta_2 \cdot \gamma)(1) \implies [\eta_1 \cdot \gamma] = [\eta_2 \cdot \gamma]$. Sei jetzt \mathcal{T} die Topologie auf \tilde{X} , die $\{U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U}, [\gamma] \in \tilde{X}\}$ als Basis hat. Dann gilt: $p|_{U_{[\gamma]} : U_{[\gamma]} \rightarrow U$ ist ein Homöomorphismus (wenn $V_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma]} \iff V \subset U$). Also ist $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ stetig, weil Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist. Sei jetzt $U \in \mathcal{U}$, wähle $x \in U$.

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma]} U_{[\gamma]}.$$

Weil: Sei $U_{[\gamma_1]} \cap U_{[\gamma_2]} \neq \emptyset$. D.h. $[\eta_1 \cdot \gamma_1] = [\eta_2 \cdot \gamma_2]$ für gewisse $\eta_1, \eta_2 : I \rightarrow U$, $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$. Sei $[\eta' \cdot \gamma_1] \in U_{[\gamma_1]}$. Dann gilt

$$[\eta' \cdot \gamma_1] = [\eta' \cdot \bar{\eta}_1 \cdot \eta_1 \cdot \gamma_1] = [\eta' \cdot \bar{\eta}_1 \cdot \eta_2 \cdot \gamma_2] = [\eta'' \cdot \gamma_2] \in U_{[\gamma_2]}$$

$\implies U_{[\gamma_1]} = U_{[\gamma_2]}$. Also: $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ ist eine Überlagerung. Bleibt zu zeigen: \tilde{X} ist einfach zusammenhängend.

- (1) \tilde{X} ist wegzusammenhängend. Sei $[\gamma] \in \tilde{X}$. Wir brauchen einen Weg $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{\gamma}(1) = \gamma$. Def.

$$\tilde{\gamma}(t) := s \mapsto \begin{cases} \gamma(s) & \text{falls } s \in [0, t], \\ \gamma(t) & \text{falls } s \in [t, 1] \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(tautologische} \\ \text{Definition)} \end{array}$$

$$\implies \tilde{\gamma}(0) = \underline{x}_0, \tilde{\gamma}(1) = \gamma.$$

- (2) Es reicht zu zeigen: $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \{e\} < \pi_1(X, x_0)$, da p_* injektiv ist. Das Bild $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ besteht aus Homotopieklassen $[\gamma]$ von Wegen $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, deren Hochhebung $\tilde{\gamma} \in \Omega(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Wenn $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, sei $\hat{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$ wie oben definiert. $\hat{\gamma}$ ist eine Hochhebung von γ mit $\hat{\gamma}(0) = \underline{x}_0$ und $\{\hat{\gamma}(t)\}_{t \in I}$ ist eine Homotopie zwischen \tilde{x}_0 und $\tilde{\gamma}$. D.h.: $[\tilde{\gamma}] = [\tilde{x}_0] \implies \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \{e\}$.

2.7.5 Satz. Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender Raum. Dann existiert eine universelle Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ (für jedes $x_0 \in X$).

¹Vereinigung über Homotopieklassen von Wegen $\gamma : I \rightarrow X, \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x \in U$

Bemerkung: Ab jetzt betrachten wir nur Räume, die lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend sind (s.d. jede Wegzusammenhangskomponente eine universelle Überlagerung besitzt).

Beobachtung: Sei $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Dann wirkt Γ von rechts auf (\tilde{X}, \tilde{x}_0) durch

$$\begin{array}{ccc} [\gamma] \cdot [\beta] & = & [\gamma \cdot \beta] \\ \cap & \cap & \\ \tilde{X} & \Gamma & \end{array}$$

7. Vorlesung, 03.11.2016

8. Vorlesung, 09.11.2016

Letztes mal haben wir gesehen: Wenn (X, x_0) ein hinreichend guter topologischer Raum ist, dann existiert eine universelle Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$. Um aus \tilde{X} eine andere Überlagerung zu konstruieren, brauchen wir folgenden Begriff: Sei Γ eine Gruppe, Y ein topologischer Raum.

2.7.6 Definition. • $\text{Homeo}(Y) := \{f : Y \rightarrow Y \mid f \text{ ist Homöomorphismus}\}.$

- Eine *Wirkung* von Γ auf Y ist ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(Y)$.
Bezeichnung: $\Gamma \curvearrowright^\alpha Y$.

2.7.7 Beispiel. Sei $\Gamma := \mathbb{Z}$. Dann ist $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Homeo}(\mathbb{R}), n \mapsto (x \mapsto x + n)$ eine Wirkung.

Sei $\Gamma \curvearrowright^\alpha Y$ eine Wirkung. Sei $R_{\Gamma \curvearrowright^\alpha Y} := \{(y, \alpha(g)(y)) \mid y \in Y, g \in \Gamma\}.$

$$\Gamma \backslash Y := R_{\Gamma \curvearrowright^\alpha Y} \backslash Y = \{y \sim \alpha(g)(y), y \in Y, g \in \Gamma\} \backslash Y$$

heißt *Quotientenraum* der Wirkung (der Raum aller Orbits).

Bemerkung: Der obige Begriff der Wirkung heißt manchmal Linkswirkung, weil die Abbildung α eine Abbildung $\tilde{\alpha} : \Gamma \times X \rightarrow X, (g, y) \mapsto \alpha(g)(y)$ induziert. $\tilde{\alpha}$ erfüllt $\alpha(gh, x) = \tilde{\alpha}(g, \tilde{\alpha}(h, x))$. Wenn die Wirkung fest ist, schreibt man $g \cdot x$ für $\alpha(g)(x)$. Entsprechend gibt es den Begriff der Rechtswirkung $\tilde{\beta} : X \times \Gamma \rightarrow X$ mit $(x, g) \mapsto \tilde{\beta}(x, g)$ mit Abkürzung $\tilde{\beta}(x, g) = x \cdot g$. Es gilt $\tilde{\beta}(x, gh) = \tilde{\beta}(\tilde{\beta}(x, g), h)$. Zu einer Rechtswirkung $\tilde{\beta}$ gehört auch ein Homomorphismus $\beta : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(Y), g \mapsto \tilde{\beta}(x, g^{-1})$.

Rechtswirkungen bezeichnet man durch $Y \overset{\beta}{\curvearrowright} \Gamma$. Entsprechend bezeichnet man den Quotientenraum durch Y / Γ für die Rechtswirkung.

2.7.8 Beispiel. Sei G eine Gruppe, $Y := G$. Dann ist $L : G \times Y \rightarrow G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ ist eine Linkswirkung, $R : Y \times G \rightarrow G, (h, g) \mapsto h \cdot g$ ist eine Rechtswirkung.

2.7.9 Beispiel. Sei $X = S^1 \subset \mathbb{C}, \Gamma = \mathbb{Z}, \alpha_\omega : \Gamma \curvearrowright X$ gegeben durch $\alpha_\omega(n)(z) := e^{i\omega n} \cdot z$ für $\omega \in \mathbb{R}$.

(i) $\omega/2\pi \in \mathbb{Q} \implies \text{jede Bahn ist endlich} \implies S^1 \backslash \mathbb{Z} \cong S^1.$

- (ii) $\omega/2\pi \notin \mathbb{Q} \implies$ jede Bahn ist dicht in S^1 . $X_\omega := S^1 \setminus \mathbb{Z}$ ist schwer verständlich. Die Topologie auf X_ω viel besser: Wenn $f : X_\omega \rightarrow Z$ stetig $\implies \bar{f} := f \circ g$ ist stetig (Eigenschaft der Quotiententopologie). Aber \bar{f} ist nach Konstruktion \mathbb{Z} -invariant: $\bar{f} \circ \alpha_\omega(n) = \bar{f} \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$\bar{f}(\alpha_\omega(n)(x)) = \bar{f}(x) \forall x \in S^1, \forall n \in \mathbb{Z} \implies \bar{f}(y) = \bar{f}(x) \forall x, y \in S^1,$$

da die Bahn von x dicht ist und \bar{f} stetig $\implies \bar{f}$ ist konstant $\implies f$ ist konstant $\implies X_\omega$ hat triviale Topologie (die antidiskrete Topologie) und ist somit z.B. nicht Hausdorff.

2.7.10 Definition. Sei X ein topologischer Raum, $\alpha : \Gamma \curvearrowright X$ eine Wirkung. Dann heißt α eine *Überlagerungswirkung*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \ni x$ hat s.d. $\forall g_1 \neq g_2 \in \Gamma$ gilt $g_1 U \cap g_2 U = \emptyset$ ($g_1 U = \alpha(g_1)(U)$, $g_2 U = \alpha(g_2)(U)$).

2.7.11 Proposition. $\alpha : \Gamma \curvearrowright X$ ist eine Überlagerungswirkung $\implies q : X \rightarrow \Gamma \backslash X$ ist eine Überlagerung.

Beweis. Sei $x \in X$, $U \ni x$ aus der Def. der Überlagerung. Dann gilt für $V := q(U)$.

$$q^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in \Gamma} gU,$$

denn:

- $q(x) \in V \iff \exists g \in \Gamma$ s.d. $g \cdot x \in U$ (Def. des Quotientenraumes).
- die Vereinigung ist disjunkt, denn: $g_1 U \cap g_2 U \neq \emptyset \implies g_1 = g_2$ nach Definition eine Überlagerungswirkung.
- $q|_{gU} : gU \rightarrow V$ ist eine Homöomorphismus nach Definition der Quotiententopologie.

■

Sei (X, x_0) topologischer Raum, (\tilde{X}, \tilde{x}_0) eine universelle Überlagerung, $\Gamma := \pi_1(X, x_0)$. Wir haben folgende Rechtswirkung von Γ auf (\tilde{X}, \tilde{x}_0) :

$$\tilde{\beta} : \tilde{X} \times \Gamma \rightarrow \tilde{X}, ([\gamma], [\delta]) \rightarrow [\gamma \cdot \delta].$$

Dies ist tatsächlich eine Wirkung, denn $[(\gamma \cdot \delta_1) \cdot \delta_2] = [\gamma \cdot (\delta_1 \cdot \delta_2)]$. Es ist ebenfalls eine Überlagerungswirkung: Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gibt es eine Umgebung $U_{[\gamma]}$ (bei der Konstruktion von \tilde{X} benutzt) mit: $[\gamma_1] \neq [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0) \implies U_{[\gamma]} \cdot \gamma_1 \cap U_{[\gamma]} \cdot \gamma_2 = \emptyset$ (wurde bei Konstruktion von \tilde{X} bewiesen).

2.7.12 Korollar. Sei $\Lambda < \Gamma := \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Dann gilt: die Abbildung $q_\Lambda : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)/\Lambda =: X_\Lambda$ ist eine Überlagerung.

Also haben wir: Wenn $\tilde{x} \cdot g = \tilde{y}$ für ein $g \in \Lambda$ mit $\tilde{x} = [\gamma]$, $\tilde{y} = [\gamma']$, $g = [\delta]$. Dann $[\gamma'] = [\gamma \cdot \delta] \implies \gamma'(1) = \gamma(1) \implies \tilde{p}(\tilde{y}) = \tilde{p}(\tilde{x}) \implies \exists p_\Lambda : (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \rightarrow (X, x_0)$ stetig (nach universellen Eigenschaft von Quotientenraum) $p_\Lambda([\gamma] \cdot \Lambda) = \gamma(1)$.

2.7.13 Proposition. p_Λ ist eine Überlagerung.

Beweis. Zu zeigen: $\forall x \in X \exists U \ni x$ s.d. $p_\Lambda^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ s.d. $p_\Lambda|_{V_j} : V_j \xrightarrow{\cong} U$ ein Homöomorphismus. Nimm U aus der Überlagerungseigenschaft von $\tilde{p} \implies \tilde{p}(U) = \bigsqcup_{k \in K} \tilde{V}_k \subset \tilde{X}$ s.d. $\tilde{p}|_{\tilde{V}_k}$ Homöomorphismus $\implies V_j := q_\Lambda(\tilde{V}_k)$, wo \tilde{V}_k einzeln (aus jeder Λ -Bahn wird eine gewählt) aus Λ -Bahnen von \tilde{V}'_k s gewählt werden. ■

2.7.14 Proposition. $(p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) = \Lambda < \pi_1(X, x_0)$ (insbesondere gibt es für jede $\Lambda < \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung, die Λ realisiert).

Beweis. Wir haben folgende Charakterisierung von $(p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda))$: $[\gamma] \in (p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) \iff \tilde{\gamma}$ ist eine Schleife in X_Λ (Hochhebung nach X_Λ). D.h. $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) = x_0^\Lambda$. Sei $\tilde{\gamma}$ die Hochhebung von γ nach \tilde{X} (es gilt: $q_\Lambda(\tilde{\gamma}) = \gamma$).

$\gamma(1) = x_0^\Lambda \iff \tilde{\gamma}(1)$ liegt in der Λ -Bahn von \tilde{x}_0 , also $\exists [\delta] \in \Lambda$ s.d. $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0 \cdot [\delta] = [\delta]$. Aber $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma] \in \tilde{X}$ (wenn $\gamma : I \rightarrow X$ Weg, ist $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}$, $t \mapsto [\gamma|_{[0,t]}$ die Hochhebung von γ) $\implies [\gamma] = [\delta] \in \Lambda$. ■

2.7.15 Definition. Zwei Überlagerungen $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, $p' : (Y', y'_0) \rightarrow (X, x_0)$ heißen *isomorph*, wenn $\exists h : Y \xrightarrow{\cong} Y'$ Homöomorphismus mit $p' \circ h = p$.

Frage: Sei $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine (stetige) Abbildung. Wann existiert eine Hochhebung $\bar{f} : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ($p \circ \bar{f} = f$)?

Beobachtung: Wenn \bar{f} existiert, dann gilt: $f_* = p_* \circ \bar{f}_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \implies \text{Im } f_* \subset \text{Im } p_* \subset \pi_1(X, x_0)$.

2.7.16 Proposition. Sei p, f wie oben, Z wegzusammenhängend. Eine Hochhebung \bar{f} existiert genau dann, wenn $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$.

Beweis. Notwendigkeit erledigt. Sei $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ gegeben, sei $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Sei $z \in Z$ gegeben, sei $\gamma_z : I \rightarrow Z$ ein Weg von z_0 nach z . $f \circ \gamma_z$ ist ein Weg in X mit Anfang x_0 . Sei $\bar{\gamma}_z$ die Hochhebung von $f \circ \gamma_z$ nach Y mit Anfang y_0 . Sei $\bar{f}(z) := \bar{\gamma}_z(1)$. Dann $p \circ \bar{f}(z) = f(z)$ nach Eigenschaften von $\bar{\gamma}_z$.

Frage: Warum ist \bar{f} wohldefiniert? Sei γ'_z ein anderer Weg von z_0 nach z , $f \circ \gamma'_z, \bar{\gamma}'_z$ entsprechend. Zu zeigen: $\bar{\gamma}_z(1) = \bar{\gamma}'_z(1)$. Es ist $\gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z \in \Omega(Z, z_0) \implies f \circ (\gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z) \in \Omega(X, x_0)$. Also $[f \circ (\gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z)] = f_*([\gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z]) \subset \text{Im } p_*$ nach Voraussetzung $\implies \gamma'^{-1}_z \circ \gamma_z$ hebt sich zu einer Schleife hoch; nach Eindeutigkeit ist diese Schleife gleich $\bar{\gamma}'^{-1}_z \circ \bar{\gamma}_z \implies \bar{\gamma}_z(1) = \bar{\gamma}'_z(1)$. ■

8. Vorlesung, 09.11.2016

9. Vorlesung, 10.11.2016

2.7.17 Satz. Seien $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, $p' : (Y', y'_0) \rightarrow (X, x_0)$ wegzusammenhängende Überlagerungen mit $p_*(\pi_1(Y, y_0)) = p'_*(\pi_1(Y', y'_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. Dann gilt: $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $p' : (Y', y'_0) \rightarrow (X, x_0)$ sind isomorph.

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & \xleftrightarrow{\bar{p}'} & (Y', y_0) \\ & \searrow \bar{p} \quad \swarrow p' & \\ & (X, x_0) & \end{array}$$

Beweis. Satz über Hochhebung von Abbildungen liefert Hochhebungen $\bar{p} : (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$, $\bar{p}' : (Y', y'_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Wir wollen zeigen, dass $\bar{p} \circ \bar{p}' = \text{id}_{Y'}$, $\bar{p}' \circ \bar{p} = \text{id}_Y$. Dazu: $\bar{p} \circ \bar{p}'(y'_0) = y'_0$, d.h. die Menge $A' := \{y' \in Y' \mid \bar{p} \circ \bar{p}' = y'\} \neq \emptyset$. Wir zeigen: A' ist offen und abgeschlossen:

- A' abgeschlossen, denn $A' = ((\bar{p} \circ \bar{p}') \times \text{id})^{-1}(\Delta)$, wobei $\Delta := \{(y', y') \mid y' \in Y'\} \subseteq Y' \times Y'$.
- A' ist offen, denn $\bar{p} \circ \bar{p}' : (Y', y'_0) \rightarrow (Y', y'_0)$ ist eine Hochhebung von der $p' : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, denn $p' \circ \bar{p} \circ \bar{p}' = p \circ \bar{p}' = p'$.

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} \nearrow & (Y', y'_0) \\ & \bar{p} \circ \bar{p}' \nearrow & \downarrow p' \\ (Y', y'_0) & \xrightarrow{p'} & (X, x_0) \end{array}$$

Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge s.d. $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j \in J} V_j$ s.d. $p'|_{V_j} : V_j \xrightarrow{\cong} U$ lokaler Homöomorphismus ist. Sei $y' \in Y'$ s.d. $p'(y') \in U$, s.d. $\text{id}(y') = \bar{p} \circ \bar{p}'(y')$. Es $\exists j$ s.d. $y' \in V_j$. Daher bildet $\bar{p} \circ \bar{p}'$ das V_j in V_j ab. Das heißt, dass $\bar{p} \circ \bar{p}'|_{V_j} = \text{id}|_{V_j} \implies A'$ ist offen (mit jedem Punkt enthält sie eine Umgebung). Nun ist Y' ist wegzusammenhängend $\implies A' = Y' \implies \bar{p} \circ \bar{p}' = \text{id}$; aus Symmetriegründen folgt auch $\bar{p}' \circ \bar{p} = \text{id}_Y$. ■

2.7.18 Satz (Klassifikationssatz für Überlagerungen). *Es gibt eine 1 : 1-Korrespondenz zwischen*

$$\left(\begin{array}{l} \text{Isomorphieklassen von Überlagerungen} \\ p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0) \text{ (wegzusammenhängend)} \end{array} \right) \quad \text{und} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Untergruppen} \\ \Lambda < \pi_1(X, x_0) \end{array} \right)$$

Die Korrespondenz ordnet einer Überlagerung $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ die Untergruppe $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ zu.

Beweis. Es folgt aus

- (1) Existenz von Überlagerungen zu jeder Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$.
- (2) Überlagerungen, die zu gleicher Untergruppe gehören, sind isomorph.

■

2.7.19 Beispiel (Klassifikation von Überlagerungen von S^1). Wir wissen schon: $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Jede Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ ist von der Form $n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 0 : \Lambda = 0 < \mathbb{Z}$. Dazu gehört die universelle Überlagerung $\tilde{p} : \mathbb{R} \rightarrow S^1, x \mapsto e^{2\pi i x}$.
- $n \neq 0 : \Lambda = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}, p_n : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^n$.

Notation: $\Gamma := \pi_1(X, x_0), \Lambda < \Gamma \implies (X_\Lambda, x_0^\Lambda)$ ist die (eindeutig bestimmte) wegzusammenhängende Überlagerung, die zu Λ gehört.

Erinnerung:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}, \tilde{x}_0) = (X_{\{1\}}, x_0^{\{1\}}) & & \\ \tilde{p} \swarrow & & \searrow q_\Lambda \\ (Y, y_0) & \xleftarrow{p_\Lambda} & (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \end{array}$$

2.7.20 Lemma. $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \Gamma$, dann gilt: es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (X_{\Lambda_1}, x_0^{\Lambda_1}) & \xrightarrow{\exists q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} \text{ Überlagerung}} & (X_{\Lambda_2}, x_0^{\Lambda_2}) \\ p_{\Lambda_1} \downarrow & & \swarrow p_{\Lambda_2} \\ (X, x_0) & & \end{array}$$

Entsprechend: Wenn es eine stetige Abbildung $q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1}$ gibt, die das obige Diagramm kommutativ macht, dann gilt $\Lambda_1 < \Lambda_2$.

Beweis. $X_{\Lambda_1} = \tilde{X}/\Lambda_1, X_{\Lambda_2} = \tilde{X}/\Lambda_2$. Wenn $\Lambda_1 < \Lambda_2$, dann erhalten wir eine kanonische stetige Abbildung

$$q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} : X_{\Lambda_1} = \tilde{X}/\Lambda_1 \rightarrow X_{\Lambda_2} = \tilde{X}/\Lambda_2,$$

$p_{\Lambda_1} = p_{\Lambda_2} \circ q_{\Lambda_2}^{\Lambda_1}$ nach Konstruktion von $p_{\Lambda_1}, p_{\Lambda_2}$. Die Umkehrung folgt aus Eindeutigkeit der Korrespondenz zwischen Gruppen mit Überlagerungen. \blacksquare

2.7.21 Definition. Sei $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung mit (X, x_0) wegzusammenhängend. Die Mächtigkeit von $p^{-1}(x_0)$ heißt *Anzahl der Blätter* der Überlagerung (wohldefiniert, da $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x)| \forall x \in X$ wegen X zusammenhängend).

2.7.22 Lemma. Sei $p_\Lambda : (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung (zur $\Lambda < \pi_1(X, x_0) =: \Gamma$). Dann gilt: $|p_\Lambda^{-1}(x_0)| = [\Gamma : \Lambda]$.

Beweis. Sei $\gamma \in \Omega(X, x_0), \tilde{\gamma} : I \rightarrow X_\Lambda$ die Hochhebung davon. Wenn $[\lambda] \in \Lambda \implies \tilde{\lambda} \in \Omega(X_\Lambda, x_0^\Lambda)$, das heißt, $\tilde{\gamma} \circ \tilde{\lambda}$ hat gleichen Endpunkt wie $\tilde{\gamma}$. Definiere jetzt $\phi : \Gamma/\Lambda \rightarrow p_\Lambda^{-1}(x_0), [\gamma] \cdot \Lambda \mapsto \tilde{\gamma}(1)$. Abb. ϕ ist bijektiv, denn:

- ϕ ist injektiv: $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}'(1) \implies \tilde{\gamma}'^{-1} \circ \tilde{\gamma} \in \Omega(X_\Lambda, x_0^\Lambda) \implies [\gamma'^{-1} \circ \gamma] \in \Lambda \implies [\gamma] \in [\gamma'] \cdot \Lambda$.
- ϕ ist surjektiv: X_Λ wegzusammenhängend $\implies \forall y \in p^{-1}(x_0) \exists \tilde{\gamma} : I \rightarrow X_\Lambda$, ein Weg von x_0^Λ nach y ; $p_\Lambda \circ \tilde{\gamma} \in \Omega(X, x_0)$ mit Hochhebung $\tilde{\gamma}$, $\phi([p_\Lambda \circ \tilde{\gamma}] \cdot \Lambda) = \tilde{\gamma}(1) = y$.

■

2.7.23 Korollar. Die Anzahl der Blätter der universellen Überlagerung ist gleich $|\pi_1(X, x_0)|$.

2.7.24 Definition. Sei $(Y, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ eine Überlagerung. Eine *Decktransformation* $h : Y \rightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus mit $p \circ h = p$ (anders gesagt: $h : (Y, y_0) \rightarrow (Y, h(y_0))$ ist ein Isomorphismus von Überlagerungen).

Die Decktransformationen bilden eine Gruppe, die durch $\text{Aut}(p)$ bezeichnet wird.

Frage: Was ist $\text{Aut}(p_\Lambda)$ in Termen von $\Lambda < \pi_1(X, x_0)$?

2.7.25 Definition. Eine Überlagerung $(Y, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ heißt *normal*, wenn die Gruppe von Decktransformationen $\text{Aut}(p)$ *transitiv* auf $p^{-1}(x_0)$ wirkt ($\forall x'_0 \in p^{-1}(x_0) \exists h \in \text{Aut}(p)$ mit $h(x_0) = x'_0$).

2.7.26 Proposition. Sei $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung, s.d. beide Räume wegzusammenhängend sind, sei $\Lambda := p_*(\pi_1(Y, y_0)) < \pi_1(X, x_0) =: \Gamma$ die zugehörige Untergruppe. Dann gilt:

- (1) p ist normal $\iff \Lambda \triangleleft \Gamma$ Normalteiler.
- (2) $\text{Aut}(p) \cong N(\Lambda) / \Lambda$, wobei

$$N(\Lambda) := \{g \in \Gamma \mid g\Lambda g^{-1} = \Lambda\},$$

der Normalisator von Λ in Γ .

2.7.27 Korollar. $\text{Aut}(\tilde{p}) \cong \pi_1(X, x_0) = \Gamma$.