Kurzskript

Algebraische Topologie[1,2]

Teil 1

Dozent: Dr. V. Alekseev
LaTeX: `rydval.jakub@gmail.com`
Version: 2. April 2017
Technische Universität Dresden

[1]Math Ma ALGTOP: Algebraische Topologie, WS 2016/17
[2]Zusatzinhalt mit * gekennzeichnet

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume

1.1 Grundlagen

Definition. $(X, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Raum, wenn $\mathcal{T}$ ein System von Teilmengen von X ist, das folgende Eigenschaften hat:

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,
(2) $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$,
(3) $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ heißt *Topologie*, Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Teilmengen* von X, $U_t \subset X$ heißt *Umgebung* von einem $t \in X$ wenn $\exists O \in \mathcal{T}$ s.d. $t \in O \subset U_t$. $\{O_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ heißt *Basis* von $\mathcal{T}$, falls $\forall O \in \mathcal{T} \exists J \subset I$ s.d. $O = \bigcup_{j \in J} O_j$. $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* gdw. $X \backslash A$ offen ist. Sei $(X, \mathcal{T}')$ ein weiterer topologischer Raum, dann ist $\mathcal{T}'$ *stärker* als $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ ($\iff$ $\mathcal{T}$ *schwächer* als $\mathcal{T}'$)

Beispiel. • X beliebige Menge;

- $\mathcal{T}_{\text{disc}} = \{\text{alle Teilmengen von X}\}$ *diskrete Topologie*,
- $\mathcal{T}_{\text{triv}} = \{\varnothing, X\}$ *antidiskrete Toplogie.*

- (X, d) metrischer Raum;
  - $\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ s.d. } B(x, \varepsilon) \subset U\}$.

Definition. $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume, Abb. $f : X \longrightarrow Y$ heißt

- *stetig in* $x \in X$ falls $\forall$ Umgeb. $U_{f(x)} \exists$ Umgeb. $U_x : f(U_x) \subset U_{f(x)}$,
- *stetig*, wenn $\forall U \in \mathcal{T}_Y$ gilt: $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$,
- *Homöomorphismus*, falls f stetig ist und $\exists g : Y \longrightarrow X$ stetig mit $f \circ g = \text{id}_Y$, $g \circ f = \text{id}_X$ (insbesondere sind Homöomorphismen stets Bijektionen).

Bemerkung: Falls nicht explizit gesagt, wird ab jetzt Stetigkeit aller Abb. vorausgesetzt.

Definition. topologischer Raum $(X, \mathcal{T}_X)$ heißt:

- *zusammenhängend*, wenn es keine Zerlegung $X = X_1 \sqcup X_2$ in zwei disjunkte, nichtleere, offene Mengen gibt,
- *wegzusammenhängend*, wenn $\forall x, y \in X \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ stetig mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

Proposition. *Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend.*

Beweis. (Beruhrt an der Tatsache, dass $[0,1]$ zusammenhängend ist.) $(X, \mathcal{T}_X)$ topologischer Raum, $X = X_1 \sqcup X_2$, X_1, X_2 offen, nichtleer $\implies \exists x \in X_1, y \in X_2$. Da X wegzusammenhängend ist: $\exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Es folgt $[0,1] = \gamma^{-1}(X) = \gamma^{-1}(X_1 \sqcup X_2) = \gamma^{-1}(X_1) \sqcup \gamma^{-1}(X_2)$. Die Tatsache, dass $\gamma^{-1}(X_1)$, $\gamma^{-1}(X_2)$ offen sind liefert einen Widerspruch. ∎

Definition. $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $A \subset X$.

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset F \subset X \\ \text{abgeschl.}}} F$$

ist der *Abschluss* von A. A liegt *dicht* in $X :\Longleftrightarrow \overline{A} = X$.

Lemma. $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \ni x \text{ offen gilt } U \cap A \neq \varnothing\}$.

Beweis. Übung. ∎

Definition. $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum heißt *Hausdorffraum*, wenn

$$\forall x \neq y \in X \exists U_x, U_y \text{ offen mit } x \in U_x,\ y \in U_y,\ U_x \cap U_y = \varnothing.$$

Bemerkung: Metrische Räume sind Hausdorffräume.

Definition. $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum heißt *kompakt*, wenn es für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ von X (also U_i offen, $\bigcup_{i \in I} U_i = X$) eine endliche Teilüberdeckung $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ gibt ($\exists i_1, ..., i_n \in I$ s.d. U_i offen, $\bigcup_{k=1}^n U_{i_k} = X$).

Bemerkung: Es ist sinnvoll, Kompaktheit nur auf Hausdorffräumen zu betrachten. Im Weiteren werden topologische Räume/ Hausdorffräume einfach mit X bezeichnet.

Definition. $(X, \mathcal{T}_X)$ topologischer Raum, $Y \subset X \implies (Y, \mathcal{T}_Y)$ ist topologischer Raum mit *induzierter Topologie* (*Teilraumtopologie*) $\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}_X\}$.

Proposition. *X Hausdorffraum, $Y \subset X$ kompakt $\implies Y$ abgeschlossen.*

Beweis. X ist Hausdorffraum $\implies \forall x \in X \backslash Y \forall y \in Y \exists V_{x,y} \ni y$, $U_{x,y} \ni x$ offen mit $V_{x,y} \cap U_{x,y} = \varnothing$. Wenn $x \in X \backslash Y \implies \bigcup_{y \in Y}(V_{x,y} \cap Y) = Y$, $V_{x,y} \cap Y$ offen in Y. Y ist kompakt $\implies \exists y_1, ..., y_n \in Y$ s.d. $\bigcup_{k=1}^n (V_{x,y} \cap Y) = Y$, $V_{x,y_k} \cap U_{x,y_k}$ $\implies U_{x,y_k} \cap Y = \varnothing \implies$ für $U_x := \bigcap_{k=1}^n U_{x,y_k}$ gilt $U_x \cap Y = \varnothing$. Nun ist $X \backslash Y = \bigcup_{x \in X \backslash Y} U_x$ offen $\implies Y$ ist abgeschlossen. ∎

Proposition. *X kompakt, Y Hausdorffraum, Abb. $f : X \longrightarrow Y$ stetig, injektiv $\implies f : X \longrightarrow Y$ ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. $f : X \longrightarrow f(X)$ ist stetig und bijektiv $\implies$ man braucht zu zeigen, dass die inverse Abb. stetig ist, oder, dass f abgeschlossene Teilmengen von X auf abgeschlossene Teilmengen von $f(X)$ abbildet. Nun, wenn $X' \subset X$ abgeschlossen, dann auch kompakt $\implies f(X')$ kompakt, da Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt ($f(X') = \bigcup_{i \in I} U_i \implies X' = \bigcup_{i \in I} f^{-1} U_i \overset{X' \text{ komp.}}{=} \bigcup_{k=1}^n f^{-1} U_{i_k} \implies f(X') = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$) $\implies f(X') \subset Y$ abgeschlossen nach obiger Proposition. ∎

***Satz.** *X Hausdorffraum $\iff \Delta := \{(x,x) \mid x \in X\}$ ist abgeschlossen bzgl. der Produkttopologie auf $X \times X$.*

Beweis. Sei X hausdorffsch, $x \neq y \implies \exists$ Umgebungen $U_x \cap U_y = \varnothing \implies (U_x \times U_y) \cap \Delta = \varnothing$ Umgebung von $(x, y) \implies (X \times X) \setminus \Delta$ offen. Rückrichtung analog, wobei U_x, U_y Projektionen einer Umgebung U von (x, y) auf beide Komponenten. ■

***Satz.** *X Zusammenhängend $\iff X, \varnothing$ die einzigen offenen und abgeschlossenen Mengen in X.*

Beweis. "$\implies$" Ang. $A \notin \{\varnothing, X\}$ offen und abgeschlossen $\implies X \setminus A$ offen $\implies X = A \sqcup X \setminus A \implies$ Widerspruch zu X zusammenhängend.

"$\impliedby$" Ang. $X = A \sqcup B$, A, B offen, nichtleer $\implies A, B$ offen und abgeschlossen $\implies$ Widerspruch.

■

2 Homotopie

Definition. Sei Y ein topologischer Raum, $A \subset Y$ ein Teilraum. A heißt *Deformationsretrakt* von Y, wenn $\exists F : Y \times [0,1] \to Y$ stetig, s.d.

- $F(\,\cdot\,,0) = \mathrm{id}_Y$,
- $F(y,1) \in A \forall y \in Y$,
- $F(a,t) = a \forall t \in [0,1] \forall a \in A$.

Definition. Sei X ein topologischer Raum, $f : X \twoheadrightarrow Y$ (d.h. f surjektiv), dann kann man eine Topologie $\mathcal{T}_f := \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \subset X \text{ offen}\}$ auf Y definieren. Diese heißt *Quotiententopologie.*

Proposition (universelle Eigenschaft der Quotiententopologie). *Sei Y eine Menge, X ein topologischer Raum, $f : X \twoheadrightarrow Y$ (surjektive) Abbildung. Betrachte $(Y, \mathcal{T}_f)$. Dann gilt für alle topologische Räume Z: eine Abb. $g : Y \to Z$ ist stetig $\iff$ $g \circ f : X \to Z$ ist stetig.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, two heads, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. “$\Longrightarrow$” Sei $U \subseteq Z$ offen. Dann $g^{-1}(U)$ offen da g stetig und $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ offen bzgl. $\mathcal{T}_f$. Also $g \circ f$ stetig.

“$\Longleftarrow$” $g \circ f$ stetig $\Longrightarrow$ $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ offen $\Longrightarrow$ $g^{-1}(U)$ offen wegen $\mathcal{T}_f$ $\Longrightarrow$ g stetig.

∎

2.1 Homotopie zwischen Abbildungen

Definition. Seien X, Y topologische Räume, $f_0, f_1 : X \to Y$ (stetig). Eine *Homotopie* zwischen f_0 und f_1 ist eine stetige Abbildung $F : X \times [0,1] \to Y$ mit $F(\,\cdot\,,0) = f_0$, $F(\,\cdot\,,1) = f_1$.

Definition. Sei $A \subset X$ ein Teilraum. Dann heißt eine Abbildung $r : X \to A$ mit $r|_A = \mathrm{id}_A$ eine *Retraktion* von X auf A.

Definition. Seien X, Y topologische Räume, f_0, $f_1 : X \to Y$ stetig, $A \subset X$ Teilraum mit $f_0|_A = f_1|_A$, f_0 und f_1 heißen *homotop relativ* zu A, wenn $\exists F : X \times [0,1] \to Y$ Homotopie zwischen f_0 und f_1, sodass $F(a,t) = f_0(a) = f_1(a) \forall a \in A \forall t \in [0,1]$.

Definition. Zwei topologische Räume X, Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn $\exists f : X \to Y$, $g : Y \to X$, sodass $f \circ g$ homotop zu id_Y und $g \circ f$ homotop zu id_X.

2.2 Konstruktionen und Beispiele

Definition. Ein *CW-Komplex* X ist ein topologischer Raum, der wie folgt entsteht:

(0) Fange mit einem diskreten Raum $X^0 :=$ disjunkte Vereinigung von Punkten an.
(1) Definiere induktiv die Räume X^n (die sogenannte n*-Skelette* / n*-Gerüste* von X) für $n \geq 1$ folgendermaßen: für eine Familie $\{e^n_\alpha\}_{\alpha\in A}$ von n-Zellen fixiere stetige Abbildungen $\varphi^n_\alpha : \partial e^n_\alpha \to X^{n-1}$ und definiere $X^n := (\bigsqcup_{\alpha\in A} e^n_\alpha) \cup_{\varphi^n_\alpha} X^{n-1}$.
(2) $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ mit der *schwachen Topologie*: $Y \subset X$ offen $\iff$ $Y \cap X^n$ offen für alle n.

2.3 Fundamentalgruppe

Proposition. *Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f(x_0) = y_0$. Dann gilt: die Abbildung $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$ ein Gruppenhomomorphismus. Außerdem: wenn $g : Y \to Z$ stetig, $g(y_0) = z_0 \implies (g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Z, z_0)$.*

Beweis. Wohldefiniert: Wenn $\gamma_1 \sim \gamma_2$ durch H, dann $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$ durch $f \circ H$. Homomorphismus: $f_*(\gamma_2 \cdot \gamma_1) = [f \circ (\gamma_2 \cdot \gamma_1)] = [(f \circ \gamma_2) \cdot (f \circ \gamma_1)] = [f \circ \gamma_2] \cdot [f \circ \gamma_1] = f_*(\gamma_2) \cdot f_*(\gamma_1)$. Letzte Aussage: $(g \circ f)_*([\gamma]) = [g \circ f \circ \gamma] = g_*([f \circ g]) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$. ∎

Lemma. *$f, f' : X \to Y$ zwei stetige Abb. mit $f(x_0) = f'(x_0) = y_0 \implies f \sim f'$ rel. zu $x_0 \implies f_* = f'_*$.*

Beweis. $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$. Erste Homotopie $f \rightsquigarrow f'$ induziert eine Homotopie $f \circ \gamma \rightsquigarrow f' \circ \gamma \implies f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma] = [f' \circ \gamma] = f'_*([\gamma])$. ∎

Lemma. *Sei X ein wegzusammenhängender Raum, $x_0, x_1 \in X$. Dann gilt: $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$. Jede Homotopieklasse der Wege $\beta : I \to X$, $\beta(0) = x_0$, $\beta(1) = x_1$ induziert einen solchen Isomorphismus $\Theta_{[\beta]} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$, $[\gamma] \mapsto [\beta \cdot \gamma \cdot \beta^{-1}]$.*

2.4 Hochhebung von Wegen und Homotopien

Definition. Eine *Überlagerung* $p : Y \to X$ ist eine surjektive stetige Abbildung mit folgenden Eigenschaften: Für jeden Punkt $x \in X$ ex. eine Umgebung $U \ni x$, so dass

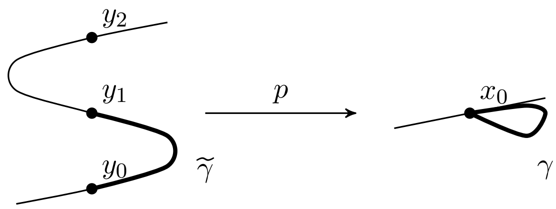
$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j\in I} V_j \subset Y,$$

wobei $V_j \subset Y$ offen und so dass $p|_{V_j} \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Proposition (Homotopiehochhebungseigenschaft von Überlagerungen). *Sei $p : Y \to X$ eine überlagerung, $F : Z \times I \to X$ stetig. Sei $\widetilde{F} : Z \times \{0\} \to Y$ eine Abbildung mit $p \circ \widetilde{F} = F|_{Z\times\{0\}}$ (intuitiv: F ist eine Homotopie zwischen $F|_{Z\times\{0\}}$ und $F|_{Z\times\{1\}}$, und eine Hochhebung von der ersten Abbildung ist gegeben). Dann existiert eine Fortsetzung $\widetilde{F} : Z \times I \to Y$ mit $p \circ \widetilde{F} = F$, von der obigen $\widetilde{F} : Z \times \{0\} \to Y$.*

$$\begin{tikzcd} Z \times I \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\widetilde{F}|_{Z\times\{0\}}"'] & X \\ Y \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

Korollar. (1) *Gegeben $\gamma : I \to X$ und $y_0 \in Y$ s.d. $p(y_0) = \gamma(0)$, es ex. genau eine Hochhebung $\widetilde{\gamma} : I \to Y$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$ ($Z = \{*\}, F = \gamma : I \to X$, $\widetilde{F}|_{\{0\}} = y_0$).*



(2) *Gegeben $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$, eine Homotopie $H : \gamma_1 \rightsquigarrow \gamma_2$ und $y_0 \in p^{-1}(\gamma_1(0)) = p^{-1}(\gamma_2(0)) \implies \exists! \widetilde{H} : I \times I \to Y$ zwischen den Hochhebungen $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ s.d. $\widetilde{H}|_{I\times\{0\}} = H$.*

2.5 Fundamentalgruppe von S^1

Satz. *$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ ($S^1 \subseteq \mathbb{C}$), sie wird durch die Äquivalenzklasse der Schleife $\omega : I \to S^1$, $s \mapsto e^{2\pi i s} = \cos(2\pi s) + i \sin(2\pi s)$ erzeugt.*

Beweis. $p : \mathbb{R} \to S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ ist eine Überlagerung. Die Hochhebung $\widetilde{\omega}$ von ω mit $\widetilde{\omega}(0) = 0$ ist $\widetilde{\omega}(s) = s$ (damit $(p \circ \widetilde{\omega})(s) = e^{2\pi i s} = \omega(s)$). Entsprechend ist $\widetilde{\omega}^n(s) = n \cdot s$ die eindeutige Hochhebung von ω^n. Definiere eine Abbildung $\phi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ durch $\phi([\gamma]) := \widetilde{\gamma}(1)$, wobei $\widetilde{\gamma}$ die (eindeutige) Hochhebung von γ ist.

Z.z.: ϕ ist wohldefiniert: $\widetilde{\gamma}$ ist eine Hochhebung, also $p \circ \widetilde{\gamma} = \gamma \implies (p \circ \widetilde{\gamma})(1) = p(\widetilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = 1 \implies \widetilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Seien γ_1, γ_2 zwei homotope Schleifen an 1. Seien $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ ihre Hochhebungen. Nach dem Korollar von oben sind auch $\widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2$ homotop, und daher $\widetilde{\gamma}_1(1) = \widetilde{\gamma}_2(1)$.

Z.z.: ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus: Sei $\gamma \in \Omega(S^1, 1)$. Hebe γ hoch zu $\widetilde{\gamma}$, sei $\phi([\widetilde{\gamma}]) = n \in \mathbb{Z}$. Jetzt sind $\widetilde{\gamma}$ und $\widetilde{\omega}^n$ zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit den gleichen Anfangspunkten $\widetilde{\gamma}(0) = 0 = \widetilde{\omega}^n(0)$ und Endpunkten $\widetilde{\gamma}(1) = n = \widetilde{\omega}^n(1) \implies \widetilde{\gamma} \sim \widetilde{\omega}^n$, weil je zwei Wege in $\mathbb{R}$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop sind. Daher: $\gamma = p \circ \widetilde{\gamma} \sim p \circ \widetilde{\omega}^n = \omega^n$. Ferner $\phi([\omega^n]) = n$, $\phi([\omega^n] \cdot [\omega^m]) = \phi([\omega^{n+m}]) = n + m = \phi([\omega^n]) + \phi([\omega^m]) \implies \phi$ ist eine Homomorphismus, surjektiv. Bleibt: ϕ ist injektiv. Dazu $\phi([\omega^n]) = 0 \implies n = 0$, $\omega^0 = \underline{1}$. ∎

Proposition. *Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Dann gilt: $\pi_1(X \times Y, (x_0, x_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.*

Beweis. Jede Schleife γ in $X \times Y$ an (x_0, y_0) definiert durch Verknüpfung mit Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$, $\pi_Y : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$ zwei

Schleifen $\pi_X \circ \gamma$, $\pi_Y \circ \gamma$. Umgedreht: ein Paar $(\gamma_x, \gamma_y) \in \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0)$ definiert Schleife $\gamma(s) := (\gamma_x(s), \gamma_y(s)) \in \Omega(X \times Y, (x_0, y_0))$. Diese Entsprechung respektiert Homotopien und Verknüpfungen (nachzurechnen) $\implies (\pi_X)_* \times (\pi_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ist ein Isomorphismus. ∎

Korollar. $\pi_1(\Pi^n) = \pi_1(\overbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}^{n\text{-}mal}) \cong \mathbb{Z}^n$.

2.6 Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, dann ist $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$, $[\gamma] \mapsto [p \circ \gamma]$ der induzierte Gruppenhomomorphismus.

Proposition. *p_* ist injektiv, $p_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ ist die Untergruppe der Homotopieklassen von Schleifen γ, deren Hochhebung $\widetilde{\gamma}$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$ auch Schleife ist.*

Beweis. Sei $[\widetilde{\gamma}] \in \ker p_*$, d.h. $p \circ \widetilde{\gamma} \sim \underline{x_0}$. Dann ist $\underline{y_0}$ die eindeutige Hochhebung von $p \circ \gamma \implies \gamma \sim \underline{y_0}$. Wenn $[\gamma] \in \operatorname{Im}(p_*) \implies [\widetilde{\gamma}] \in \pi_1(Y, y_0)$, weil $p_*([\widetilde{\gamma}]) = [\gamma] \implies \widetilde{\gamma} \in \Omega(Y, y_0)$. ∎

Definition. Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Eine Überlagerung $\widetilde{p} : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ heißt *universelle Überlagerung*, falls $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) = \{e\}$.

Definition. X heißt *semilokal einfach zusammenhängend* wenn für jede offene Teilmenge $x \in W \subset X$ eine offene Teilmenge $x \in U \subset W \subset X$ existiert s.d. jede Schleife $\gamma \in \Omega(U, x)$ homotop zur konstanten Schleife $\underline{x}$ ist.

Dies ist eine Eigenschaft von X, die notwendig für die Existenz von einer universellen Überlagerung ist: Sei $\widetilde{p} : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine universelle Überlagerung, sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $\widetilde{\gamma} \in \Omega(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ eine Hochhebung von γ (also setzen wir voraus, dass γ zu einer Schleife hochgehoben wird). Dann ist $\widetilde{\gamma} \sim \underline{\widetilde{x}_0}$, weil $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist. Wenn $U \ni x_0$ eine Umgebung von x_0 derart ist, dass $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in F} V_\alpha$ mit $p : V_\alpha \to U$ Homöomorphismus, dann liegt $\widetilde{x}_0 \in V_{\alpha_0}$, also hebt sich jede Schleife $\gamma \in \Omega(U, x_0)$ zu $\widetilde{\gamma} \in \Omega(V_{\alpha_0}, \widetilde{x}_0)$. D.h. $\widetilde{\gamma} \sim \underline{\widetilde{x}_0} \implies \gamma \sim \underline{x_0}$.

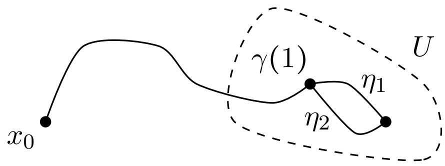
Definition. X heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn $\forall x \in W \subset X$ offen eine offene Teilmenge $x \in U \subset W$ ex. s.d. U wegzusammenhängend ist.

Sei $\widetilde{X} := \{[\gamma] \mid \gamma : I \to X \text{ Weg mit } \gamma(0) = x_0\}$, $p : \widetilde{X} \to X$, $[\gamma] \mapsto \gamma(1)$, $\widetilde{x}_0 := \underline{x_0} \in \widetilde{X}$. Die Abb. p ist wohldefiniert und surjektiv, da X wegzusammenhängend. Wir brauchen eine Topologie auf $\widetilde{X}$, s.d. $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung ist. Dazu betrachten wir: $\mathcal{U} := \{U \subset X \text{ offen, wegzusammenhängend} \mid \iota_* : \pi_1(U) \to \pi_1(X) \text{ trivial}\}$. Bemerkung: $U \in \mathcal{U}$, $V \subset U$ offen, wegzusammenhängend $\implies V \in \mathcal{U}$ ($\iota_*^V : \pi_1(V) \to \pi_1(U) \to \pi_1(X)$ ist trivial, weil ι_*^U trivial).

Behauptung. *Sei X lokal wegzusammenhängend, semilokal einfach zusammenhängend $\implies \mathcal{U}$ ist eine Basis der Topologie auf X.*

Beweis. $\forall W \subset X$ offen $\forall x \in W \exists U_x$ offen, zusammenhängend s.d. jede Schleife in U_x homotop zur konstanten Schleife in X ist. Es folgt $W = \bigcup_{x \in W} U_x$. ∎

Wir beweisen nun den nächsten Satz. Sei $U \in \mathcal{U}$ und $[\gamma] \in \widetilde{X}$ mit $\gamma(1) \in U$. Definiere $U_{[\gamma]} := \{[\eta \cdot \gamma] \mid \eta : I \to X \text{ mit } \eta(0) = \gamma(1) \text{ und } \eta(I) \subset U\}$



(wohldefiniert, weil Homotopie verträglich mit Verknüpfung ist). Die Abbildung

$$p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to U$$

ist surjektiv, weil U wegzusammenhängend ist, auch injektiv, weil wenn $(\eta_1 \cdot \gamma)(1) = (\eta_2 \cdot \gamma)(1) \implies [\eta_1 \cdot \gamma] = [\eta_2 \cdot \gamma]$. Sei jetzt $\mathcal{T}$ die Topologie auf $\widetilde{X}$, die $\{U_{[\gamma]} \mid U \in \mathcal{U}, [\gamma] \in \widetilde{X}\}$ als Basis hat. Dann gilt: $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \to U$ ist ein Homöomorphismus (wenn $V_{[\gamma]} \subset U_{[\gamma]} \iff V \subset U$). Also ist $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ stetig, weil Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist. Sei jetzt $U \in \mathcal{U}$, wähle $x \in U$.

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\gamma]}{}^{1} U_{[\gamma]}.$$

Weil: Sei $U_{[\gamma_1]} \cap U_{[\gamma_2]} \neq \emptyset$. D.h. $[\eta_1 \cdot \gamma_1] = [\eta_2 \cdot \gamma_2]$ für gewisse $\eta_1, \eta_2 : I \to U$, $\gamma_1, \gamma_2 : I \to X$. Sei $[\eta' \cdot \gamma_1] \in U_{[\gamma_1]}$. Dann gilt

$$[\eta' \cdot \gamma_1] = [\eta' \cdot \overline{\eta_1} \cdot \eta_1 \cdot \gamma_1] = [\eta' \cdot \overline{\eta_1} \cdot \eta_2 \cdot \gamma_2] = [\eta'' \cdot \gamma_2] \in U_{[\gamma_2]}$$

$\implies U_{[\gamma_1]} = U_{[\gamma_2]}$. Also: $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ ist eine Überlagerung. Bleibt zu zeigen: $\widetilde{X}$ ist einfach zusammenhängend.

(1) $\widetilde{X}$ ist wegzusammenhängend. Sei $[\gamma] \in \widetilde{X}$. Wir brauchen einen Weg $\widetilde{\gamma} : I \to \widetilde{X}$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{x}_0$, $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma$. Def.

$$\widetilde{\gamma}(t) := s \mapsto \begin{cases} \gamma(s) & \text{falls } s \in [0,t], \\ \gamma(t) & \text{falls } s \in [t,1] \end{cases} \qquad \text{(tautologische Definition)}$$

$\implies \widetilde{\gamma}(0) = \underline{x_0}$, $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma$.

[1] Vereinigung über Homotopieklassen von Wegen $\gamma : I \to X, \gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x \in U$

(2) Es reicht zu zeigen: $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)) = \{e\} < \pi_1(X,x_0)$, da p_* injektiv ist. Das Bild $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0))$ besteht aus Homotopieklassen $[\gamma]$ von Wegen $\gamma \in \Omega(X,x_0)$, deren Hochhebung $\widetilde{\gamma} \in \Omega(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$. Wenn $\gamma \in \Omega(X,x_0)$, sei $\hat{\gamma} : I \to \widetilde{X}$ wie oben definiert. $\hat{\gamma}$ ist eine Hochhebung von γ mit $\hat{\gamma}(0) = \underline{x_0}$ und $\{\hat{\gamma}(t)\}_{t\in I}$ ist eine Homotopie zwischen $\widetilde{x}_0$ und $\widetilde{\gamma}$. D.h.: $[\widetilde{\gamma}] = [\underline{\widetilde{x}_0}] \implies \pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0) = \{e\}$.

Satz. *Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum. Dann existiert eine universelle Überlagerung $p : (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ (für jedes $x_0 \in X$).*

Definition. Sei Γ eine Gruppe, Y ein topologischer Raum. Eine *Wirkung* von Γ auf Y ist ein Gruppenhomomorphismus $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(Y)$. Bezeichnung: $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y$. Sei $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y$ eine Wirkung, $R_{\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y} := \{(y,\alpha(g)(y)) \mid y \in Y, g \in \Gamma\}$.

$$\Gamma \backslash Y := R_{\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} Y} \backslash Y = {}_{\substack{y \sim \alpha(g)(y),\\ y \in Y, g \in \Gamma}} \backslash Y$$

heißt *Quotientenraum* der Wirkung (der Raum aller Orbits).

Definition. Sei X ein topologischer Raum, $\alpha : \Gamma \curvearrowright X$ eine Wirkung. Dann heißt α eine *Überlagerungswirkung*, wenn jedes $x \in X$ eine Umgebung $U \ni x$ hat s.d. $\forall g_1 \neq g_2 \in \Gamma$ gilt $g_1U \cap g_2U = \varnothing$ ($g_1U = \alpha(g_1)(U)$, $g_2U = \alpha(g_2)(U)$).

Proposition. *$\alpha : \Gamma \curvearrowright X$ ist eine Überlagerungswirkung $\implies$ $q : X \to \Gamma \backslash X$ ist eine Überlagerung.*

Beweis. q ist surjektiv und stetig bzgl. Quotiententopologie. Sei $x \in X$, $U \ni x$ aus der Def. der Überlagerungswirkung. Dann gilt für $V := q(U)$: $q^{-1}(V) = \bigsqcup_{g\in\Gamma} gU$, denn:

- $q(x) \in V \iff \exists g \in \Gamma$ s.d. $g \cdot x \in U$ (Def. des Quotientenraumes).
- die Vereinigung ist disjunkt, denn: $g_1U \cap g_2U \neq \varnothing \implies g_1 = g_2$ nach Definition eine Überlagerungswirkung.
- $q|_{gU} : gU \to V$ ist ein Homöomorphismus nach Definition der Quotiententopologie. (Inverse stetig wegen Injektivität). ∎

Sei (X,x_0) topologischer Rum, $(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ eine universelle Überlagerung, $\Gamma := \pi_1(X,x_0)$. Wir haben folgende Rechtswirkung von Γ auf $(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$: $\widetilde{\beta} : \widetilde{X} \times \Gamma \to \widetilde{X}, ([\gamma],[\delta]) \mapsto [\gamma\cdot\delta]$. Dies ist tatsächlich eine Wirkung, denn $\underline{[(\gamma\cdot\delta_1)\cdot\delta_2]} = [\gamma\cdot(\delta_1\cdot\delta_2)]$. Es ist ebenfalls eine Überlagerungswirkung: Für jedes $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ gibt es eine Umgebung $U_{[\gamma]}$ (bei der Konstruktion von $\widetilde{X}$ benutzt) mit: $[\gamma_1] \neq [\gamma_2] \in \pi_1(X,x_0) \implies U_{[\gamma]} \cdot \gamma_1 \cap U_{[\gamma]} \cdot \gamma_2 = \varnothing$ (wurde bei Konstruktion von $\widetilde{X}$ bewiesen).

Korollar. *Sei $\Lambda < \Gamma := \pi_1(X,x_0)$ eine Untergruppe. Dann gilt: die Abbildung q_Λ : $(\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \to (\widetilde{X},\widetilde{x}_0)/\Lambda =: X_\Lambda$ ist eine Überlagerung.*

Also haben wir:

$$\begin{tikzcd} (\widetilde{X},\widetilde{x}_0) \arrow[d, "\widetilde{p}"'] \arrow[dr, "q_\Lambda"] & \\ (X,x_0) & (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \arrow[l, "p_\Lambda"] \end{tikzcd}$$

Wenn $\widetilde{x}\cdot g = \widetilde{y}$ für ein $g \in \Lambda$ mit $\widetilde{x} = [\gamma]$, $\widetilde{y} = [\gamma']$, $g = [\delta]$. Dann $[\gamma'] = [\gamma\cdot\delta] \implies \gamma'(1) = \gamma(1) \implies \widetilde{p}(\widetilde{y}) = \widetilde{p}(\widetilde{x}) \implies \exists p_\Lambda : (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \to (X, x_0)$ stetig (nach universellen Eigenschaft von Quotientenraum) $p_\Lambda([\gamma]\cdot\Lambda) = \gamma(1)$.

Proposition. *p_Λ ist eine Überlagerung.*

Beweis. Zu zeigen: $\forall x \in X \exists U \ni x$ s.d. $p_\Lambda^{-1}(U) = \bigsqcup_{j\in J} V_j$ s.d. $p_\Lambda|_{V_j} : V_j \overset{\cong}{\to} U$ ein Homöomorphismus. Nimm U aus der Überlagerungseigenschaft von $\widetilde{p} \implies \widetilde{p}(U) = \bigsqcup_{k\in K} \widetilde{V}_k \subset \widetilde{X}$ s.d. $\widetilde{p}|_{\widetilde{V}_k}$ Homöomorphismus $\implies V_j := q_\Lambda(\widetilde{V}_k)$, wo $\widetilde{V}_{k_j}$ einzeln (aus jeder Λ-Bahn wird eine gewählt) aus Λ-Bahnen von $\widetilde{V}_k's$ gewählt werden. ■

Proposition. $(p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) = \Lambda < \pi_1(X, x_0)$.

Beweis. Charakterisierung von $(p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) : [\gamma] \in (p_\Lambda)_*(\pi_1(X_\Lambda, x_0^\Lambda)) \iff \widetilde{\gamma}$ Hochhebung nach X_Λ ist eine Schleife in X_Λ. D.h. $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}(0) = x_0^\Lambda$. Sei $\widetilde{\widetilde{\gamma}}$ die Hochhebung von γ nach $\widetilde{X}$ (es gilt: $q_\Lambda(\widetilde{\widetilde{\gamma}}) = \widetilde{\gamma}$). Es gilt $\widetilde{\gamma}(1) = x_0^\Lambda$ gdw. $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1)$ liegt in der Λ-Bahn von $\widetilde{x}_0$, also $\exists[\delta] \in \Lambda$ s.d. $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1) = \widetilde{x}_0 \cdot [\delta] = [\delta]$. Aber $\widetilde{\widetilde{\gamma}}(1) = [\gamma] \in \widetilde{X}$ (wenn $\gamma : I \to X$ Weg, ist $\widetilde{\widetilde{\gamma}} : I \to \widetilde{X}$, $t \mapsto [\gamma|_{[0,t]}]$ die Hochhebung von γ) $\implies [\gamma] = [\delta] \in \Lambda$. ■

Definition. Zwei Überlagerungen $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$, $p' : (Y', y_0') \to (X, x_0)$ heißen *isomorph*, wenn $\exists h : Y \to Y'$ Homöomorphismus mit $p' \circ h = p$.

Proposition. *Sei p, f wie oben, Z wegzusammenhängend. Eine Hochhebung $\overline{f} : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ existiert genau dann, wenn $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$.*

Beweis. Notwendigkeit erledigt. Sei $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ gegeben, $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. Sei $z \in Z$ gegeben, sei $\gamma_z : I \to Z$ ein Weg von z_0 nach z. $f \circ \gamma_z$ ist ein Weg in X mit Anfang x_0. Sei $\overline{\gamma}_z$ die Hochhebung von $f \circ \gamma_z$ nach Y mit Anfang y_0. Sei $\overline{f}(z) := \overline{\gamma}_z(1)$. Dann $p \circ \overline{f}(z) = f(z)$ nach Eigenschaften von $\overline{\gamma}_z$.

Frage: Warum ist $\overline{f}$ wohldefiniert? Sei γ_z' ein anderer Weg von z_0 nach z, $f \circ \gamma_z', \overline{\gamma}_z'$ entsprechend. Zu zeigen: $\overline{\gamma}_z(\underline{1}) = \overline{\gamma}_z'(1)$. Es ist $\gamma_z'^{-1} \cdot \gamma_z \in \Omega(Z, z_0) \implies f \circ (\gamma_z'^{-1} \cdot \gamma_z) \in \Omega(X, x_0)$. Also $[f \circ (\gamma_z'^{-1} \cdot \gamma_z)] = f_*([\gamma_z'^{-1} \cdot \gamma_z]) \subset \operatorname{Im} p_*$ nach Voraussetzung $\implies f \circ \gamma_z'^{-1} \cdot \gamma_z$ hebt sich zu einer Schleife hoch; nach Eindeutigkeit ist diese Schleife gleich $\overline{\gamma}_z'^{-1} \cdot \overline{\gamma}_z \implies \overline{\gamma}_z(1) = \overline{\gamma}_z'(1)$. ■

***Proposition** (Eindeutigkeit der Hochhebung). *Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ Überlagerung, $f : Z \to X$ Abbildung, Y wegzusammenhängend. Seien $\overline{f}_1, \overline{f}_2 : Y \to X$ Hochehbungen von f. Falls $\exists y \in Y$ s.d. $\overline{f}_1(y) = \overline{f}_2(y) \implies \overline{f}_1 \equiv \overline{f}_2$.*

Satz (Isomorphie von Überlagerungen)**.** *Seien* $p:(Y,y_0)\to(X,x_0)$, $p':(Y',y_0')\to(X,x_0)$ *Überlagerungen, sodass die Grundräume* Y,Y' *wegzusammenhängend sind mit* $p_*(\pi_1(Y,y_0)) = p'_*(\pi_1(Y',y_0')) \subset \pi_1(X,x_0)$. *Dann gilt:* $p:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ *und* $p':(Y',y_0')\to(X,x_0)$ *sind isomorph.*

$$\begin{tikzcd}
(Y,y_0) \arrow[rr, bend left, "\overline{p}'"] \arrow[rr, bend right, "\overline{p}"'] \arrow[dr, "p"'] & & (Y',y_0') \arrow[dl, "p'"] \\
& (X,x_0) &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Satz über Hochhebung von Abbildungen liefert Hochhebungen $\overline{p}:(Y,y_0)\to(Y',y_0')$, $\overline{p}':(Y',y_0)\to(Y,y_0)$. Wir wollen zeigen, dass $\overline{p}\circ\overline{p}' = \mathrm{id}_{Y'}$, $\overline{p}'\circ\overline{p} = \mathrm{id}_Y$. Dazu: $\overline{p}\circ\overline{p}'(y_0') = y_0'$, d.h. die Menge $A' := \{y'\in Y' \mid \overline{p}\circ\overline{p}' = y'\} \neq \varnothing$. Wir zeigen: A' ist offen und abgeschlossen:

- A' abgeschlossen, denn $A' = ((\overline{p}\circ\overline{p}')\times\mathrm{id})^{-1}(\Delta)$, wobei $\Delta := \{(y',y') \mid y'\in Y'\} \subseteq Y'\times Y'$ (Δ abgeschlossen da Y' Hausdorffraum).
- A' ist offen: $\overline{p}\circ\overline{p}':(Y',y_0')\to(Y',y_0')$ ist eine Hochhebung von der $p':(Y,y_0)\to(X,x_0)$, denn $p'\circ\overline{p}\circ\overline{p}' = p\circ\overline{p}' = p'$.

$$\begin{tikzcd}
(Y',y_0') \arrow[rr, bend left, "\overline{p}\circ\overline{p}'"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "p'"'] & & (Y',y_0') \arrow[dl, "p'"] \\
& (X,x_0) &
\end{tikzcd}$$

  Sei $U\subset X$ eine offene Teilmenge s.d. $p'^{-1}(U) = \bigsqcup_{j\in J} V_j$ s.d. $p'|_V : V_j \xrightarrow{\cong} U$ lokaler Homöomorphismus ist. Sei $y'\in Y'$ s.d. $p'(y')\in U$ und $\mathrm{id}(y') = \overline{p}\circ\overline{p}'(y')$. Es $\exists j$ s.d. $y'\in V_j$. Daher bildet $\overline{p}\circ\overline{p}'$ das V_j in V_j ab. Weil $p'\circ(\overline{p}\circ\overline{p}') = p'$ und p' (bzw. p'^{-1}) injektiv ist, folgt $\overline{p}\circ\overline{p}'|_{V_j} = \mathrm{id}|_{V_j} \implies A'$ ist offen (mit jedem Punkt enthält sie eine Umgebung).

Nun ist Y' ist wegzusammenhängend $\implies A' = Y' \implies \overline{p}\circ\overline{p}' = \mathrm{id}$; aus Symmetriegründen folgt auch $\overline{p}'\circ\overline{p} = \mathrm{id}_Y$. ■

Satz (Klassifikationssatz für Überlagerungen). *Es gibt eine* $1:1$*-Korrespondenz zwischen Isomorphieklassen von Überlagerungen* $p:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ *(wegzusammenhängend) und Untergruppen* $\Lambda < \pi_1(X,x_0)$. *Die Korrespondenz ordnet einer Überlagerung* $p:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ *die Untergruppe* $p_*(\pi_1(Y,y_0)) \subseteq \pi_1(X,x_0)$ *zu.*

Beweis. Aussage folgt aus Existenz von Überlagerungen zu jeder Untergruppe von $\pi_1(X,x_0)$ und da Überlagerungen, die zu gleicher Untergruppe gehören isomorph sind. ■

Lemma. $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \Gamma$, *dann gilt: es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
(X_{\Lambda_2}, x_0^{\Lambda_2}) \arrow[dd, "p_{\Lambda_2}"'] & \\
 & (X_{\Lambda_1}, x_0^{\Lambda_1}) \arrow[ul, "\exists q^{\Lambda_1}_{\Lambda_2}\ \textit{Überlagerung}"'] \arrow[dl, "p_{\Lambda_1}"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Entsprechend: Wenn es eine stetige Abbildung $q^{\Lambda_1}_{\Lambda_2}$ gibt, die das obige Diagramm kommutativ macht, dann gilt $\Lambda_1 < \Lambda_2$.

Beweis. Wenn $\Lambda_1 < \Lambda_2$, dann erhalten wir eine kanonische stetige Abbildung

$$q^{\Lambda_1}_{\Lambda_2} : X_{\Lambda_1} = \widetilde{X}\big/_{\Lambda_1} \to X_{\Lambda_1} = \widetilde{X}\big/_{\Lambda_2},$$

$p_{\Lambda_1} = p_{\Lambda_2} \circ q^{\Lambda_1}_{\Lambda_2}$ nach Konstruktion von $p_{\Lambda_1}, p_{\Lambda_2}$. Die Umkehrung folgt aus Eindeutigkeit der Korrespondenz zwischen Gruppen mit Überlagerungen. ∎

Definition. Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung mit (X, x_0) wegzusammenhängend. Die Mächtigkeit von $p^{-1}(x_0)$ heißt *Anzahl der Blätter* der Überlagerung (wohldefiniert, da $|p^{-1}(x_0)| = |p^{-1}(x)| \forall x \in X$ wegen X wegzusammenhängend: γ ein Weg mit $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$, $p^{-1}(x_0) = \bigcup_i y_{0i}$, seien $\widetilde{\gamma}_i$ eindeutige Hochhebungen von γ mit $\widetilde{\gamma}_i(0) = y_{0i}$, dann $p^{-1}(x) = \bigcup_i \widetilde{\gamma}_i(1)$).

Lemma. *Sei $p_\Lambda : (X_\Lambda, x_0^\Lambda) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, $\Lambda < \pi_1(X, x_0) =: \Gamma$. Dann gilt: $|p_\Lambda^{-1}(x_0)| = [\Gamma : \Lambda]$.*

Beweis. Sei $\gamma \in \Omega(X, x_0)$, $\widetilde{\gamma} : I \to X_\Lambda$ die Hochhebung davon. Wenn $[\lambda] \in \Lambda \implies \widetilde{\lambda} \in \Omega(X_\Lambda, x_0^\Lambda)$, das heißt, $\widetilde{\gamma} \cdot \widetilde{\lambda}$ hat gleichen Endpunkt wie $\widetilde{\gamma}$. Definiere jetzt

$$\Phi : \Gamma\big/_{\Lambda} \to p_\Lambda^{-1}(x_0), \ [\gamma] \cdot \Lambda \mapsto \widetilde{\gamma}(1).$$

Φ ist injektiv: $\widetilde{\gamma}(1) = \widetilde{\gamma}'(1) \implies \widetilde{\gamma}'^{-1} \circ \widetilde{\gamma} \in \Omega(X_\Lambda, x_0^\Lambda) \implies [\gamma'^{-1} \circ \gamma] \in \Lambda \implies [\gamma] \in [\gamma'] \cdot \Lambda$. Φ ist surjektiv: X_Λ wegzusammenhängend $\implies \forall y \in p^{-1}(x_0) \exists \widetilde{\gamma} : I \to X_\Lambda$, ein Weg von x_0^Λ nach y; $p_\Lambda \circ \widetilde{\gamma} \in \Omega(X, x_0)$ mit Hochhebung $\widetilde{\gamma}$, $\Phi([p_\Lambda \circ \widetilde{\gamma}] \cdot \Lambda) = \widetilde{\gamma}(1) = y$. ∎

Korollar. *Die Anzahl der Blätter der universellen Überlagerung ist gleich $|\pi_1(X, x_0)|$.*

Definition. Sei $(Y, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ eine Überlagerung. Eine *Decktransformation* $h : Y \to Y$ ist ein Homöomorphismus mit $p \circ h = p$ (anders gesagt: $h : (Y, y_0) \to (Y, h(y_0))$ ist ein Isomorphismus von Überlagerungen). Die Decktransformationen bilden eine Gruppe, die durch $\mathrm{Aut}\,(p)$ bezeichnet wird.

Definition. Eine Überlagerung $(Y, y_0) \xrightarrow{p} (X, x_0)$ heißt *normal*, wenn die Gruppe von Decktransformationen $\mathrm{Aut}\,(p)$ *transitiv* auf $p^{-1}(x_0)$ wirkt $(\forall x_0' \in p^{-1}(x_0) \exists h \in \mathrm{Aut}\,(p)$ mit $h(x_0) = x_0')$.

Proposition. *Sei* $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *eine Überlagerung, s.d. beide Räume wegzusammenhängend sind, sei* $\Lambda := p_*(\pi_1(Y, y_0)) < \pi_1(X, x_0) =: \Gamma$ *die zugehörige Untergruppe. Dann gilt:*

(1) p *ist normal* $\iff \Lambda \lhd \Gamma$ *Normalteiler.*
(2) $\operatorname{Aut}(p) \cong N(\Lambda) \big/ \Lambda$, *wobei* $N(\Lambda) := \{g \in \Gamma \mid g\Lambda g^{-1} = \Lambda\}$ *der Normalisator von* Λ *in* Γ.
(3) *Insbesondere gilt:* p *normal* $\implies \operatorname{Aut}(p) \cong \Gamma \big/ \Lambda$.

Korollar. $\operatorname{Aut}(\widetilde{p}) \cong \pi_1(X, x_0) = \Gamma$ *für eine universelle Überlagerung* $\widetilde{p} : (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$.

Beweis. Sei $h \in \operatorname{Aut}(p)$, dann haben wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
h: (Y, y_0) \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & (Y, y_1) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

Beobachtung: $\Lambda = p_*\pi_1(Y, y_0) = p_*h_*\pi_1(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_1)$, weil h_* ein Isomorphismus ist.

Sei $\widetilde{\gamma}$ ein Weg in Y von y_0 nach y_1, $\gamma := p \circ \widetilde{\gamma}$. Es gibt einen Isomorphismus $\phi_\gamma : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_1)$, $[\delta] \mapsto [\widetilde{\gamma} \cdot \delta \cdot \widetilde{\gamma}^{-1}]$. p_* ist injektiv $\implies p_*\pi_1(Y, y_0)$ und $p_*\pi_1(Y, y_1)$ sind durch $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ konjugiert: $[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = p_*\pi_1(Y, y_1)$. Wenn jetzt $h \in \operatorname{Aut}(p)$ mit $h(y_0) = y_1$, so ist $p_*\pi_1(Y, y_1) = \Lambda$ nach obiger Beobachtung $\implies [\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = \Lambda \iff [\gamma] \in N(\Lambda)$.

Das heißt: Wenn p normal ist, nimm ein beliebiges $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, lifte das zu $\widetilde{\gamma}$ in Y mit Anfang y_0. Sei y_1 das Ende von $\widetilde{\gamma}$. Nach Normalität von p $\exists h \in \operatorname{Aut}(p)$ mit $h(y_0) = y_1 \implies [\gamma] \in N(\Lambda)$. Da $[\gamma]$ beliebig war, folgt $N(\Lambda) = \Gamma \implies \Lambda \trianglelefteq \Gamma$.

Umgekehrt: Wenn $\Lambda \trianglelefteq \Gamma$ normal, $y_1 \in p^{-1}(x_0)$ gegeben. Nimm $\widetilde{\gamma}$ in Y von y_0 nach $y_1 \implies \gamma := p \circ \widetilde{\gamma}$ erfüllt $[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = \Lambda$. Da $[\gamma] \cdot \Lambda \cdot [\gamma]^{-1} = p_*\pi_1(Y, y_1)$, $\exists h : (Y, y_0) \longrightarrow (Y, y_1)$ mit $p \circ h = p$ (nach dem Satz über Isom. v. Überlagerungen). Aus Symmetriegründen existiert $g : (Y, y_1) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit $p \circ g = p$. Da h, g eindeutig sind und jeweils p hochheben, gilt $g \circ h = \mathrm{id}$, $h \circ g = \mathrm{id} \implies h \in \operatorname{Aut}(p)$.

$$\begin{tikzcd}
(Y, y_0) \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend left=40, "g \circ h"] \arrow[rr, bend left=15, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "p"'] & (Y, Y_1) \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "p"] & (Y, Y_0) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, X_0) &
\end{tikzcd}$$

Damit ist (1) bewiesen.

Für (2): Wie betrachten die Abbildung $\varphi : N(\Lambda) \longrightarrow \operatorname{Aut}(p)$, $[\gamma] \mapsto h_{[\gamma]}$, $h_{[\gamma]}$ ist die eindeutig bestimmte Hochhebung

$$\begin{tikzcd} & (Y,y_1) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, "h_{[\gamma]}"] \arrow[r, "p"'] & (X,x_0) \end{tikzcd}$$

wobei $y_1 = \widetilde{\gamma}(1)$, $\widetilde{\gamma}$ ist die Hochhebung von γ.

- φ ist wohldefiniert: $\widetilde{\gamma}(1)$ kommt nur auf $[\gamma]$ an (homotope Wege haben homotope Hochhebungen).
- $h_{[\gamma]} \in \mathrm{Aut}\,(p)$ wie in (1). $h_{[\gamma]} \cdot h_{[\gamma]^{-1}}$ ist die Hochhebung der $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ nach (Y, y_0) und ist daher gleich id.
- φ ist ein Homomorphismus: $h_{[\gamma_2 \cdot \gamma_1]}$ und $h_{[\gamma_2]} \cdot h_{[\gamma_1]}$ heben $p : (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ nach (Y, y_2) hoch $\implies$ Gleichheit wegen Eindeutigkeit.
- φ ist surjektiv: Sei $h \in \mathrm{Aut}\,(p)$,

$$\begin{tikzcd} h:\ (Y,y_0) \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & (Y,y_1) \arrow[dl, "p"] \\ & (X,x_0) & \end{tikzcd}$$

  Sei $\widetilde{\gamma}$ ein Weg von y_0 nach y_1 in Y, $\gamma := p \circ \widetilde{\gamma}$. Dann ist $h = h_{[\gamma]}$ nach Konstruktion.
- $\ker \varphi = \{[\gamma] \in N(\Lambda) \mid h_{[\gamma]} = \mathrm{id}\} = \{[\gamma] \in N(\Lambda) \mid \widetilde{\gamma}(1) = y_0\}$, (gerade Λ besteht aus Schleifen unten, die sich zu Schleifen hochheben.) D.h. $\varphi : N(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(p)$ surjektiv, $\ker(\varphi) = \Lambda \implies \mathrm{Aut}\,(p) \cong N(\Lambda)/\Lambda$ nach dem Homomorphiesatz. ■

Proposition. *Sei $\Gamma \curvearrowright Y$ eine Überlagerungswirkung. Dann:*

(1) $\mathrm{Aut}\,(q) \cong \Gamma$, *wenn Y wegzusammenhängend.*

(2) $\Gamma \cong \pi_1\left(Y/\Gamma\right)/q_*\pi_1(Y)$, *wenn Y wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Die Überlagerung $q : (Y, y_0) \longrightarrow \left(Y/\Gamma, \overline{y_0}\right)$ ist normal, weil $q^{-1}(\overline{y_0}) = y_0 \cdot \Gamma$, und $\Gamma \subset \mathrm{Aut}\,(p)$ wirkt darauf transitiv. Nach dem obigen Satz folgt

$$\mathrm{Aut}\,(q) \cong \pi_1\left(Y/\Gamma\right)/q_*\pi_1(Y).$$

Wenn $h \in \mathrm{Aut}\,(q)$, haben wir folgende Hochhebung:

$$\begin{tikzcd} (Y,y_0) \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "q"'] & & (Y,y_1) \arrow[dl, "q"] \\ & \left(Y/\Gamma, \overline{y_0}\right) & \end{tikzcd}$$

$\exists g \in \Gamma$ s.d. $y_1 = \alpha(g) y_0$. Aber dann ist $\alpha(g)$ auch eine Hochhebung von $q : (Y, y_0) \longrightarrow \left(Y/\Gamma, \overline{y_0}\right)$ nach $(Y, y_1) \implies h = \alpha(g)$ nach Eindeutigkeit von Hochhebungen $\implies \mathrm{Aut}\,(q) \cong \Gamma$. ■

Korollar. *Wenn $\Gamma \curvearrowright Y$ eine Überlagerungswirkung ist, Y einfach zusammenhängend (Y wegzusammenhängend, $\pi_1(Y) \cong \{1\}$). Dann gilt:*

$$\pi_1(Y/\Gamma) \cong \Gamma.$$

Definition. Sei Γ eine Gruppe, $S \subset \Gamma$ Teilmenge,

$$\langle S \rangle := \bigcup_{\Lambda < \Gamma, S \subseteq \Lambda} \Lambda$$

die durch S erzeugte Untergruppe von Γ. S heißt *Erzeugendenmenge* von Γ, wenn $\langle S \rangle = \Gamma$. (Übung: $\langle S \rangle = \{s_1^{\varepsilon_1} \cdots s_n^{\varepsilon_n} \mid n \in \mathbb{N},\ s_i \in S, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}$).

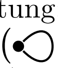
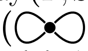
Definition. Sei Γ eine Gruppe, $S \subseteq \Gamma$, $\langle S \rangle = \Gamma$. $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist der Graph mit

- Ecken $V(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) = \Gamma$,
- Kanten $E(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) = \{(g, gs) \mid g \in \Gamma, s \in S\}$.

Entsprechend können wir $\mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ als einen 1-dimensionalen CW-Komplex auffassen (Ecken=0-Zellen, Kanten=1-Zellen).

Die Linkswirkung von Γ auf sich selbst induziert eine Wirkung $\Gamma \overset{\alpha}{\curvearrowright} \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$:

- Auf Knoten $g \in \Gamma = V(\mathrm{Cay}(\Gamma, S))$: $\alpha(h)(g) = h \cdot g$.
- Auf Kanten $(g, gs) \in E(\mathrm{Cay}(\Gamma, S))$: $\alpha(h)(g, gs) = (hg, hgs) \in E(\mathrm{Cay}(\Gamma, S))$.

Die Wirkung $\Gamma \curvearrowright \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ ist eine Überlagerung (Übung). Den Quotientenraum $\Gamma \backslash \mathrm{Cay}(\Gamma, S)$ kann man leicht verstehen; Γ wirkt transitiv auf Γ, also bleibt im Quotienten nur eine Ecke $[1]$, an dieser Ecke bekommen wir $|S|$ Schleifen. Sei X ein Punkt mit $|S|$ Schleifen. Was ist $\pi_1(X)$? Beobachtung: Wenn $\pi_1(\mathrm{Cay}(\Gamma, S)) \cong \{1\} \implies \pi_1(X_S) \cong \Gamma$ nach Proposition. $\pi_1(X_1) = \pi($$) \cong \mathbb{Z}$. Um $\pi($$)$ zu berechnen, brauche ich eine Gruppe $\Gamma = \langle a, b \rangle$, s.d. $\pi_1(\mathrm{Cay}(\Gamma, \{a, b\})) \cong \{1\}$ (ohne Schleifen).

2.7 Gruppen angegeben durch Erzeuger und Relationen; freie Gruppen

Definition. Sei S eine Menge, $X = S \sqcup \overbrace{\overline{S}}^{\text{Eine andere Kopie von } S}$ Ein Wort im Alphabet X ist eine endliche Folge $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ von Elementen von X, $n \in \mathbb{N}$ ($n = 0 \implies w = \underline{\varepsilon} = \underline{1}$ *leeres Wort*). Wort w heißt *reduziert*, wenn es kein Teilwort von der Form $s \cdot \overline{s}$ oder $\overline{s} \cdot s$ hat, $s \in S$. Z.B. $S = \langle a, b \rangle$, $a\overline{b}\overline{a}b$ reduziert, $a\overline{a}$ nicht reduziert. Die Menge der Wörter bezeichnet man X^*. Die reduzierten Wörter bezeichnet man X_r^*. Wenn $v, w \in X^*$, $v = v_1 \cdots v_m$, $w = w_1 \cdots w_n$, $v_i, w_i \in X$ dann $vw := v_1 \cdots v_n w_1 \cdots w_n$. Die Reduktion eines Wortes $w = vs\overline{s}u$, $s \in S$, $v, u \in X^*$ ist das Wort $w' = vu$; die Reduktion von $w = v\overline{s}su$ ist $w = vu$

Lemma. *Jedes Wort kann man durch endlich viele Reduktionsschritte auf ein reduziertes Wort bringen, dieses ist eindeutig.*

Bezeichnung: $r : X^* \longrightarrow X_r^*$, $w \mapsto$ (reduzierte Form von w).

Proposition und Definition. *$(X_r^*, \cdot)$, $w \cdot v := r(wv)$ ist eine Gruppe. Sie heißt* freie Gruppe *mit dem Erzeugendensystem S. Bezeichnung: $\mathbb{F}_S$ freie Gruppe auf dem Erzeugendensystem S.*

Beweis. Assoziativität folgt aus Assoziativität der Konkatenation und Eindeutigkeit der reduzierten Form: $w \cdot v \cdot u = r(w \cdot v \cdot u) = r(r(w \cdot v) \cdot u) = r(w \cdot r(v \cdot u))$. Sei $\overline{} : X \longrightarrow X$, $S \ni a \mapsto \overline{a} \in \overline{S}$, $\overline{S} \ni \overline{a} \mapsto a \in S$. Dann gilt mit $w^{-1} := \overline{w_n} \cdots \overline{w_1}$:

$$w^{-1} \cdot w = r(\overline{w_n} \cdots \overline{w_1} \cdot w_1 \cdots w_n) = \underline{1} = r(w_n \cdots w_1 \cdot \overline{w_1} \cdots \overline{w_n}) = w \cdot w^{-1}.$$

Je zwei unterschiedliche reduzierte Wörter sind unterschiedliche Elemente von der Gruppe nach Konstruktion. ■

Proposition (Universelle Eigenschaft der freien Gruppe). *Sei S eine Menge, $\mathbb{F}_S$ freie Gruppe auf S. Dann gilt: für jede Gruppe Γ und jede Abbildung $\varphi : S \longrightarrow \Gamma$ $\exists!$ Homomorphismus $\phi : \mathbb{F}_S \longrightarrow \Gamma$ s.d. $\phi|_S = \varphi$.*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{F}_S \arrow[d, dashed, "\exists!\Phi"] \\
 & \Gamma
\end{tikzcd}$$

Beweis. Sei $\varphi : S \longrightarrow \Gamma$ gegeben. Definiere $\Phi(w_1, \ldots, w_n) = \varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n)$, $w_i \in S = S \cup S^{-1}$. Sei $\varphi(w^{-1}) := \varphi(w)^{-1}$ (auf S^{-1} fortgesetzt). Dann gilt $\Phi(r(w \cdot v)) = \Phi(w \cdot v) = \Phi(w) \cdot \Phi(v)$ weil $\varphi(s) \cdot \varphi(s^{-1}) = \varphi(s) \cdot \varphi(s)^{-1} = 1 \implies \Phi$ ist ein Homomorphismus.

Eindeutigkeit: Wenn $\Psi : \mathbb{F}_S \longrightarrow \Gamma$ ist Homomorphismus mit $\Psi|_S = \varphi$, dann gilt: $\Psi(s^{-1}) = \Psi(s)^{-1} = \varphi(s)^{-1} = \Phi(s)^{-1}$, $s \in S$. Dann gilt: $\Psi(w_1 \cdots w_n) = \Psi(w_1) \cdot \Psi(w_n) = \varphi(w_1) \cdots \varphi(w_n) = \Phi(w_1) \cdots \Phi(w_n) = \Phi(w)$. ■

Korollar. *Wenn $|S| = |S'|$, dann gilt $\mathbb{F}_S \cong \mathbb{F}_{S'}$.*

Korollar. *Wenn $\Gamma = \langle S \rangle$, dann ist Γ ein Quotient von $\mathbb{F}_S$: $\exists q : \mathbb{F}_S \twoheadrightarrow \Gamma$. Nach universellen Eigenschaft: q surjektiv, weil $\Gamma > q(\mathbb{F}_S) \supseteq dS \implies q(\mathbb{F}_s) \supseteq \langle S \rangle = \Gamma$.*

Proposition. $\operatorname{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})$ *ist ein 4-regulärer Baum.*

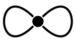
Beweis. (1) Jede Ecke ist mit 4 anderen Knoten verbunden (durch a, b, a^{-1}, b^{-1}).

(2) Es ist ein Baum, denn: ein Zyklus an $w \in \mathbb{F}_2$ ist eine Sequenz $w, wa^{\varepsilon_1}, wa^{\varepsilon_2}b^{\varepsilon_2}, \ldots, w \cdot v = w \iff v = 1$, wobei v reduziert ist, weil wir Rückgänge nicht erlauben, somit ist v trivial $\implies$ es gibt keine Zyklen. ■

Korollar. $\pi_1(\operatorname{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\})) \cong \{1\}$.

Beweis. $(\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a, b\}))$ ist zusammenziehbar: wir müssen eine Homotopie zwischen id und $c : \mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2) \longrightarrow e$ konstruieren. Sei h_t, $t \in [0, 1]$ eine Familie der Abbildungen, die die 4 Kanten an 1 zusammenzieht?

$h_t^{(1)}$ sei die Familie von Abbildungen, die diese neuen Kanten an e zusammenzieht. Die gewünschte topologie entsteht durch Ausführung von $h_t^{(n)}$ auf dem Intervall $t \in [1 - 1/2^n, 1 - 1/2^{n+1}]$ und Verkleben. ∎

Korollar. $\pi($$) \cong \mathbb{F}_2$*; analog (Übung):* $\pi($$) \cong \mathbb{F}_S$.

Tatsächlich gilt noch mehr: die Fundamentalgruppe von jedem Graphen ist frei (Übung). Idee: $G = (V, E)$ hat einen maximalen Baum $T \subseteq G$, T wird zusammenziehbar.

2.8 Angabe der Gruppen durch Erzeuger und Relationen.

Definition. Sei Γ eine Gruppe, $F \subseteq \Gamma$ eine Teilmenge. Die *normale Hülle* von F ist die kleinste normale Untergruppe $N \triangleleft \Gamma$, welche F enthält. Bezeichnung:

$$\langle\langle F \rangle\rangle = \bigcap_{N' \trianglelefteq \Gamma, N' \supseteq F} N'.$$

Proposition. *Sei Γ eine Gruppe, $F \subseteq \Gamma$ eine Teilmenge. Die normale Hülle $\langle\langle F \rangle\rangle$ hat folgende Eigenschaft: $\forall$ Homomorphismen $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ mit $F \subseteq \ker \varphi$ gilt: $\langle\langle F \rangle\rangle \subseteq \ker \varphi$, und $\langle\langle F \rangle\rangle$ ist die größte normale Untergruppe von Γ mit dieser Eigenschaft.*

Beweis. $\ker \varphi \triangleleft \Gamma \implies \big(F \subseteq \ker \varphi \implies \langle\langle F \rangle\rangle \subseteq \ker \varphi \big)$. Maximalität: $q : \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma / \langle\langle F \rangle\rangle$, $\ker q = \langle\langle F \rangle\rangle$. ∎

Definition. Sei S eine Menge, $R \subseteq \mathbb{F}_S$. Die Gruppe $\Gamma = \langle S | R \rangle$ definiert durch Erzeuger S mit Relationen R ist

$$\Gamma = \langle S | R \rangle := \mathbb{F}_S \big/ \langle\langle R \rangle\rangle.$$

Proposition. $\Gamma = \langle S | R \rangle$ *hat folgende universelle Eigenschaft: $\forall$ Gruppen Λ und jede Abbildung $\varphi : S \longrightarrow \Lambda$ s.d. $\ker \phi \supseteq \langle\langle R \rangle\rangle$, wobei $\phi : \mathbb{F}_S \longrightarrow \Lambda$ der durch φ induzierter Homomorphismus ist, existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\overline{\phi} : \Gamma \longrightarrow \Lambda$. Die Abbildung kann man auf Erzeuger angeben, wenn Relationen erfüllt sind.*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, hook] \arrow[ddr, "\varphi"'] & \mathbb{F}_S \arrow[d, "q"] \arrow[dd, bend left, "\phi"] \\
& \Gamma \arrow[d, dashed, "\exists!\overline{\phi}"] \\
& \Lambda
\end{tikzcd}$$

Beweis. Übung. ■

Definition. Seien Γ_1, Γ_2, Λ drei Gruppen und seien die Homomorphismen $\varphi_1 : \Lambda \longrightarrow \Gamma_1$, $\varphi_2 : \Lambda \longrightarrow \Gamma_2$ gegeben. Also ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & \end{tikzcd}$$

Eine Gruppe Γ zusammen mit Homomorphismen $\psi_1 : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma$, $\psi_2 : \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma$ heißt *Pushout* von diesem Diagramm, wenn

(1) $\psi_1 \circ \varphi_1 = \psi_2 \circ \varphi_2$.
(2) $\forall$ Gruppen G mit Homomorphismen $\theta_1 : \Gamma_1 \longrightarrow G$, $\theta_2 : \Gamma_2 \longrightarrow G$ mit $\theta_1 \circ \varphi_1 = \theta_2 \circ \varphi_2$ $\exists! \phi : \Gamma \longrightarrow G$, welcher das Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\psi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\ \Gamma_2 \arrow[r, "\psi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \Gamma \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\ & & G \end{tikzcd}$$

Proposition. *Jedes Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & \end{tikzcd}$$

hat einen Pushout. Den kann man folgendermaßen konstruieren: Seien $\Gamma_1 = \langle S_1 | R_1 \rangle$, $\Gamma_2 = \langle S_2 | R_2 \rangle$. *Dann ist der Pushout*

$$\Gamma := \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \cup \{\underbrace{\varphi_1(\lambda)}_{\in \Gamma_1} \underbrace{\varphi_2(\lambda)^{-1}}_{\in \Gamma_2} \mid \lambda \in \Lambda\}$$

Insbesondere ist der Pushout bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, ψ_1, ψ_2 *sind induziert durch Inklusionen* $S_1, S_2 \hookrightarrow S_1 \cup S_2$.

Beweis. Nach Proposition vom letzten Mal ist ein Homomorphismus $\phi : \Gamma \longrightarrow G$ bestimmt durch $\phi(S_1 \cup S_2)$, falls die Relationen im Kern des induzierten Homomorphismus $\overline{\phi} : \mathbb{F}_{S_1 \cup S_2} \longrightarrow G$ liegen.

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\psi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\
\Gamma_2 \arrow[r, "\psi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \Gamma \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}
$$

Wir müssen nachrechnen, dass $R_1 \cup R_2 \cup \{\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)^{-1} \mid \lambda \in \Lambda\} \subseteq \ker \overline{\phi}$, wobei $\phi(s_1) := \theta_1(s_1)$, $\phi(s_2) := \theta_2(s_2)$.

R_1, $R_2 \subseteq \ker \phi$, denn θ_1, θ_2 induzieren Homomorphismen $\overline{\theta}_1$, $\overline{\theta}_2$ auf freien Gruppen $\mathbb{F}_{S_1}$, $\mathbb{F}_{S_2}$, s.d. R_1 bzw. R_2 im Kern von $\overline{\theta}_1$ bzw. $\overline{\theta}_2$ liegt. Es gilt $\overline{\phi}(\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)^{-1}) = \overline{\phi}(\varphi_1(\lambda))\overline{\phi}(\varphi_1(\lambda))^{-1} = \overline{\theta}_1(\varphi_1(\lambda))\overline{\theta}_2(\varphi_2(\lambda))^{-1} = 1$, weil $\theta_1 \circ \varphi_1 = \theta_2 \circ \varphi_2$. Γ ist durch $S_1 \cup S_2$ erzeugt $\implies \phi$ eindeutig bestimmt. ∎

Definition. Der Pushout vom Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_1 \\
\Gamma_2 &
\end{tikzcd}
$$

heißt *freies Produkt* von Γ_1 und Γ_2. Bezeichnung: $\Gamma = \Gamma_1 * \Gamma_2$.

Konkret: $\Gamma_1 = \langle S_1 | R_1 \rangle$, $\Gamma_2 = \langle S_2 | R_2 \rangle \implies \Gamma_1 * \Gamma_2 = \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$.

Definition. Seien Γ_1, Γ_2 Gruppen, $\Lambda < \Gamma_1$, $\Lambda < \Gamma_2$. Der Pushout von

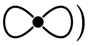
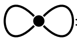
$$
\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, hook, "\iota_1"] \arrow[d, hook, "\iota_2"'] & \Gamma_1 \\
\Gamma_2 &
\end{tikzcd}
$$

heißt *amalgamiertes freies Produkt* von Γ_1, Γ_2 über Λ; Bezeichnung: $\Gamma_1 *_\Lambda \Gamma_2$.

Satz (Seifert—van Kampen). *Sei $X = U_1 \cup U_2$ eine Vereinigung von zwei offenen Teilmengen, s.d. U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend sind. Sei $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt: $\pi_1(X, x_0)$ ist der Pushout von*

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r, hook, "(\iota_1)_*"] \arrow[d, hook, "(\iota_2)_*"'] & \pi_1(U_1, x_0) \\
\pi_1(U_2, x_0) &
\end{tikzcd}
$$

wobei $\iota_1 : U_1 \hookrightarrow X$, $\iota_2 : U_2 \hookrightarrow X$ Inklusionsabbildungen sind.

Korollar. *π_1() $\cong \mathbb{F}_2$ (denn =  $\cup$  mit einer kleinen gemeinsamen Umgebung des Mittelpunktes $\Longrightarrow$ $\pi_1(U_1 \cap U_2) \cong 1$ und $\pi_1(U_1) = \pi_1(U_2) = \mathbb{F}_1$). Analoge Aussage hat man für n hintereinander geschachtelte Schleifen.*

Zur Idee des Beweises vom Satz von Seifert—van Kampen: Wir wollen zeigen, dass $\pi_1(X, x_0)$ ein Pushout ist d.h., $\forall G$ und $\forall \theta_1 : \pi_1(U_1, x_0) \longrightarrow G$, $\theta_2 : \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow G$ mit $\theta_1 \circ (\iota_1)_* = \theta_2 \circ (\iota_2)_* \exists! \phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$.

Frage: Wie interpretiert man einen Homomorphismus $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ geometrisch (topologisch)?

Konstruktion: Sei (Y, y_0) ein punktierter Raum, $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ ein Homomorphismus. Betrachte

$$Z := \widetilde{Y} \times_\theta G = \widetilde{Y} \times G \Big/ (y \cdot [\gamma], g) \sim (y, \theta([\gamma])g), [\gamma] \in \pi_1(Y, y_0), g \in G \cdot$$

Alternativ:

$$Z := \widetilde{Y} \times G \Big/ \pi_1(Y, y_0),$$

wobei $\pi_1(Y, y_0)$ von rechts auf $\widetilde{Y} \times G$ wirkt:

$$(y, g) \cdot [\gamma] = (y[\gamma], \theta([\gamma])^{-1} g).$$

$p : Z \longrightarrow Y$, $[(y, g)] \mapsto \widetilde{p}(y)$, $\widetilde{p} : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ dann ist $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerungsabbildung ($z_0 = [(\widetilde{y}_0, 1)]$), weil $\widetilde{p}$ eine Überlagerung war. Außerdem trägt Z eine rechte G-Wirkung durch Decktransformationen:

$$[(y, g)] \cdot h := [(y, gh)].$$

Außerdem gilt: $Z \big/ G \cong Y$. Fazit: Aus einem Homomorphismus $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ haben wir eine Überlagerung $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit einer G-Wirkung durch Decktransformation bekommen, s.d. $Z \big/ G \cong Y$.

Definition. Seien $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung mit einer G-Wirkung, $p' : (Z', z_0') \longrightarrow (Y, y_0)$ eine Überlagerung mit einer G-Wirkung. Ein Homomorphismus $h : Z \longrightarrow Z'$ s.d. $p' \circ h = p$ und $h(z \cdot g) = h(z) \cdot g \forall z \in Z$, $g \in G$ heißt *Isomomorphismus* (von Überlagerungen mit G-Wirkung).

Proposition. *Homomorphismen $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ entsprechen eindeutig Isomorphieklassen von Überlagerungen $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit G-Wirkung s.d. $Z \big/ G \cong Y$.*

Beweis. Inverse Konstruktion zur obigen. Wenn: $p : (Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine G-Überlagerung mit $Z \big/ G \cong Y$. Sei $\theta : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow G$ gegeben durch $[\gamma] \mapsto g_{[\gamma]}$ s.d. $z_0 \cdot g_\gamma = \widetilde{\gamma}(1)$, wobei $\widetilde{\gamma}$ die eindeutig bestimmte Hochhebung von γ ist. Diese Konstruktion ist invers zur obigen (wir zeigen allerdings nur eine Richtung) Wenn $Z = \widetilde{Y} \times_\theta G$, sei $[\gamma] \in \pi_1(Y, y_0)$, die Hochhebung $\widetilde{\gamma}$ von γ nach $\widetilde{Y}$ erfüllt $\widetilde{\gamma}(1) = [\gamma]$. D.h., die Hochhebung $\widetilde{\gamma}_z$ von γ nach Z erfüllt

$$\widetilde{\gamma}_z(1) = [(z_0[\gamma], 1)] = [(z_0, \theta([\gamma]))] = [(z_0, 1)] \cdot \theta([\gamma]) \Longrightarrow g_{[\gamma]} = \theta([\gamma]).$$

■

Beweis (Seifert—van Kampen). Bedeutung von Satz von Seifert—van Kampen: Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \arrow[r, "(\iota_1)_*"] \arrow[d, "(\iota_2)_*"'] & \pi_1(U_1, x_0) \arrow[d, "\varphi_1"] \arrow[ddr, bend left, "\theta_1"] & \\
\pi_1(U_2, x_0) \arrow[r, "\varphi_2"'] \arrow[drr, bend right, "\theta_2"'] & \pi_1(X, x_0) \arrow[dr, dashed, "\exists!\phi"] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

φ_1, φ_2 seien Homomorphismen induziert durch $U_1, U_2 \hookrightarrow X$. Brauchen: Universelle Eigenschaft: Sei G eine Gruppe, θ_1, θ_2 gegeben. Nach Proposition heben wir Überlagerungen $(U_1', x_1) \longrightarrow (U_1, x_0)$ und $(U_2', x_1) \longrightarrow (U_2, x_0)$ mit G-Wirkungen, die zu $\theta_1 : \pi_1(U_1, x_0) \longrightarrow G$, $\theta_2 : \pi_1(U_2, x_0) \longrightarrow G$ gehören. Die Einschränkungen dieser Überlagerungen auf $U_1 \cap U_2$ sind isomorph als G-Überlagerungen, denn sie gehören nach Proposition zu Hom. $\theta_1 \circ (\iota_1)_*$ bzw. $\theta_2 \circ (\iota_2)_*$: $\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \longrightarrow G$, die gleich sind. D.h. $\exists$ Homöomorphismus $h : p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$, der mit Projektionen kommutiert und mit G-Wirkungen verträglich ist. Definiere

$$X' := U_1' \cup U_2' = {U_1' \sqcup U_2'}\big/_{x \sim h(x)},$$

p_1, p_2 geben Abbildung $p : X' \longrightarrow X$. X' ist eine G-Überlagerung, weil U_1', U_2' es waren, h verträglich mit der G-Wirkung $\rightsquigarrow$ erhalte $\phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow X$, der zu X' gehört. Es gilt : $\phi \circ \varphi_2$ ist eindeutig durch die Struktur von X' über U_2 bestimmt $\Longrightarrow$ $\phi \circ \varphi_2 = \theta_2$. Eindeutigkeit: Wenn $\phi' : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$ mit $\varphi' \circ \varphi_2 = \theta_2$, $\phi' \circ \varphi_1 = \theta_1$. Konstruiere eine Überlagerung $p : X'' \longrightarrow X$ zu ϕ.

- X'' ist über U_2 isomorph zu U_2', weil $\phi' \circ \varphi_2 = \theta_2$
- X'' ist über U_1 isomorph zu U_1', weil $\phi' \circ \varphi_1 = \theta_1$

$\Longrightarrow$ $X'' \cong X'$. ∎

2.9 Konsequenzen des Satzes von Seifert–van Kampen

Sei $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$ eine Gruppe gegeben durch Erzeuger und Relationen. Betrachte den CW-Komplex X_Γ gegeben durch:

- eine 0-Zelle e^0,
- $|S|$ 1-Zellen e_s^1, $s \in S$, die mit beiden Randpunkten an e^0 angeklebt werden,
- $|R|$ 2-Zellen e_r^2, $r \in R$ mit Anklebeabbildungen $\varphi_r : \partial e_r^2 \cong S^1 \longrightarrow e^0 \cup \bigcup_{s \in S} e_s^1$ (klebe e_r^2 längs des Weges r im Erzeuger $s \in S$ an). Wenn $r = s_1^{\alpha_1} \cdot s_2^{\alpha_2} \cdots s_k^{\alpha_k}$. Zerlege S^1 in $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_k|$ gleiche Teile.

Proposition. *Sei X ein wegzusammenhängender Raum, sei $Y := X \cup_{\varphi_\alpha} \left(\bigcup e^2_\alpha\right)_{\alpha \in A}$, d.h. X mit angeklebten Zellen e^2_α durch Abbildung $\varphi_\alpha : S^1 \longrightarrow X$. Seien $x_\alpha \in \varphi_\alpha(S^1)$, $x_0 \in X$, γ_α Weg von x_0 nach x_α. Sei $[\varphi_\alpha] \in \pi_1(X, x_\alpha)$ die Klasse von φ_α, $[\gamma_\alpha^{-1} \cdot \varphi_\alpha \cdot \gamma_\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Sei $N := \langle\langle [\gamma_\alpha^{-1} \cdot \varphi_\alpha \cdot \gamma_\alpha] \mid \alpha \in A \rangle\rangle \lhd \pi_1(X, x_0)$. Dann gilt:*

(1) *Die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ definiert eine Surjektion $\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, x_0)$ mit Kern gleich N; also gilt $\pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)/N$.*
(2) *Wenn Y' aus Y durch Ankleben von n-Zellen für $n > 2$ erhalten wird, gilt: $Y \hookrightarrow Y'$ induziert einen Isomorphismus von Fundamentalgruppen.*
(3) *X CW-Komplex, dann gilt: die Inklusion $X^2 \hookrightarrow X$ von dem 2-Skelett induziert einen Isomorphismus $\pi_1(X^2, x_1) \cong \pi_1(X, x_0)$.*

Korollar. *X CW-Komplex, $X^2 = e^0 \cup \bigcup_{s \in S} e^1_s \cup_{\varphi_r} \bigcup_{r \in R} e^2_r$ mit Anklebeabbildung φ_r. Seien $\overline{r} \in \mathbb{F}_s \cong \pi_1(X^1, e^0)$ induziert durch φ_r ($\overline{r} = [\varphi_r] \in \pi_1(X^1, e^0)$). Dann gilt: $\pi_1(X, x_0) \cong \langle S \mid \overline{r}, r \in R \rangle$.*

Beweis (der letzten Proposition). Wähle $y_\alpha \in e^2_\alpha$. Schreibe $Y = U \cup V$, $U = Y \backslash \bigcup_\alpha \{y_\alpha\}$, $V = Y \backslash X \cong \{x_0'\}$. Dann

$$\underbrace{U \cap V}_{x_0' := \{x_0\} \times 1 \in} = \bigcup_{\alpha \in A} e^2_\alpha \backslash \{y_\alpha\} \cup \bigcup_{\alpha \in A} (\operatorname{Im} \gamma_\alpha) \times (0,1].$$

$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, x_0')$—Berechnung mit Seifert–van Kampen:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, x_0') \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, x_0') \cong \pi_1(X, x_0) \arrow[d] \\
1 \cong \pi_1(V, x_0') \arrow[r] & \pi_1(Y, x_0') \cong \pi_1(X, x_0) \big/ N
\end{tikzcd}$$

$$\pi_1(U, x_0') \cong \pi_1(X, x_0) \qquad \pi_1(U \cap V, x_0') \cong \mathbb{F}_A = \langle a_\alpha \mid \alpha \in A \rangle.$$

Es gilt nach Konstruktion $\iota_*(a_\alpha) = [\gamma_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \gamma_\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Also $\pi_1(Y, x_0') \cong \pi_1(X, x_0)\big/N$, damit ist (1) bewiesen. (2) analog, wobei alle Gruppen im Diagramm trivial sind, da man in S^n für $n > 1$ schleifen zusammenziehen kann. (3): X CW-Komplex, dann gilt $\pi_1(X^2, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$. ∎

Korollar. $\Gamma = \langle S \mid R \rangle$, $X_\Gamma = e^0 \cup \bigcup_{s \in S} e^1_s \cup_{\varphi_r} \bigcup_{r \in R} e^2_r$ *mit Anklebeabbildung φ_r durch Relationen gegeben, dann gilt*

$$\mathbb{F}_S \big/ \langle\langle R \rangle\rangle \cong \pi_1(X_\Gamma) \cong \Gamma.$$

Für jeden CW-Komplex X kann man somit die Fundamentalgruppe in Termen von Erzeugern und Relationen aus der CW-Struktur bestimmen. Also gibt die Fundamentalgruppe nur Information über niedrigdimensionale Struktur von X. Somit kann man durch π_1 z.B. Flächen unterscheiden: $\pi_1(\Sigma_g)$ ist nicht isomorph zu $\pi_1(\Sigma_{g'})$ für $g \neq g'$, aber $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \ncong \pi_1(\mathbb{RP}^m)$ für $n \neq m$.

2.10 Höhere Homotopiegruppen

Nach Def. ist $\pi_1(X, x_0) = \{[\gamma] \mid \gamma : (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)\}$. Analog: $\pi_n(X, x_0) = \{[\gamma] \mid \gamma : (S^n, *) \longrightarrow (X, x_0)\}$.

Definition. (X, x_0), (Y, y_0) zwei punktierte Räume. Dann ist

$$X \vee Y := X \sqcup Y \big/ x_0 \sim y_0$$

mit ausgewählten Punkten x_0, y_0 die *Ein-Punkt-Vereinigung.* Die Abbildung $S^1 \xrightarrow{g} S^1 \vee S^1$ definiert die Verknüpfung in der Fundamentalgruppe, gegeben $\gamma_1 : S^1 \longrightarrow X$, $\gamma_2 : S^1 \longrightarrow X$:

$$\gamma_1 \vee \gamma_2 : S^1 \vee S^1 \longrightarrow X \qquad \gamma_1 \cdot \gamma_2 : S^1 \xrightarrow{g} S^1 \vee S^1 \xrightarrow{\gamma_1 \vee \gamma_2} X$$

Analog hat man $q : S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$. Verknüpfung auf $\pi_n(X, x_0)$: $f_1,\ f_n \in \pi_n(X, x_0)$;

$$f_1 \cdot f_2 : S^n \xrightarrow{q} S^n \vee S^n \xrightarrow{f_1 \vee f_2} (X, x_0).$$

Liefert Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x_0)$. Hauptproblem: $\pi_n(S^k)$ sind unbekannt. Z.B. $\pi_3(S^2)$ ist nichttrivial $\Longrightarrow$ es existiert eine nichttriviale Abbildung $h : S^3 \longrightarrow S^2$, die sogenannte *Hopf-Faserung.*