Grundlagen der Analysis[1] (Teil 1)

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht
LaTeX: rydval.jakub@gmail.com
Version: 11. November 2016
Technische Universität Dresden

[1] Math Ba ANAG: Grundlagen der Analysis, WS 2013/14

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Grundlagen der Mathematik

1 Grundbegriffe aus Logik und Mengenlehre

Aussage ist ein Sachverhalt, dem man entweder Wahrheitswert *wahr*, oder *falsch* zuordnen kann (und nichts anderes!).

Beispiel 1.
- *Die Elbe fließt durch Dresden* ist eine wahre Aussage.
- *Fünf ist ein Quadratzahl* ist eine falsche Aussage.
- *Mathematik ist rot* ist keine Aussage.

Menge ist (nach Cantor 1877) eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedlichen Objekten der Anschauung oder des Denkens, welche die *Elemente* der Menge genannt werden, zu einem ganzen.

Beispiel 2.
- $M_1 :=$ Menge aller Städte in Deutschland.
- $M_2 := \{1, 2, 3\}$.

Dies ist keine strenge Definition im üblichen Sinne. Für Objekt m und Menge M gilt stets: Entweder $m \in M$, d.h. m ist Element von M oder $m \notin M$, d.h. m ist nicht Element von M.

Mengen M und N sind *gleich*, kurz $M = N$, falls sie die selben Elemente enthalten. Z.B. $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 2, 2, 3\}$. Bemerkung: Die Reihenfolge oder mehrfaches Auftreten ist nicht relevant!

Menge N heißt *Teilmenge* von M, kurz $N \subset M$, falls $n \in N$ für jedes $n \in M$. Falls $N \neq M, N$ ist *echte Teilmenge* von M, kurz $N \subsetneqq M$. Warnung: In der Literatur finden wir auch Symbole $\subseteq$ für Teilmengen und $\subset$ für echte Teilmengen.

Aussageform ist ein Sachverhalt mit Variablen, der durch geeignete Ersetzung der Variablen zu einer Aussage wird.

Beispiel.

- $A(X) :=$ *die Elbe fließt durch* X.
- $B(X, Y, Z) := X + Y = Z$.

Bemerkung: Diese zwei Ausdrücke sind Aussageformen aber keine Aussagen.

- A(Dresden) ist eine wahre Aussage.
- $B(2, 3, 4)$ ist eine falsche Aussage.
- A(Mathematik) ist keine Aussage.
- $A(X)$ ist eine Aussage für jedes $x \in M_1$ (M_1 aus *Beispiel 2*).

Bemerkung: Letztes Beispiel zeigt Generalisierung von Aussagen mittels Mengen.

1.1 Bildung und Verknüpfung von Aussagen

Seien A und B Aussagen. Neubildungen oder Verknüpfungen beschreibt man mittels *Wahrheitswertetabelle*:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Longrightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr	falsch	wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr	falsch	falsch	wahr	falsch

- *Negation*: $\neg A$ (sprich "nicht A") ist wahr genau dann, wenn A nicht wahr ist.

  Z.B. $\neg$(Deutschland liegt in Afrika.) ist wahr.
- *Konjunktion*: $A \wedge B$ (sprich "A und B") ist wahr genau dann, wenn A und B wahr sind.

  Z.B. (Berlin ist eine Stadt.) $\wedge$ (In einem Wald gibt es keine Bäume.) ist falsch.

  Hinweis: Wahrheitswert bei Verknüpfungen hängt nur von Wahrheitswerten der Bestandteile ab. D.h. Aussagen Er ging nach Dresden und wurde reich. und Er wurde reich und ging nach Dresden. sind logisch gleichwertig, obwohl sie unterschiedlich interpretiert werden können.
- *Disjunktion*: $A \vee B$ (sprich "A oder B") ist wahr genau dann, wenn A oder B wahr sind (als nicht ausschließendes Oder).

  Beispiel.

  - (Fische leben in Wasser.) $\vee$ (Es gibt schwarze Katzen.) ist wahr.
  - (Wollen Sie Tee?) $\vee$ (Wollen Sie Kaffee?) ist wahrscheinlich wahr. (Muss von Mathematiker mit "Ja" beantwortet werden).
- *Kontravalenz*: $a \veebar b$ (sprich "entweder a oder b") ist wahr genau dann, wenn entweder a oder b wahr sind (als ausschließendes Oder). Kontravalenz wird durch folgende Verknüpfung realisiert: $a \veebar b := (a \vee b) \wedge (\neg(a \wedge b))$.
- *Implikation*: $A \Longrightarrow B$ (sprich "A impliziert B" bzw. "Wenn B, dann A") ist wahr genau dann, wenn $A \wedge B$ wahr oder A falsch ist.

  Beispiel.

  - Mond ist eine Würfel. $\Longrightarrow$ Alle Blätter sind blau. ist wahr.
  - Mond ist eine Würfel. $\Longrightarrow$ Es gibt grüne Blätter. ist wahr.

  Es muss kein kausaler Zusammenhang zwischen den Aussagen bestehen.
- *Äquivalenz*: $A \Longleftrightarrow B$ (sprich "A äquivalent B") ist wahr genau dann, wenn A und B gleiche Wahrheitswerte haben.

  Beispiel.

  - Mond ist eine Würfel. $\Longleftrightarrow$ Alle Blätter sind blau. ist wahr.
  - $\neg$(8 ist ungerade.) $\Longleftrightarrow$ $(\pi \in \mathbb{N}) \wedge (7 \in \mathbb{N})$ ist falsch.

Sei Aussageform $A(x)$ für jedes x eine Aussage, dann definieren wir neue Aussagen mittels Quantoren $\forall$ und $\exists$.

- *Allquantor*: $\forall x \in M : A(x)$ ist wahr g.d.w. $A(x)$ wahr für jedes $x \in M$ ist. Sprich "für jedes $x \in M$ ist $A(x)$ wahr".
- *Existenzquantor*: $\exists x \in M : A(x)$ ist wahr g.d.w. $A(x)$ wahr für mindestens ein $x \in M$ ist. Sprich "es gibt ein $x \in M$, für das $A(x)$ wahr ist."

Beispiel.

- $\forall n \in \mathbb{N} : n$ *ist gerade.* ist eine falsche Aussage.
- $\exists n \in \mathbb{N} : n$ *ist gerade.* ist eine wahre Aussage.

Eine zusammengesetzte Aussage, die unabhängig von Wahrheitswerten der Teilaussagen stets wahr ist heißt *Tautologie*. Eine zusammengesetzte Aussage, die unabhängig von Wahrheitswerten der Teilaussagen stets falsch ist heißt *Kontradiktion* oder auch *Widerspruch*.

Beispiel 3. Folgende Aussagen sind Tautologien: $A \vee \neg A$, $\neg(A \wedge \neg A)$, $A \wedge B \implies A$. Folgende Aussagen sind Widersprüche: $A \wedge \neg A$, $A \iff \neg A$. Besonders wichtige Tautologie:

$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A). \tag{1}$$

Regeln zur Negation von Aussagen:

Satz 4 (De Morgan). *Folgende Aussagen sind Tautologien:*

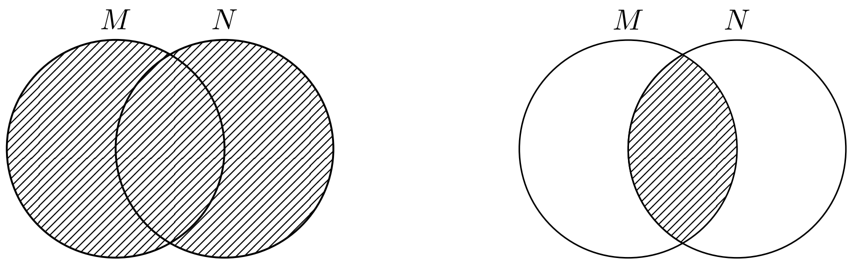
(a) $\neg(A \wedge B) \implies \neg A \vee \neg B$,
(b) $\neg(A \vee B) \implies \neg A \wedge \neg B$,
(c) $\neg(\forall x \in M : A(x)) \iff \exists x \in M : \neg A(x)$,
(d) $\neg(\exists x \in M : A(x)) \iff \forall x \in M : \neg A(x)$.

Beweis. Übungsaufgabe. ∎

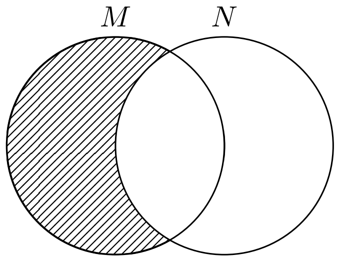
1.2 Bildung von Mengen

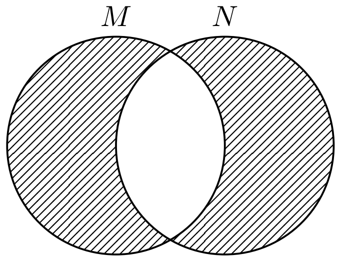
Wir nehmen an, dass M, N stets Mengen sind. Folgende Gebilde sind Mengen:

- Aufzählung der Elemente. (Z.B. $\{1, 3, 7\}$.)
- Beschreibung der Elemente durch eine Eigenschaft (Aussonderung aus M) der Form $\{x \in M \mid A(x) \text{ ist wahr}\}$. (Z.B. $\{n \in \mathbb{N} \mid n > 10\}$, vgl. später.) Falls $A(x)$ falsch ist für alle $x \in M$, dann erhält man *leere Menge* $\emptyset$, d.h. die keine Elemente enthält. Beachte: $\emptyset \subset M$ für jede Menge M. Warnung: $\{\emptyset\}$ ist nicht die leere Menge, denn sie enthält ein Element (nämlich die leere Menge).
- *Vereinigung*: $M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$. Allgemein gilt für ein *Mengensystem* (Menge von Mengen) $\mathcal{M}$: $\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \mid \exists M \in \mathcal{M} : x \in M$.
- *Durchschnitt*: $M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$. Allgemein gilt für ein Mengensystem $\mathcal{M}$: $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \mid \forall M \in \mathcal{M} : x \in M\}$. M, N heißen disjunkt falls $M \cap N = \emptyset$.



- *Differenz*: $M \backslash N := \{x \in M \mid x \notin N\}$. Falls $N \subset M$, dann ist $N^c := M \backslash N$ *Komplement* von N in M.
- *Symmetrische Differenz*: $M \triangle N := \{x \mid x \in M \dot\vee x \in N\}$.





- *Potenzmenge*: $\mathcal{P}(M) := \{U \mid U \subset M\}$ (ist Menge aller Teilmengen von M, $\emptyset, M$ sind stets Elemente von $(P)(M)$).
- *Kartesiches Produkt*: $M \times N := \{(m,n) \mid m \in M, n \in N\}$, wobei (m,n) heißt *geordnetes Paar* (Reihenfolge ist wichtig). Allgemein gilt

$$M_1 \times ... \times M_k := \{\underbrace{(m_1, ..., m_k)}_{k\text{-tupel}} \mid m_j \in M_j, j = 1, ..., k\}.$$

für das n-fache Kartesische Produkt schreibe

$$M^k := \underbrace{M \times ... \times M}_{k\text{-}fach} := \{\underbrace{(m_1, ..., m_k)}_{k-\text{Tupel}} \mid m_j \in M_j, j = 1, ..., k\}.$$

Satz (De Morgan). *Für $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(N)$ gilt:*

$$\left(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N\right)^c = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N^c \text{ und } \left(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N\right)^c = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} N^c.$$

Beweis. Übungsaufgabe. ∎

Auswahlaxiom. (kurz AC) *Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von paarweise disjunkten Mengen, dann existiert eine Auswahlmenge N, die mit jedem Element von $\mathcal{M}$ genau ein Element gemeinsam hat. (Beachte:* Auswahl ist nicht konstruktiv!*)* Äquivalente Formulierung: *Sei $\mathcal{M}$ eine Menge nichtleerer Mengen, dann existiert eine Auswahlfunktion F auf $\mathcal{M}$ mit $F(M) \in M\ \forall M \in \mathcal{M}$.*

1.3 Aufbau einer mathematischen Theorie

- *Axiome* bzw. *Postulate* sind als wahr angenommene Aussagen.
- *Beweise* sind Herleitungen nach Regeln der Logik.
- *Sätze* sind "neue" wahre Aussagen, die aus Axiomen und bereits bekannten Sätzen hergeleitet werden können.
- *Theoreme* sind besonders wichtige Sätze.
- *Lemmas* sind einfache Nebensätze.

1.4 Frage der Formulierung mathematischen Aussagen

Die Aussage "es gilt A" bzw. "es gelte A" heißt: A ist wahr bzw. wird als wahr angenommen. Typischer mathematischer Satz:

$$\underbrace{\textit{Wenn } A \textit{ gilt}}_{\text{Voraussetzung}},\ \underbrace{\textit{folgt } B.}_{\text{Behauptung}}$$

Formal geschrieben: $A \implies B$.

Beispiel 5. *Wenn $x \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar ist, dann ist x auch durch 2 teilbar.*

Bedeutung: Falls A wahr ist, dann ist auch $A \implies B$ wahr (d.h. falls A wahr ist, dann ist B wahr). Genauer meint man sogar: $A \wedge C \implies B$ ist wahr, wobei $x = \bigwedge_{i \in I} C$ für alle schon bekannte Aussagen C. Man sagt auch: B ist *notwendig* für A (da A nicht wahr sein kann, ohne dass B wahr ist, vgl. (1)) bzw. A ist *hinreichend* für B (da B stets wahr ist, falls A wahr ist).

In der Regel hat dies mit *Aussagenformen* statt Aussagen zu tun:

$$\text{Wenn } A(X) \text{ gilt, folgt } B(X)\text{, formal: } A(X) \implies B(X).$$

Bedeutung: Falls $A(X)$ wahr für konkretes X ist, dann ist auch $B(X)$ wahr für dieses X. Beachte: *Beispiel 5* hat bereits diese Form. (Beachte: Implikation ist in *Beispiel 5* auch wahr, falls $x = 5$, dieser Fall ist aber uninteressant.)

1.5 Mathematische Beweise

Es gibt 2 grundlegende Techniken zum Beweis von $A \implies B$:

(1) **Direkter Beweis.** Finde Zwischenaussagen $A_1, ..., A_k$, so dass für A wahr auch $(A \implies A_1) \wedge (A_1 \implies A_2) \wedge ... \wedge (A_k \implies B)$ wahr ist (kurz: $A \implies A_1 \implies A_2 \implies ... \implies A_k \implies B$).

(2) **Indirekter Beweis.** Auf der Grundlage der Tautologie $A \implies B \iff \neg B \implies \neg A$ führt man diesen Beweis für $\neg B \implies \neg A$. Praktisch: $A \wedge \neg B \implies ... \implies (A \wedge \neg A) = \lightning$. (D.h. angenommen B ist falsch $\implies$ ... $\implies$ Widerspruch.)

Beispiel 6. *Wenn $x > 2$, dann folgt $x^2 - 3x + 2 > 0$.*

(1) Beweise dies direkt unter Verwendung von bekannten Wissen:

Beweis. $x > 2 \implies (x-2) > 0 \wedge (x-1) > 0 \implies (x-2)(x-1) > 0$. ■

(2) Beweise indirekt angenommene Behauptung als falsch, d.h. $x^2 - 3x + 2 \leq 0$:

Beweis. $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \implies (x-2)(x-1) \leq 0 \implies 1 \leq x \leq 2 \implies x \leq 2 \implies \lightning \implies x^2 - 3x + 2 > 0$. ■

1.6 Relationen und Abbildungen

Relation ist Teilmenge $R \subset M \times N$ wobei $(x, y) \in R$ heißt "x und y stehen in Relation zueinander".

Beispiel. $R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x < y\}$.

- (Ordnungsrelation) Relation $R \subset M \times M$ heißt *Ordnungsrelation* (kurz *Ordnung*) auf M, falls $\forall a, b, c \in M$ gilt:

  (i) (Antireflexivität) $(a, a) \notin R$,
  (ii) (Transitivität) $(a, b), (c, d) \in R \implies (a, c) \in R$.

  Beispiel. $R := \{(x, y) \in \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \mid x < y\}$ ist eine Ordnung auf M.

- (Totalordnung) Relation R auf M heißt *Totalordnung* falls $\forall a, b \in M$ gilt: $a \neq b \implies (a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$.

Beispiel. $R := \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\}$.

- (Äquivalenzrelation) Relation R auf M heißt *Äquivalenzrelation* falls $\forall a,b,c \in M$ gilt:
  (i) (Reflexivität) $(a,a) \in R$,
  (ii) (Symmetrie) $(a,b) \in R \iff (b,a) \in R$,
  (iii) (Transitivität) $(a,b),(c,d) \in R \implies (a,c) \in R$.

  Schreibe $a \sim b$ (a äquivalent b) falls $(a,b) \in R$.
- (Äquivalenzklasse) Menge $[a] := \{b \in M \mid (a,b) \in R\}$ heißt *Äquivalenzklasse* von $a \in M$ bezüglich R.

  Beispiel. Sei $B := \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ *Menge aller Brüche*, dann die Menge der Äquivalenzklassen $\mathbb{Q} := \{[(m,n)] \in B \times B \mid (m,n) \in R\}$ mit $R := \{((m,n),(p,q)) \in B \times B \mid m \cdot q = n \cdot p\}$ ist Menge der *rationalen Zahlen*.

Abbildung oder auch *Funktion* $F : M \to N$ ist Vorschrift, die jedem *Argument* $m \in M$ einen *Wert* $F(m) \in N$ zuordnet.

- $\mathcal{D}(F)$ heißt *Definitionsbereich* oder auch *Urbildmenge* , $\mathcal{R}(F)$ heißt *Wertebereich* oder auch *Bildmenge*, $F(M') := \{n \in N \mid n = F(m)$ für ein $m \in M'\}$ ist *Bild* von $M' \subset M$, $F^{-1}(N') := \{m \in M \mid n = F(m)$ für ein $n \in N'\}$ ist *Urbild* von $N' \subset N$. Unter einer *Urbildfunktion* versteht man Abbildung $F^{-1} : \mathcal{P}(N) \to \mathcal{P}(M)$.
- $F_{|M'}$ ist *Einschränkung* von F auf $M' \subset M$ (vgl. später).

  Beachte: Gelegentlich vereinfachen wir die Schreibweise, d.h. wir schreiben $F : M \to \tilde{N}$ obwohl $F(M) \subsetneq \tilde{N}$, $F : \tilde{M} \to N$ obwohl $F(m)$ auf $M \subsetneq \tilde{M}$ erklärt ist. Z.B. schreiben wir oft $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

  Beachte: Gelegentlich spricht man von der Funktion $F(m)$ statt F.
- Funktionen F, G sind gleich, falls

$$\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(G) \wedge \mathcal{R}(F) = \mathcal{R}(G) \wedge F(n) = G(n)\ \forall n \in \mathcal{D}(F).$$

- Formal ist eine Abbildung $F : M \to N$ definiert als eine Relation $\tilde{F} \subset M \times N$ mit Eigenschaften:
  (i) (Rechtseindeutigkeit) $\forall m \in M, \forall n_1, n_2 \in N : (m,n_1) \in \tilde{F} \wedge (m,n_2) \in \tilde{F} \implies n_1 = n_2$,
  (ii) (Linkstotalität) $\forall m \in M\ \exists n \in N : (m,n) \in \tilde{F}$.

  Wobei $(m,n) \in \tilde{F}$ g.d.w. $n = F(m)$.
- $\mathrm{Graph}(F) := \tilde{F} := \{(m,n) \in M \times N \mid n = F(m)\}$ ist Graph von F.

Komposition oder *Verkettung* von $F : M \to N$ und $G : N \to P$ ist Abbildung $G \circ F : M \to P$ mit $(G \circ F)(m) := G(F(m))$. Abbildung $F : M \to N$ heißt:

- *injektiv (linkseindeutig)* falls F eineindeutig ist, d.h. $F(m_1) = F(m_2) \implies m_1 = m_2$,
- *surjektiv (rechtstotal)* falls $F(M) = N$, d.h. $\forall n \in N\ \exists m \in M : n = F(m)$,
- *bijektiv* falls $F : M \to N$ injektiv und surjektiv ist.

Eine *Umkehrabbildung* oder *inverse Abbildung* $F^{-1} : N \to M$ ist definiert für eine *bijektive Abbildung* $F : M \to N$ durch $F^{-1}(n) = m$ g.d.w. $F(m) = n$.

Es gilt $F(F^{-1}(n)) = n$ und $F^{-1}(F(m)) = m$.

Satz 7. *Sei $F : M \to N$ eine surjektive Abbildung, dann existiert eine Abbildung $G : N \to M$, sodass $F \circ G = id_N$ wobei id_N heißt* Identität *auf N, mit $id_N = F(G(n)) = n\ \forall n \in N$.*

Beweis. Definiere Menge $\Gamma_n := \{m \in M \mid F(m) = n\}$ mit $\Gamma_n \neq \emptyset \; \forall n \in N$. Dann existiert nach *Auswahlaxiom* eine Abbildung $G : N \to M$ mit $G(n) \in \Gamma_n \; \forall n \in N \implies F(G(n)) = n \; \forall n \in N \implies$ Behauptung. ■

(Hinweis: Satz ist ohne Auswahlaxiom nicht beweisbar!)

Isomorphismus bezüglich einer Struktur ist eine bijektive Abbildung $I : M_1 \to M_2$, die auf M_1 und M_2 vorhandene Struktur erhält. Sei z.B. $i \in \{1, 2\}$, dann ist I Isomorphismus

- bzgl. Relation $R_i \in M_i \times M_i$ falls $(a, b) \in R_1 \iff (I(a), I(b)) \in R_2$,
- bzgl. Abbildung $F_i : M_i \to M_i$ falls $I(F_1(a)) = F_2(I(a)) \; \forall a \in M_1$,
- bzgl. speziellem Element $a_i \in M_i$ falls $I(a_1) = a_2$.

Mengen M_1 und M_2 heißen dann *isomorph* (strukturell gleich) bzgl. der angegebenen Struktur.

2 Bemerkung zum Fundament der Mathematik

1900 AD (Hilberts Traum) Forderung an mathematische Theorien:

(i) Eine mathematische Theorie soll *widerspruchsfrei* sein, d.h. ein Satz und seine Negation sind gleichzeitig nicht herleitbar.

(ii) Eine mathematische Theorie soll *vollständig* sein, d.h. alle, durch logische Operationen erzeugbare Aussagen innerhalb der Theorie sind als wahr oder falsch beweisbar.

1930 AD /1931 (Gödels Sätze) Schock durch Gödels Sätze (nach Kurt Gödel):

(i) (1. Unvollständigkeitssatz) *Jedes hinreichend mächtige formale System ist nicht gleichzeitig widerspruchsfrei und vollständig. (D.h. widerspruchsfreie Systeme sind unvollständig.)*

(ii) (2. Unvollständigkeitssatz) *In jedem hinreichend mächtigen System kann nicht die eigene Widerspruchsfreiheit gezeigt werden. (D.h. die Widerspruchsfreiheit der gesamten Mathematik ist nicht innerhalb der Mathematik beweisbar, falls Mathematik widerspruchsfrei ist.)*

Die Vollkommenheit der Mathematik scheint erschüttert, in der Wahrheit führte dies aber zu einem tieferen Verständnis von Grundlagen der Mathematik.

2.1 Entwicklung der Mengenlehre in dem 20. Jahrhundert

1901 AD (Russelsche Antinomie) Die Cantors *"naive" Mengenlehre* (1877 AD) erlaubt folgende Mengendefinition:

$$M := \{N \mid N \notin N\}$$

(Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.)
Diese Formulierung zeigt sich als problematisch, denn es gilt:

$$\left.\begin{array}{lcl} M \notin M & \Longrightarrow & M \in M \\ M \in M & \Longrightarrow & M \notin M \end{array}\right\} M \in M \iff M \notin M = \lightning$$

Daraus folgt, dass die klassische Mengenlehre nicht widerspruchsfrei ist was zu einer Krise der Mathematik führte.

1903 AD (Typentheorie) Als Ausweg haben erst Russel und Whitehead eine neue Theorie gegründet, die Folgende Mengengliederung ergibt:

(i) *Mengen Typ 1* enthalten nur *"einfache Elemente"*.

(ii) *Mengen Typ 2* enthalten nur *Mengen Typ 1*.

$$\vdots$$

Diese Theorie zeigt sich als widerspruchsfrei aber nicht leistungsfähig genug für die gesamte Mathematik.

1922 AD (Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre) Ernst Zermelo und Abraham Adolf Fraenkel gründen die *Axiomatische Mengenlehre* ZF (oder ZFC mit Auswahlaxiom AC). Der Begriff "Menge" ist nur implizit definiert. Die Axiome besagen vereinfacht folgendes:

(i) Es gibt eine Menge, und zwar die *leere Menge*, die mit $\emptyset$ bezeichnet wird.

(ii) Zwei Mengen sind gleich, falls sie gleiche Elemente enthalten.

(iii) Seien M, N Mengen, dann sind $\{M, N\}, M \cup N, \mathcal{P}(M), \{x \in M \mid A(x)\}$ auch Mengen.

(iv) Es gibt Mengen, die unendlich viele Elemente enthalten, sogenannte induktive Mengen. $(x \in I \implies x \cup \nu(x) \in I)$

(v) Auswahlaxiom.

Die Axiomatische Mengenlehre scheint widerspruchsfrei zu sein. Eine widerspruchsfreie Theorie ist aber nach Gödel unvollständig, d.h. es sollte in ZF einige unentscheidbare Aussagen geben. Die Frage ist, ob sie relevant oder ganz exotisch sind. Ein Beispiel wäre das Auswahlaxiom, denn Kurt Gödel (1931) und Paul Cohen (1963) haben bewiesen, das ZFC und gleichzeitig auch ZF$\wedge\neg$AC widerspruchsfrei sind. Analog zu Auswahlaxiom ist auch die Kontinuumshypothese (CH) in ZF unentscheidbar. Es stellt sich also die Frage, ob die ZF ohne AC nicht besser ist. Mit Auswahlaxiom hat man in ZF unter anderem folgende wichtige Sätze:

(i) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis

(ii) *Lemma von Zorn* und damit auch *Satz von Hahn Banach*

(iii) *Wohlordnungssatz*, d.h. Mengen sind total geordnet

(iv) Existenz von nicht messbaren Mengen (Mengen, denen man kein Volumen zuordnen kann)

(v) *Banach-Tarski-Paradoxon*: Eine Kugel in $\mathbb{R}^3$ kann in (nicht messbaren) Mengen $A_1, ..., A_5$ zerlegt werden, so dass $A_1 \cup A_2$ und $A_3 \cup A_4 \cup A_5$ zwei lückenlose Kugeln der gleichen Große ergeben.

Die Vorteile von ZFC sind aber überwiegend, die Mathematik basiert auf ZFC ist leistungsfähig (besonders bei Anwendungen) und deswegen wird ZF meistens mit dem Auswahlaxiom verwendet.

Teil II

Zahlenbereiche

3 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N}$ sei die Menge, die die *Peano Axiome* erfüllt:

Peano-Axiome. (vereinfacht)

(P1) $\mathbb{N}$ *ist eine induktive Menge, d.h. es existiert* Nachfolgerabbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *und ein Nullelement* $0 \in \mathbb{N}$ *mit* ν *ist injektiv und* $\nu(n) \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

(P2) (Induktionsaxiom) *Falls* $N \subset \mathbb{N}$ *induktiv in* $\mathbb{N}$ *ist, d.h.* N *ist induktiv mit* ν *und* 0 *aus* (P1), *dann gilt* $N = \mathbb{N}$.

Nach Mengenlehre ZF existiert eine solche Menge $\mathbb{N}$ *der natürlichen Zahlen.* Unendlichkeitsaxiom in ZF postuliert Existenz einer induktiven Menge, d.h. $\exists M$ mit $\emptyset \in M$ und falls $x \in M \implies x \cup \{x\} \in M$. $\mathbb{N}$ ist die "kleinste" induktive Menge, mit üblichen Symbole $0, 1, 2, 3, 4, ...$ hat man

$$\begin{aligned}
&0 := \emptyset \\
&1 := \nu(0) = \{\emptyset\} = 0 \cup \{0\} \\
&2 := \nu(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 := \nu(2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&4 := \nu(3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gewohnte Schreibweise $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Theorem 1. *Falls* $\mathbb{N}$ *und* $\mathbb{N}^*$ *Peano-Axiome erfüllen, dann sind sie isomorph bezüglich Nachfolgerabbildung und Nullelement (d.h. sie sind strukturell gleich). Somit sind alle* $\mathbb{N}$ *strukturell gleich und können mit obigem* $\mathbb{N}$ *identifiziert werden.*

3.1 Prinzip der vollständigen Induktion

Vollständige Induktion. *Sei* $A = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *Menge von Aussagen mit den Eigenschaften:*

(IA) (Induktionsanfang) A_0 *ist wahr.*

(IS) (Induktionsschritt) $\forall n \in \mathbb{N}$ *gilt* $A_n \implies A_{n+1}$.

Dann ist A_n *wahr* $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $N := \{n \in \mathbb{N} \mid A_n \text{ wahr}\} \subset \mathbb{N}$. Offenbar $0 \in N$ und $\nu(N) \subseteq N \implies N$ ist induktiv in $\mathbb{N} \overset{(P2)}{\implies} N = \mathbb{N}$. ■

Lemma 2. (a) $\nu(\mathbb{N}) \cup \{0\} = \mathbb{N}$.
(b) $\nu(n) \neq n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Zu (a): $N := \{n \in \mathbb{N} \mid n = \nu(m) \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ ist induktiv in $\mathbb{N} \overset{\text{(P2)}}{\implies} N = \mathbb{N}$
Zu (b): $\nu(n) \neq 0$ nach (P1), zeige

$$\nu(n) \neq n \implies \nu(\nu(n)) \neq \nu(n) \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Angenommen $\nu(\nu(n)) = \nu(n) \overset{\nu \text{ inj.}}{\implies} \nu(n) = n \implies \lightning \implies (1) \implies$ vollständige Induktion liefert (b).

■

Rekursive Definition (Rekursion). *Sei B eine Menge, $b \in B$ und $F : B \to B$ eine Abbildung. Die Vorschrift*

$$f(0) := b, f(n+1) := F(f(n)) \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

liefert genau eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to B$ (es existiert genau eine solche Abbildung, so dass dieses eindeutig ist).

Beweis. (der Rekursion) Setze $M_n := \{0, 1, ..., n\}$ so dass $f_0 : M_0 \to B$ mit $f_0 := b$. Falls $f_n : M_n \to B$ eindeutig definiert ist, dann ist $f_{n+1} : M_{n+1} \to B$ eindeutig definiert durch:

$$f_{n+1}(k) = f_n(k) \ \forall k \in M_n, f_{n+1}(n+1) := F(f_n(n))$$

$\underset{\text{Ind.}}{\overset{\text{vollst.}}{\implies}} f_n : M_n \to B$ ist eindeutig definiert $\forall n \in \mathbb{N}$. Setze $f(n) := f_n(n) \implies f : \mathbb{N} \to B$ ist definiert und erfüllt (2). *Eindeutigkeit:* Erfüllen $f, \tilde{f}$ (2) $\implies f(0) = \tilde{f}(0) = b$ und $f(n) = \tilde{f}(n)$ $\implies f(n+1) = \tilde{f}(n+1) \underset{\text{Ind.}}{\overset{\text{vollst.}}{=}} \tilde{f}$. ■

Beweis. (von *Theorem 1*) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^*$ mögen Peano Axiome erfüllen mit $(\nu, 0)$ und $(\nu^*, 0^*)$. Setze $I(0) := 0^*, I(\nu(n)) := \nu^*(I(n)) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Abbildung $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ ist rekursiv eindeutig definiert mit $F = \nu^*, B = \mathbb{N}^*$. I erhält Nachfolgerabbildung und Nullelement. Falls I bijektiv ist, ist I entsprechend isomorph und die Behauptung folgt. Zeige I ist surjektiv: offenbar $0^* \in I(\mathbb{N})$ falls $n^* \in I(\mathbb{N}) \implies \exists n \in \mathbb{N} : n^* = I(n) \implies \nu^*(n^*) = \nu^*(I(n)) = I(\nu(n))$. Folglich ist $I(\mathbb{N})$ induktiv in $\mathbb{N}^* \overset{\text{(P2)}}{\implies} I(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$. Zeige I ist injektiv d.h.

$$I(n) \neq I(m) \text{ falls } n \neq m \tag{3}$$

Vollständige Induktion nach m liefert:

(IA) $m = 0 : \forall n \neq 0 \ \exists n' \in \mathbb{N} : n = \nu(n')$ (vgl. Lemma 2) $\implies I(n) = I(\nu(n')) = \nu^*(I(n')) \overset{\text{(P1)}}{\neq} 0^* = I(0) \ \forall n \neq 0$.

(IS) Sei $I(n) \neq I(m) \ \forall n \neq m$, dann gilt: für $n = 0 \neq \nu(n) : I(0) = 0^* \neq \nu^*(I(m)) = I(\nu(m))$, für $0 \neq n = \nu(n') \neq \nu(m)$ ist $n' \neq m$ da ν eine Abbildung ist. $I(n) = I(\nu(n')) = \nu^*(I(n')) \neq \nu^*(I(m)) = I(\nu(m)) \implies I(n) \neq I(\nu(m)) \ \forall n \neq \nu(m) \implies$ (3) mittels vollständiger Induktion.

■

Addition ist Abbildung $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kurz *Summe* $n + m := A(n, m)$ mit

(i) $n + 0 := n$,
(ii) $n + \nu(m) = \nu(n + m) \ \forall n \in \mathbb{N}$. (4)

Multiplikation ist Abbildung $M : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kurz *Produkt* $n \cdot m := M(n,m)$ mit

(i) $n \cdot 0 := 0$,
(ii) $n \cdot \nu(m) = n \cdot m + n \ \forall n \in \mathbb{N}$. (5)

Für jedes (feste) $n \in \mathbb{N}$ sind (4) und (5) Rekursionen in $\mathbb{N} \implies n + m$ und $n \cdot m$ sind eindeutig definiert für alle $n, m \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n + 1 = n + \nu(0) = \nu(n + 0) = \nu(n)$

Satz 3. *Addition und Multiplikation haben folgende Eigenschaften:* $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

(a) (neutrales Element) $n + 0 = n$ *bzw.* $n \cdot 1 = n$,
(b) (Kommutativität) $n + m = m + n$ *bzw.* $n \cdot m = m \cdot n$,
(c) (Assoziativität) $(k + m) + n = k + (m + n)$ *bzw.* $(k \cdot m) \cdot n = k \cdot (m \cdot n)$,
(d) (Distributivität) $(k + m) \cdot n = k \cdot n + m \cdot n$.

Beweis. Zu (c): Addition: Vollständige Induktion nach n liefert $\forall k, m, n$:

(IA) $n = 0 : k + (n + 0) = k + n = (k + n) = (k + n) + 0$
(IS) Falls $k + (m + n) = (k + m) + n \forall k, n \implies k + (m + \nu(n)) = k + \nu(m + n) = \nu(k + (m + n)) = \nu((k + m) + n) = (k + m) + \nu(n) \overset{\text{vollst.}}{\underset{\text{Ind.}}{\implies}}$ Addition ist assoziativ.

Multiplikation: Analog. Zu (b): Übung. Zu (a): $n + 0 = n$, $n \cdot 1 = n \cdot \nu(0) + n = n$ (da Addition kommutativ ist) Zu (d): Vollständige Induktion nach k liefert:

(IA) $k = 0 : 0 \cdot (m + n) = 0 = 0 \cdot m + 0 \cdot n \ \forall m, n \in \mathbb{N}$
(IS) Falls $k \cdot (m + n) = km + kn \ \forall m, n \in \mathbb{N} \implies \nu(k) \cdot (m + n) = k(m + n) + (m + n) = km + kn + m + n = \nu(k)m + \nu(k)n \ \forall m, n \in \mathbb{N} \overset{\text{vollst.}}{\underset{\text{Ind.}}{\implies}}$ Behauptung.

■

Folgerung 4. *Es gilt* $\forall k, m, n \in \mathbb{N}$*:*

(a) (Kürzungsregel) $m + k = n + k \iff m = n$, $k \neq 0 : m \cdot k = n \cdot k \iff m = n$,
(b) $m \neq 0 \implies m + n \neq 0$,
(c) $m \cdot n = 0 \iff m = 0 \vee n = 0$.

Beweis. Zu (a): Addition:

"$\implies$": Hinrichtung folgt aus Eindeutigkeit der Addition.
"$\impliedby$": Vollständige Induktion nach k liefert:

(IA) $k = 0$ klar
(IS) Sei Behauptung richtig für k, dann $m + (k + 1) = n + (k + 1) \implies \nu(m + k) = \nu(n + k) \overset{\nu \text{ ist}}{\underset{\text{injektiv}}{\implies}} m + k = n + k \overset{\text{Folg. 4}}{\implies} m = n \overset{\text{vollst.}}{\underset{\text{Ind.}}{\implies}}$ Behauptung.

Multiplikation: Übungsaufgabe. Zu (b): $m \neq 0 \implies \exists m' \in \mathbb{N} : m = \nu(m') \implies n + m = n + \nu(m') = \nu(n + m') \neq 0$ Zu (c): Übungsaufgabe.

■

Schreibe $n < m$ oder $m > n$ falls $\exists k \neq 0 : m = n + k$, $n \leq m$ oder $m \geq n$ falls $n < m \vee n = m$ oder $m > n \vee m = n$.

Satz 5. (a) *Sei* $n \leq m \implies \exists! k \in \mathbb{N} : m = n + k$. *Dann heißt* $m - n := k$ Differenz.
(b) *Symbol* $<$ *definiert die Totalordnung auf* $\mathbb{N}$ *mit* $R := \{(m, n) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid n < m\}$.
(c) *Ordnung ist verträglich mit Addition und Multiplikation, d.h.:* $\forall m, n, \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\forall k \in \mathbb{N} : m < n \iff m + k < n + k$, $\forall k > 0 : m < n \iff m \cdot k < n \cdot k$.

Beweis. Zu (a): Sei $m + n + k = n + k' \overset{\text{Kürzungs-}}{\underset{\text{regel}}{\implies}} k = k'$ Zu (b): Angenommen $n < n \implies \exists k \neq 0 : n = n + k \implies k = 0 \implies ↯ \implies R$ ist antireflexiv. Sei $k < m$ und $m < n \implies \exists l, j \neq 0 : k + l = m, m + j = n \overset{\text{Kürzungs-}}{\underset{\text{regel}}{\implies}} k + (l + j) = m + j = n$. Wegen $l, j \neq 0$ ist $l + j \neq 0$, folglich $k < n$ d.h. R ist transitiv, eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{N}$. Zeige

$$m \neq n \implies m < n \vee m > n \ \forall m, n \in \mathbb{N} \tag{6}$$

mittels vollständiger Induktion nach m:

(IA) $m = 0$: es ist $n = 0 + n \implies 0 < n \ \forall n \neq 0$
(IS) gelte (6) für m, dann folgt für $\nu(m) \neq n$:
  (i) Falls $n < m \implies n < m + 1$ da $m < m + 1$. (R ist *transitiv.*)
  (ii) Falls $m < n \implies \exists k \in \mathbb{N} : m + (k + 1) = n \implies (m + 1) + k = n \overset{\nu(m) \neq n}{\implies} k \neq 0 \implies m + 1 < n$
  (iii) Falls $m = n \implies \nu(m) = n + 1 \implies m + 1 > n \overset{\text{vollst.}}{\underset{\text{Ind.}}{\implies}} (6) \implies$ Behauptung.

Zu (c): Übungsaufgabe. (Folgt leicht aus Def. von "$<$", Kürzungsregel und Distributivität.) ∎

Für $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ steht $\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + ... + a_n$ für eine endliche *Summe*, $\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdot ... \cdot a_n$ für ein endliches Produkt. Für $m, n \in \mathbb{N}$ ist

$$m^n := \begin{cases} \prod_{k=1}^n m & \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \\ 0 & \text{für } n = 0, \forall m \neq 0 \end{cases}$$

n-te *Potenz*, und

$$n! := \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n} k \ \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}, \\ 0 \text{ für } n = 0 \end{cases}$$

n-*Fakultät*. Es gilt $m^{k+l} = m^k \cdot m^l$ und $m^{k \cdot l} = (m^k)^l = (m^l)^k$. Für $(0 \leq k < n) \in \mathbb{N}$ heißt $\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ *Binominialkoeffizient*, sprich "n über k". Es gilt $\forall (0 \leq k \leq n) \in \mathbb{N} : \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Beweis. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} = \frac{(k+1) \cdot n!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-k) \cdot n!}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$. ∎

Satz 6 (Binomischer Satz). *Es gilt* $\forall a, b, n \in \mathbb{N}$*:*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

Hinweis: Satz bleibt richtig falls $a, b \in K$ und auf Menge K ist Addition und Multiplikation mit Eigenschaften gemäß *Satz 3* definiert (z.B. $K = \mathbb{Q}, k = \mathbb{R}$).

Beweis. Vollständige Induktion nach n liefert:

(IA) $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} a^k b^{1-k} = a+b$.

(IS) $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$
$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} +$
$b^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$

$\Longrightarrow$ Behauptung. ∎

4 Ganze Zahlen und Rationale Zahlen

4.1 Ganze Zahlen

Frage: Existiert $x \in \mathbb{N} : n + x = m$ für $n, m \in \mathbb{N}$? Nur falls $m \geq n : x = m - n$ (vgl. Satz 3.5). Ziel: Zahlenbereichserweiterung, so dass die Gleichung stets lösbar wird. Betrachte geordnete Paare $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, schreibe auch $m - n := (m, n)$. Konstruiere nun die Menge

$$Z := \Big\{\big((m,n),(k,l)\big) \in \big((\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\big) \mid m+l = n+k\Big\}.$$

Satz 1. *Z ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Schreibe $(m, n) \sim (k, l)$ falls $\big((m, n), (k, l)\big) \in Z$.*

Beweis. Z reflexiv: $(m, n) \sim (m, n)$ d.h. $m + n = m + n$ ist wahr, da Addition auf $\mathbb{N}$ kommutativ ist. Z symmetrisch: $(m, n) \sim (k, l) \implies (k, l) \sim (m, n)$ d.h. $m + l = n + k \implies k + n = l + m$ ist wahr. Z transitiv: $(m, n) \sim (k, l), (k, l) \sim (i, j) \implies m + l = n + k, k + j = l + i \implies m + l + j = n + k + j = n + l + i \implies m + j = n + i \implies (m, n) \sim (i, j)$. $\implies$ Behauptung. ∎

Setze $\tilde{\mathbb{Z}} := \Big\{\big[(m, n)\big] \mid (m, n) \in Z; m, n \in \mathbb{N}\Big\}$ ist die Menge der ganzen Zahlen. Definiere auf $\tilde{\mathbb{Z}}$ folgende Operationen:

- (Addition) $x + y : \tilde{\mathbb{Z}} \times \tilde{\mathbb{Z}} \to \tilde{\mathbb{Z}}$ mit $(m, n) + (k, l) := (m + k, n + l)$ und
- (Multiplikation) $x \cdot y : \tilde{\mathbb{Z}} \times \tilde{\mathbb{Z}} \to \tilde{\mathbb{Z}}$ mit $(m, n) \cdot (k, l) := (m \cdot k + n \cdot l, m \cdot l + n \cdot k)$.

Satz 2. *Addition und Multiplikation sind unabhängig von Repräsentanten bezüglich Z.*

Beweis. *Addition:* Sei $(m, n) \sim (m', n'),\ (k, l) \sim (k', l') \implies m + n' = n + m', k + l' = l + k' \implies m + k + n' + l' = n + l + m' + k' \implies (m + k, n + l) \sim (m' + k', n' + l') \implies (m, n) + (k, l) \sim (m', n') + (k', l')$. *Multiplikation:* Übungsaufgabe. ∎

Folglich sind Addition und Multiplikation auf $\tilde{\mathbb{Z}}$ eindeutig definiert durch: $\big[(m, n)\big] + \big[(k, l)\big] := \big[(m, n) + (k, l)\big]$, $\big[(m, n)\big] \cdot \big[(k, l)\big] := \big[(m, n) \cdot (k, l)\big]$. *Frage:* Existiert Lösung $\big[(i, j)\big] \in \tilde{\mathbb{Z}}$ der Gleichung $\big[(m, n)\big] + \big[(i, j)\big] = \big[(k, l)\big]$ für beliebige $\big[(m, n)\big], \big[(k, l)\big] \in \tilde{\mathbb{Z}}$?

Satz 3. *Obige Gleichung $\big[(m, n)\big] + \big[(i, j)\big] = \big[(k, l)\big]$ besitzt eindeutige Lösung $\big[(i, j)\big] \in \tilde{\mathbb{Z}}$ für jedes $\big[(m, n)\big], \big[(k, l)\big] \in \tilde{\mathbb{Z}}$ mit $\big[(k, l)\big] - \big[(m, n)\big] := \big[(i, j)\big] = \big[(k + n), (l + m)\big]$.*

Beweis. Argumentiere zunächst für Paare $(m, n), (k, l), (i, j)$: $(m, n) + (i, j) \sim (k, l) \iff (m + i, n + j) \sim (k, l) \iff m + i + l = n + j + k \iff (i, j) \sim (k + n, l + m)$. Dies liefert die Behauptung für Äquivalenzklassen. ∎

Satz 4. *Addition und Multiplikation auf $\tilde{\mathbb{Z}}$ haben folgende Eigenschaften:*

(a) *Es existiert ein neutrales Element $\big[(0, 0)\big]$ für Addition und $\big[(1, 0)\big]$ für Multiplikation.*

(b) *Addition und Multiplikation sind jeweils kommutativ.*
(c) *Addition und Multiplikation sind jeweils assoziativ.*
(d) *Jedes* $\big[(m,n)\big] \in \tilde{\mathbb{Z}}$ *besitzt* inverses Element *bezüglich Addition, d.h.* $\exists\big[(m,n)\big] \in \tilde{\mathbb{Z}} : \big[(m,n)\big] + \big[(\tilde{m},\tilde{n})\big] = \big[(0,0)\big]$*. Offenbar* $\big[(\tilde{m},\tilde{n})\big] = \big[(0,0)\big] - \big[(m,n)\big]$.
(e) *Addition und Multiplikation sind jeweils distributiv.*
(f) $\big[(m,n)\big] \cdot \big[(k,l)\big] = 0 \iff \big[(m,n)\big] = 0 \vee \big[(k,l)\big] = 0.$

Beweis. Selbststudium bzw. Übungsaufgabe. *Hinweis:* Es reicht Eigenschaften für (m,n) statt für $\big[(m,n)\big]$ zu zeigen. ∎

4.2 Ordnung auf $\tilde{\mathbb{Z}}$

$R := \big\{\big((m,n),(k,l)\big) \in \big((\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})\big) \mid m+l < n+k\big\}$ ist eine Relation auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Satz 5. *Relation R ist Ordnung auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und liefert eine Totalordnung auf $\tilde{\mathbb{Z}}$ durch:* $\big[(m,n)\big] < \big[(k,l)\big]$ *g.d.w.* $(m,n),(k,l) \in R$*. Schreibe* $(m,n) < (k,l)$.

Beweis. Offenbar $((m,n),(m,n)) \notin R$ d.h. *R ist antireflexiv. Transitivität* folgt analog zu *Satz 1.* Analog zu *Satz 2* folgt, dass R unabhängig von Repräsentanten bezüglich $\tilde{\mathbb{Z}}$ ist. Seien $(m,n) \not\sim (k,l) \implies (m+l) \neq (n+k) \implies$ entweder $(m+l) < (n+k)$ oder $(n+k) < (m+l) \implies \tilde{\mathbb{Z}}$ ist total geordnet. ∎

Satz 6. *Ordnung R ist verträglich mit Addition und Multiplikation, d.h.* $\forall p,q,r \in \tilde{\mathbb{Z}}$ *gilt:* $p < q \iff p+r < q+r$ *und falls* $r > 0 = \big[(0,0)\big] : p < q \iff p\cdot r < q \cdot r$.

Beweis. Sei $P = \big[(m,n)\big], q = \big[(k,l)\big], r = \big[(i,j)\big]$. *Multiplikation:* $r > 0 \iff i > j \iff \exists h > i = j + hp < q \iff (m,n) < (k,l) \iff m+l < n+k$ Nach Satz 3.5: $(m+l)\cdot h < (n+k)\cdot h \overset{i=j+h}{\iff} (m+l)\cdot i + (n+k)\cdot j < (m+l)\cdot j + (n+k)\cdot i \iff (mi+nj, nj+ni) < (ki+lj, kj+li) \iff (m,n)\cdot(i,j) < (k,l)\cdot(i,j) \iff p\cdot r < q\cdot r$ *Addition:* Analog. ∎

Frage: Was hat $\tilde{\mathbb{Z}}$ mit "bekannter" Menge $\mathbb{Z}$ zu tun?

Satz 7. *Sei* $\big[(m,n)\big] \in \tilde{\mathbb{Z}}$*, dann existiert ein eindeutiges* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $(k,0) \in \big[(m,n)\big]$ *falls* $m \geq n$ *und* $(0,k) \in \big[(m,n)\big]$ *falls* $n < m$.

Beweis. $m \geq n \overset{\text{Satz 3.5}}{\implies} \exists! k \in \mathbb{N} : m = n + k \implies (k,0) \sim (m,n) m < n$ läuft analog. ∎

Setze $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \big\{(-k) \mid k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\big\}$. Betrachte $\mathbb{Z}$ mit "üblicher" Addition, Multiplikation und Ordnung "$<$".

Satz 8. *$\mathbb{Z}$ und $\tilde{\mathbb{Z}}$ sind isomorph bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung.*

Beweis. Selbststudium. *Hinweis:* Betrachte $I : \mathbb{Z} \to \tilde{\mathbb{Z}}$ mit $I(k) := \big[(k,0)\big], I(-k) := \big[(0,k)\big]$ $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$... ∎

4.3 Rationale Zahlen

Frage: Existiert eine Lösung x der Gleichung $n \cdot x = m$ mit $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$? Nicht innerhalb von $\mathbb{Z}$. Das führt zu einer Zahlenbereichserweiterung analog zu $\mathbb{N} \dashrightarrow \mathbb{Z}$. Betrachte geordnete Paare $(m, n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$. Schreibe auch $m \div n := \frac{m}{n} := (m, n)$. Sei

$$Q := \{\big((m,n),(k,l)\big) \in \big((\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\}))\big) \mid m \cdot l = n \cdot k\}$$

eine Äquivalenzrelation, schreibe $(m, n) \sim (k, l)$ und

$$\mathbb{Q} := \Big\{\big[(m,n)\big] \mid (m,n) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\backslash\{0\})\Big\}$$

Menge der *rationalen Zahlen*. In der Regel schreibt man $\frac{m}{n}$ statt $\big[(m,n)\big]$, d.h. es gibt unendlich viele Bezeichnungen für die gleiche Zahl! (Im Gegensatz zu $\mathbb{Z}$.) Wir definiere auf $\mathbb{Q}$ folgende Operationen:

- (Kürzungsregel) $\big[(m,n)\big] = \big[(km,kn)\big]\ \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,
- (Addition) $x + y : \tilde{\mathbb{Q}} \times \tilde{\mathbb{Q}} \to \tilde{\mathbb{Q}}$ mit $(m,n) + (k,l) := (m \cdot l + k \cdot n, nl)$ und *neutrales Element* $0 := (0, l)\ \forall l \in \mathbb{Z}, l \neq 0$,
- (Multiplikation) $x \cdot y : \tilde{\mathbb{Q}} \times \tilde{\mathbb{Q}} \to \tilde{\mathbb{Q}}$ mit $(m,n) \cdot (k,l) := (m \cdot k, n \cdot l)$ und *neutrales Element* $1 := (l, l)\ \forall l \in \mathbb{Z}, l \neq 0$.

Diese sind unabhängig von Repräsentanten bezüglich $\mathbb{Q}$ (d.h. wohldefiniert).

Gleichung $\big[(m,n)\big] \cdot \big[(i,j)\big] = \big[(k,l)\big]$ mit $\big[(m,n)\big], \big[(k,l)\big] \in \mathbb{Q}, m \neq 0$ besitzt eine eindeutige Lösung $\big[(i,j)\big] = \big[(kn, lm)\big] \in \mathbb{Q}$.

4.4 Struktur von $\mathbb{Q}$

Menge K heißt *Körper* falls auf K Addition und Multiplikation mit folgenden Eigenschaften definiert sind:

(a) Es existieren neutrale Elemente $0, 1 \in K$ mit
  (i) $0 \neq 1\ \forall a \in K$,
  (ii) $a + 0 = a\ \forall a \in K$,
  (iii) $a \cdot 1 = a\ \forall a \in K$.
(b) Addition und Multiplikation sind jeweils kommutativ und assoziativ.
(c) Addition und Multiplikation sind jeweils distributiv.
(d) Es existieren inverse Elemente:
  (i) $\forall a \in K : \exists (-a) \in K : a + (-a) = 0$,
  (ii) $\forall a \in K\backslash\{0\} : \exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = 1$.

Satz 9. *$\mathbb{Q}$ ist ein Körper.*

Beweis. Selbststudium. ∎

Körper K heißt *angeordnet* , falls eine Totalordnung R auf K existiert, die verträglich mit Addition und Multiplikation ist, d.h. $\forall a, b, c \in R : A < b \iff a+c < b+c$, für $c > 0 : a < b \iff a \cdot c < b \cdot c$.
Bemerkung: Eigentlich ist $\Longrightarrow$: ausreichend für ein Körper K. Relation

$$R := \{\big((m,n),(k,l)\big) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \mid m \cdot l < n \cdot k\}$$

liefert Totalordnung auf $\mathbb{Q}$, schreibe $\frac{m}{n} < \frac{k}{l}$, die verträglich mit der Addition und Multiplikation ist.

Satz 10. $\mathbb{Q}$ *ist angeordneter Körper*

Beweis. Selbststudium. ■

Frage: Enthält $\mathbb{Q}$ die $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$? Sei $\hat{\mathbb{Z}} := \left\{\frac{m}{1} \in \mathbb{Q} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$. Abbildung $I : \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}}$ mit $I(m) = \frac{m}{1}$ ist Isomorphismus bezüglich Addition, Multiplikation und Ordnung. Das heißt wir können $\mathbb{Z}$ mit $\hat{\mathbb{Z}}$ identifizieren und schreiben $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. (Verstehe nicht Mengeninklusion in der Sinne der Mengenlehre.)

Folgerung 11. *Körper* $\mathbb{Q}$ *ist* archimedisch angeordneter Körper *, d.h.* $\forall q \in \mathbb{Q}$ *existiert* $n \in \mathbb{N}$: $q < n$.

Beweis. Sei $q = \frac{k}{l}$. Falls $\frac{k}{l} < 0$, dann $n = 0$, falls $\frac{k}{l} \geq 0$, dann $n = k + 1 \implies \frac{k}{l} < \frac{k+1}{1}$. ■

5 Reelle Zahlen

Frage: Ist eine *algebraische Gleichung* der Form $a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k = 0, \quad a_j \in \mathbb{Q}$ lösbar in $\mathbb{Q}$? Nur für $k = 1$ (d.h. nur eine *lineare Gleichung*).

Beispiel 1. Gleichung $x^2 - 2 = 0$ besitzt keine Lösung in $\mathbb{Q}$.

Beweis. Angenommen es existiere $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist höchstens eine der Zahlen gerade. Setze $\frac{m^2}{n^2} = 2 \implies m^2 = 2n^2 \implies m$ ist gerade, d.h. $m = 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ $\implies 4k^2 = 2n^2 \implies 2k^2 = n^2 \implies n$ ist gerade $\implies$ ↯ $\implies$ es gibt keine solche Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. ■

Offenbar gilt:

$$\begin{array}{ccccc} 1.4^2 & < & 2 & < & 1.5^2 \\ 1.41^2 & < & 2 & < & 1.42^2 \\ 1.414^2 & < & 2 & < & 1.415^2 \\ & & \vdots & & \end{array}$$

Falls es "$\sqrt{2}$" gibt, kann diese innerhalb von $\mathbb{Q}$ nur beliebig genau approximiert werden $\implies \mathbb{Q}$ hat anscheinend "Lücken". Ein weiteres Beispiel: Fläche des Einheitskreises kann durch rationalen Zahlen beliebig genau approximiert werden, falls Flächenzahl π existiert, so ist diese nicht Lösung einer algebraischer Gleichung. (Lindmann 1882) *Ziel:* Konstruiere einen archimedisch angeordneten Körper, der die "Lücken" füllt.

5.1 Struktur von archimedisch angeordneten Körpern

K sei ein (beliebiger) Körper. Es gebe neutrale Elemente $0, 1$.

Satz 2. *Sei K in Körper, dann gilt $\forall a, b \in K$:*

(a) $0, 1$ *sind eindeutig bestimmt.*
(b) *Inverse Elemente $-a$ und a^{-1}, $a \neq 0$ sind bestimmt, insbesondere gilt $-0 = 0, 1^{-1} = 1$.*
(c) $-(-a) = a,\ (a^{-1})^{-1} = a,\ a \neq 0.$
(d) $-(a+b) = -a + (-b),\ (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1},\ a, b \neq 0.$
(e) $-a = (-1) \cdot a,\ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$
(f) $a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0.$
(g) i. *$a + x = b$ hat eindeutige Lösung $x = b - a := b + (-a)$, $b - a$ ist* Differenz *von a, b,*
    ii. *$a \cdot x = b (a \neq 0)$ hat eindeutige Lösung $x = \frac{b}{a} := a^{-1} \cdot b$, $\frac{b}{a}$ ist* Quotient *von a, b.*

Beweis. Zu (a): Sei $0' \in K$ weiteres neutrales Element mit $a + 0' = a \ \forall a \in K \implies 0 + 0' = 0$ und $0' + 0 = 0' \implies 0' = 0$. Multiplikation als Übung. Zu (b): Angenommen Inverse Elemente sind nicht eindeutig bestimmt. Sei $-\tilde{a}$ weiteres Inverse zu $a \implies a + (-\tilde{a}) = 0$. Dann ist $-a = (-a) + (a + (-\tilde{a})) = (-a + a) + (-\tilde{a}) = -\tilde{a} \implies$ Inverse ist Eindeutig Bestimmt. $0 + 0 = 0 \implies$ 0 ist Inverse zu $0 \overset{\text{Eind.}}{\implies} 0 = (-0)$. Beweis für $1^{-1} = 1$ analog. Zu (c): $(-a) + a = a + (-a) = 0 \implies$ $(-(-a)) = a$. Für $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ analog. Zu (d): $a + b + ((-a) + (-b)) = a + (-a) + b + (-b) = 0 + 0 = 0$ $\implies -(a+b) = -a + (-b)$. Zu (e): $a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + a \cdot 0 + a \cdot 0 = -(a \cdot 0) + a \cdot (0 + 0) =$ $(-a \cdot 0) + a \cdot 0 = 0$. $a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = 0 \implies (-1) \cdot a$ ist ein Inverse zu a. $(-a) \cdot (-b) = (-a) \cdot (-1) \cdot b = (-1) \cdot (-a) \cdot b = -(-a) \cdot b = a \cdot b$. Zu (f): "$\Longleftarrow$": Rückrichtung folgt aus (e) "$\Longrightarrow$": $a \cdot b = 0$. Falls $a = 0$, dann ist die Behauptung wahr (siehe (a)), falls $a \neq 0$, dann $0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1} \cdot a \cdot b = b$ liefert die Behauptung. Zu (g): Betrachte $a + x = b$. Setze $x = b + (-a)$ $\Longrightarrow$ $a + b + (-a) = a + (-a) + b = 0 + b = b \Longrightarrow x$ ist eine Lösung. Ist die Lösung eindeutig? Angenommen $a + x = b$ und $a + x' = b$, dann $a + x = a + x' \Longrightarrow x = (-a) + a + x = -a + a + x' = x' \Longrightarrow x = x' \Longrightarrow$ Die Lösung ist eindeutig. ■

Setze $a^n := \prod_{k=1}^{n} a \; \forall a \in K, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a^0 = 1$ für $a \neq 0$ und $a^{-n} = (a^{-1})^n \; \forall a \in K\setminus\{0\}, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Es gelten folgende Rechenregeln (analog zu Kapitel 3., benutzt Körpereigenschaften): $\forall a, b \in K\setminus\{0\}, \; m, n \in \mathbb{Z}$:

(i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \; (a^n)^m = a^{n \cdot m}$,
(ii) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \; a^{-n} = (a^n)^{-1}$.

Setze $na := \sum_{k=1}^{n} a \; \forall a \in K, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $0_{\mathbb{N}} a := 0_K$ und $-na := n(-a) = \sum_{k=1}^{n}(-a) \; \forall a \in K, \; n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Es gelten folgende Rechenregeln (analog zu Potenzen): $\forall a, b \in K\setminus\{0\}, \; m, n \in \mathbb{Z}$:

(i) $(n \cdot a) + (m \cdot a) = (n + m) \cdot a$,
(ii) $(n \cdot a) \cdot (m \cdot a) = n \cdot m \cdot a^2$,
(iii) $(n \cdot a) + (n \cdot b) = n \cdot (a + b)$,
(iv) $(-n) \cdot a = -(n \cdot a)$.

Satz 3. *Sei K angeordneter Körper, dann gilt $\forall a, b, c, d \in K$:*

(a) $a < b \iff 0 < b - a$,
(b) $a < b \wedge c < d \Longrightarrow a + c < b + d$ *und* $0 \leq a < b \wedge 0 \leq c < d \Longrightarrow a \cdot c < b \cdot d$,
(c) $a < b \iff -b < -a$ *(insbesondere* $a > 0 \iff -a < 0$*),* $a < b \wedge c < 0 \Longrightarrow ac > bc$,
(d) $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$ *(insbesondere* $1 > 0$*),*
(e) $a > 0 \iff a^{-1} > 0$,
(f) $0 < a < b \Longrightarrow b^{-1} < a^{-1}$.

Beweis. Zu (a): $a < b \overset{\text{Ord. vertr.}}{\underset{\text{mit Addition}}{\Longrightarrow}} a + (-a) < b + (-a)$. Zu (b): $a < b \wedge c < d \Longrightarrow a + c < b + c \wedge b + c < b + d \Longrightarrow a + c < b + d$. Zu (c): $a < b \iff a - a - b < b - a - b \Longrightarrow 0 - b < 0 - a$. $a < b, -c > 0 \Longrightarrow a(-c) < b(-c) \Longrightarrow (-1)ac < (-1)bc \Longrightarrow$ in (a) einsetzen $\Longrightarrow ac > bc$ Zu (d): Sei $a > 0 \Longrightarrow aa > 0 \cdot 0 \Longrightarrow a^2 > 0$. Sei $a < 0 \Longrightarrow -a > 0 \Longrightarrow 0 < (-a) \Longrightarrow -a > 0 \Longrightarrow (-a)(-a) > 0 \Longrightarrow a^2 > 0$. Zu (e): "$\Longrightarrow$": $(a^{-1})^2 > 0$ nach (d) $\overset{\text{Verträgl. mit}}{\underset{\text{Mult.}}{\Longrightarrow}} a(a^{-1})^2 = a^{-1} > 0$. "$\Longleftarrow$": Analog zu "$\Longrightarrow$" mit a^{-1} statt a. Zu (f): $ab > 0$, nach (b) $\Longrightarrow 0 < (ab)^{-1} = a^{-1}b{-}1$. Wegen $a < b \Longrightarrow b^{-1} = a^{-1}b^{-1}a < a^{-1}b^{-1}b = a^{-1}$. ■

Absolutbetrag auf angeordneten Körpern ist Abbildung $|\cdot| := K \longrightarrow K$ mit

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0, \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Satz 4. *Sei K angeordneter Körper, dann gilt $\forall a, b \in K$:*

(a) $|a| > 0$ *und* $|a| \geq a$, $|a| = 0 \iff a = 0$,
(b) $|a| = |-a|$,
(c) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,

(d) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0,$
(e) (Dreieckungleichung) $|a+b| \leq |a| + |b|,\ |a-b| \leq |a| + |b|,$
(f) $|a+b| \geq \big||a| - |b|\big|,$
(g) (Bernoulli Ungleichung) $(1+a)^n \geq 1 + na$. *Gleichheit g.d.w.* $n = 0, 1$ *oder* $a = 0$.

Beweis. Zu (a): Klar. Zu (b): Fallunterscheidung. Zu (c): Fallunterscheidung. Zu (d): $a = \frac{a}{b} \cdot b \implies |a| = |\frac{a}{b}| \cdot |b|$ mit $|a| \cdot |b^{-1}| = |\frac{a}{b}| \cdot |b| \cdot |b^{-1}| \implies$ Behauptung. Zu (e): $a \leq |a|, b \leq |b| \implies a + b \leq |a| + |b|$ analog mit $-a-b < |a| + |b|$ liefert die Behauptung. Zu (f): $|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a+b|$, analog $|b| - |a| \leq |a+b|$. Zu (g): Zeige $(1+a)^n > 1 + na\ \forall n \geq 2,\ n \neq 0$ durch vollständige Induktion. (Übung.)

■

Betrachte Abbildung $f : \mathbb{Q} \longrightarrow K$ mit $f(\frac{m}{n}) = \frac{m1_K}{n1_K} = (m1_K) \cdot (m1_K)^{-1}\ \forall m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Satz 5. *Sei K ein angeordneter Körper, dann ist obige $f : \mathbb{Q} \longrightarrow K$ injektiv, weiterhin erhält es die Körperstruktur und Ordnung, d.h. $\forall p, q \in \mathbb{Q}$:*

(a) $f(p+q) = f(p) + f(q),\ f(0) = 0_K,\ f(-p) = -f(p).$
(b) $f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q),\ f(1) = 1_K,\ p \neq 0 \implies f(p^{-1}) = f(p)^{-1}.$
(c) $p < q \iff f(p) < f(q).$

Beachte: $f(\frac{m}{1}) = m1_K\ \forall m \in \mathbb{Z}$ (sprich "m-faches von 1 des Körpers K").

Beweis. K ist ein angeordneter Körper

$$\overset{\text{vollst.}}{\underset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow}} n1_K \neq 0_k\ \forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \overset{-1_K \neq 0_K}{\Longrightarrow} n1_K \neq 0_K\ \forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \tag{1}$$

$\implies f$ ist definiert auf $\mathbb{Q}$. Angenommen $f(\frac{m}{n}) = f(\frac{k}{l}) \implies \frac{m1_K}{n1_K} = \frac{k1_K}{l1_K} \implies (m1_K)(l1_k) = (k1_K)(n1_k) \implies (ml)1_K = (kn)1_K \implies (ml - kn)1_K = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} ml = kn$ (in $\mathbb{Z}$) $\implies \frac{m}{n} \sim \frac{k}{l}$ (das heißt $\frac{m}{n} = \frac{k}{l}$ in $\mathbb{Q}$) $\implies f$ ist injektiv. Rest Übungsaufgabe. ■

Folgerung 6. *$\mathbb{Q}_K := f(\mathbb{Q})$ ist mit Addition, Multiplikation und Ordnung von K selbst ein angeordneter Körper und $\mathbb{Q}_K$ ist isomorph zu $\mathbb{Q}$ bezüglich Körperstruktur und Ordnung.*

Beweis. Folgerung folgt aus Körperstruktur von K und *Satz 5.5.* (Übung.) ■

Somit kann die Teilmenge $\mathbb{Q}_K \in K$ mit $\mathbb{Q}$ identifiziert werden. Wir schreiben meist $\mathbb{Q}$ statt $\mathbb{Q}_K$ und betrachte $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von K. Analog $\mathbb{N}, \mathbb{Z} \subset K$ (gelegentlich $\mathbb{N}_K, \mathbb{Z}_K$).

Satz 7. *Sei K archimedisch angeordneter Körper, das heißt $\forall k \in K : \exists n \in \mathbb{N}(\subset K) : k < n$, dann gilt:*

(a) $\forall a, b \in K$ *mit* $a, b > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ (\subset K) : na > b$
(b) $\forall a \in K : \exists!\, [a] \in \mathbb{Z}\ (\subset K) : [a] \leq a < [a] + 1$. $[a]$ *heißt* ganzer Anteil *von a.*
(c) $\forall \epsilon \in K$ *mit* $\epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} \backslash \{0\} : \frac{1}{n} < \epsilon$ *(beachte $0 < \frac{1}{n}$).*
(d) $\forall a, b \in K$ *mit* $a > 1\ \exists n \in \mathbb{N} : a^n > b$.
(e) $\forall a, \epsilon \in K$ *mit* $0 < a < 1, \epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : a^n < \epsilon$.

(f) $\forall a \in K, \epsilon > 0\ \exists p, q \in \mathbb{Q}\ (\subset K);\ p \leq a \leq q$ *mit* $q - p < \epsilon$. *D.h.* $a \in K$ *kann durch rationale Zahlen beliebig genau approximiert werden.* $\mathbb{Q}$ *liegt* "dicht" *in* K.
(g) $\forall a, b \in K$ *mit* $a < b\ \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b$.

Beweis. Zu (a): $a, b > 0 \implies \frac{b}{a} \in K \implies \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{b}{a}$. Zu (b): Sei zunächst $a > 0$, setze $N := \{n \in \mathbb{N} \mid a < n\} \neq \emptyset$. N besitzt ein kleinstes Element $\tilde{n} \in N$, das heißt $\tilde{n} \leq n\ \forall n \in N$. (Übungsaufgabe.) Setze $[a] := \tilde{n} - 1 \implies a < \tilde{n} = [a] + 1$. Angenommen $a < [a] \implies \tilde{n} - 1 \in N \implies \tilde{n} \nleq a \implies \lightning \implies [a] \leq a$. Eindeutigkeit: Sei $m \leq a < m + 1, n \leq a < n + 1$ für $m, n \in \mathbb{Z} : n \geq m \implies -m-1 < -a \leq -n \implies n - m - 1 < 0 \implies m \leq m < m+1 \implies n = m$. Zu (c): Wähle $n > \frac{1}{\epsilon} \implies \epsilon > \frac{1}{n}$. Zu (d): Nach (a) $\exists n \in \mathbb{N} : b < n(a-1) \overset{Bernoulli}{\underset{Ungl.}{\implies}} b < 1 + n(a-1) \leq (1 + (a-1))^n = a^n$. Zu (e): Wir setzen $\tilde{a} := \frac{1}{a} > 1, \tilde{b} := \frac{1}{\epsilon}$, dann (d) mit $\tilde{a}, \tilde{b}$ liefert (e). Zu (f): Fixiere $a \in K, \epsilon > 0$, wähle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $\frac{1}{n} < \epsilon$, setze $p := \frac{[na]}{n}$, $q := \frac{([na]+1)}{n} \in \mathbb{Q}$ $\implies np \leq nq < nq \implies p \leq a^n < q$. $q - p = \frac{1}{n}([na] - [na] + 1) = \frac{1}{n} < \epsilon$. Zu (g): Sei $\epsilon := (b-a) > 0$, wähle $p, q \in \mathbb{Q}$ zu a gemäß (f) $\implies p \leq a < q$ und $q = q - p + p < \epsilon + a = b - a + a = b$ ■

Hinweis: Nicht jeder angeordneter Körper ist archimedisch angeordnet! Frage: Wie kann man Lücken in $\mathbb{Q}$ beschreiben? Definiere Intervalle für angeordneten Körper K. Sei a, b, dann;

- $[a, b] := \{x \in K \mid a \leq x \leq b\}$ ist abgeschlossenes, beschränktes Intervall,
- $(a, b) := \{x \in K \mid a < x < b\}$ ist offenes, beschränktes Intervall,
- $[a, b) := \{x \in K \mid a \leq x < b\}$ ist rechts-offenes, beschränktes Intervall,
- $(a, b] := \{x \in K \mid a < x \leq b\}$ ist links-offenes, beschränktes Intervall,
- $[a, \infty) := \{x \in K \mid x \geq a\}$ ist links-abgeschlossenes, unbeschränktes Intervall,
- $(-\infty, b] := \{x \in K \mid x \leq b\}$ ist rechts-abgeschlossenes, unbeschränktes Intervall,
- $(a, \infty) := \{x \in K \mid x > a\}$ ist links-offenes, unbeschränktes Intervall,
- $(-\infty, b) := \{x \in K \mid x < a\}$ ist rechts-offenes, unbeschränktes Intervall.

Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow M$, M Menge, heißt *Folge* in M. Notation: $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...$ Aufzählung der Folgenglieder: $\alpha_n := \alpha(n)$. Weitere Varianten: $\{\alpha_n\}_{n=2}^{\infty}, \{\alpha_n\}$. Beachte: In der Literatur finden wir oft auch alternativen Schreibweisen wie $(\alpha_n)_{b\in\mathbb{N}}$.

Folge $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen, beschränkten Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subset K$ heißt *Intervallschachtelung* in (angeordnetem Körper) K, falls gilt:

(i) $I_n \neq \emptyset$ und $I_{n+1} \subset I_n\ \forall n \in \mathbb{N}$,
(ii) $\forall \epsilon \in K$ mit $\epsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : l(I_n) := b_n - a_n < \epsilon$.

Hier steht l für *Länge des Intervalls.* Notationsvereinbarung: Setze $I_n = [a_n, b_n]$, $I'_n = [a'_n, b'_n]$, $J_n = [a_n, b_n]$, $J'_n = [a'_n, b'_n]$, $I\!\!\!- = \{_n\}$, $I\!\!\!-' = \{I'_n\}$, $J\!\!\!- = \{J_n\}$, $J\!\!\!-' = \{J'_n\}$

Lemma 8. *Sei* $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Intervalschachtelung im angeordneten Körper* $K \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *enthält höchstens ein Element.*

Beweis. Angenommen $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ mit $a < b$. Setze $\epsilon = b - a > 0 \implies \exists \tilde{n} : l(I_{\tilde{n}}) = b_{\tilde{n}} - a_{\tilde{n}} < \epsilon$, wegen $a \in I_{\tilde{n}} = [a_{\tilde{n}}, b_{\tilde{n}}]$, folgt: $b_{\tilde{n}} < a_{\tilde{n}} + \epsilon \leq a + \epsilon = a + b - a = b \implies b \notin I_{\tilde{n}} \implies \lightning \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ enthält höchstens ein Element. ■

Archimedisch angeordneter Körper K heißt *vollständig*, falls für jede Intervallschachtelung $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in K gilt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. *Rückblick:* $\mathbb{Q}$ ist *nicht vollständig* (vgl. *Beispiel 1*;$\sqrt{2}$), aber *liegt dicht in jedem* archimedisch angeordneten Körper. *Ziel:* Die Lücken zu füllen, das heißt einen vollständig angeordneten Körper zu konstruieren. *Frage:* gibt es solchen Körper? Wenn ja, ist er eindeutig? Setze $I_{\mathbb{Q}}$:= Menge aller Intervallschachtelungen $\{I_n\}$ in $\mathbb{Q}$ $(I_n \subset \mathbb{Q})$,

$$Q := \left\{(\{I_n\}, \{I'_n\}) \in (I_{\mathbb{Q}} \times I_{\mathbb{Q}}) \mid I_n \cap I'_n \neq \emptyset \; \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

ist eine Relation über $I_{\mathbb{Q}}$.

Satz 9. *Q ist Äquivalenzrelation über $I_{\mathbb{Q}}$.*

Beweis. Q ist offenbar reflexiv, symmetrisch. Q transitiv: sei $\{I_n\} \sim \{I'_n\} \sim \{I''_n\} \implies \{I_n\} \sim \{I''_n\}$, das heißt

$$I_n \cap I'_n \neq \emptyset, I'_n \cap I''n \neq \emptyset \; \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Angenommen $\exists \tilde{n} : I_{\tilde{n}} \cap I''_{\tilde{n}} = \emptyset \overset{o.B.d.A.}{\implies} b_{\tilde{n}} < a''_{\tilde{n}} \implies \exists \tilde{m} > \tilde{n} : l(I'_{\tilde{m}}) < \epsilon := a''_{\tilde{n}} - b_{\tilde{n}} \underset{\text{Lemma 7}}{\overset{\text{vgl. Beh.}}{\implies}} \lightning$ zu (3) $\implies I_n \cap I''_n \neq \emptyset \; \forall n \in \mathbb{N}$, das heißt $\{I_n\} \sim \{I''_n\}$. ∎

$\mathbb{R} := \{[\not{I}] \mid \not{I} \in I_{\mathbb{Q}}\}$ ist *Menge der reellen Zahlen.*

Beachte: Für reelle Zahl $[\not{I}] = [\{I_n\}] = [\{a_n, b_n\}_{n\in\mathbb{N}}]$ mit $\not{I} \in I_{\mathbb{Q}}$ gilt stets:

(i) $I_n \subset \mathbb{Q} \; \forall n \in \mathbb{N}$,
(ii) Entweder $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$ oder $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = c$ für ein $c \in \mathbb{Q}$.

5.2 Operationen mit Intervallen

Seien $I = [a, b]$, $I' = [a', b']$ Intervalle in $\mathbb{Q}$.

- (Addition) $I + I' := \{\gamma + \gamma' \mid \gamma \in I, \gamma' \in I'\} = [a + a', b + b']$,
- (Multiplikation) $I \cdot I' := \{\gamma \cdot \gamma' \mid \gamma \in I, \gamma' \in I'\} = [\tilde{a}, \tilde{b}]$ mit $\tilde{a}, \tilde{b} \in P := \{aa', ab', ba', bb'\}$ und $\tilde{a} \leq p \leq \tilde{b} \; \forall p \in P$,
- (inverse Elemente) $-I := [-b, -a]$, $I^{-1} := \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ falls $0 \notin [a, b]$.

5.3 Operationen mit Intervallschachtelungen

Setze $\not{I} = \{I_n\}$, $\not{J} = \{J_n\}$ in $I_{\mathbb{Q}}$.

- (Addition) $\not{I} + \not{I}' := \{I_n + I'_n\}$,
- (Multiplikation) $\not{I} \cdot \not{I}' := \{I_n \cdot I'_n\}$,
- (inverse Elemente) $-\not{I} := \{-I_n\}$, $\not{I}^{-1} := \left\{I_n^{-1}\right\}$.

Beachte: Falls $0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, dann existiert $\tilde{n} : \; 0 \notin I_n \; \forall n \geq \tilde{n}$ und man setzt $I_k^{-1} := I_{\tilde{n}}^{-1} \; \forall k < \tilde{n}$ mit Definition von $\not{I}^{-1}$.

Satz 10. *Addition $\not{I} + \not{I}'$ und Multiplikation $\not{I} \cdot \not{I}'$, sowie Inversen, führen nicht aus $I_{\mathbb{Q}}$ heraus. Weiterhin sind diese Operationen unabhängig von Repräsentanten bezüglich Äquivalenzrelation Q.*

Beweis. (für Addition, Multiplikation analog) Zu (1): Zeige $\not{I} + \not{I}' \in I_{\mathbb{Q}}$. Offenbar $I_n + I'_n \neq \emptyset$, $I_{n+1} + I'_{n+1} \subset I_n + I'_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Fixiere $\epsilon > 0 : \exists \tilde{n}$ mit $l(I_{\tilde{n}}) < \frac{\epsilon}{2}$, $l(I'_{\tilde{n}}) < \frac{\epsilon}{2} \implies b_{\tilde{n}} - a_{\tilde{n}} < \frac{\epsilon}{2}$, $b'_{\tilde{n}} - a'_{\tilde{n}} < \frac{\epsilon}{2} \implies b_{\tilde{n}} + b'_{\tilde{n}} - a_{\tilde{n}} - a'_{\tilde{n}} < \epsilon \implies l(I_{\tilde{n}} + I'_{\tilde{n}}) < \epsilon \implies \not{I} + \not{I}' = \{I_n\} + \{I'_n\} \in I_{\mathbb{Q}}$. Zu (2): Seien $\not{I} \sim \not{I}'$, $\not{J} \sim \not{J}'$, das heißt $\{I_n\} \sim \{I'_n\}$, $\{J_n\} \sim \{J'_n\} \implies a_n \leq b'_n$, $a'_n \leq b_n$, $\alpha_n \leq \beta'_n$, $\alpha'_n \leq \beta_n \implies a_n + \alpha_n \leq b'_n + \beta'_n$, $a'_n + \alpha_n \leq b_n + \beta_n \implies$ Addition und Multiplikation sind unabhängig von Repräsentanten bezüglich Äquivalenzrelation Q. ∎

5.4 Operationen mit reellen Zahlen

Neutrale Elemente $0_{\mathbb{R}} := \left[\,\{[0,0]\}_{n\in\mathbb{N}}\right]$, $1_{\mathbb{R}} := \left[\,\{[1,1]\}_{n\in\mathbb{N}}\right]$ liegen offenbar in $\mathbb{R}$. Beachte: $0 = 0_{\mathbb{R}}$, $1 = 1_{\mathbb{R}}$. *Satz 9* rechtfertigt die Definitionen von Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R}$ durch:

- (Addition) $+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $[\not I] + [\not I'] \mapsto [\not I + \not I']$,
- (Multiplikation) $\cdot : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $[\not I] \cdot [\not I'] \mapsto [\not I \cdot \not I']$,
- (inverse Elemente) $-[\not I] := [-\not I]$, $[\not I]^{-1} := [\not I^{-1}]$,

Satz 11. $\mathbb{R}$ *ist ein Körper mit obiger Addition, Multiplikation sowie zugehörigen neutralen und inversen Elementen.*

Beweis. Offenbar sind $0_{\mathbb{R}}$, $1_{\mathbb{R}}$ neutrale Elemente, $0_{\mathbb{R}} \neq 1_{\mathbb{R}}$. Das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz folgt leicht aus der Definition der Addition und Multiplikation für Intervalle. Offenbar ist $-[\{I_n\}]$ invers zu $[\{I_n\}] = [\not I]$, für $[\{I'_n\}]$ analog. Setze mit Notation aus (2):

$$R := \left\{(\{I_n\}, \{I'_n\}) \in (I_{\mathbb{Q}} \times I_{\mathbb{Q}}) \mid \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} : b_{\tilde{n}} < a'_{\tilde{n}}\right\}$$

ist eine Relation auf $I_{\mathbb{Q}}$. (Ab einem bestimmten $\tilde{n}$ gilt, dass zwischen b_n und a'_n eine Lücke entsteht.) $\blacksquare$

Satz 12. *R induziert eine Totalordnung "$<$" auf $\mathbb{R}$, damit ist $\mathbb{R}$ angeordneter Körper.*

Beweis. R ist offenbar Ordnung auf $I_{\mathbb{Q}}$, da R antireflexiv und transitiv ist. Sei

$$\underbrace{\{I_n\}}_{[a_n,b_n]} \sim \underbrace{\{I'_n\}}_{[a'_n,b'_n]}, \underbrace{\{J_n\}}_{[\alpha_n,\beta_n]} \sim \underbrace{\{J'_n\}}_{[\alpha'_n,\beta'_n]}$$

$\implies a'_n \le b_n, \alpha_n \le \beta'_n\ \forall n$. Sei $\{I_n\} < \{J_n\} \implies \exists \tilde{n} : b_{\tilde{n}} < \alpha_{\tilde{n}}$. Angenommen $b'_n \ge \alpha'_n\ \forall n$ $\implies l(I'_n) + l(J'_n) = b'_n - a'_n + \beta'_n - \alpha'_n \ge \alpha'_n - b_n + \alpha_n - \alpha'_n \ge \alpha_n - \beta_n =: \epsilon > 0\ \forall n \ge \tilde{n} \implies$ $\lightning \implies \exists \tilde{n} : b'_{\tilde{n}} < \alpha'_{\tilde{n}} \implies \{I'_n\} < \{J'_n\} \implies$ Relation "$<$" ist unabhängig von Repräsentanten bezüglich $\mathbb{Q} \implies R$ liefert Ordnung auf $\mathbb{R}$.

Man zeigt leicht: R ist eine Ordnung auf $I_{\mathbb{Q}}$, liefert eine Totalordnung auf $\mathbb{R}$. Diese Ordnung ist verträglich mit Addition und Multiplikation. $\blacksquare$

Für Abbildung $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gemäß *Satz 5* gilt $\forall m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m \cdot 1_{\mathbb{R}}}{n \cdot 1_{\mathbb{R}}}\right) &= \left[\,\{[m,m]\}_{k\in\mathbb{N}}\right] \cdot \left[\,\{[n,n]\}_{k\in\mathbb{N}}\right]^{-1} \\ &= \left[\,\{[m,m]\}_{k\in\mathbb{N}}\right] \cdot \left[\left\{\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right] \\ &= \left[\left\{\left[\frac{m}{n}, \frac{m}{n}\right]\right\}_{k\in\mathbb{N}}\right]. \end{aligned}$$

Damit kann man $\mathbb{N} = \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\mathbb{R}}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$ beschreiben.

Satz 13. $\mathbb{R}$ *ist archimedisch angeordneter Körper.*

Beweis. Sei $[\{I_n\}] \in \mathbb{R}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ (beachte $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$). Setze $J_n := [\alpha_n, \beta_n]$ mit $\alpha_n = \beta_n = \big[|b_0|\big] + 1 \in \mathbb{N}_\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \{J_n\} \in I_\mathbb{Q}$ und $\big[\{J_n\}\big] \in \mathbb{N}_\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, wegen $b_0 < \big[|b_0|\big] + 1$ ist $\big[\{I_n\}\big] < \big[\{J_n\}\big]$ in $\mathbb{R}$. ■

Theorem 14. $\mathbb{R}$ *ist vollständiger und angeordneter Körper.*

Beachte: *Theorem 14* zeigt unter anderem, dass ein solcher Körper existiert. Hinweis: bei der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ sind Intervallschachtelungen $\{z_n\} = \{[x_n, y_n]\}$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ zu betrachten, d.h. x_n, y_n sind Äquivalenzklassen von Intervallschachtelungen in $\mathbb{Q}$.

Beweis. Sei $\{z_n\} = \{[x_n, y_n]\}$ eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ (d.h. $x_n, y_n \in \mathbb{R}$). Angenommen unendlich viele x_n bzw. y_n sind gleich, dann folgt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} z_n \neq 0$, anderenfalls sind höchstens endlich viele gleich, das heißt $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $x_n < x_{n+1},\ y_{n+1} < y_n\ \forall n \geq \tilde{n}$. Nach *Satz 7.g* $\exists a_n, b_n \in \mathbb{Q}_\mathbb{R}$ ($\subset \mathbb{R}$) : $x_n < a_n < x_{n+1}, y_{n+1} < b_n < y_n$. Es existieren für a_n, b_n entsprechende Elemente $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$ (das heißt $f(\alpha_n) = a_n,\ f(\beta_n) = b_n$ gemäß *Satz 4*), so dass

$$a_n = \Big[\big\{\,[\alpha_n, \alpha_n]\,\big\}_{k\in\mathbb{N}}\Big], b_n = \Big[\big\{\,[\beta_n, \beta_n]\,\big\}_{k\in\mathbb{N}}\Big]$$

mit $J_k := \big[\alpha_k, \beta_k\big]$ ist $J_{k+1} \subset J_k$ und $l(J_k) < l([x_k, y_k]) \implies \{J_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in I_\mathbb{Q}$ und $z := \big[\{J_k\}\big] \in \mathbb{R}$. Offenbar $x_n < a_n < z < b_n < y_n$ (in $\mathbb{R}$) $\forall n \geq \tilde{n} \implies z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} z_n \implies \mathbb{R}$ ist vollständig. ■

Für jeden Intervall in $\mathbb{R}$ finden wir eine Zahl, die in dem Intervall liegt.

Theorem 15. *Sei K vollständiger archimedisch angeordneter Körper $\implies$ K ist isomorph zu $\mathbb{R}$ bezüglich Körperstruktur und Ordnung.*

Hinweis:

- Theorem besagt, dass Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch Eigenschaften eines vollständigen archimedisch angeordneten Körper strukturell eindeutig bestimmt ist!
- Praktische, einfachere Symbole: für rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ schreibt man einfach q statt $\Big[\big\{[q, q]\big\}_{n\in\mathbb{N}}\Big]$.

Beachte: Bei Bruchdarstellung $\frac{m}{n}$ schreibt man nur ein Element aus der Äquivalenzklasse.) Einige irrationale zahlen (das heißt "nicht rational") haben spezielle Symbole, zum Beispiel: $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{7}, \pi, e, \ldots$. Die meiste haben kein Symbol und sind nur approximiert dargestellt.

Dezimaldarstellung: (nicht präzise, aber leistungsfähige Darstellung) Einige rationale Zahlen haben einen endlichen Dezimalbruch. Unendlicher Dezimalbruch ist Approximation analog zur Intervallschachtelung in $I_\mathbb{Q}$. Hinweis: Zum Verständnis unendlicher Reihen erforderlich!

Beweis. Sei $x \in K$. Dann nach *Satz 7.f* $\exists \{I_n^x\} \in I_\mathbb{Q} : \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n^x$ (Beachte *Lemma 8*). Abbildung $x \mapsto [\{I_n^x\}] \in \mathbb{R}$ ist Isomorphismus zwischen K und $\mathbb{R}$ bezüglich Körperstruktur und Ordnung. (Selbststudium) ■

5.5 Beschränkte Mengen

Sei $M \subset K$, K angeordneter Körper.

- $s \in K$ heißt *obere* (bzw. *untere*) *Schranke* von M falls $x \leq s$ (bzw. $x \geq s$) $\forall x \in M$.
- M heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, falls obere (bzw. untere) Schranke existiert.
- M heißt *beschränkt*, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.
- Obere (bzw. untere) Schranke s heißt *Supremum* (bzw. *Infimum*) von M falls $s \leq \tilde{s}$ (bzw. $s \geq \tilde{s}$) für jede obere (bzw. untere) Schranke $\tilde{s}$. Schreibe $\sup M := s$ (bzw. $\inf M := s$).
- Supremum (bzw. Infimum) von M heißt auch *Maximum* (bzw. *Minimum*) von M falls $s \in M$. Schreibe $\max M := \sup M$ (bzw. $\min M := \inf M$).
- Falls M nach oben (bzw. nach unten) unbeschränkt ist, schreibt man $\sup M := +\infty$ (bzw. $\inf M := -\infty$).

Beispiel 16.
- $K = \mathbb{R}$: $\max(a,b] = \max(-\infty,b] = b = \sup(a,b]$, $\sup[a,b) = \sup(a,b) = \sup(-\infty,b) = b \neq \max(a,b)$.
- $K = \mathbb{Q}$: $M := \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\right\} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \sup M$ existiert nicht in $\mathbb{Q}$.
- $K = \mathbb{R}$: $M := \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}_{\setminus\{0\}}\right\} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \max M = 1, \inf M = 0$.

Satz 17. *Sei K angeordneter Körper, $M \subset K$, $\sup M$ und $\inf M$ existieren, dann:*

(1) $\sup M$ *und* $\inf M$ *sind eindeutig definiert,*
(2) $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in M : \sup M < x + \epsilon$ *(bzw.* $\inf M > x - \epsilon$*).*

Beweis. Zu (1): Seien $s, \tilde{s}$ Supremum von M. Angenommen $s \neq \tilde{s}$. Es gilt: $s \geq \tilde{s} \wedge s \leq \tilde{s} \implies$ Widerspruch $\implies s = \tilde{s}$.

Zu (2): Angenommen $\exists \epsilon > 0$ mit $\sup M \geq x + \epsilon\ \forall x : x \in M$, dann ist $\sup M - \epsilon$ obere Schranke von M kleiner als $\sup M \implies$ Widerspruch $\implies$ Behauptung ist Wahr.

∎

Theorem 18. *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper, dann:*

$$\begin{aligned} K \textit{ vollständig} &\iff \exists \sup M\ \forall M : M \subset K, M \neq \emptyset, M \textit{ nach oben beschränkt.} \\ &\iff \exists \inf M\ \forall M : M \subset K, M \neq \emptyset, M \textit{ nach unten beschränkt.} \end{aligned}$$

(Siehe Literatur: Dedekindscher Schnitt.) *Beachte:* Alle Aussagen für $K = \mathbb{R}$ sind wahr. Anwendung bei Wurzeln, Potenzen, Logarithmen in $\mathbb{R}$.

Beweis. Für Supremum. (Für Infimum analog.)

"$\implies$": Sei $M \subset K$ nach oben beschränkt ($\exists$ obere Schranke $s_0 \in K$). Rekursive Definition von $I_n = [x_n, y_n] \subset K$: $M \neq \emptyset \implies \exists x_0 \in M, y_0 = s_0$

$$z_n := \frac{x_n + y_n}{2} \begin{cases} \text{obere Schranke von } M : x_{n+1} := x_n, y_{n+1} = z_n \\ \text{sonst: } x_{n+1} := z_n, y_{n+1} = y_n \end{cases}$$

$\implies y_n$ ist stets obere Schranke von M $\forall n$ und $l(I_n) = \frac{1}{2^n}(y_0 - x_0) \implies \{I_n\}$ ist Intervallschachtelung in $K \underset{\text{vollständig}}{\overset{K \text{ ist}}{\implies}} \exists s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Angenommen $\exists x \in M : s < x$. $\exists \tilde{n}$:

$l(I_{\tilde{n}}) < (x-s)$, offenbar $x \leq y_{\tilde{n}} \implies s \notin I_{\tilde{n}} \implies \lightning \implies s$ ist obere Schranke. Angenommen $\exists$ obere Schranke $s' < s$ $\exists \tilde{m} : l(I_{\tilde{m}}) < s - s'$, offenbar $x_{\tilde{m}} \leq s' \implies s \notin I_m \implies \lightning \implies s = \sup M$

"$\Longleftarrow$": Sei $\{I_n\} = \{[x_n, y_n]\}$ Intervallschachtelung in K. $M := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq 0$, M nach oben beschränkt durch $y_0 \implies z := \sup M$ existiert $\implies x_n \leq z \ \forall n \in \mathbb{N}$. Da y_n obere Schranke von M $\forall n$ ist $\implies z \leq y_n \ \forall n \implies z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \implies K$ ist vollständig.

■

Notation: $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{N}_{>0} := \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$. Anwendung: Wurzeln, Potenzen, Logarithmen in $\mathbb{R}$.

Satz 19 (k-te Wurzel). *Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}, k \in \mathbb{N}_{>0} \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}_{>0} : x^k = a$. Schreibe $x = \sqrt[k]{a} := a^{\frac{1}{k}}$ heißt k-te Wurzel aus a.*

Beweis. Vollständige Induktion liefert leicht für $b, c \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$b < c \Leftrightarrow b^k < c^k. \tag{5}$$

(Vgl. *Satz 3.*) Folglich ist die Lösung eindeutig falls existent, offenbar $x \neq 0$. Setze $M := \big\{y \in \mathbb{R}_{>0} \mid y^k \leq a\big\}$. $M \neq \emptyset$, da $0 \in M$, Bernoulli Ungleichung liefert: $(1+a)^k \geq 1 + ka \geq 1 + a > y^k, \forall y \in M \overset{(5)}{\implies} 1 + a > y \ \forall y \in M$, d.h. M ist von oben beschränkt, also existiert nach *Theorem 18* $x := \sup M$. Angenommen es ist $x^k < a$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{Binom.}}{\underset{\text{Formel}}{\implies}} \left(x + \frac{1}{n}\right)^k &= x^k + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} x^{(k-l)} \left(\frac{1}{n}\right)^l \ \forall n \in \mathbb{N}_{>0} \\
&\leq x^k + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} x^{(k-l)}}_{\text{von } n \text{ unabhängig}} \\
&\overset{\text{Satz 7}}{<} x^k + (a - x^k) = a \ \forall n \geq \tilde{n}
\end{aligned}$$

(d.h. $\exists \tilde{x} \in \mathbb{N}$: Aussage gilt $\forall n \geq \tilde{n}$) $\implies x + \frac{1}{n} \in M \implies \lightning$ zu Definition von x (x kann nicht sup sein). Angenommen $x^k > a$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$ folgt $\big(x - \frac{1}{n}\big)^k = x^k \big(1 - \frac{1}{nx}\big)^k \underset{\text{Ugl.}}{\overset{\text{Bernoulli}}{>}} x^k \big(1 - \frac{k}{nx}\big) = x^k - \frac{k}{n} x^{(k-1)} \overset{\text{Satz 7}}{>} x^k - (x^k - a) = a \ \forall n \in \mathbb{N} \implies (x - \frac{1}{n}) \notin M \implies \lightning$ (da $x - \frac{1}{n}$ auch obere Schranke wäre). Es folgt $x^k = a$.

■

Setze für $a \in \mathbb{R}_{>0}, q = ls\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (o.B.d.A. sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$): $a^q := (a^m)^{\frac{1}{n}}$ ist q-te Potenz von a.

Satz 20. *Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $p, q \in \mathbb{Q}$, dann;*

(1) a^q *ist* wohldefiniert, *das heißt* $(a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{m'})^{\frac{1}{n'}}$, *falls* $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.
(2) $a^q b^q = (ab)^q$, $(a^p)^q = a^{(pq)}$, $a^p a^q = a^{(p+q)}$. *(Insbesondere gilt* $\big(a^m\big)^{\frac{1}{n}} = \big(a^{\frac{1}{n}}\big)^m$*.)*
(3) *Für* $q > 0 : a < b \iff a^q < b^q$.
(4) *Für* $a > 1 : p < q \iff a^p < a^q$.
(5) $\forall a > 0, \epsilon > 0, \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} : \big|a^{\frac{1}{n}} - 1\big| < \epsilon \ \forall n \geq \tilde{n}$

Beweis. Zu (1): Mit Rechenregeln im Körper $\mathbb{R}$ gilt: $\left((a^m)^{\frac{1}{n}}\right)^{nn'} = \left(\left((a^m)^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^{n'} = (a^m)^{n'} = a^{mn'} = a^{n'm} = \ldots = \left((a^m)^{\frac{1}{n'}}\right)^{nn'} \overset{\text{Satz 19}}{\Longrightarrow} (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{m'})^{\frac{1}{n'}}$ Zu (2): Sei $q = \frac{m}{n}$: $\left(a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m b^m = (ab)^m \implies a^q b^q = (ab)^q$. Rest analog. Zu (3): Mehrfache Anwendung von (5) aus *Satz 19*. Zu (4): Übungsaufgabe. Zu (5): Sei $a \geq 1 : \exists \tilde{n}$ mit $a < (1 + n\epsilon) \underset{\text{Ugl.}}{\overset{\text{Bernoulli}}{<}} (1+\epsilon)^n \ \forall x \geq \tilde{n}$ $\implies 0 \leq a^{\frac{1}{n}} - 1 < \epsilon$. Für $0 < q < 1$: obige Ungleichung gilt für $\frac{1}{a}$ statt a und $\frac{\epsilon}{a^{\frac{1}{n}}}$ statt ϵ $\implies \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{\epsilon}{a^{\frac{1}{n}}} \ \forall n \geq \tilde{n} \implies 0 < 1 - a^{\frac{1}{n}} < \epsilon \implies$ Behauptung. ■

Setze für $a \in \mathbb{R}_{>0}$, $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, $a \geq 1$: $a^r := \sup \overbrace{\left\{a^q \mid 0 \leq q \leq r, q \in \mathbb{Q}\right\}}^{\neq \emptyset \text{ (enthält } a^0\text{), nach oben beschränkt durch } a^{r+1}}$, falls $0 < a < 1$, dann $a^r := \left(\left(a^{-1}\right)^r\right)^{-1}$, falls $r < 0, a > 0$, dann $a^r := \left(a^{-r}\right)^{-1}$. Damit ist a^r wohldefiniert $\forall a > 0$, $r \in \mathbb{R}$ (für $r \in \mathbb{Q}$ konsistent mit bisheriger Definition).

Satz 21. *Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, $r, s \in \mathbb{R}$, dann:*

(1) $a^r b^r = (ab)^r$, $(a^r)^s = a^{rs}$, $a^r a^s = a^{r+s}$.
(2) *Für* $r > 0 : a < b \iff a^r < b^r$.
(3) *Für* $a > 1 : r < s \iff a^r < a^s$.

Beweis. Zu (1): Sei $a, b > 1, r \geq 0$, $a^r b^r = \sup\{a^q \mid 0 \leq qr, q \in \mathbb{Q}\} \cdot \sup\{b^q \mid 0 \leq qr, q \in \mathbb{Q}\} \geq a^q b^q = (ab)^q \ \forall 0 \leq q \leq r, q \in \mathbb{Q} \implies (ab)^r \leq a^r b^r$. Angenommen $(ab)^r < (a)^r(b)^r$ $\implies \exists \tilde{n} \in \mathbb{N} : (ab)^r < a^r b^r - \frac{1}{\tilde{n}}(a^r + b^r) < \left(a^r - \frac{1}{\tilde{n}}\right)\left(b^r - \frac{1}{\tilde{n}}\right)$. Nach *Satz 17* $\exists p \in \mathbb{Q}, 0 \leq p \leq r : a^r - \frac{1}{\tilde{n}} < a^p, b^r - \frac{1}{\tilde{n}} < b^p \implies (ab)^r < a^p b^p$. Nach Definition von $(ab)^n$ ist dies ein Widerspruch $\implies a^r b^r = (ab)^r = (ab)^p$. Andere Fälle mittels Definitionsformeln, zum Beispiel für $r < 0$: $a^{-r} b^{-r} = (ab)^{-r} \implies (a^{-r})^{-1} \cdot (b^{-r})^{-1} = \left((ab)^{-r}\right)^{-1}$ liefert die Behauptung, Rest analog.

Zu (2): "$\Longrightarrow$": $\exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < r \overset{1<b}{\Longrightarrow} 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \sup\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^q \mid 0 \leq q \leq r, q \in \mathbb{Q}\right\} = \frac{b}{a}^r$
"$\Longleftarrow$": mit $\tilde{a} = a^r, \tilde{b} = b^r, \tilde{r} = \frac{1}{r} \implies \tilde{a}^{\tilde{r}} < \tilde{b}^{\tilde{r}}$.

Zu (3): Ähnlich.

■

5.6 Logarithmus von b zur Basis a

Sei $a, b \in \mathbb{R}_{>0}, a \neq 1$. Setze:

$$\log_a b = \begin{cases} \sup\{r \in \mathbb{R} \mid a^r \leq b\} & \text{für } a > 1, \\ \sup\{r \in \mathbb{R} \mid a^r \geq b\} & \text{für } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Satz 22. *Sei $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}, a \neq 1$, dann:*

(1) $a^{\log_a b} = b$ *mit* $\log_a b$ *ist einzige Lösung der Gleichung* $a^x = b$.
(2) $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$.
(3) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ *und* $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.
(4) $\log_a b^\gamma = \gamma \log_a b \ \forall \gamma \in \mathbb{R}$.

(5) $\log_a b = \frac{\log_\alpha b}{\log_\alpha a}$.

Beweis. (für $a > 1$)

Zu (1): Sei $z := \log_a b$, angenommen $a^z < b$, das heißt $1 < \frac{b}{a^z}$. Nach *Satz 20* $\exists n \in \mathbb{N} : 1 < a^{\frac{1}{n}} < \frac{b}{a^z} \implies a^{\left(z+\frac{1}{n}\right)} < b \overset{\text{Def. von}}{\underset{\text{Log.}}{\Longrightarrow}}, \log_a b \geq z + \frac{1}{n} \implies ↯$ (da $z = \log_a b$). Angenommen $a^z > b \overset{\text{analog}}{\Longrightarrow} \exists n : a^{\left(z-\frac{1}{n}\right)} > b \overset{\textit{Satz 20}}{\Longrightarrow} ↯ \implies a^z = b$. Eindeutigkeit wegen *Satz 20.4*.

Zu (2): Klar.

Zu (3): $a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = bc \implies$ *1. Gleichung. 2. Gleichung:* Setze $\frac{1}{c}$ statt c und (4) mit $\gamma = 1$ liefert die Behauptung.

Zu (4): $a^{\gamma \log_a b} = (a^{\log_a b})^\gamma = b^\gamma$.

Zu (5): $\log_a b \cdot \log_\alpha a = \log_\alpha(a^{\log_a b}) = \log_\alpha b \implies$ Behauptung.

■

5.7 Mächtigkeit von Mengen

Menge M heißt *endlich*, falls M endlich viele Elemente enthält, anderenfalls heißt m *unendlich*. Eine unendliche Menge heißt *abzählbar*, falls es bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$ gibt. Anderenfalls heißt M *überabzählbar*.

Satz 23. (1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}^n$ $(n \in \mathbb{N}_{>0})$ *sind abzählbar.*
(2) *Jedes offene Intervall* $I \subset \mathbb{R}, I \neq \emptyset$ *ist überabzählbar.*

Beweis. (1) $\mathbb{Z} : f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(2k) := k, f(2k+1) := -(k+1) \implies$ Behauptung. $\mathbb{Q}$: Siehe nächste Abbildung.

Cantorsches Diagonalverfahren

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} \quad \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \ddots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}
$$

$\mathbb{Z}^n, \mathbb{Q}^n$ Übung

(2) O.B.d.A.: $I = (0,1)$, schreibe Zahlen als Dezimalzahlen (Rechtfertigung später, keine Periode $\bar{9}$). Angenommen I ist abzählbar. Dann existiert bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow I$. Es ist

$$
\begin{aligned}
f(0) = &\quad 0, \underline{z_{00}} z_{01} z_{02} z_{03} \ldots \\
f(1) = &\quad 0, z_{10} \underline{z_{11}} z_{12} z_{13} \ldots \\
f(2) = &\quad 0, z_{20} z_{21} \underline{z_{22}} z_{23} \ldots \;, \; z_{ij} \in \{0, 1, ..., 8, 9\} \;\; \forall i, j \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Betrachte $x = 0.y_0 y_1 y_2 y_3 \ldots$ mit $y_n \neq z_{ij}$. Falls $n = i = j \; \forall y, z$, dann $x \in I$ aber $x \notin f(\mathbb{N}) \implies ↯ \implies I$ nicht abzählbar. (*Cantors zweites Diagonalargument*).

■

Satz ÜA. *$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar.*

Beweis. Angenommen es existiert eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Konstruiere Menge $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$. Da f bijektiv ist und $M \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\exists n \in \mathbb{N} : f(n) = M$. Entweder ist $n \in M \implies n \notin f(n) \implies n \notin M \implies \lightning$, oder $n \notin M \implies n \in f(n) \implies n \in M \implies \lightning$. Damit folgt $f(n) \neq M$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies$ es existiert keine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \implies \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar. ∎

6 Komplexe Zahlen

Motivation: Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$. Wir brauchen eine Körpererweiterung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Betrachte $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Elementen (x, y) , $x, y \in \mathbb{R}$. Für komplexe Zahlen (x, y), (x', y') setze:

- $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$,
- $(x, y) \cdot (x', y') := (xy - x'y', xy' + yx')$.

Dann ist $\mathbb{C}$ ein Körper mit $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$, $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$, $-(x, y) = (-x, -y)$ und

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Nenne $\mathbb{C}$ *Menge der Komplexen Zahlen.* Mit *imaginärer Einheit* $i := (0, 1)$ schreibt man $z = x + iy$ statt (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$. Komplexe Zahlen $z = x + 0 \cdot i = x$ können mit reellen Zahlen $\mathbb{R}$ identifiziert werden. Offenbar $i^2 = (-1, 0)$, das heißt $z = i \in \mathbb{C}$ löst die $z^2 = -1$ (Nicht eindeutig, da $(-i)^2 = (i)^2$). Definiere für $z = x + iy$; $x := \Re(z)$ (Realteil), $y := \Im(z)$ (Imaginärteil). Weiterhin heißt $\overline{z} := x - iy$ zu z *konjugiert komplexe Zahl.* Es gilt:

(i) $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$,
(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

Absolutbetrag auf $\mathbb{C}$ ist Abbildung $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$. (Entspricht Euklidischer Norm auf $\mathbb{R}^2$.) Es gilt:

(i) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ genau dann wenn $z = 0$,
(ii) $|z| = |\overline{z}|$,
(iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
(iv) (Dreiecksungleichung) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (folgt aus Minkowski-Ungleichung in Abschnitt 7.)

Bemerkung: Es gibt keine Ordnung auf $\mathbb{C}$!

Teil III

Metrische Räume und Konvergenz

Konvergenz ist ein zentraler Begriff der mathematischen Analyse und benötigt einen Abstandsbegriff (Metrik).

7 Grundlegende Ungleichung

Satz 1 (Arithmetisches/Geometrisches Mittel Ungleichung). *Seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_{>0}$, dann gilt:*

$$\overline{x}_G := \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n} \leq \overline{x}_A := \frac{x_1 + ... + x_n}{n},$$

wobei $\overline{x}_A$ heißt Arithmetisches Mittel *und $\overline{x}_G$ heißt* Geometrisches Mittel*. Gleichheit gilt genau dann wenn $x_1 = ... = x_n$.*

Beweis. Zeige zunächst

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n. \tag{1}$$

Vollständige Induktion liefert:

(IA) Für $n = 1$ ergibt sich triviale Lösung $x_1 = 1$, für $n = 2 : 0 \leq (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}$ $\implies$ Behauptung.

(IS) Gelte (1) für n, so sei $\prod_{i=1}^{n+1} x_i = 1$. Falls alle $x_i = 1$, dann gilt $\prod_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \implies \sum_{i=1}^{n+1} x_i \geq n+1$, sonst o.B.d.A. falls beliebige $x_n < 1, x_{n+1} > 1$, so setzen wir $y_n := x_n x_{n+1}$. Daraus folgt nach der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} x_1 + ... + x_{n+1} = x_1 + ... + x_{n-1} + y_n - y_n + x_n + x_{n+1} \geq& n + 1 - 1 + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} \\ =& n + 1 + \underbrace{(x_{n+1} - 1)}_{>0}\underbrace{(1 - x_n)}_{>0} \\ \geq& n + 1. \end{aligned}$$

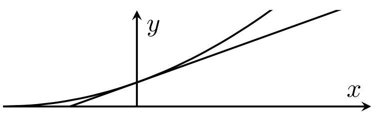
$\implies$ Behauptung, d.h. (1) für $n + 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

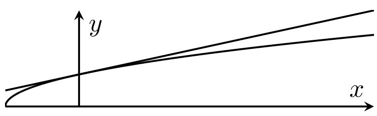
Sei nun $g := \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \implies \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{g} = 1 \implies \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{g} \geq n \implies \frac{(x_1 + ... + x_n)}{g} \geq n \implies$ Behauptung. Aussage über Gleichheit folgt nach nochmaliger Durchsicht. ■

Satz 2 (Allgemeine Bernoulli Ungleichung). *Sei $\alpha, x \in \mathbb{R}$, dann:*

(1) $(1 + x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \ \forall x \geq -1, \alpha > 1$,
(2) $(1 + x)^\alpha \leq 1 + \alpha x \ \forall x \geq -1, 0 < \alpha < 1$.

Gleichheit gilt jeweils genau dann wenn $x = 0$.





Beweis. Zu (2): Sei $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m < n$, dann

$$\begin{array}{ccl} (1+x)^{\frac{m}{n}} & = & \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} \\ & \overset{\text{Satz 1}}{\leq} & \dfrac{m(1+x)+(n-m)\cdot 1}{n} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{m}{n}\cdot x + 1 - \dfrac{m}{n} \end{array}$$

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, angenommen $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$ ($x \neq 0$, sonst klar). Nach *Satz 5.7* $\exists q \in \mathbb{Q}, \alpha < q < 1$ mit $(1+qx) < (1+x)^\alpha \overset{\text{Satz 5.21}}{\leq} (1+x)^q \implies \lightning \implies$ Behauptung. (Beachte: $1+\alpha x < 1+qx$ für $x > 0$, $1+\alpha x > 1+qx$ für $-1 < x < 0$.) Gleichheit: Selbststudium.

Zu (1): Sei $1+\alpha x \geq 0$ (sonst klar) $\alpha x \geq -1 \overset{(2)}{\implies} (1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1 + \frac{1}{\alpha}(\alpha x) = 1+x$. Potenzieren mit α liefert Behauptung.

■

Satz 3 (Youngsche Ungleichung). *Sei $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(p+q = pq)$. Dann gilt:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \ \forall a, b \geq 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Gleichheit genau dann wenn $a^p = b^q$.

Beweis. Sei $a, b > 0$ (sonst trivial). $\left(\frac{b^q}{a^p}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(1 + \left(\frac{b^q}{a^p} - 1\right)\right)^{\frac{1}{q}} \underset{\text{Ugl.}}{\overset{\text{Bernoulli}}{\leq}} 1 + \frac{1}{q}\left(\frac{b^q}{a^p} - 1\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{g} \cdot \frac{b^q}{a^p} - \frac{1}{q}$. Multipliziere beide Seiten mit a^p: $a^{p-\frac{p}{q}} b = a^{p\left(1-\frac{1}{q}\right)} \cdot b = ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Gleichheit folgt aus *Satz 2*. Bemerkung: Spezialfall $p = q = 2 : ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ folgt leicht aus $0 \leq (a-b)^2$. ■

Satz 4 (Höldersche Ungleichung). *Sei $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(p+q = pq)$. Dann gilt für $x_1, ..., x_n,\ y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}$:*

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Bemerkung:

(1) Ungleichung gilt auch für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$.
(2) Für $p = q = 2$ heißt die Ungleichung auch *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*.

Gleichheit genau dann wenn $\exists \alpha \in \mathbb{R} : x_i = \alpha y_i$ oder $y_i = \alpha x_i$ $\forall i$.

Beweis. Faktoren rechts seien X und Y, das heißt $X^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ und $Y^q = \sum_{i=1}^n |y_i|^q$. Für $X = 0$ sind $x_i = 0$ und Behauptung trivial, analog für $Y = 0$. Seien $X, Y > 0 \overset{\text{Satz 3}}{\implies} \frac{|x_i y_i|}{XY} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|}{x^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_i|}{y^q}$ $\forall i \underset{\text{-mieren}}{\overset{\text{Aufsum-}}{\implies}} \frac{1}{XY} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{x^p}{x^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{y^q}{y^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq XY \implies$ Behauptung. ■

Satz 5 (Minkowski-Ungleichung). *Sei $p \geq 1$. Dann gilt für $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$:*

$$\Big(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i)|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Bemerkung: Ungleichung gilt auch für $x_i, y_i \in \mathbb{C}$ (vgl. Beweis). Diese Ungleichung ist eine Dreieckungleichung für p-Norm (vgl. später).

Beweis. Für $p = 1$ folgt die Behauptung aus Dreieckungleichung $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|\ \forall i$. Sei $p > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sei S der Ausdruck an der linken Seite der Ungleichung, X, Y Summanden rechts, $z_i = |x_i + y_i|^{p-1}$. Dann: $S^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i)||z_i| \overset{\triangle\ Ugl.}{\leq} \sum_{i=1}^n |x_i z_i| + \sum_{i=1}^n |y_i z_i| \underset{Ugl.}{\overset{Hölder.}{\leq}} (X + Y)\big(\sum_{i=1}^n |z_i|^q\big)^{\frac{1}{q}} \overset{q(p-1)=p}{=} (X+Y)S^{\frac{p}{q}}$. Nun multipliziere beide Seiten mit $\frac{1}{S^{\frac{p}{q}}} \overset{p-\frac{p}{q}=1}{\Longrightarrow} S \leq X + Y$. ■

8 Metrische und normierte Räume

8.1 Einführung: Vektorräume

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, wir betrachten jeweils $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei X eine Menge auf der die folgenden Verknüpfungen definiert sind:

(i) $+ : X \times X \to X, (u, v) \mapsto u + v$,
(ii) $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X, (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u$.

Dann heißt $(X, +, \cdot)$ *Vektorraum* über Körper $\mathbb{K}$ oder auch $\mathbb{K}$-*Vektorraum* g.d.w. gilt:

(i) (Assoziativität) $\forall u, v, w \in X : (u + v) + w = u + (v + w)$,
(ii) (Kommutativität) $\forall u, v \in X : u + v = v + u$,
(iii) (neutrales Element der Addition) $\exists 0_X \in X : \ \forall u \in X : u + 0_X = u$,
(iv) (inverse Element der Addition) $\forall u \in X : \exists \tilde{u} \in X : u + \tilde{u} = 0_X$,
(v) (neutrales Element der Multiplikation) $\forall u \in X : 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$,
(vi) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u \in X : (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ und $(\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$,
(vii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, u, v \in X : \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

Die Elemente von X heißen *Vektoren* , 0_X ist der *Nullvektor*. Oft nennen wir X einfach Vektorraum (über Körper $\mathbb{K}$) und $\cdot$ *skalare Multiplikation.*

Bemerkung: Im unterschied zum *Skalarprodukt*, das auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definiert ist, ist die *skalare Multiplikation* in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum (über Körper $\mathbb{K}$) definiert auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Wir fixieren nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alle Aussagen gelten analog für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Beispiel 1. $\mathbb{C}$ ist mit der üblichen Addition und Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beispiel 2. Fixiere $n \in \mathbb{N}$ und definiere auf Vektoren $u = \big(u_1, ..., u_n\big) \in \mathbb{R}^n$ die Addition und Multiplikation mit Skalar wie folgt:

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to R^n : (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to R^n : (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot u_n \end{pmatrix}$$

Dann ist $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit dem Nullelement $(0, ..., 0)^{\mathrm{T}}$.

Beispiel 3. Sei M eine Menge und $X :$ ú$(f : M \to \mathbb{R})$ die Menge aller reellwertigen Abbildungen auf M. Definiere die Addition und Multiplikation mit Skalar $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ durch:

$$\forall f, g \in X, \forall x \in M : (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, f \in X, x \in M : (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \in f(x)$$

Dann ist X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wobei der Nullvektor $0_X \in X$ durch die Nullfunktion $x \mapsto 0$ gegeben ist.

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann heißt $Y \subset X$ linearer Unterraum von X, wenn:

(i) $Y \neq \emptyset$,
(ii) $\forall u, v \in Y : u + v \in Y$,
(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in Y : \lambda \cdot u \in Y$.

Theorem 4. *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $Y \subset X$ ein linearer Unterraum. Dann ist Y zusammen mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation mit Skalar in X auf $Y \times Y$ bzw. $\mathbb{K} \times Y$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Für m Vektoren $v_1, ..., v_m \in X$ und $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i \in X$ Hier $\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i$ heißt *Linearkombination* von $v_1, ..., v_m$. Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Dann heißen m Vektoren $v_1, ..., v_n \in X$ *linear unabhängig*, falls für alle $\lambda_1, ..., \lambda_m$ gilt:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i = 0_X \implies \lambda_i = 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq m$$

Vektoren $v_1, ..., v_n \in X$ heißen *linear abhängig*, falls sie nicht linear unabhängig sind. Seien $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig. Dann heißt $V = \{v_1, ..., v_m\}$ *Basis*, falls $v_p, ..., v_q$ linear abhängig sind, für alle $v \in X \backslash \{v_1, ..., v_m\}$. (D.h. Basen von X sind maximale linear unabhängige Teilmenge von X.) Wenn $V = \{v_1, ..., v_m\}$ eine Basis von X ist, so setzt man

$$\dim X = \operatorname{card}(\{v_1, ..., v_n\}) = m$$

Falls keine solche Basis existiert, so setzt man $\dim X = \infty$.

Beispiel 5. *(Basis von $\mathbb{R}^n$)* Für $i = 1, ..., n$ definiere $e_i := (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ wobei die 1 in der i-ten Zeile steht. Dann ist $E = \{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Insbesondere gilt $\dim \mathbb{R}^n = n$. Für $m > n$ sind m Vektoren stets linear abhängig.

Theorem 6 (Eindeutige Darstellung bzgl. einer Basis). *Sei X ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und für $m \in \mathbb{N}$ bilden $v_1, ..., v_m$ eine Basis von X. Dann existieren für alle $u \in X$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$, sodass $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot v_i$.*

Beispiel 7. Betrachte $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist $E = \{e_1, ..., e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Für jeden Vektor $x = \{x_1, ..., x_n\} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$

Im folgenden fixieren wir $X = \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, die Resultate gelten analog für $\mathbb{C}^n$. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt *lineare Abbildung* von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$, falls:

(i) (Additivität) $\forall u, v \in \mathbb{R}^n : A(u + v) = A(u) + A(v)$,
(ii) (Homogenität) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n : A(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot A(u)$.

Abbildung A heißt *(Vektorraum)-Isomorphismus*, falls sie bijektiv ist. Für lineare Abbildungen schreibt man auch kurz $Au := A(u)$.

Bemerkung 8. *Für alle Vektorräume X über $\mathbb{R}$ mit* $\dim X = n < \infty$ *existiert ein Isomorphismus $\Phi : X \to \mathbb{R}^n$. (D.h. alle Vektorräume mit Dimension $n \in \mathbb{N}$ sind isomorph zu $\mathbb{R}^n$.)*

Beispiel 9. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$ eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}$. Für $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ definiert $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ keine lineare Abbildung.

Theorem 10 (Eigenschaften linearer Abbildungen). *Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(1) $A(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$
(2) *Seien $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und sei A injektiv. Dann sind auch $Av_1, ..., Av_k \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängig.*
(3) *Ist A ein Isomorphismus (bijektiv) und bilden $v_1, ..., v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, dann bilden $Av_1, ...,$ Av_n eine Basis von $\mathbb{R}^m$ und $m = n$.*
(4) *Seien $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ eine Basis und $v'_1, ..., v'_n \in \mathbb{R}^m$. Dann existiert genau eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sodass $Av_i = v'_i$ für $i = 1, ..., n$.*
(5) *$A(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$ ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^m$ mit* $\dim A(\mathbb{R}^n) \leq n$.
(6) *Der* Nullraum *oder* Kern *von $N(A)$ definiert mit* $\ker A := N(A) := \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}$ *ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$.*

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Bezeichne mit $\mathbb{R}^{m\times n}$ Familien $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n} \subset \mathbb{R}$, aufgefasst als rechteckige Schemata, in denen Zahlen stehen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Elemente $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ heißen $(m \times n)$-*Matrizen.*

Beispiel 11.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Theorem 12. *Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ definiert eine lineare Abbildung der Form:*

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{mj} \end{pmatrix}$$

Beispiel 13. Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ aus *Beispiel 11* und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Für das Bild gilt $A(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$. Der Nullraum ist $N(A) = \left\{ t \mid t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \right\}$.

Bemerkung 14. *Jede lineare Abbildung $A' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lässt durch eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ darstellen.*

Die Addition für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wird definiert durch $(A+B)_{ij} := a_{ij}+b_{ij}$ für alle $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., m$, d.h.:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wird die *Multiplikation mit Skalar* definiert durch $(\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda a_{ij}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., n$, d.h.:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Damit wird $\mathbb{R}^{m\times n}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$. Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ definiert man das *Produkt* $A \cdot B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ der *Matrizenmultiplikation* durch $(A \cdot B)_{ij} := \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$ für $i = 1, ..., m$ und $j = 1, ..., k$, d.h.:

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{jk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot b_{j1} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot b_{jk} \end{pmatrix}$$

Beachte: Die Matrixmultiplikation ist assoziativ aber nicht kommutativ.

Beispiel 16. Die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ seien gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Das neutrale Element der Matrixmultiplikation heißt *Einheitsmatrix* und ist gegeben durch:

$$I_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geschrieben in der schematischen Form:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & \text{O} \\ & \ddots & \\ \text{O} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert, sodass $A\tilde{A} = \tilde{A}A = I$, dann heißt $\tilde{A}$ *Inverse Matrix* von A und wird mit $A^{-1} := \tilde{A}$ bezeichnet. Beachte: Nicht jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hat eine Inverse Matrix.

Beispiel 17. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entsprechend erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist *nicht invertierbar.*

8.2 Metrische Räume

Sei X Menge, Abbildung $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Metrik, falls $\forall x, y, z \in X$:

(i) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,
(ii) d ist symmetrisch, das heißt $d(x, y) = d(y, x)$,
(iii) es gilt die Dreieckungleichung: $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

(X, d) heißt *metrischer Raum* . Wegen $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) \leq 2d(x, y) \implies 0 \leq d(x, y)\ \forall x, y \in X$.

Beispiel 1 (Standardmetrik). $d(x, y) := |x - y|$ ist Metrik auf $X = \mathbb{R}$ bzw. $X = \mathbb{C}$. Eigenschaften i.,ii. sind klar. Zu iii.: $|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \overset{\triangle\ \mathit{Ugl.}}{\leq} |x - y| + |y - z|$.

Beispiel 2 (Diskrete Metrik). *Diskrete Metrik* auf beliebiger Menge X ist definiert durch:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{genau dann wenn } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

(Erfüllt offenbar offenbar alle 3 Bedingungen.)

Beispiel 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X \implies (Y, \tilde{d})$ ist metrischer Raum mit *induzierter Metrik.* $\tilde{d}(x, y) := d(x, y)\ \forall x, y \in Y$.

Wichtiger Spezialfall:

8.3 Normierte Räume

Sei X Vektorraum über Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Abbildung $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *Norm* auf X falls $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ gilt:

(i) $\|\mathbf{x}\| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$,
(ii) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| \; \forall \lambda \in \mathbb{K}$,
(iii) (Dreiecksungleichung) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

$(X, \|.\|)$ heißt *normierter Raum*. Wegen $0 = \overbrace{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\|}^{\mathbf{x}+(-\mathbf{x})} \leq \|\mathbf{x}\| + \overbrace{\|-\mathbf{x}\|}^{=\|\mathbf{x}\|} = 2\|\mathbf{x}\|$ ist $0 \leq \|\mathbf{x}\| \; \forall \mathbf{x} \in X$. Analog zu *Satz 5.4.(f)* folgt: $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq |\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|| \; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.

Analog zu *Beispiel 1* oben folgt:

Satz 4. *Sei* $(X, \|\cdot\|)$ *normierter Raum, dann ist* $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \; \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ *Metrik auf* X.

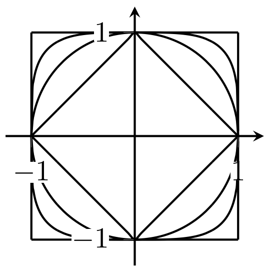
Beispiel 5. $X = \mathbb{R}^n$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$, Elemente: $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n),\; \mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$.

(a) (p-Norm) $\|\mathbf{x}\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ mit $1 \leq p < \infty$,
(b) (Maximum Norm) $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_i| \mid i = 1, .., n\}$.

$\|\cdot\|_p,\; \|\cdot\|_\infty$ sind Normen auf $X = \mathbb{R}^n$; i.,ii. sind jeweils klar und iii. fur $\|\cdot\|_p$ folgt aus *Minkowski Ungleichung*, für $\|\cdot\|_\infty$ wegen $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \; \forall i = 1, ..., n$.

(c) (Euklidische Norm) $\|\mathbf{x}\| := \|\mathbf{x}\|_2$ ist "Standardnorm" in $\mathbb{R}^n$.

Einheitskugel in $\|\cdot\|_p$ für p = 1,2,4,∞



Beispiel 6 (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$) . Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ heißt *Skalarprodukt* von $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Wegen

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \underset{in\ \mathbb{R}}{\overset{\triangle\, Ugl.}{\leq}} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \underset{Ugl.}{\overset{Hölder.}{\leq}} |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$$

ist $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y| \; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (C.-Schw. Ugl.). Offenbar $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x}|^2 \; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (gilt nur für euklidische Norm). Sei nun $X = \mathbb{C}^n$ Vektorraum über $\mathbb{C}$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n,\; x_i \in \mathbb{C}$. Analog zu *Beispiel 5* sind $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ Normen auf $\mathbb{C}^n$. Dann ist

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle := \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$$

Skalarprodukt von $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ (beachte $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \in \mathbb{C}$). Analog wie oben gilt $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$.

Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ heißen *orthogonal* falls $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Beispiel 7. Sei M beliebige Menge, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $\|f\| := \sup\{|f(x)| \mid x \in M\}$. Dann ist $B(M) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid \|f\| < \infty\}$ *Menge der beschränkten Funktionen* von M nach $\mathbb{R}$. $B(M)$ ist Vektorraum über $\mathbb{R}$, denn:

(a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
(b) $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,
(c) (Nullelement) Nullfunktion $f(x) = 0 \ \forall x \in M$.

$\|\cdot\|$ ist Norm auf $B(M)$, denn: (1), (2) sind klar, zu (3): $\|f+g\| = \sup\big\{|f(x)+g(x)| \mid x \in M\big\} \overset{\triangle\, Ugl.}{\leq} \sup\big\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in M\big\} \ \leq \ \sup\big\{|f(x)| \mid x \in M\big\} + \sup\big\{|g(x)| \mid x \in M\big\} = \|f\| + \|g\|$.

Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf X sind *äquivalent* falls

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \beta\|\mathbf{x}\|_1 \ \forall \mathbf{x} \in X.$$

Beispiel 8. $X = \mathbb{R}^n : \|\cdot\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_p \leq \sqrt[p]{n}\|\mathbf{x}\|_\infty \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ p \geq 1$. Das heißt $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ sind äquivalent.

Beweis. $\|\mathbf{x}\|_\infty = (\max\big\{|x_j| \mid j = 1, ..., n\big\}^p)^{\frac{1}{p}} \leq \big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p \leq (n \cdot \max\big\{|x_j| \mid j = 1, ..., n\big\}^p)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{n}\|\mathbf{x}\ \|_\infty$. ∎

Folgerung 9. *$\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ sind äquivalent für $p, q \geq 1$. (Übungsaufgabe)*

8.4 Begriffe in metrischen Räumen

Sei (X, d) metrischer Raum.

- $B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ heißt *offene Kugel um a* mit Radius $r > 0$.
- $B_r[a] := \overline{B}_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$ heißt *abgeschlossene Kugel um a* mit Radius $r > 0$.

Hinweis: muss keine "übliche" Kugel sein, zum Beispiel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(0, x) = \|x\|_\infty < 1\}$ hat die Form eines "üblichen" Quadrats.

- Menge $M \subset X$ heißt *offen*, falls gilt $\forall x \in M\ \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset M$.
- Menge $M \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls $X \backslash M$ ist *offen*.
- Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von M, falls $\exists V \subset X$: V offen, $M \subset V \subset U$.
- $x \in M$ heißt *innerer Punkt* von M falls $\exists \epsilon > 0 : B_e(x) \subset M$.
- $x \in X \backslash M$ heißt *äußerer Punkt* von M falls $\exists \epsilon > 0 : B_e(x) \subset X \backslash M$.
- $x \in M$ heißt *Randpunkt* von M falls x weder *innerer* noch *äußerer* Punkt ist.
- $\operatorname{int} M :=$ Menge der inneren Punkte von M, heißt *Inneres* von M. (vgl. interior)
- $\operatorname{ext} M :=$ Menge der äußeren Punkte von M, heißt *Äußeres* von M. (vgl. exterior)
- $\partial M :=$ Menge der Randpunkte von M heißt *Rand* von M.
- $\operatorname{cl} M = \overline{M} := \operatorname{int} M \cup \partial M$ heißt *Abschluss* von M. (vgl. closure)
- Menge M heißt *beschränkt*, falls $\exists a \in X, r > 0 : M \subset B_r(a)$.
- $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von M falls $\forall \epsilon > 0$ enthält $B_\epsilon(x)$ unendlich viele Elemente aus M.

Beispiel 10. (a) Für $X = \mathbb{R}$ sind (falls nicht gesagt, ist $d(x,y) := |x-y|$ jeweils die Standardmetrik auf $\mathbb{R}$)

- $(a,b), (-\infty, a)$ offene Mengen,
- $[a,b], (-\infty, a]$ abgeschlossene Mengen,
- $[a,b)$ weder *offene* noch *abgeschlossene* aber *beschränkte* Menge,

Es gilt $\operatorname{int}(a,b) = \operatorname{int}[a,b] = (a,b), \operatorname{cl}(a,b) = \operatorname{cl}[a,b] = [a,b]$.

- $\mathbb{Q}$ ist weder *offen*, noch *abgeschlossen* in $\mathbb{R}$,
- $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \emptyset$,
- $\partial\mathbb{Q} = \emptyset$, $\operatorname{ext}\mathbb{Q} = \emptyset$,
- $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist *offene* Menge,
- $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$ ist *abgeschlossen* und *nicht beschränkt*,
- $[0,3]$ ist *Umgebung* von $[1,2]$,
- $B_r(a)$ ist *Umgebung* von a (eigentlich von $\{a\}$!),
- a ist *Häufungspunkt* (kurz *H.P.*) von der Menge $(a,b), [a,b]$ für $a<b$ aber nicht von $[a,a]$,
- alle $a \in \mathbb{R}$ sind *H.P.* von $\mathbb{Q}$.

(b) Für $X = \mathbb{R}$ mit diskreter Metrik gilt $x \in M \implies B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\} \subset M \implies$ alle $M \subset X$ sind *offen* und *abgeschlossen*.

(c) Für $X = \mathbb{R}^n$ mit $\|\cdot\|$: Übungsaufgabe.

Lemma 11. *Sei (X,d) metrischer Raum, dann:*

(1) *$B_r(a)$ ist stets offene Menge.*
(2) *$M \subset X$ ist beschränkt $\implies \forall a' \in X\ \exists r' > 0 : M \subset B_{r'}(a')$.*

Beweis. Zu (1): Sei $b \in B_r(a)$, $\epsilon := r - d(a,b) > 0$. Für beliebiges $x \in B_\epsilon(b)$ gilt: $d(a,x) \leq d(a,b) + d(b,x) < d(a,b) + \underbrace{r - d(a,b)}_{\epsilon} = r \implies B_\epsilon(b) \subset B_r(a) \implies$ Behauptung.

Zu (2): Sei $M \subset B_r(a)$, $a' \in X$ beliebig, $r' := r + d(a,a')$. Weiterhin sei $m \in M \implies d(m,a') \leq d(m,a) + d(a,a') < r + d(a,a') = r' \implies m \in B_{r'}(a')$.

■

Satz 12 (topologische Eigenschaften). *Sei (X,d) metrischer Raum R, $\mathcal{T} := \{U \subset X \mid U$ offen $\}$, dann:*

(1) *$X, \emptyset \in \mathcal{T}$.*
(2) *$\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$ falls $U_i \in \mathcal{T}$ für $i = 1, ..., n$.*
(3) *$\bigcup_{U \in \mathcal{T}'} U \in \mathcal{T}$ falls $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$.*

Beweis. Zu (1): Definition für "offene Menge" ist wahr für $\emptyset$. X ist offen da stets $B_\epsilon(x) \subset X$.

Zu (2): Sei $X \in \bigcap_{i=1}^n U_i \implies \exists \epsilon_i > 0;\ \forall i = 1, ..., n. \overset{\epsilon := \min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}}{\implies} B_\epsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i \implies$ Behauptung.

Zu (3): Sei $x \in \bigcup_{U \in \mathcal{T}'} U \implies x \in \tilde{U} \implies \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset \tilde{U} \subset \bigcup_{U \in \mathcal{T}'} U \implies$ Behauptung.

■

Hinweis: Durchschnitt beliebig vieler offenen Mengen ist in allgemeinen nicht offen! Zum Beispiel $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0,1]$ ist abgeschlossen. Komplementbildung in *Satz 12* liefert:

Folgerung 13. *Sei (X,d) metrischer Raum, dann:*

(1) *$X, \emptyset$ sind abgeschlossen.*
(2) *Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*
(3) *Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Sei X menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X, dann heißt $\mathcal{T}$ *Topologie* und $(X, \mathcal{T})$ heißt *topologischer Raum*, falls (1), (2), (3) aus *Satz 12* erfüllt sind. Mengen $U \in \mathcal{T}$ heißen dann (per Definition) *offen* und Mengen V mit $X \backslash V = \overline{V} \in \mathcal{T}$ heißen *abgeschlossen. Folglich:* Oben definierte offene Mengen in metrischen Räumen bilden ein Spezialfall für eine Topologie. *Beachte:* In metrischem Raum (X, d) ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ stets eine Topologie.

Satz 14. *Seien $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ äquivalente Normen auf X und $U \subset X$, dann gilt:*

$$U \text{ ist offen bezüglich } \|\cdot\|_1 \iff U \text{ ist offen bezüglich } \|\cdot\|_2.$$

Beweis. Es gilt $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2 \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in X : \alpha\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta\|\cdot\|_1$.

"$\Longrightarrow$": Sei U offen in $(X, \|\cdot\|_1)$, $u \in U$, dann existiert $\epsilon > 0 : B_\epsilon^{(1)}(u) \subset U$. Setze $\epsilon' := \epsilon \cdot \alpha$. Sei $x \in B_{\epsilon'}^{(2)}(u)$, dann $\epsilon' > \|u - x\|_2 \geq \alpha\|u - x\|_1 \; \forall x \in B \iff \epsilon \cdot \alpha > \alpha\|u - x\|_1$. Da $u \in U$ beliebig ist und $x \in B_\epsilon^{(2)}(u)$ beliebig ist $\Longrightarrow U$ ist offen bzgl. $\|\cdot\|_2 \Longrightarrow U$ ist offen in $(X, \|\cdot\|_2)$.

"$\Longleftarrow$": Analog.

■

Satz 15. *Sei (X, d) metrischer Raum mit $M \subset X$, dann:*

(1) $\operatorname{int} M$, $\operatorname{ext} M$ *sind offen.*
(2) ∂M, $\operatorname{cl} M$ *sind abgeschlossen.*
(3) $M = \operatorname{int} M$ *falls M offen ist,* $M = \operatorname{cl} M$ *falls M abgeschlossen ist.*

Beweis. Zu (1): Sei $x \in M$, das heißt x ist innerer Punkt von $M \Longrightarrow \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset M$.
Da $B_\epsilon(x)$ offen, ist jedes $y \in B_\epsilon(x) \subset \operatorname{int} M \Longrightarrow B_\epsilon(x) \subset \operatorname{int} M \Longrightarrow$ Behauptung. (ext M analog)

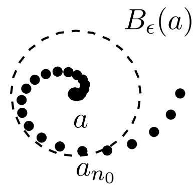
Zu (2): $\partial M = C \backslash \underbrace{(\operatorname{int} M \cup \operatorname{ext} M)}_{\text{offen}}$. $\operatorname{cl} M = X \backslash \operatorname{ext} M$ ist abgeschlossen.

Zu (3): M offen: es ist stets $\operatorname{int} M \subset M$ und da M offen $M \subset \operatorname{int} M \Longrightarrow$ Behauptung.
M abgeschlossen $\Longrightarrow X \backslash M$ offen $\Longrightarrow X \backslash M = \operatorname{int}(X \backslash M) = \operatorname{ext} M = X \backslash \operatorname{cl} M \Longrightarrow$ Behaptung.

■

9 Konvergenz

Sei (X, d) metrischer Raum. Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (das heißt $a_n \in X$) heißt *konvergent* falls $a \in X$ existiert mit $\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_n, a) < \epsilon\ \forall n \geq n_0$. Dann heißt a *Grenzwert (Limes)*. Schreibe $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ bzw. $a_n \longrightarrow a$ für $n \longrightarrow \infty$ oder $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Sprich: "Für jede Kugel um Grenzwert befinden sich ab einem gewissen Index fasst alle Folgenglieder innerhalb der Kugel." Folge $\{a_n\}$ heißt *divergent*, falls sie nicht konvergent ist.



Folgerung 1. *Für Folge $\{a_n\}$ gilt: $\forall\epsilon > 0$: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \iff$ jede Kugel $B_\epsilon(a)$ enthält* fast alle *Folgenglieder a_n, das heißt alle a_n bis auf endlich viele.*

Beispiel 2 (Konstante Folge). Sei $\{a_n\} = \{a\}_{n\in\mathbb{N}}$ (das heißt $a_n = a\ \forall n$) $\implies d(a_n, a) = d(a, a) = 0 < \epsilon\ \forall\epsilon > 0, n \in \mathbb{N} \implies a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Beispiel 3. Sei $X = \mathbb{R}, \{a_n\} := \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$. Nach *Satz 5.7*: $\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \epsilon$; ferner $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}\ \forall n \geq n_0 \implies \forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = d\left(\frac{1}{n}, 0\right) < \epsilon\ \forall n \geq n_0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beispiel 4. Sei $X = \mathbb{R}$. Für $a > 0$ gilt nach *Satz 5.20*: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beispiel 5. Sei $X = \mathbb{R}, \{a_n\} := \{(-1)^n\}$. Angenommen $\lim_{n\to\infty}(-1)^n = a$ für $a \in \mathbb{R} \implies$ für $\epsilon = \frac{1}{2}\ \exists n_0 : |(-1)^n - a| < \frac{1}{2}\ \forall n \geq n_0 \implies 2 = |(-1)^{n_0+1} - a + a - (-1)^{n_0}| \leq |(-1)^{n_0+1} - a| + |(-1)^{n_0} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \implies \lightning \implies \{(-1)^n\}$ ist divergent.

Satz 6 (Eindeutigkeit der Konvergenz). *Sei (X, d) metrischer Raum, $\{a_n\}$ Folge in X. Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = a'$ dann $a = a'$.*

Beweis. Sei $\epsilon := \frac{1}{3}$, $d(a, a') = 3\epsilon$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a) < \epsilon$, $d(a_n, a') < \epsilon \implies 3\epsilon = d(a, a') \leq d(a, a_n) + d(a_n, a') < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon\ \forall n \geq n_0 \implies \epsilon < 0 \implies \lightning \implies d(a, a') = 0$. ■

Satz 7. *Sei (X, d) metrischer Raum, $\{a_n\}$ konvergente Folge in $X \implies$ Folge $\{a_n\}$ ist beschränkt (das heißt $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt).*

Bemerkung 8. *Umkehrung gilt in allgemeinem nicht (vgl.* Beispiel 5*).*

Beweis. Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, für $\epsilon = 1\ \exists n_0 : d(a_n, a) < 1\ \forall n \geq n_0$. Setze $r := \max\{d(a, a_n) \mid n < n_0\} + 1 \implies a_n \in B_r(a)\ \forall n$. ■

Beispiel 9. $X = \mathbb{R}$ mit diskreter Metrik, betrachte $\{a_n\}$. Angenommen $a = \lim_{n\to\infty} a_n \implies$ für $\epsilon = \frac{1}{2}$ $\exists n_0 : a_n \in B_{\frac{1}{2}}(a) = \{a\}$ $\forall n > n_0 \implies a_n = a$ $\forall n \geq n_0$, d.h. fast alle $a_n = a$, folglich ist $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ divergent (kein $\lightning$ zu *Beispiel 3* und *Satz 6*).

Beispiel 9 zeigt: Konvergenz ist von Metrik abhängig.

Beispiel 10. Sei $X = \mathbb{C}$ mit $|\cdot|$ (d.h. $d(z, z') = |z - z'|$). Betrachte $\{z^n\}$ für $z \in \mathbb{C}$ (betrachte *Satz 5.7* für $K = \mathbb{R} : |z^n| = |z|^n$).

(a) $|z| < 1 :$ $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 : |z^n - 0| = |z|^n < \epsilon$ $\forall n \geq n_0 \implies \lim_{n\to\infty} z^n = 0$.
(b) $|z| > 1 :$ $\forall r > 0$ $\exists n_0 : |z^{n_0} - 0| = |z|^{n_0} > r \implies \nexists r > 0 : z^n \in B_r(0)$ $\forall n \in \mathbb{N} \overset{\text{Lemma 8.11}}{\implies} \{z^n\}$ ist nicht beschränkt $\overset{\text{Satz 7}}{\implies}$ Folge ist divergent.
(c) $z = 1$: offenbar $\lim\limits_{n\to\infty} 1^n = 1$.
(d) $|z| = 1,\ z \neq 1$: Angenommen $\lim_{n\to\infty} z^n = \tilde{z}$. Für $\epsilon := \frac{1}{2}|z - 1|$ $\exists n_0 : |z^n - \tilde{z}| < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\implies 2\epsilon = |z - 1| = \underbrace{|z^{n_0}|}_{=1}|z - 1| = |(z^{n_0+1} - \tilde{z}) + (\tilde{z} - z^{n_0})| < 2\epsilon$ $\forall n \geq n_0 \implies \lightning \implies \{z^n\}$ ist divergent.

Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X, $\{n_k\}$ Folge in $\mathbb{N}$ mit $n_{k+1} > n_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Dann heißt $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *Teilfolge* von $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Schreibe für *T.F.* auch kurz $\{a_{n'}\}$. $\alpha \in X$ heißt *Häufungswert* der Folge $\{a_n\}$ in X falls $\forall \epsilon > 0$ enthält $B_\epsilon(\alpha)$ unendlich viele a_n.

(Vorsicht! H.W. α der Folge $\{a_n\}$ muss *nicht* H.P. der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sein, zum Beispiel die konstante folge besitzt unendlich viele H.W., die analog konstruierte Menge nicht.)

Satz 12. *Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folge im metrischen Raum (X, d). Dann gilt:*

(1) *Falls $a_n \longrightarrow a \implies a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ für jede Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.*
(2) *α ist Häufungswert der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \iff \exists$ Teilfolge $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} : a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.*
(3) (Teilfolgenprinzip) *Falls jede Teilfolge $\{a_{n'}\}_{n'\in\mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge $\{a_{n''}\}_{n''\in\mathbb{N}}$ besitzt, so dass $a_{n''} \overset{n''\to\infty}{\longrightarrow} a \implies a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.*

Beweis. Zu (1): Folgt direkt aus Definition.
Zu (2): "$\implies$": es gibt $n_k \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(\alpha)$, $n_{k+1} > n_k$ $\forall k \implies \{a_{n_k}\}_k$ ist T.F. mit $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
"$\impliedby$": $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \implies \forall \epsilon > 0$ enthält $B_\epsilon(\alpha)$ fast alle $a_{n_k} \implies$ Behauptung.
Zu (3): Selbststudium.

■

Zurück zum *Beispiel 5*: $a_n = (-1)^n$, offenbar $\left\{(-1)^{2k}\right\}_k$, $\left\{(-1)^{2k+1}\right\}_k$ sind T.F. mit Grenzwert 1 bzw. $(-1) \overset{\text{Satz 12}}{\implies} \left\{(-1)^n\right\}$ nicht konvergent. Offenbar sind 1 und (-1) H.W. von $\left\{(-1)^n\right\}$.

Satz 13. *Sei (X, d) metrischer Raum, $M \subset X$ Teilmenge, dann: M ist abgeschlossen $\iff$ für jede konvergente Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gilt: $\lim_{n\to\infty} a_n \in M$.*

Beweis. "$\implies$": Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, $a_n \longrightarrow a \notin M \overset{X\backslash M \text{ offen}}{\implies} \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(a) \subset X\backslash M \implies a_n \not\longrightarrow a \implies \lightning \implies$ Behauptung.

"$\Longleftarrow$": Sei $X\backslash M$ nicht offen $\Longrightarrow$ $\exists a \in X\backslash M$ mit $B_\epsilon(a) \cap M \neq \emptyset\ \forall \epsilon > 0$ $\Longrightarrow$ $\exists$ Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in M (zum Beispiel $a_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap M$) mit $a_n \longrightarrow a \in M \overset{a\notin M}{\Longrightarrow} \lightning \Longrightarrow X\backslash M$ offen $\Longrightarrow$ Behauptung.

■

9.1 Konvergenz in normierten Räumen

Sei X normierter Raum (d.h. ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $\|\cdot\|$). Beachte: $a \pm b, \lambda a$ sind definiert $\forall a, b \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$. $a_n \longrightarrow a$ in $(X, \|\cdot\|)$, $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ in $(\mathbb{K}, \|\cdot\|)$.

Satz 14. *Sei X normierter Raum, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, dann:*

(1) *$\{a_n \pm b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.*
(2) *$\{\lambda_n a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n a_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$.*
(3) *Falls $\lambda \neq 0$ gilt, existiert $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ mit $\lambda_n \neq 0\ \forall n \geq \tilde{n}$ und $\left\{\frac{1}{\lambda_n}\right\}_{n\geq\tilde{n}}$ konvergiert in $\mathbb{K}$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda}$.*

Beweis.

Zu (1): Übung.

Zu (2): $\{a_n\}$ ist beschränkt $\Longrightarrow \exists r > 0 : a_n \in B_r(0)\ \forall n$, das heißt $\overbrace{\|a_n\|}^{d(a_n,0)} \leq r\ \forall n$, o.B.d.A. setze $r > |\lambda|$. Für (festes aber beliebiges) $\epsilon > 0\ \exists n_0 : |\lambda_n - \lambda| < \frac{\epsilon}{2r}\ \forall n \geq n_0, \|a_n - a\| < \frac{\epsilon}{2r}$ $\Longrightarrow \|\lambda_n a_n - \lambda a\| \leq \|\lambda_n a_n - \lambda a_n\| + \|\lambda a_n - \lambda a\| = ...$ (Beachte: Der Schritt der Umwandlung zur Dreiecksungleichung wurde übersprungt) ... $= |\lambda_n - \lambda| \cdot \|a_n\| + |\lambda| \cdot \|a_n - a\| \leq \frac{\epsilon}{2r} \cdot r + r \cdot \frac{\epsilon}{2r} = \epsilon\ \forall n \geq n_0$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. Für (festes aber beliebiges) $\epsilon > 0\ \exists n_0$:

$$|\lambda - \lambda_n| < \min\left\{\frac{|\lambda|}{2}, \epsilon \cdot \frac{|\lambda|^2}{2}\right\}\ \forall n \geq n_0. \tag{1}$$

Zu (3): Da

$$|\lambda| \leq |\lambda - \lambda_n| + |\lambda_n| = |\lambda_n| \geq |\lambda_n| - |\lambda - \lambda_n| \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{2}(\lambda)\ \forall n \geq n_0 \tag{2}$$

$\Longrightarrow \left|\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda}\right| = \left|\frac{(\lambda - \lambda_n)}{\lambda \cdot \lambda_n}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|^2} \cdot |\lambda - \lambda_n| \overset{(1)}{<} \epsilon\ \forall n \geq n_0 \Longrightarrow$ Behauptung.

■

Hinweis: Aussagen gelten auch für konstante Folgen, das heißt $(a_n = a, \lambda_n = \lambda, ...\ \forall n)$. Da $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ein V.R. über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ein V.R. über $\mathbb{C}$ ist, folgt:

Folgerung 15. *Seien $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit $\lambda_n \longrightarrow \lambda$, $\mu_n \longrightarrow \mu$, dann:*

(1) $\lambda_n \pm \mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \pm \mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda \pm \mu$.
(2) *Falls $\lambda \neq 0$ (o.B.d.A. alle $\lambda_n \neq 0$):* $\frac{\mu_n}{\lambda_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mu}{\lambda}$.

Beispiel 16. $X = \mathbb{R}$ (mit $|\cdot|$): $a_n = \frac{(2n^2+n+1)}{(n^2-1)}$. Das Quotientregel kann man hier nicht anwenden, es ist ein Trick erforderlich:

$$a_n = \frac{n^2\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}},$$

wenn alle Einzelterme konvergieren, dann konvergiert auch die gesamte Folge:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n+1}{n^2-1} = \frac{2+0+0}{1-0} = 2.$$

$\{a_n\}$ in normiertem Raum X heißt *Nullfolge* falls $a_n \longrightarrow 0$.

Lemma 17.

(1) *Sei X ein metrischer Raum, $a_n \longrightarrow a$ in X $\iff$ $d(a_n, a) \longrightarrow 0$ in $\mathbb{R}$. (Falls X ein normierter Raum, dann $\|a_n - a\| \longrightarrow 0$ in $\mathbb{R}$.)*
(2) *Sei $0 \le \alpha_n \le \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\beta_n \longrightarrow 0 \implies \alpha_n \longrightarrow 0$. (Siehe später:* Sandwich-Prinzip*)*

Beweis. Zu (1): Benutze $d(a_n, a) < \epsilon \iff |d(a_n, a) - 0| < \epsilon$.
Zu (2): Für $\epsilon > 0$ $\exists n_0 : \beta_n = |\beta_n - 0| < \epsilon$ $\forall n \ge n_0 \implies (\alpha_n - 0) = \alpha_n \le \beta_n < \epsilon$ $\forall n \ge n_0 \overset{\epsilon>0 \text{ bel.}}{\implies}$ Behauptung.

■

Satz 18. *Sei X ein normierter Raum, $\{a_n\}$ in X, dann: $a_n \longrightarrow a$ in $X \implies \|a_n\| \longrightarrow \|a\|$ in $\mathbb{R}$.*

Hinweis: Umkehrung der Aussage ist in allgemeinem falsch (vgl. *Beispiel 10.d*).

Beweis. $0 \le |\|a_n\| - \|a\|| \le \|a_n - a\| \longrightarrow 0 \overset{\text{Lemma 17}}{\implies}$ Behauptung. ■

Satz 19. *Seien $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume mit äquivalenten Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, dann gilt: $a_n \longrightarrow a$ in $\|\cdot\|_1 \iff a_n \longrightarrow a$ in $\|\cdot\|_2$.*

(Das heißt: Konvergenz ist unabhängig von Norm bei Äquivalenz.)

Beweis. $\exists \alpha, \beta \ge 0 : \alpha\|b\|_1 \le \|b\|_2 \le \beta\|b\|_1$ $\forall b \in X$. "$\Longrightarrow$": Es ist $0 < \|a_n - a\|_2 \le \beta\|a_n - a\|_1 \longrightarrow 0$, "$\Longleftarrow$": Analog. $\implies$ Behauptung. ■

Beispiel 20. Sei $X = \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), dann: $a_k \longrightarrow a$ bezüglich $\|\cdot\| \overset{\text{vgl. 8}}{\iff} a_k \longrightarrow a$ bezüglich $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$. *Später wird gezeigt:* alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ sind äquivalent. D.h. Konvergenz in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ ist unabhängig von der Norm! Warnung: Konvergenz ist nicht unabhängig von der Metrik in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$! (Z.B. diskrete Metrik.)

Satz 21 (Konvergenz in $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ bezüglich einer Norm). *Sei $\{a_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k = (a_k^1, ..., a_k^n) \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) und $a = (a^1, ..., a^n) \in \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$). Dann:* $\lim_{k\to\infty} a_k = a$ *in $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) $\iff$* $\lim_{k\to\infty} a_k^j = a^j$ *$\forall j = 1, ..., n$ in $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) bezüglich $\|\cdot\|$. (Zunächst bezüglich $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le \infty)$, später bezüglich beliebiger Norm)*

Beweis. (nur für $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ analog)

"$\Longrightarrow$": Sei $a_k \longrightarrow a$ in $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\|\cdot\|_p \overset{\text{Beispiel 20}}{\Longrightarrow} a_k \longrightarrow a$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. $\|a_k^j - a^j\| \leq \|a_k - a\|_\infty \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall j = 1, ..., n,\ k \in \mathbb{N} \implies$ Behauptung (nach *Sandwich-Prinzip*).

"$\Longleftarrow$": Sei $a_k^j \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a^j \ \forall j = 1, ..., n \implies \|a_k - a\| = \|a_k^1 - a^1\| + ... + \|a_k^n - a^n\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies a_k \longrightarrow a$ bezüglich $\|\cdot\|_1 \overset{\text{Beispiel 20}}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

■

Hinweis: Verzichte zukünftig in $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ bei Konvergenz in der Regel auf Angabe der konkreten Norm (insbesondere auch auf stets durch Norm induzierte Metrik).

Bemerkung 22. *Bei Konvergenz in $\mathbb{C}$ gilt: $z_n = x_n + iy_n \longrightarrow z = x + iy \overset{\text{Def. von } \|\cdot\|}{\Longrightarrow} (x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$ in $\mathbb{R}^2 \overset{\text{Satz 21}}{\Longleftrightarrow} \Re(z_n) \longrightarrow \Re(z)$ und $\Im(z_n) \longrightarrow \Im(z)$.*

Beispiel 23. Sei $\{a_k\} = \left\{\overbrace{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}, \sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k}\right)}^{(a_k^1, a_k^2)}\right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{\begin{pmatrix} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \\ \sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k} \end{pmatrix}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2$. Es gilt: $0 \leq a_k^1 = \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)} < \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \overset{\text{Lemma 17}}{\Longrightarrow} a_k^1 \longrightarrow 0$, $a_k^2 = \sqrt{k + \sqrt{k}} - \sqrt{k} = \frac{\sqrt{k}}{\left(\sqrt{k+\sqrt{k}} + \sqrt{k}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{k}}} + 1\right)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \implies \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(a_k^1, a_k^2) = \left(0, \frac{1}{2}\right) = (0, \frac{1}{2})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$.

Beispiel 24. Sei $a_k = \frac{1+ki}{1+k} \in \mathbb{C} \implies \Re(a_k) = \frac{1}{1+k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\Im(a_k) = \frac{k}{1+k} = \frac{1}{\frac{1}{k}+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \overset{\text{Rechenr.}}{\Longrightarrow} \lim_{k\to\infty} a_k = 1$.

9.2 Konvergenz in $\mathbb{R}$

(unter Verwendung der Ordnung)

Satz 25. *Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$, dann gilt:*

(1) *Sei $a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$ und $a_n \longrightarrow a,\ b_n \longrightarrow b \implies a \leq b$.*
(2) (Einschließungssatz *oder auch* Sandwich-Prinzip für Folgen) *Sei $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$ und $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c,\ b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c \implies c_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$.*

Hinweis zu (1): $a_n < b_n \ \forall n \geq n_0 \ \not\Longrightarrow\ a < b$. Sei zum Beispiel $a_n = -\frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n} \implies a_n \longrightarrow 0, b_n \longrightarrow 0$.

Beweis. Zu (1): Angenommen $a > b, \epsilon := \frac{(a-b)}{2} > 0 \implies \exists \tilde{n} : a_n \in B_\epsilon(a), b_n \in B_\epsilon(b) \ \forall n \geq n_0$ $\implies b_n < b + \epsilon = a - \epsilon < a_n \ \forall n \geq \tilde{n} \implies \lightning \implies$ Behauptung.

Zu (2): Offenbar: $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \overset{\text{Lemma 17}}{\Longrightarrow} c_n - a_n \longrightarrow 0$. $c_n = a_n + (c_n - a_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c + 0 = c \implies$ Behauptung.

■

Folge $\{a_n\}$ in $\mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *monoton fallend*) falls $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$) $\forall n \in \mathbb{N}$. In beiden Fällen heißt $\{a_n\}$ *monoton*. Falls stets $a_n > a_{n+1}$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$) gilt, dann heißt $\{a_n\}$ *streng monoton wachsend* (bzw. *streng monoton fallend*) und allgemein *streng monoton*.

Satz 26. *Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$* monoton *und beschränkt. Dann ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a := \sup\{a_n \mid$
$n \in \mathbb{N}\}$ falls $\{a_n\}$ monoton wachsend ist, $a := \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ falls $\{a_n\}$ monoton fallend ist.*

Beweis. Sei $\{a_n\}$ monoton wachsend, beschränkt $\implies a := \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ existiert $\overset{\textit{Satz 5.17}}{\implies}$ $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : a - \epsilon < a_{n_0} \le a_n < a\ \forall n \ge n_0 \implies a_n \longrightarrow a$. (Fallend analog.) ■

Beispiel 27. Sei $\{a_n\}$ Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n}), a_0 > 0, x > 0$. *Vollständige Induktion:* $a_n > 0\ \forall n$, somit ist $\{a_n\}$ wohldefiniert. Es ist $a_{n+1}^2 - x = \frac{1}{4}\big(a_n - \frac{x}{a_n}\big)^2 \ge 0\ \forall n \implies a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{x}{a_n}\big) = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - x) \ge 0\ \forall n \implies \{a_n\}$ ist monoton fallend und beschränkt $\implies \{a_n\}$ ist konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$ Wegen $a_n a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + x) \overset{\lim_{n\to\infty}}{\implies} a^2 = \frac{1}{2}(a^2 + x) \implies a^2 = x \implies a = \sqrt{x}$. D.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}$. *Fehlerabschätzung:* $a_{n+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{x}{a_n}\big) - \sqrt{x} = \frac{1}{2a_n}(a_n - \sqrt{x})^2 \overset{a_n \ge \sqrt{x}}{\le} \frac{1}{2\sqrt{x}}(a_n - \sqrt{x})^2$. Dies ist sogenannte *quadratische Konvergenz* ("schnelle" Konvergenz!), d.h. (grob) der Anzahl der signifikanten Dezimalstellen verdoppelt sich in jedem Schritt.

Beispiel 28. Es ist $\lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!} = 0\ \forall z \in \mathbb{C}$. Betrachte reelle Folge $\{a_n\}$ mit $a_n := \frac{|z|^n}{n!}$ $(\ge 0\ \forall n)$

$$\implies a_{n+1} = \frac{|z|}{n+1} a_n \tag{$*$}$$

$\implies \exists \tilde{n} : \{a_n\}_{n \ge \tilde{n}}$ fallend (Hinweis: $\frac{|z|}{\tilde{n}+1} < 1$) $\implies a_n \longrightarrow a \underset{\text{in } (*)}{\overset{\lim_{n\to\infty}}{\implies}} a = 0 \cdot a \implies a = 0 \implies \big|\frac{z^n}{n!} - 0\big| = \frac{|z|^n}{n!} \longrightarrow 0 \implies$ Behauptung.

Theorem 29 (Bolzano-Weierstraß). *Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. $\exists x_0, y_0 \in \mathbb{R} : x_0 \le a_n \le y_0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Rekursive Definition von $x_n, y_n \in \mathbb{R}$:

$$x_n, y_n : \begin{cases} z_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}, x_{n+1} := z_{n+1}, y_{n+1} := y_n & \text{falls undendlich viele } a_n \in [z_{n+1}, y_n], \\ x_{n+1} := x_n, y_{n+1} := z_{n+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\implies$ Folge $I_n = [x_n, y_n]$ ist eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R} \underset{\text{vollst.}}{\overset{\mathbb{R}\text{ ist}}{\implies}} \exists \alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \implies \alpha$ ist Häufungswert von $\{a_n\} \overset{\textit{Satz 12}}{\implies}$ Behauptung. ■

Beispiel 30. $\{z^n\}$ für $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \ne 1$ ist divergent (vgl. *Beispiel 10*) aber $\{\Re(z^n)\}$ und $\{\Im(z^n)\}$ sind beschränkte Folgen in $\mathbb{R} \implies \exists$ Teilfolge $\{n'\}$ von $\{n\}$ mit $\Re(z^{n'}) \overset{n'\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \implies \exists$ Teilfolge $\{n''\}$ von $\{n'\}$ mit $\Im(z^{n''}) \overset{n''\to\infty}{\longrightarrow} \beta \implies z^{n''} \overset{n''\to\infty}{\longrightarrow} \alpha + i\beta$, d.h. es existiert eine konvergente Teilfolge in $\mathbb{C}$.

Sei $\{a_n\}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. $H := \big\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha$ ist H.W. von $\{a_n\}\big\}$ ($\ne \emptyset$ nach *Theorem 29*).

- $\limsup_{n\to\infty}\ a_n := \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \sup\ H$ heißt *Limes superior* von $\{a_n\}$.
- $\liminf_{n\to\infty}\ a_n := \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \inf\ H$ heißt *Limes inferior* von $\{a_n\}$.

Beachte: $\limsup$ und $\liminf$ existieren stets für beschränkte Folgen.

Satz 31. *Sei $\{a_n\}$ beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, dann:*

(1) *Sei $\{a'_n\}$ Teilfolge mit $a_{n'} \overset{n'\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \implies \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \alpha \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.*
(2) *$\alpha' := \liminf_{n\to\infty} \ a_n, \alpha'' := \limsup_{n\to\infty} \ a_n$ sind Häufungswerte von $\{a_n\}$. (*Folglich: $\inf \ H = \min \ H, \sup \ H = \max \ H$ *und $\exists$ Teilfolge $\{a_{n'}\}, \{a_{n''}\}$ mit $a_{n'} \longrightarrow \alpha', a_{n''} \longrightarrow \alpha''$.)*
(3) *$a_n \longrightarrow a \iff a = \liminf_{n\to\infty} \ a_n = \limsup_{n\to\infty} \ a_n$. (Das heißt a ist einziger Häufungswert von $\{a_n\}$.)*

Beweis.

Zu (1): $\alpha \in H$ nach *Satz ?* $\implies$ Behauptung.
Zu (2): Nach *Satz 5.17*: für beliebiges $\epsilon > 0 \ \exists \alpha \in H : \alpha = \inf \ H, \alpha \in B_\epsilon(\alpha')$. Da $B_\epsilon(\alpha')$ offen ist, existiert $B_{\tilde{\epsilon}}(\alpha) \subset B_\epsilon(\alpha) \underset{\text{von } \{\alpha_n\}}{\overset{\alpha \text{ H.W.}}{\implies}}$ unendlich viele a_n in $B_\epsilon(\alpha) \implies$ Behauptung.
Zu (3): Übungsaufgabe.

■

Beispiel 32. Sei $\{q_n\}$ in $\mathbb{R}$ Folge aller rationalen Zahlen im Intervall $(0,1)$ (zum Beispiel angeordnet analog zu Beweis von *Satz 5.23*). Menge der Häufungswerten $H := [0,1] \implies \liminf_{n\to\infty} \ q_n = 0, \limsup_{n\to\infty} \ q_n = 1$.

Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ *konvergiert uneigentlich* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) falls $\forall R > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq R$ (bzw. $a_n \leq -R$) $\forall n \geq n_0$. (Heißt auch *bestimmt divergent* gegen $\pm\infty$; "uneigentlich" wird meist weggelassen.) Schreibe $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ bzw. $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

Beispiel 33. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)}{(n+1)} = +\infty$, denn für $R > 0$ gilt $\frac{(n^2+1)}{(n+1)} = \frac{\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} \geq \frac{n}{2} > R \ \forall n \geq 2R - 1$.

Satz 34 (Stolz). *(für "$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$") Seien $\{a_n\}, \{b_n\}$ Folgen in $\mathbb{R}$, $\{b_n\}$ ist streng monoton wachsend, $b_n \longrightarrow \infty$. Dann*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n},$$

falls Grenzwert rechts existiert *(d.h. "Unendlich über Unendlich").*

Hinweis: Satz ist auch richtig falls $\{b_n\}$ streng wachsend $\forall n \geq \tilde{n}$ ist.

Beweis. Grenzwert rechts sei $l \in \mathbb{R}$ ($l = \pm\infty$ analog), o.B.d.A. $b_n > 0\ \forall n$. Sei $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\implies \exists n_0 : \left|\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - l\right| < \epsilon\ \forall n \geq n_0 \\
&\implies (l-\epsilon)(b_{n+1} - b_n) \leq a_{n+1} - a_n \leq (l+\epsilon)(b_{n+1} - b_n)\ \forall n \geq n_0 \\
&\overset{\sum_{m=n_0}^{n-1}}{\implies} (l-\epsilon)(b_m - b_{n_0}) \leq a_m - a_{n_0} \leq (l+\epsilon)(b_m - b_{n_0})\ \forall m > n_0 \qquad \Big/ \div b_m \\
&\implies (l-\epsilon)\left(1 - \frac{b_m}{b_n}\right) + \frac{a_{n_0}}{b_m} \leq \frac{a_m}{b_m} \leq (l+\epsilon)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_m}\right) + \frac{a_{n_0}}{b_m}\ \forall m > n_0 \\
&\overset{m\to\infty}{\implies} l - \epsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_m}{b_m} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_m}{b_m} \leq l + \epsilon \\
&\underset{\text{bel.}}{\overset{\text{da } \epsilon>0}{\implies}} l = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_m}{b_m} = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_m}{b_m} \overset{\textit{Satz 31}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_m}{b_m}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Beispiel 35. $\limsup_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$ für $z \in \mathbb{C}, |z| > 1, k \in \mathbb{N}_{>0}$ fest. Für $k = 1$: $\frac{(n+1)-n}{(|z|^{n+1} - |z|^n)} = \frac{1}{|z|^n(|z|-1)} \underset{\textit{Stolz}}{\overset{\textit{Satz von}}{\longrightarrow}} 0 \implies \frac{n}{z^n} \longrightarrow 0 \implies$ Behauptung. Für $k > 1$: $\frac{n^k}{|z|^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[k]{|z|^n}}\right)^k \underset{\textit{-regel}}{\overset{\textit{Produkt-}}{\longrightarrow}} 0^k = 0 \implies$ Behauptung.

Satz 36. *Sei $\{a_n\}$ Folge mit $a_n \longrightarrow a$ im normierten Raum X. Dann gilt:*

$$\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j}_{\textit{arit. Mittel}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Beweis. Es ist $\left\|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j - a\right\| = \frac{1}{n}\left\|\sum_{j=1}^n a_j - a\right\| \leq \overbrace{\frac{\left(\sum_{j=1}^n \|a_j - a\|\right)}{n}}^{=:c_n}$. Dann $\frac{\left(\sum_{j=1}^{n+1}\|a_j-a\| - \sum_{j=1}^n \|a_j - a\|\right)}{\left((n+1)-n\right)} = \|a_{n+1} - a\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \underset{\textit{Stolz}}{\overset{\textit{Satz von}}{\implies}} c_n \longrightarrow 0 \implies$ Behauptung. $\blacksquare$

10 Vollständigkeit

Folge $\{a_n\}$ im metrischen Raum (X, d) heißt *Cauchy-Folge* (kurz C.F.) oder auch *Fundamentalfolge* falls: $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : d(a_n, a_m) < \epsilon\ \forall n, m \geq n_0$. Beachte: Es ist *kein* Grenzwert enthalten! "Die Abstände zwischen a_n und a_{n+1} sind immer kleiner."

Satz 1. *Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in metrischem Raum (X, d). Dann:*

(1) $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist* Cauchy-Folge.
(2) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist* Cauchy-Folge $\implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ist beschränkt und hat höchstens einen Häufungswert.*

Beweis. Zu (1): Sei $\epsilon > 0 \implies \exists n_0 : d(a_n, a) < \frac{\epsilon}{2}\ \forall n \geq n_0 \implies d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a_m, a) < \epsilon\ \forall n, m \geq n_0 \overset{\epsilon>0 \text{ bel.}}{\implies}$ Behauptung (jede konvergente Folge ist eine *Cauchy-Folge*).

Zu (2): $\exists n_0 : d(a_n, a_m) < 1\ \forall n, m \geq n_0 \implies$ Fast alle $a_n \in B_1(a_{n_0})$, offenbar folgt damit die Beschränktheit. Sei a Häufungswert von $\{a_n\}$, sei $\epsilon > 0 \implies$ Unendlich viele $a_n \in B_\epsilon(a)$ $\implies$ Fast alle $a_n \in B_\epsilon(a) \overset{\epsilon>0 \text{ bel.}}{\implies}$ nur ein Häufungswert ist möglich.

■

Sei $M \subset X$ beschränkt, nichtleer. Dann ist $\operatorname{diam} M := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in M\}$ der *Durchmesser* von M. Folge $\{A_n\}$ abgeschlossenen Mengen $A_n \subset X$ heißt *Schachtelung* falls:

(i) $A_n \neq \emptyset$,
(ii) $A_{n+1} \subset A_n\ \forall n \in \mathbb{N}$,
(iii) $\operatorname{diam} A_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beachte: Jede *Intervallschachtelung* in $\mathbb{R}$ ist eine *Schachtelung* in $\mathbb{R}$.

Lemma 2. *Sei $M \subset X$ beschränkt, $\neq \emptyset$. Dann ist* $\operatorname{diam} M = \operatorname{diam} (\operatorname{cl} M)$.

Beweis. Selbststudium. ■

Theorem 3. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, dann gilt für jede* Schachtelung $\{A_n\}$ *in X:* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \iff$ *Jede* Cauchy-Folge $\{a_n\}$ *in X ist konvergent (d.h. besitzt Grenzwert in X).*

Beweis. "$\Longrightarrow$": Sei $\{a_n\}$ Cauchy-Folge in X, setze $A_n := \operatorname{cl}\{a_k \mid k \geq n\} \implies \operatorname{diam} A_n \longrightarrow 0$, und $\{A_n\}$ ist eine Schachtelung $\implies \exists a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Für $\epsilon > 0\ \exists n_0 : \operatorname{diam} A_{n_0} < \epsilon \overset{a_n, a \in A_{n_0}}{\implies} d(a_n, a) < \epsilon\ \forall n \geq n_0 \overset{\epsilon>0 \text{ bel.}}{\implies} \{a_n\}$ konvergiert gegen a.

"$\Longleftarrow$": Sei $\{A_n\}$ Schachtelung, wähle $a_n \in A_n\ \forall n \in \mathbb{N} \implies a \in A_n\ \forall k \geq n \overset{\operatorname{diam} A_n \longrightarrow 0}{\implies} \{a_n\}$ ist Cauchy Folge $\overset{\text{Vorauss.}}{\implies} a_n \longrightarrow a \in X \underset{A_n \text{ abgesch.}}{\overset{\textit{Satz 9.13}}{\implies}} a \in A_n\ \forall n \implies$ Behauptung.

■

Lemma 4. *In $\mathbb{R}$ gilt: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ für jede Schachtelung $\{A_n\}$ $\iff$ $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ für jede Intervallschachtelung I_n.*

Beweis. "$\Longrightarrow$": Trivial, da jede Schachtelung eine Intervallschachtelung ist.
"$\Longleftarrow$": Zeige: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent, dann liefert *Theorem 3* die Behauptung. Sei $\{a_n\}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, $M_n := \{a_k \mid k \geq n\}$, $I_n := [\inf\ M_n, \sup\ M_n]$ (ist eine beschränkte Intervallschachtelung da die Cauchy-Folge beschränkt ist) $\Longrightarrow \{I_n\}$ ist eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \overset{\text{wie oben}\,``\Longrightarrow"}{\Longrightarrow} \{a_n\}$ ist konvergent, das heißt jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

■

Metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig* falls jede Cauchy-Folge $\{a_n\}$ in X konvergiert. Vollständiger normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Banach-Raum*.

Beachte: Begriff "vollständig" ist konsistent mit dem früheren Begriff in Abschnitt 5 in $\mathbb{R}$. Nach *Theorem 3* könnte man "vollständig"auch mit Schachtelungen definieren.

Folgerung 5. *Sei $\{a_n\}$ Folge im vollständigen metrischen Raum (X, d). Dann gilt: $\{a_n\}$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ $\{a_n\}$ ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Vgl. *Satz 1*, Definition von "vollständig". ■

Nach *Theorem 5.14* ist $\mathbb{R}$ vollständig, das heißt $\mathbb{R}$ ist ein Banach-Raum.

Theorem 6. *$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ mit $\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$, sind vollständige normierte Räume (das heißt Banach-Räume).* Später: *Sind auch vollständig bezüglich beliebiger Norm.*

Beweis. Für $\mathbb{R}^n$: Sei $\{a_k\}$ mit $a_k = (a_k^1, ..., a_k^n) \in \mathbb{R}^n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$ bezüglich $\|\cdot\|_p$. Offenbar ist $\{a_k\}$ auch Cauchy-Folge bezüglich äquivalente Norm $\|\cdot\|_\infty \Longrightarrow \{a_k^j\}_k$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ für jedes $j = 1, ..., n \overset{\mathbb{R}\text{ vollst.}}{\Longrightarrow} \{a_k^j\}_k$ konvergiert $\forall j \overset{\textit{Satz 9.21}}{\Longrightarrow} \{a_k\}$ konvergiert in $\mathbb{R}^n \Longrightarrow$ Behauptung. Für $\mathbb{C}$: Zurückführung auf $\mathbb{R}^2$ (vgl. *Bemerkung 9.22*). Für $\mathbb{C}^n$: Analog zu $\mathbb{R}^n$. ■

11 Kompaktheit

Sei (X,d) metrischer Raum. Menge von Teilmengen $\mathcal{U} \subset \mathcal{T} := \{U \subset X \mid U \text{ ist offen}\}$ (Topologie) heißt *offene Überdeckung* von $M \subset X$ falls $M \subset \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$. Überdeckung $\mathcal{U}$ heißt *endlich* falls Menge $\mathcal{U}$ endlich ist (d.h. $\mathcal{U} = \{U_1,...,U_n\}$). Menge $M \subset X$ heißt *(überdeckungs)-kompakt* falls jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von M eine endliche Teilüberdeckung $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}$ enthält, d.h. $\exists U_1,...,U_n \in \mathcal{U} : M \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$. Warnung: $\exists$ eine endliche offene Überdeckung $\tilde{\mathcal{U}}$ von M $\not\Longrightarrow$ M ist kompakt. Für Abbildung $A : I \longrightarrow X$ (I, X sind beliebige Mengen) schreibt man auch $\{a_i\}_{i\in I}$ und nennt dies *Familie* mit *Indexmenge* I ($I = \mathbb{N}$ ergibt eine *Folge)* und *Quellmenge* (auch *indizierte Menge*) X. Bemerkung: Definition von "kompakt" mittels Familien $\{U_i\}_{i\in I}$ in Literatur ist gleichwertig. Beachte: $U_i = U_j$ für $i \neq j$ ist möglich, aber alle U_k in Menge $\{U_k \mid k \in I\}$ sind verschieden. Menge $M \subset X$ heißt *folgenkompakt* falls jede Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus M (d.h. $a_n \in M\ \forall n \in \mathbb{N}$) eine konvergente Teilfolge $\{a'_n\}_{n'\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert in M besitzt.

Theorem 1. (Äquivalenz von H.-Borelsche-Überdeckungseigenschaft und Bolzano-Weierstraß-Eigenschaft) *Sei (X,d) metrischer Raum, $M \subset X$. Dann gilt: M ist kompakt $\Longleftrightarrow$ M ist folgenkompakt.*

Beweis. "$\Longrightarrow$": Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in M. Angenommen $\{a_n\}$ hat keinen Häufungspunkt in M (und damit keine konvergente Teilfolge) $\Longrightarrow \forall x \in M\ \exists \epsilon_x > 0 : B_{\epsilon_x}(x)$ enthält nur endlich viele a_n. $\mathcal{U} = \{B_{\epsilon_x}(x) \mid x \in M\}$ ist offene Überdeckung von M $\underset{\text{kompakt}}{\overset{M \text{ ist}}{\Longrightarrow}}$ Bereits endlich viele $B_{\epsilon_x}(x)$ überdecken M $\Longrightarrow$ Nur endlich viele a_n sind in M $\Longrightarrow\ \lightning \Longrightarrow \{a_n\}$ hat Häufungspunkt in M $\overset{\textit{Satz 9.12}}{\Longrightarrow}$ M ist folgenkompakt.

"$\Longleftarrow$": (a) Betrachte zunächst für festes $\epsilon > 0$ offene Überdeckung $\mathcal{U}_\epsilon := \{B_\epsilon(x) \mid x \in M\}$ von M. Angenommen es existiert keine endliche Überdeckung $\mathcal{U}'_\epsilon \subset \mathcal{U}_\epsilon$ von M $\Longrightarrow$ $\exists$ Folge $\{x_k\}$ in $M : x_1 \in M$ und $x_{k+1} \in M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon(x_i) \Longrightarrow d(x_k, x_l) > \epsilon\ \forall k \neq l \Longrightarrow \{x_k\}$ hat einen Häufungspunkt $\underset{\text{folgenk.}}{\overset{M \text{ ist}}{\Longrightarrow}}\ \lightning \Longrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists$ endliche Überdeckung $\mathcal{U}'_\epsilon \subset \mathcal{U}_\epsilon$ von M.

(b) Sei $\mathcal{U}$ beliebige offene Überdeckung von M und

$$\nexists \text{ endliche Überdeckung } \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \text{ von } M. \tag{1}$$

Nach (a): $\forall \epsilon_k := \frac{1}{k}\ \exists$ offene Überdeckung $\mathcal{U}_k$ von M mit endlich vielen ϵ_k-kugeln. Nach (1): $\forall k\ \exists x_k \in M : B_k := B_{\epsilon_k}(x_k) \in \mathcal{U}_k$ und

$$\nexists \text{ endliche Überdeckung } \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \text{ von } M \cap B_k. \tag{2}$$

Da M folgenkompakt ist: $\exists$ Teilfolge $\{x_{k'}\} : x_{k'} \overset{k'\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{x} \in M$, $\exists \tilde{\mathcal{U}} \in \mathcal{U} : \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{U}}$ $\overset{\tilde{\mathcal{U}} \text{ offen}}{\Longrightarrow} \exists \tilde{\epsilon} > 0 : B_{\tilde{\epsilon}}(\tilde{x}) \subset \tilde{\mathcal{U}}$, $\exists k_0 : d(x_{k_0}) < \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$ und $\frac{\epsilon}{k_0} = \frac{1}{k_0} < \frac{\tilde{\epsilon}}{2} \Longrightarrow \forall x \in B_{k_0} : d(x, \tilde{x}) \leq d(x, x_{k_0}) + d(x_{k_0}, \tilde{x}) < \tilde{\epsilon} \Longrightarrow B_{k_0} \subset B_{\tilde{\epsilon}}(\tilde{x}) \subset \tilde{\mathcal{U}} \Longrightarrow \{\tilde{\mathcal{U}}\} \subset \mathcal{U}$ ist endliche Überdeckung von $B_{k_0} \overset{(2)}{\Longrightarrow}\ \lightning \overset{(1)}{\Longrightarrow} \exists$ endliche Überdeckung $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ von $M \Longrightarrow$ Behauptung.

■

Satz 2. (a) *M ist folgenkompakt $\Longrightarrow$ M ist beschränkt und abgeschlossen.*
(b) *M ist folgenkompakt, $A \subset M$ ist abgeschlossen $\Longrightarrow$ A ist folgenkompakt.*

Beweis.

Zu (a): Angenommen M ist unbeschränkt $\Longrightarrow$ $\exists$ eine unbeschränkte Folge $\{a_n\}$ in M die keine Häufungswerte besitzt $\Longrightarrow$ $\nexists$ konvergente Teilfolge $\Longrightarrow$ $\lightning$ $\Longrightarrow$ M ist beschränkt. Sei $\{a_n\}$ Folge in M mit $a_n \to a \overset{M \text{ ist folgen-}}{\underset{\text{kompakt}}{\Longrightarrow}} a \in M \overset{\textit{Satz 9.13}}{\Longrightarrow} M$ ist abgeschlossen.

Zu (b): Sei $\{a_n\}$ Folge in $A \subset M \overset{M \text{ ist folgen-}}{\underset{\text{kompakt}}{\Longrightarrow}} \exists$ Teilfolge $\{a_{n'}\}$ mit $a_{n'} \longrightarrow a \in M \overset{M \text{ folg.komp.}}{\underset{\textit{Satz 9.13}}{\Longrightarrow}} a \in A \Longrightarrow$ Behauptung.

■

Theorem 3 (Heine-Borel). *Sei $X = \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$), $M \subset X$, dann gilt: M ist kompakt $\Longleftrightarrow$ M ist abgeschlossen und beschränkt.*

Hinweis: Theorem gilt für $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) als normierte Räume. (Beweise zunächst für X mit $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$, *Satz 5* unten impliziert Gültigkeit für beliebige Normen.) Warnung: Theorem ist nicht in jedem metrischen Raum $(\mathbb{R}^n, d)$ gültig! (Z.B. diskrete Metrik in $\mathbb{R}$: $[0,1]$ ist nicht folgenkompakt bei $\left\{\frac{1}{n}\right\}$).

Beweis. "$\Longrightarrow$": Folgt aus *Theorem 1*, *Satz 2*.
"$\Longleftarrow$": (Für $\mathbb{R}^n$ mit einer Norm äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$, $\mathbb{C}^n$ analog.) Sei $\{a_n\}$ Folge in M, $a_k = (a_k^1, ..., a_k^n) \in \mathbb{R}^n \overset{M \text{ beschr.}}{\Longrightarrow} \{\|a_k\|_\infty\}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\{a_k^i\}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$ für $i = 1, ..., n \overset{\text{Bolz.-Weier. in } \mathbb{R}}{\underset{\textit{Theorem 9.29}}{\Longrightarrow}} \exists$ Teilfolge $\{a_{k'}\}$: $a_{k'}^1 \overset{k' \to \infty}{\longrightarrow} a^1 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists$ Teilfolge $\{a_{k''}\}$ von $\{a_{k'}\}$: $a_{k''}^2 \overset{k'' \to \infty}{\longrightarrow} a^2$, offenbar $a_{k''}^1 \overset{k'' \to \infty}{\longrightarrow} a^1 \Longrightarrow \exists$ Teilfolge $\{a_{k^*}\}$ von $\{a_k\}$: $a_{k^*}^i \overset{k^* \to \infty}{\longrightarrow} a^i \; \forall i = 1, ..., n \Longrightarrow a_{k^*} \overset{k^* \to \infty}{\longrightarrow} a = (a^1, ..., a^n) \in \mathbb{R}^n \overset{M \text{ ist}}{\underset{\text{abgesch.}}{\Longrightarrow}} a \in M \Longrightarrow M$ ist folgenkompakt $\overset{\textit{Theorem 1}}{\Longrightarrow} M$ ist kompakt.

■

Folgerung 4. *Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt $\Longrightarrow$ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Folgt direkt aus Beweis von *Theorem 3*. ■

Satz 5 (Äquivalenz aller Normen). *Sei $X = \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$). Dann sind je zwei Normen auf X äquivalent.*

Bemerkung: Da jeder Vektorraum X mit $\dim X = n$ mit $\mathbb{R}^n$ identifiziert werden kann, ist *Satz 5* auch für alle derartige X richtig. Folglich sind auch *Theorem 3* und *Folgerung 4* für solche X mit beliebigen Normen richtig (vgl. Literatur).

Beweis. (Für $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ analog) Es reicht zu zeigen, dass beliebige Normen $\|\cdot\|$ äquivalent zu $\|\cdot\|_\infty$ sind. Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ Standardbasis (d.h. $e_j = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{j\text{-te Stelle}}, 0, ..., 0)$) (vgl. Einführung zu Vektorräumen). Für $X = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n$, $\beta := \sum_{j=1}^n \|e_j\| > 0$ gilt

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x^j e_j \right\| \leq \|x\| = \sum_{j=1}^n |x^j| \|e_j\| \leq \beta \|x\|_\infty \tag{3}$$

Sei nun $\alpha = \inf\{\|x\| \mid x \in S\}$ mit $S := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$. Angenommen $\alpha = 0 \implies \exists \{x_k\} \in S : \|x_k\| \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$ in $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$: S ist beschränkt und abgeschlossen (vgl. *Satz 9.18*) $\overset{\textit{Theorem 3}}{\implies} \exists$ Teilfolge x_k mit $x_{k'} \overset{k' \to \infty}{\longrightarrow} \tilde{x} \in S \implies \|\tilde{x}\| \leq \|\tilde{x} - x_{k'}\| + \|x_{k'}\| \overset{(3)}{\leq} \beta \|\tilde{x} - x_{k'}\|_\infty + \|x_{k'}\| \implies \|\tilde{x}\| = 0 \implies \tilde{x} = 0 \notin S \implies \lightning \implies \alpha > 0$. Für $x \neq 0$ ist $\alpha \leq \left| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right| \implies \alpha \|x\|_\infty \leq \|x\| \overset{(3)}{\implies}$ Behauptung. ∎

12 Reihen

Sei X normierter Raum (wir benötigen Addition!), $\{a_k\}$ eine Folge in X. Dann heißt $S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + ... + a_n$ *Partialsumme.* Folge $\{S_n\}$ der Partialsummen heißt *unendliche Reihe* mit gliedern a_k. Wir bezeichnen sie mit $\sum_{k=0}^\infty a_k = a_0 + a_1 + a_2 + ... = \sum_k a_k = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Existiert Grenzwert $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, so heißt er *Summe der Reihe* (Grenzwert der Folge der Partialsummen) $S = \sum_{k=0}^\infty a_k = a_0 + a_1 + a_2 + ... = \sum_k a_k$ und die Reihe heißt *konvergent*, sonst heißt sie *divergent* (definiere analog: $\sum_{k=0}^\infty a_k = a_0 + a_1 + a_2 + ... = \sum_k a_k$; schreibe $\sum_{k=0}^\infty a_k = \pm\infty$ falls $S_n \to \pm\infty$ für $X = \mathbb{R}$).

Satz 1 (Cauchy-Kriterium). *Sei X normierter Raum, $\{a_k\}$ eine Folge in X. Dann:*

(1) *$\sum a_k$ ist konvergent $\implies$ $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : \left\| \sum_{k=n}^m a_k \right\| < \epsilon\ \forall n \geq n_0$ (d.h. $\{S_n\}$ ist eine Cauchy-Folge in X).*
(2) *Falls X vollständig ist, gilt auch die Rückrichtung (“$\Longleftarrow$”) in* (1).

Beweis. Übung/Selbststudium. (Benutze $\|S_m - S_{n-1}\| = \|\sum_{k=n}^m a_k\|$.) ∎

Folgerung 2. *Sei X normierter Raum, $\{a_k\}$ eine Folge in X, dann gilt $\sum_k a_k$ ist konvergent $\implies a_k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*

Beweis. Selbststudium. Siehe oben *Satz 1* mit $m = n$. ∎

Beispiel 3 (Geometrische Reihe). Sei $X = \mathbb{C}, a_k := z^k$ für ein $Z \in \mathbb{C}$. Vollständige Induktion liefert $S_n = 1 + z + z^2 + z^3 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ für $z \neq 1$

- $\sum_{k=0}^\infty z_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}\ \forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ (vgl. *Beispiel 9.10*)
- $\sum_{k=0}^\infty z_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-z^{k+1}}{1-z} = \infty$d.h. ist divergent falls $|z| > 1$ (vgl. *Folgerung 2*).

Beispiel 4 (Harmonische Reihe). Sei $X = \mathbb{R}, a_k := \frac{1}{k}$ für $k \geq 1$. Setze $n = 2^m : S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + ... + \frac{1}{2^m}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + ... + 2^{m-1}\cdot\frac{1}{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = 1 + \frac{m}{2} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty \implies$ Die harmonische Reihe ist divergent mit $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \infty$.

Beachte: Umkehrung von *Folgerung 2* ist offenbar falsch. (Siehe *Beispiel 4* oben.)

Beispiel 5 (Teleskopreihe). Sei $X = \mathbb{R}, a_k := \frac{1}{k(k+1)}$ für $k \geq 1$. Offenbar $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ... - \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \implies \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = 1$. Es gilt: $\sum_{k=0}^\infty (b_k - b_{k+1})$ konvergiert gdw. $\{b_n\}$ konvergiert.

Beispiel 6 (Riemannsche Zeta-Funktion $\boldsymbol{\zeta}$(s) für s > 1). Sei $X = \mathbb{R}$, $a_k := \frac{1}{k^s}$ für $s \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^s}$ ist konvergent für $s > 1$, divergent für $s \leq 1$. Fall $s \leq 1 : S_n = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... + \frac{1}{n^s} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Fall $s > 1 : S_n$ ist monoton wachsend und für $n \leq 2^m - 1$ ist $S_n \leq S_{2^m-1} \leq 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + ... + \left(\frac{1}{2^{(m-1)s}} + ... + \frac{1}{(2m-1)^s}\right) \leq 1 + \frac{2}{2^s} + ... + \frac{2m-1}{2^{(m-1)s}} = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^k \underset{\text{Reihe}}{\overset{\text{geom.}}{<}} \frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}$ $\implies \{S_n\}$ ist beschränkt $\implies S_n$ konvergiert. Spezialfall $s = 2 : \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ ist konvergent.

Satz 7. *Sei X normierter Raum, $\{a_n\}, \{b_n\}$ in X, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ gegen $\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.*

Beachte: Für Produkt $\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist es schwieriger analoge Regel zu definieren.

Beweis. Selbststudium.Benutze Rechenregeln für Partialsummen. ■

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent* falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Satz 8. *Sei X vollständiger normierter Raum (auch Banach-Raum). Dann gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent $\implies$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent.*

Beweis. Es ist

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} a_k \right\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|a_k\|. \tag{1}$$

$\tilde{S}_m := \sum\limits_{k=0}^{m} \|a_k\|$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $S_m := \sum\limits_{k=0}^{m} a_k$ ist eine Cauchy-Folge in X $\overset{\text{Satz 11.1}}{\Longrightarrow}$ Behauptung. ■

Satz 9 (Konvergenzkriterien). *Sei X normierter Raum, $\{a_k\}$ eine Folge in X, $x_0 \in \mathbb{N}$.*

(1) (Majorantenkriterium) *Sei $\{\alpha_k\}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, dann:*
  (a) $\|a_k\| \leq \alpha_k\ \forall k \geq k_0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ *konvergiert* $\implies$ $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ *konvergiert.*
  (b) $0 \leq \alpha_k \leq \|a_k\|\ \forall k \geq k_0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ *divergiert* $\implies$ $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ *divergiert.*

(2) (Quotientenkriterium) *Gelte $a_k \neq 0\ \forall k \geq k_0$. Dann:*
  (a) $\frac{\|a_{k+1}\|}{\|a_k\|} \leq q < 1\ \forall k \geq k_0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ *konvergiert.*
  (b) $\frac{\|a_{k+1}\|}{\|a_k\|} \geq 1\ \forall k \geq k_0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ *divergiert.*

(3) (Wurzelkriterium)
  (a) $\sqrt[k]{\|a_k\|} \leq q < 1\ \forall k \geq k_0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ *konvergiert.*
  (b) $\sqrt[k]{\|a_k\|} \geq 1\ \forall k \geq k_0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ *divergiert.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k_0 = 0$.

Zu (1): $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ ist monoton wachsend. Falls $\{S_n\}$ beschränkt ist $\implies$ S_n konvergiert. Falls $\{S_n\}$ unbeschränkt ist $\implies$ S_n divergiert.

Zu (2): $\|a_k\| \leq q\|a_{k-1}\| \leq ... \leq q^k\|a_0\| =: \alpha_k$. Da $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \|a_0\| \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ stets konvergiert (geometrische Reihe) $\implies$ (a). Bei (b) ist $\|a\| \not\to 0 \overset{\text{Folgerung 2}}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

Zu (3): Analog zu (2), verwende $\|a_k\| < q^k$ bei (a).

■

Beispiel 10 (Exponentialreihe). Reihe $\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist absolut konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$. Verwende Quotientenkriterium: Sei $z \neq 0$ (da der Fall $z = 0$ klar ist). Dann: $\left|\frac{z^{k+1}k!}{(k+1)!z^k}\right| = \frac{|z|}{k+1} \leq q = \frac{1}{2} < 1\ \forall k \geq k_0 \implies$ Behauptung.

Satz (ÜA.). *Die Eulersche Zahl* $e := \exp 1 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \approx 2.71828....$ *ist irrational.*

Beweis. Angenommen e ist rational: Setze $e = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Es ist $e > 2$ da $e := \sum_{k=0}^{\infty} = 1+1+\frac{1}{2}+....$ Ferner ist $e < 3$ da $e-1 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+... < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. D.h. $2 < e = \frac{p}{q} < 3 \implies q > 1$. Multiplikation der Gleichung $\frac{p}{q} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ...$ mit $q!$ ergibt:

$$\underbrace{p(q-1)!}_{\in\mathbb{Z}} = \underbrace{\frac{q!}{0!} + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + ... + \frac{q!}{q!}}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ...}_{=:\alpha_q}$$

Betrachte die Reihe $\beta_q := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^k} = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+1)} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} - 1 = \frac{1}{q}$. Offenbar ist $\alpha_q < \beta_q = \frac{1}{q} \implies \alpha_q \notin \mathbb{Z} \implies p(q-1)! \notin \mathbb{Z} \implies \lightning \implies e$ ist irrational. ∎

Beispiel 11 (Potenzreihe, Konvergenzradius nach Wurzelkriterium - Cauchy-Hadamard).

Betrachte die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ für $z \in \mathbb{C}, a_k \in \mathbb{C}, z_0 \in \mathbb{C}$. Sei $R := \frac{1}{L}$ (hier $0 \sim \frac{1}{\infty}, \infty \sim \frac{1}{0}$) mit

$$L := \begin{cases} \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} & \text{falls existiert,} \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt: $|z-z_0| < R \implies$ die Reihe konvergiert absolut, $|z-z_0| > R \implies$ die Reihe divergiert, $|z-z_0| = R \implies$ keine allgemeine Aussage ist möglich. $B_R(z_0)$ heißt *Konvergenzkreis*, R heißt *Konvergenzradius*. Nach *Wurzelkriterium*: Sei $L \in \mathbb{R}_{>0}, z \in \mathbb{C}, |z-z_0| < R \implies \exists L' > L : |z-z_0| < \frac{1}{L'} < \frac{1}{L} \implies \sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} = |z-z_0|\sqrt[k]{|a_k|} \le \underbrace{|z-z_0|L'}_{=:q} < 1\ \forall k \ge k_0 \implies$ Behauptung. Andere Fälle analog.

Beispiel 12 (*p*-artige Brüche). Sei $p \in \mathbb{N}_{\ge 2}$. Betrachte

$$0.x_1x_1x_2x_3... := \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^{-k} \text{ für } x_k \in \{0, 1, ..., p-1\}\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Für $p = 10$ bezeichnen wir diese als *Dezimalbrüche*, für $p = 2$ als *Dualbrüche.*

(a) Offenbar $0 \le \sum_{k=1}^{\infty} x_k p^{-k} \le (p-1)\sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} = (p-1)\big(\frac{1}{1-\frac{1}{p}} - 1\big) = 1 \overset{Major.-}{\underset{-krit.}{\implies}}$ Reihe in (2) ist absolut konvergent mit $0, x_1x_2x_3... \in [0,1]$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}\cap[0,1), x_1 := [px], x_n := \big[p^n\big(x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k p^{-k}\big)\big] \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{x_n}{p^n} \le x - \sum_{k=1}^{n-1} x_k p^{-k} < \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^n} \implies 0 \le x - \sum_{k=1}^{n} x_k p^{-k} < \frac{1}{p^n} \implies 0 \le x_{n+1} < p\ \forall n \implies x = 0, x_1x_2x_3...$, d.h. alle $x \in [0,1)$ sind als p-adische Brüche darstellbar.

Satz 13 (Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen). *Sei* $\{a_n\}$ *monoton fallende Nullfolge in* $\mathbb{R}$, *dann ist die alternierende Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ *konvergent.*

Beweis. Offenbar ist $a_n \ge a_{n+1} \ge 0\ \forall n \implies \big|\sum_{k=n}^{m}(-1)^k a_k\big| = |S_m - S_{n-1}| \le a_n\ \forall n, m \in \mathbb{N} \overset{a_n \to 0}{\implies}$ Cauchy-Kriterium liefert die Behauptung. ∎

Beispiel 14 (alternierende harmonische Reihe). $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...$ ist konvergent nach dem Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen. (Man kann sogar zeigen: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^{k+1} = \log_e 2$.)

Frage: Ist Summationsreihenfolge bei Reihen wichtig? Sei $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\beta(k)}$ *Umordnung* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Satz 15 (Umordnungssatz). *Sei X normierter Raum. Dann: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ ist absolut konvergent $\implies$ jede Umordnung $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\beta(k)}$ ist absolut konvergent mit Summe gleich a.*

Beweis. Wegen Konvergenz der Partialsummen: für $\epsilon > 0$ $\exists n_0 : \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \epsilon$. Da $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist, $\exists n_1 : \{0, ..., n_0\} \subset \{\beta(0), ..., \beta(n_1)\} \implies \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_{\beta(k)} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \epsilon$ $\forall m \geq n_1 \implies \sum_{k=0}^{m} a_{\beta(k)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$. Wegen $\sum_{k=0}^{m} \|a_{\beta(k)}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ $\forall m \in \mathbb{N}$ ist die Umordnung absolut konvergent. ∎

Hinweis: *Satz 15* ist falsch falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht absolut konvergent ist.

Satz 16. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, dann existiert zu jedem $S \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Bijektion $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\beta(k)}$.*

Beweis. (für $S \in \mathbb{R}$) Seien a_k^+, a_k^- positive bzw. negative Glieder der Reihe, dann gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\pm} = \pm\infty$. Summiere nun die Reihe in folgender Reihenfolge:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(a_1^+ + a_2^+ + ... + a_{n_1}^+)}_{\sum > S} + (a_1^- + ... + a_{n_2}^-)}_{\sum < S} + (a_{n_1+1}^+ + ... + a_{n_3}^+)}_{\sum > S} + a_{n_2+1}^- + ...$$

Wegen $a_k \to 0$ konvergiert umgeordnete Reihe gegen S. ∎

Beispiel 14. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ kann zu jeder Summe $S \in \mathbb{R}$ umgeordnet werden.

Folglich ist "Ausmultiplizieren" zweier Reihen nur bei absoluter Konvergenz möglich und sinnvoll!

Satz 17 (Cauchy-Produkt). *Sei X normierter Raum über $\mathbb{K}$, $\sum_j a_j$ und $\sum_i \lambda_i$ sind absolut konvergente Reihen in X bzw. in $\mathbb{K}$, $\beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, $b_{\beta(i,j)} := \lambda_i a_j$ $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$\sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

wobei die Reihe links ebenfalls absolut konvergent in X ist. Spezialfall $\beta(i,j) = \underbrace{\frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i}_{\substack{\textit{vgl. Cantorsches} \\ \textit{Diagonalverfahren}}}$ *liefert:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \lambda_l a_{k-l} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$$

Beweis. Wähle $m(k,l) := \max\{k,l\}, \tilde{\beta}(k,l) := m(k,l)^2 + m(k,l) + k - l \ \forall k,l \in \mathbb{N}$. Sei $n = \tilde{\beta}(k,l)$. Offenbar $m\left(\tilde{\beta}^{-1}(n)\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

$$\left\| \sum_{l=0}^{n} b_l - \sum_{l=0}^{m(n,l)} \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^{m(k,l)} a_j \right\| \leq \|a_m\| \underbrace{\sum_{i=0}^{m} |\lambda_i|}_{\leq \lambda} + |\lambda_m| \underbrace{\sum_{j=0}^{m} \|a_j\|}_{\leq \alpha} \leq (a+\lambda)(\|a_m\| + |\lambda_m|) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad (3)$$

Da $\sum_i \lambda_i, \sum_j a_j$ konvergieren, folgt die Gleichung in Satz für $\tilde{\beta}$ mit $\|b_l\|, |\lambda_i|, \|a_j\|$ Limes in (3) folgt absolute Konvergenz von $\sum_l b_l$. Behauptung für beliebiges β folgt aus *Satz 15.* ∎

Hinweis: Falls $X = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) hat man $\lambda_i, a_j \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) $\forall i,j$.

Beispiel 18. $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Denn

$$\begin{aligned} \exp(z_1) \cdot \exp(z_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_2^l}{l!} \underset{\textit{Satz 17}}{\overset{\text{nach}}{=}} \sum_{m=0}^{n} \frac{z_1^m \cdot z_2^{n-m}}{m!(n-m)!} \cdot \frac{n!}{n!} \\ &\underset{\textit{Formel}}{\overset{\textit{binom.}}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

Satz 19 (Doppelreihensatz). *Sei* $\{a_{kl}\}_{k,l\in\mathbb{N}}$ *eine* Doppelfolge *im Banachraum* X *(d.h.* $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$*) und mögen* $\sum_{l=0}^{\infty} \|a_{kl}\| =: \alpha_k \ \forall k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k =: \alpha$ *existieren*

$$\implies \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} \right)$$

wobei alle Reihen absolut konvergieren.

Beweis. Absolute Konvergenz der Reihen links ist klar, nach Voraussetzung. $\|a_{kl}\| \leq \alpha_k \ \forall l \underset{\textit{-krit.}}{\overset{\textit{Major.-}}{\implies}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} =: \beta_l$ ist absolut konvergent $\forall l$.

$$\sum_{l=0}^{n} \|\beta_l\| = \sum_{l=0}^{n} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} \right\| \leq \sum_{l=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|a_{kl}\| \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \|a_{kl}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \alpha \ \forall n$$

$\implies \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l$ ist absolut konvergent $\implies$ Reihen rechts sind absolut konvergent. Sei $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\implies \exists n_0 : \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \frac{\epsilon}{2}, \sum_{l=n+1}^{\infty} \|\beta_l\| < \frac{\epsilon}{2} \ \forall n > n_0 \\ &\implies \Bigg\| \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}}_{S} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_{kl}}_{S_n} \Bigg\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k + \sum_{l=n+1}^{\infty} \|\beta_l\| < \epsilon \ \forall n > n_0 \\ &\implies S_n \longrightarrow S. \end{aligned}$$

Analog $S_n \longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kl} \right) =: \tilde{S} \implies S = \tilde{S} \implies$ Behauptung. ∎

Teil IV

Funktionen und Stetigkeit

13 Funktionen

Seien $f : X \to Y, g : X \to Y, \lambda : X \to \mathbb{K}$ Funktionen, dann gilt:

(i) $(f \pm g) : X \to Y$ mit $(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x)$ falls Y ein Vektorraum ist.
(ii) $(\lambda \cdot g) : X \to Y$ mit $(\lambda \cdot g)(x) := \lambda(x) \cdot g(x)$ falls Y ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist.
(iii) $(f \cdot g) : X \to Y$ mit $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ falls Y ein Körper ist.
(iv) $\frac{f}{g} : X \to Y$ mit $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ falls Y ein Vektorraum ist.

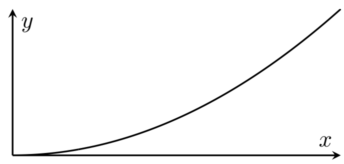
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *monoton wachsend* (bzw. *fallend*) auf M falls $a < b \implies f(a) \leq f(b)$ (bzw. $f(a) \geq f(b)$) $\forall a, b \in M \subset \mathbb{R}$. Falls sogar "$<$" (bzw. "$>$") gilt, sagt man auch *streng monoton wachsend* (bzw. *fallend*).

Satz 1 (Existenz von Umkehrfunktion). *Sei $f : M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend), dann existiert* inverse Funktion $f^{-1} : f(M) \to \mathbb{R}$ *und ist streng monoton wachsend (bzw. fallend).*

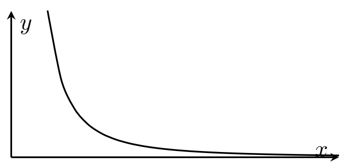
Beweis. Übung. ■

Beispiel 2 (allgemeine Potenzfunktion). Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^r$ für $r \in \mathbb{R}$ (vgl. 5). Falls $r > 0$: Nach *Satz 5.21* ist f streng monoton wachsend. Falls $r < 0$: $x^r := \frac{1}{x^{-r}} \implies f$ ist streng monoton fallend.

$f = x^r$ für $r > 1$

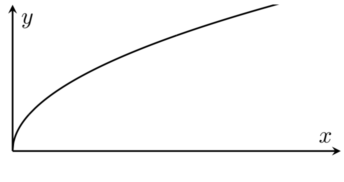


$f = x^r$ für $r < -1$

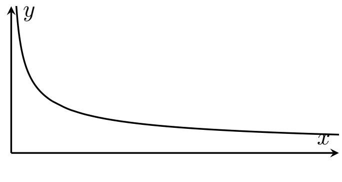


Nach *Satz 1* existiert eine inverse Funktion f^{-1} für $r \neq 0$ auf dem Intervall $(0, \infty)$. Wegen $y = (y^{\frac{1}{r}})^r$ ist $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$.

$f = x^{\frac{1}{r}}$ für $r > 1$

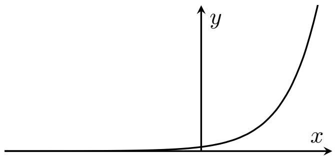


$f = x^{\frac{1}{r}}$ für $r < -1$

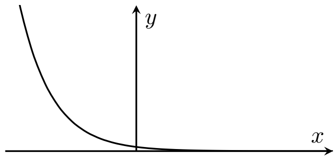


Beispiel 3 (allgemeine Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$). Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ für $a \in \mathbb{R}_{>0}$, wobei a ist fest (vgl. 5). Dann ist f nach *Satz 5.21* streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$. Nach *Satz 1* existiert eine inverse Funktion f^{-1} auf dem Intervall $(0, \infty)$ für $a \neq 1$ und zwar $f^{-1}(y) = \log_a y$, denn $y = a^{\log_a y}$.

$f = a^x$ für $a > 1$



$f = a^x$ für $0 < a < 1$



Beispiel 4 (Polynome in $\mathbb{C}$). Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *Polynom*, falls $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0$ für feste vorgegebene Zahlen $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Setze $\operatorname{grad} f := n$ falls $a_n \neq 0$. Funktion f ist *Nullpolynom* falls $f(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, schreibe $f = 0$.

Satz 5. *Seien f, g Polynome mit $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, g(z) = \sum_{k=0}^{m} b_k z^k$. Dann gilt:*

(a) (Polynomdivision) *Falls $f, g \neq 0$,* $\operatorname{Grad} f > \operatorname{Grad} g$, *dann $\exists$ eindeutig bestimmte Polynome q, r mit $f = q \cdot g + r$ wobei $r = 0$ oder* $\operatorname{Grad} r < \operatorname{grad} g$.
(b) (Nullstelle) $z_0 \in \mathbb{C}$ *heißt* Nullstelle *von $f \neq 0 \iff f(z) = (z - z_0)g(z)$ für ein Polynom $q \neq 0$ mit* $\operatorname{grad} q = \operatorname{Grad} f - 1$.
(c) *f hat höchstens* $\operatorname{Grad} f$ *Nullstellen falls $f \neq 0$.*
(d) *$f(z_j) = g(z_j)$ für $n + 1$ verschiedene Punkten $z_0, ..., z_n \in \mathbb{C}$ (d.h. $a_k = b_k$ für $k = 0, ..., n$).*

Beweis. Zu (a): Sei $n = \operatorname{Grad} f \geq \operatorname{grad} g = m$. $q_1(z) := \frac{a_n}{b_m} \cdot z^{n-m} \implies f_1 := f - q_1 \cdot g$ hat Grad $n_1 < n$. Falls $n_1 \geq m$, definiere q_2, so dass $f_2 := f_1 - q_2 \cdot g$ hat Grad $n_2 < n_1$. Nach n Schritten erhält man mit $q = q_1 + ... + q_{kl}$ ein Polynom $r := f - q \cdot g$ mit $\operatorname{grad} r < m$. Eindeutigkeit: Sei auch $\tilde{f} = \tilde{q} \cdot g + \tilde{r}$ mit $q \neq \tilde{q} \implies (q - \tilde{q}) \cdot g - \tilde{r} - r \implies \operatorname{Grad} g \leq \operatorname{Grad} (q - \tilde{q}) \cdot g = \operatorname{Grad} (\tilde{r} - r) < \operatorname{Grad} q \implies \lightning \implies$ Behauptung.

Zu (b): "$\Longleftarrow$": Klar.
"$\Longrightarrow$": Verwende (a) mit $g(z) = z - z_0$, offenbar $r = 0 \implies$ Behauptung.

Zu (c): Wiederholte Anwendung von (b).

Zu (d): Angenommen $f - g \neq 0 : \operatorname{grad} (f - g) \leq n, f - g$ hat $n+1$ Nullstellen $\overset{(c)}{\implies} \lightning \implies f - g = 0$.

■

Beispiel 6 (Rationale Funktion in $\mathbb{C}$). $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt rationale Funktion falls $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ für Polynome p, q mit $q \neq 0$. Definitionsbereich $\mathcal{D}(f) = \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\}$.

Abbildung $f : X \to Y$, wobei Y ist ein metrischer Raum heißt *beschränkt* auf $M \subset X$ falls Bildmenge $f(M)$ beschränkt in Y ist.

Beispiel. Sei f ein Polynom. Dann $\operatorname{grad} f = 0 \implies f$ ist beschränkt auf $\mathbb{C}$, $\operatorname{grad} > 0 \implies f$ ist unbeschränkt auf $\mathbb{C}$. (Betrifft $f(z) = z^n \big(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}\big)$.)

Funktion $f : X \to Y$ heißt *konstant* falls $f(x) = a \ \forall x \in X, a \in Y$ und a ist eine feste Zahl. Eine Menge $M \subset X$, wobei X ist ein normierter Raum, heißt *konvex* falls $x, y \in M \implies tx + (1-t)y \in M \ \forall t \in (0, 1)$. Eine Funktion $f : D \subset X \to \mathbb{R}$, wobei X ist ein normierter Raum und D ist konvex, heißt *(strikt) konvex*, falls

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \ \forall x, y \in D, t \in (0, 1).$$

Funktion f ist *(strikt) konkav* falls $-f$ (strikt) konvex ist. Bemerkung: Funktion f ist konvex, d.h. jede Sekante liegt über dem Graphen von f.

13.1 Lineare Funktionen

Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$, dann heißt f *linear*, falls:

(i) (Additivität) $f(a+b) = f(a) + f(b)\ \forall a, b \in X$,
(ii) (Homogenität) $f(\lambda a) = \lambda f(a)\ \forall a \in X, \lambda \in \mathbb{K}$.

$f : X \to Y$ heißt *affin-linear* falls $f + f_0$ linear für eine konstante Funktion f_0 ist. Bemerkung: Offenbar gilt: f ist linear, dann $f(0) = 0$. Denn $f(0_\lambda) = f(0_\mathbb{K} \cdot 0_\lambda) = 0_\mathbb{K} \cdot \underbrace{f(0_\lambda)}_{\in Y} = 0_Y$.

Beispiel 7. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear $\iff$ $f(x) = Ax\ \forall x \in \mathbb{R}^n$ für eine $(m \times n)$-Matrix A.

Beachte: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ ist keine lineare Funktion für $b \neq 0$. Eine lineare Abbildung $f : X \to Y$ heißt beschränkt falls f beschränkt auf $\overline{B_1(0)}$ ist, d.h. es existiert eine Konstante

$$c > 0 : \|f(x)\| \leq c\ \forall x : \|x\| < 1 \tag{1}$$

Beachte: $\overline{B_r(0)} = \{x \in X \mid \|x\| \leq r\}$ nach *Satz 9.13*, *Satz 9.18*. Warnung: Eine linear beschränkte Funktion $f \neq 0$ ist nicht beschränkt auf X! Wegen $\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|f(x)\|$ ist (1) äquivalent zu $\|f(x)\| \leq c\|x\|\ \forall x \in X$.

Satz 8. *Seien X, Y normierte Räume über $\mathbb{K}$. Dann ist $L(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f$ ist linear, beschränkt$\}$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ mit $\|f\| := \sup\{\|f(x)\| \mid x \in \overline{B_1(0)}\}$.*

Hinweis: Somit kann man in (1) stets $c = \|f\|$ wählen. Es gilt

$$\|f(x)\| \leq \|f\|(\|x\|)\ \forall x \in X \tag{2}$$

.

Beweis. Offenbar ist $L(X, Y)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ (Selbststudium). $\|f\|$ ist Wohldefiniert, offenbar $\|f\| = 0 \iff f$ ist eine Nullfunktion. $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, f \in L(X, Y)$. Wegen $\|(f+g)(x)\|_\lambda \leq \|f(x)\|_\lambda + \|g(x)\|_\lambda$ folgt $\|f + g\| \leq \sup_{x \in \overline{B_1(0)}} (\|f(x)\| + \|f(x)\|) \leq \|f\| + \|g\|$ $\implies \|\cdot\|$ ist eine Norm. ∎

Hinweis: $\|f\|$ hängt von $\|\cdot\|$ in X und in Y ab. Zu *Beispiel 7*: Sei $f(x) = Ax, A = \left(a_{ij}\right)_{i=1,j=1}^{m,n}$. Für $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p), Y = (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_q)$ gilt:

Zu *Beispiel 7*

p	q	$\|f\| = \|A\|$	falls:
1	∞	$\max_{i,j} \|a_{ij}\|$	A beliebig ist
∞	∞	$\max_i \sum_{j=1}^m \|a_{ij}\|$	A beliebig ist
∞	1	$\sum_{i,j} \|a_{ij}\|$	alle $a_{ij} \geq 0$ (bzw. ≤ 0)
1	1	$\max_j \sum_{i=1}^n \|a_{ij}\|$	A beliebig ist

Für $p = q = 2$ gilt: $\|A\| \leq \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

13.2 Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$

Betrachte Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Bemerkung: Vgl. *Beispiel 12.10*: Exponentialfunktion ist absolut konvergent auf $\mathbb{C}$.

Satz 9. *Sei $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \longrightarrow z \in \mathbb{C}$. Dann: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = \exp(z)$. Insbesondere* $\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \;\forall z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$

$$\Longrightarrow \exists n_0 : \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{(|z|+1)^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3} \text{ und } |z_n| \le |z|+1 \;\forall n \ge n_0 \tag{3}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\left|\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right|}_{\delta} \overset{\text{binom.}}{\underset{\text{Formel}}{\le}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1}\left|\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} - \frac{z^k}{k!}\right|}_{=:S_1} + \underbrace{e\sum_{k=n_0}^{n}\binom{n}{k}\frac{|z_n|^k}{n^k}}_{=:S_2} + \underbrace{\sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}}_{=:S_3} \;\forall n \ge n_0.$$

Offenbar gilt $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{(k-1)}{n}\right) \le \frac{1}{k!}$ für $n \ge k \overset{\forall n \ge n_0}{\Longrightarrow} S_2 \le \sum_{k=n_0}^{n}\frac{(|z|+1)^k}{k!} \overset{(3)}{<} \frac{\epsilon}{3}$ und nach (3): $S_3 < \frac{\epsilon}{3}$. Wegen $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \underset{k \text{ fest}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \frac{1}{k!}$ $\left(\text{vgl. } \frac{n-j}{n} \longrightarrow 1\right)$ hat man $z_n \longrightarrow z$. Es folgt $\binom{n}{k}\frac{z_n^k}{n^k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{z^k}{k!} \Longrightarrow \exists n_1 > n_0 : S_1 < \frac{\epsilon}{3} \;\forall n \ge n_1 \Longrightarrow \delta < \epsilon \;\forall n \ge n_1$. ■

Lemma 10. *Sei $z_n \to 0$ in $\mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\exp(z_n)-1}{z_n} = 1. \tag{4}$$

Beweis. $\left|\frac{\exp(z_n-1)}{z_n} - 1\right| = \left|\frac{1}{z_n}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z_n^k}{k!} - 1\right| = |z_n|\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2n^{k-2}}{k!}\right| \le |z_n|\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!} \;\forall n : |z_n| \le 1$. ■

Wiederholung:

$$\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2) \;\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Satz 11. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit* (a) $f(z_1+z_2) = f(z_1)\cdot f(z_2) \;\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{z}{n})-1}{\frac{z}{n}} = \gamma \in \mathbb{C} \;\forall z \in \mathbb{C}$. *Dann ist* $f(z) = \exp(\gamma z) \;\forall z \in \mathbb{C}$.

Beweis. $f(z) = f\left(n\cdot\frac{z}{n}\right) = f\left(\frac{z}{n}\right)^n$ für beliebige $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Definiere Folge $\{z_n\}$ durch $f\left(\frac{z}{n}\right) = 1+\frac{z_n}{n} \Longrightarrow f(z) = \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \Longrightarrow f(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n$ und $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(f\left(\frac{z}{n}\right)-1\right)}{\frac{z}{n}}\cdot z = \gamma z \overset{\text{Satz 9}}{\Longrightarrow} f(z) = \exp(\gamma z)$. ■

Folgerung 12. *Funktion* exp *ist durch Eigenschaften* (4), (5) *eindeutig bestimmt.*

Weitere Eigenschaften:

$$\exp(z) \ne 0 \;\forall z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Beweis. $\exp(z_0) = 0 \implies \exp(z) = \exp(z_0 + (z - z_0)) = \underbrace{\exp(z_0)}_{=0} \cdot \exp(z - z_0) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \implies$ ↯ $\implies$ Behauptung. ∎

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)} \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Beweis. Selbststudium. Benutze $\sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}}$. ∎

Wiederholung: $e = \exp(1) = 2,71828...$. Es gilt $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Die Abbildung $x \mapsto e^x$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ (vgl. *Satz 5.21*). Zu Zeigen: Die Abbildung $x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.

Beweis. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \underbrace{\exp(y)}_{>1} > \exp(x) \ \forall y > 0$. ∎

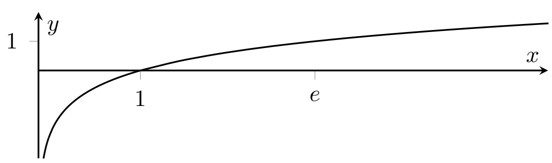
Satz 13. *Es gilt* $e^x = \exp(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (1) $e = \exp(1) = \left(\exp(\frac{1}{n})\right)^n \implies \exp(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}} \implies \exp(\frac{m}{n}) = e^{\frac{m}{n}}$. $\exp(-\frac{m}{n}) = \frac{\exp(0)}{\exp(\frac{m}{n})} = e^{-\frac{m}{n}} \implies \exp(q) = e^q \ \forall q \in \mathbb{Q}$.

(2) Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \{[\alpha_n, \beta_n]\}$ eine Intervallschachtelung mit $\{x_0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[\alpha_n, \beta_n]$, wobei $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$. Funktionen $x \mapsto \exp(x)$ und $x \mapsto e^x$ sind streng monoton wachsend $\implies \exp(x_0) \in [e^{\alpha_n}, e^{\beta_n}] = I_n, e^{x_0} \in I_n \ \forall n \implies e^{\beta_n} - e^{\alpha_n} - e^{\alpha_n}\left(e^{\beta_n - \alpha_n} - 1\right) \underset{\text{Satz 5.20}}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} 0 \implies \{I_n\}$ ist eine Intervallschachtelung $\underset{\text{vollst.}}{\overset{\mathbb{R}\text{ ist}}{\implies}} \exp(x_0) = e^{x_0} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

∎

Wegen *Satz 13*: $e^z := \exp(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$. Setze $\ln x := \log_e x \ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$.



13.3 Trigonometrische Funktionen

- $\sin x := \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \pm ... \ \forall z \in \mathbb{C}$,
- $\cos x := \frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \pm ... \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Bemerkung: Die Reihen konvergieren (sogar absolut), da beide Summen von je zwei konvergenter Reihen sind (vgl. Majorantenkriterium).

Satz 14. (a) (Eulersche Formel) $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \ \forall \varphi \in \mathbb{R}$,

(b) (Trigonometrische Pythagoras-Gleichung) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$, *beachte:* $\not\Longrightarrow |\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1, \sin z, \cos z$ *sind unterschiedlich auf* $\mathbb{C}$.

(c) (Eigenschaft ungerader, bzw. gerader Funktionen) $\sin(-z) = -\sin(z), \cos(-z) = \cos z \ \forall z \in \mathbb{C}$,

(d) (Additionstheoreme) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z \ \forall z, w \in \mathbb{C}, \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin w \sin z \ \forall z, w \in \mathbb{C}$,
(e) (Doppelwinkelfunktionen, Summen zweier trigonometrischer Funktionen) $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z \ \forall z \in \mathbb{C}, \sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} \sin \frac{(z+w)}{2} \ \forall z, w \in \mathbb{C}, \cos z - \cos w = -2 \sin \frac{(z+w)}{2} \sin \frac{(z-w)}{2} \ \forall z, w \in \mathbb{C}$.

Beweis. Zu (a)-(d): Ersetze $\sin, \cos$ jeweils mit der Definition und einfach Ausrechnen mittels (3). Zu (e): Verwende (d). Zu (f): Anwendung von (d) auf $\frac{(z+w)}{2} + \frac{(z-w)}{2}$ bzw. $\frac{(z+w)}{2} - \frac{(z-w)}{2}$, dann Gleichung substrahieren.

$\blacksquare$

Satz 15. *Es gilt* $\forall x \in \mathbb{R}$: $\sin x = \Im(e^{ix})$, $\cos x = \Re(e^{ix})$, *insbesondere* $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$. *Ferner ist* $|e^{ix}| = 1$.

Beweis. $\left|e^{ix}\right|^2 \overset{(7)}{=} e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^0 = 1$, $\sin x = \frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{2i} \overset{(7)}{=} \frac{\left(e^{ix} - e^{\overline{ix}}\right)}{2i} = \Im(e^{ix})$, $\cos x = \frac{\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)}{2} = \frac{\left(e^{ix} + e^{\overline{ix}}\right)}{2} = \Re(e^{ix})$. Somit existiert $\varphi : \mathbb{R} \to (-180, 180]$ mit $\varphi(x) := \measuredangle(e^{ix}, 1)$ (positiv orientierter Winkel in Grad-maß). $\blacksquare$

Lemma 16. *Es gilt in* $\mathbb{R}$:

(a) $\cos$ *ist streng fallend auf* $[0, 2]$
(b) $\cos 2 < 0$ *und* $\sin x > 0$ *auf* $(0, 2]$
(c) $\varphi(x) = x \cdot \varphi(1) \ \forall x \in [0, 2]$ *und* $45 < \varphi(1) < 90$
(d) $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ *für* $\pi := \frac{180}{\varphi(1)}$ $(= 3,1415...)$, *weiterhin besitzt es nur einzige Nullstelle in* $[0, 2]$

Beweis. Zu (b): Sei $x \in (0, 2] \subset \mathbb{R} \implies$ Reihen von $\sin x, \cos x$ sind alternierend und Folgen $\left\{\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right\}_{k \geq 0}, \left\{\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right\}_{k \geq 0}$ sind streng fallend (vgl. *Beispiel 9.28*) $\underset{\text{Partialsummen}}{\overset{S_k, \tilde{S}_k \text{ zugeh.}}{\Longrightarrow}} S_1 = x - \frac{x^3}{6} < \sin x < S_0 = x \implies \sin x > 0$. Zu (a): Seien $x, y \in [0, 2]$ mit $x < y \overset{\text{Satz 14}}{\Longrightarrow} \cos y - \cos x = -2 \underbrace{\sin \frac{(x+y)}{2}}_{>0} \cdot \underbrace{\sin \frac{(x-y)}{2}}_{>0} < 0 \implies$ Behauptung.

Zu (c): Nach (a), (b) ist $\varphi([0, 2]) \subset [0, 180)$. Seien $x, y, x + y \in [0, 2]$. Dann $\left|e^{i(x+y)} - e^{ix}\right| = \left|e^{ix}\right| \cdot \left|e^{iy} - 1\right| = \left|e^{iy} - 1\right| \implies \varphi(x + y) - \varphi(x) = \varphi(y) - \varphi(0)$ $(\longleftarrow = 0) \implies \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \implies \frac{m}{n} \varphi(1) = \frac{m}{n} \varphi\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = m \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi\left(\frac{m}{n}\right) \ \forall m, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{m}{n} \in [0, 2]$. Sei $\{[p_n, q_n]\}$ eine Intervallschachtelung mit $\bigcap_n [p_n, q_n] = \{x\} \subset (0, 2), p_n, q_n \in Q \ \forall n$

$$\implies \left.\begin{array}{l} 0 \leq \varphi(q_n - x) = \varphi(q_n) - \varphi(x) = q_n \varphi(1) - \varphi(x) \\ 0 \leq \varphi(x - p_n) = \varphi(x) - \varphi(p_n) = \varphi(x) - p_n \varphi(1) \end{array}\right\} \overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \varphi(x) = x \varphi(1).$$

Wegen $\cos 2 < 0$ ist $0 < \varphi(2) < 180 \implies$ Behauptung. Zu (d): Wegen $90 < 2\varphi(1)$ ist $\frac{\pi}{2} = \frac{90}{\varphi(1)} \in (0, 2) \implies \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{90}{\varphi(1)}\right) = \left(\frac{90}{\varphi(1)}\right) \varphi(1) = 90 \implies \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

$\blacksquare$

Bemerkung 17. *Sei $x \in [0,2]$ und $L_n := \sum_{k=0}^{n-1} \left|e^{i\left(\frac{k+1}{n}\right)x} - e^{i\left(\frac{k}{n}\right)x}\right| = n\left|e^{i\frac{x}{n}} - 1\right|$ ist Länge des Polygonzugs $1, e^{i\frac{1}{n}x}, e^{i\frac{2}{n}x}, ..., e^{ix}$. $L_n = x\left|\frac{e^{i\frac{x}{n}}-1}{\frac{ix}{n}}\right| \xrightarrow[\text{Lemma 10}]{n\to\infty} x$ und $\left|e^{i\frac{x}{n}} - 1\right| \xrightarrow[\text{Lemma 10}]{n\to\infty} 0 \implies$ Bogen $\widehat{1e^{ix}}$ auf Einheitskreis hat Länge x, wobei x ist Bogenmaß des Winkels $\varphi(x) \implies$ Einheitskreis hat Umfang 2π.*

Satz 18. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $e^{z+2k\pi i} = e^z$, *d.h.* e^{ix} *hat Periode* $2\pi i$, $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$, *d.h.* $\sin$ *hat Periode* 2π, $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$, *d.h.* $\cos$ *hat Periode* 2π,
(b) $e^{z+i\frac{\pi}{2}} = ie^{iz}$, $e^{z+i\pi} = -e^z$,
(c) $\sin(z + \pi) = -\sin z$, $\cos(z + \pi) = -\cos z$, $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos z$, $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin z$.

Beweis. Es gilt $e^{z+ix} = e^{ix} \cdot e^z$ und $e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\pi} = i^2 = -1, e^{2k\pi i} = i^{4k} = 1$. Rest folgt leicht aus der Definition von $\sin, \cos$. ∎

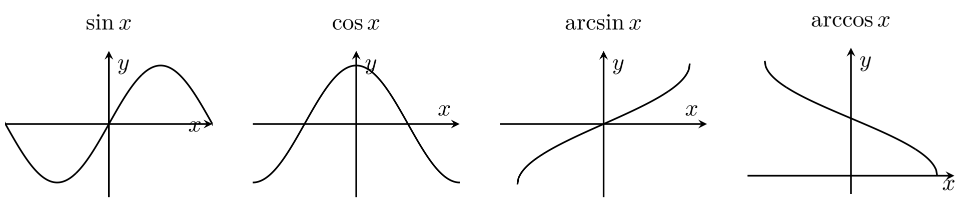
Satz 19. *Auf $\mathbb{C}$ gilt: $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}$, $\sin z = 0 \iff z = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$, $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. $\cos x \neq 0\ \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Lemma 16}}{\underset{\text{Satz 18}}{\Longrightarrow}} \begin{cases} \cos x = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ gdw. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ \sin x = 0 \text{ für } x \in \mathbb{R} \text{ gdw. } x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ $e^z = 1 \overset{z=x+iy}{\iff} e^x \cdot e^{iy} = 1 \iff e^x = 1$ und $e^{iy} = 1$, $e^x = 1 \iff x = 0$. Triviale Lösung von $e^{iy} = 1$ ist $y = 0$. Sonst $e^{iy} = 1,\ x = 0 \iff \cos y + i \sin y = 1 \overset{\cos 0 = 1}{\iff} x = 0, \sin y = 0, \cos y = 1, \overset{\cos\pi=-1}{\iff} x = 0, y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \iff z = 2k\pi i$. Es ist $\sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\cos$ analog. ∎

Wichtige Werte im Intervall $[-\pi, \pi]$

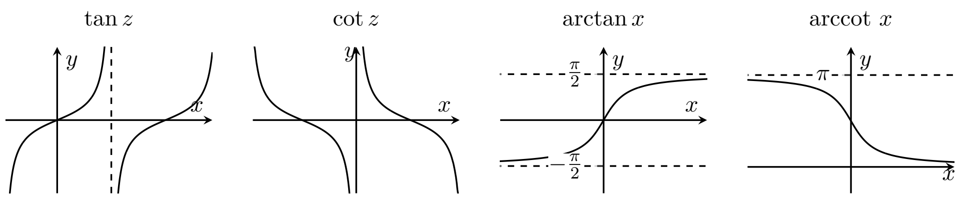
x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

$\sin([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$ und $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$, beide Funktionen sind auf diesen Intervallen streng monoton und surjektiv $\implies$ es existieren Umkehrfunktionen $\sin^{-1}, \cos^{-1}$, wir nennen sie asin *(Arkussinus)* und acos *(Arkuscosinus)*. Setze asin $:= \sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, acos $:= \cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.



- (Tangens) $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\left[\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right]$,
- (Cotangens) $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash[k\pi \mid k \in \mathbb{Z}]$.

Offenbar ist $\tan(z+\pi) = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \tan z$, analog $\cot(z+\pi) = \cot z\ \forall z \in \mathbb{C}$ d.h. beide Funktionen haben Periode π. Für Tangens auf $\mathbb{R}$ gilt: $0 \leq x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2} \implies \tan x_1 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} < \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \tan x_2 \overset{\tan x = -\tan x}{\implies}$ Tangens ist streng monoton wachsend auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dann existiert eine inverse Funktion $\arctan := \tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Arkuscotangens analog.



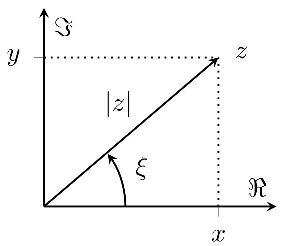
Satz 20. (a) $\mathcal{R}(\exp) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

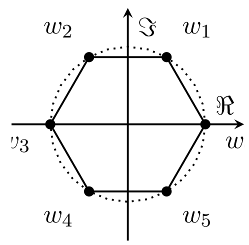
(b) (Polarkoordinaten auf $\mathbb{C}$) *Für $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existiert $\xi \in [0, 2\pi)$ mit $z = |z| \cdot e^{i\xi} = |z|(\cos\xi + i\sin\xi)$.*

(c) (Wurzeln) *Für $c = |c| \cdot e^{i\gamma} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, n \geq 2$ gilt $z^n = c$ g.d.w.*

$$z = \left\{ \sqrt[n]{|c|} e^{i\left(\frac{x}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} =: z_k \mid k = 1, ..., n \right\}.$$

Lösungen bilden regelmäßiges n-eck.





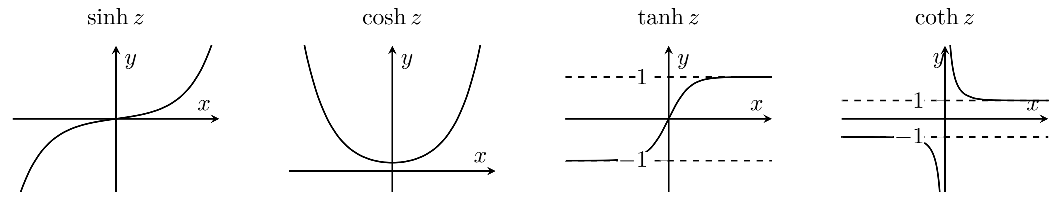
Beweis. Man benutze *Satz 15, Lemma 16, Satz 18.* $e^{(\cdot)} : [0, 2\pi) \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist bijektiv. Nach (6) $e^z \neq 0$. Sei $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \implies \exists! \xi \in [0, 2\pi) : e^{i\xi} = \frac{z}{|z|} \implies z = |z|e^{i\xi} \underset{Formel}{\overset{Euler.}{\implies}}$ (b) $\overset{w = \ln|z| + i\xi}{\implies}$ $e^w = e^{\ln|z| \cdot e^{i\xi}} = |z| \cdot e^{i\xi} = z \implies$ (a). Zu (c): "$\Longleftarrow$": Offenbar $z_k^n = c$. "$\Longrightarrow$": z_k sind paarweise verschieden, es gibt höchstens n Lösungen (nach *Satz 5*). Also folgt die Behauptung. ■

13.4 Natürlicher Logarithmus in $\mathbb{C}$ (Hauptzweig)

Die Funktion $\exp : S := \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im z| < \pi\} \to \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ ist bijektiv (vgl. *Satz 18*, *Satz 19*, *Satz 20.* Damit existiert die Umkehrabbildung $\ln : \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0] \to S$. Für $z = |z|e^{i\xi} \in \mathbb{C}$ gilt ($\ln|z|$ ist reeller Logarithmus): $e^{ln|z| + i\xi} = |z|e^{i\xi} = z \implies \ln z = \ln|z| + i\xi\ \forall z = |z|e^{i\xi} \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0) \implies \ln$ stimmt auf $\mathbb{R}_{>0}$ mit dem *"reellen* ln*"* überein. Warnung: $\ln z_1 \cdot z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$ gilt in $\mathbb{R}$ aber i.a. nicht in $\mathbb{C}$.

13.5 Hyperbolische Funktionen

- (Sinus Hyperbolicus) $\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ $\forall x \in \mathbb{C}$.
- (Cosinus Hyperbolicus) $\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ $\forall x \in \mathbb{C}$.
- (Tangens Hyperbolicus) $\tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}$ $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) i \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- (Cotangens Hyperbolicus) $\coth z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$ $\forall z \in \mathbb{C} \backslash \{k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$.



Satz 21. *Es gilt* $\forall z, w \in \mathbb{C}$*:*

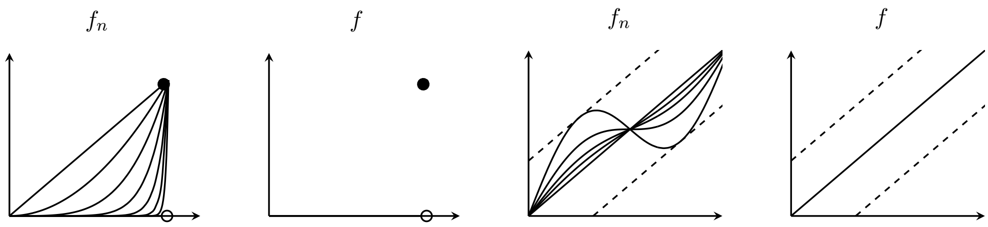
(a) $\sinh z = -i \sin iz$, $\cosh z = \cos iz$, $\sinh(-z) = -\sinh z$, $\cosh(-z) = \cosh(z)$.
(b) $\sinh, \cosh$ *haben Periode* $2\pi i$, $\tanh, \coth$ *haben Periode* πi.
(c) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
(d) $\sinh(z+w) = \sinh z \cdot \cosh w + \sinh w \cdot \cosh z$, $\cosh(z+w) = \cosh z \cdot \cosh w + \sinh z \cdot \sinh w$.

Beweis. Selbststudium. ∎

Sei $f_n : X \to Y$, Y ein metrischer Raum, $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt $\left\{f_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *Funktionenfolge*. Sei $f_n : X \to Y$, Y ein metrischer Raum, $n \in \mathbb{N}$. Funktionenfolge $\left\{f_n\right\}$ *konvergiert punktweise* gegen $f : X \to Y$ auf $M \subset X$ falls gilt: $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ $\forall x \in M$.

Beispiel 22. $f_n(x) := x^n$ $\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, f(x) := \begin{cases} 0 \text{ für } x \in [0,1], \\ 1 \text{ für } x = 1. \end{cases}$ Offenbar $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ auf $[0,1]$.

Funktionenfolge $\left\{f_n\right\}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen $f : X \to Y$ auf $M \subset X$ falls $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\forall x \in M$. (D.h. n_0 kann unabhängig von $x \in M$ gewählt werden!) Schreibe $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} f(x)$ auf M bzw. $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig auf M.



Lemma 23. $f_n \to f$ *gleichmäßig auf* $M \implies f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in M$ *(d.h. f konvergiert punktweise auf M).*

Zu *Beispiel 22*: $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0, \alpha]$ für $0 < \alpha < 1$ aber nicht auf $(0,1]$ (Übungsaufgabe). Falls Y ein normierter Raum ist, gilt in Verallgemeinerung von *Beispiel 8,Beispiel 7*: $f : X \to \mathbb{R}$, $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_y \mid x \in X\}$ ist Norm auf dem Vektorraum der beschränkten Funktionen $B(X,Y) := \{f : X \to Y \mid \|f\|_\infty < \infty\}$.

Satz 24. *Seien $f_n, f \in B(X,Y)$. Dann: $f_n \to f$ gleichmäßig auf $X \iff f_n \to f$ in $\Big(B(X,Y), \|\cdot\|_\infty\Big)$ (d.h. ist konvergent bzgl. Norm $\|\cdot\|_\infty$).*

Beweis. "$\Longrightarrow$": Sei $\epsilon > 0 \implies \exists n_0 : \|f_n(x) - f(x)\|_y < \frac{\epsilon}{2}\ \forall n \geq n_0 \forall x \in X \implies \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\ \forall n \geq n_0 \implies$ Behauptung.
"$\Longleftarrow$": Sei $\epsilon > 0 \implies \exists n_0 : \epsilon > \|f_n - f\|_\infty \geq \|f_n(x) - f(x)\|_y\ \forall n \geq n_0\ \forall n \in X \implies$ Behauptung.

∎

Sei $f_n : X \to Y, Y$ ein normierter Raum, $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^\infty f_n$ *Funktionenreihe* (d.h. $\{S_n\}$ mit $S_n := \sum_{n=0}^\infty f_n$ ist Funktionenfolge der Partialsummen).

Reihe $\sum_{n=0}^\infty f_n$ heißt *punktweise* (bzw. *gleichmäßig*) *konvergent gegen* $f : X \to Y$ auf $M \subset X$ falls dies für zugehörige Folge $\{S_n\}$ gilt.

Beispiel 25 (Potenzreihen). (vgl. *Beispiel 12.11*) Sei $f_k(z) := a_k(z-z_0)^k\ \forall z \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ mit $a_k, z_0 \in \mathbb{C}$. $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k(z-z_0)^k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z)\ \forall z \in B_R(z_0)$ ($R = \frac{1}{L}$ mit $L = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ oder $+\infty$, d.h. punktweise Konvergenz auf (offenem) Konvergenzkreis.)

Satz 26. *Sei $\sum_{n=0}^\infty a_k(z-z_0)^k$ Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius $R \in (0,\infty)$ und sei $M \subset B_R(z_0)$ kompakt (d.h. beschränkt und abgeschlossen). Dann konvergiert diese Potenzreihe gleichmäßig auf M.*

Beachte: M ist abgeschlossen, beschränkt in offener Kugel $B_R(z_0)$.

Beweis. Setze $r := \sup\{|z-z_0|, z \in M\} < \infty$, offenbar $r \leq R$.

Zu (a): Angenommen $r = R \implies \exists z_n \in M : |z_n - z_0| \to R$. Da M kompakt ist, gilt $z_n \to z \in M$ und $|z - z_0| = R \implies z \notin B_R(z_0) \implies z \notin M \implies \lightning \implies z < R$.

Zu (b): Sei $\epsilon > 0$ und $r' \in (r,R) \implies \exists n_0 : \sum_{k=n+1}^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^k < \epsilon$ (geom. Reihe) und $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r'} > \frac{1}{R}$ $\forall n > n_0$. Da Potenzreihe konvergiert $\forall z \in M$, gilt: $\left|\sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k - \sum_{k=0}^n a_k(z-z_0)^k\right|$ $= \lim_{m\to\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{n+1+m} a_k(z-z_0)^k\right| \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+1+m} (\sqrt[k]{|a_k|}r)^k \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+1+m} a_k \left(\frac{r}{r'}\right)^k$ $\leq \sum_{k=n+1}^\infty a_k \left(\frac{r}{r'}\right)^k\ \forall n > n_0 \forall z \in M$. Da n_0 unabhängig von $z \in M$ ist, folgt die gleichmäßige Konvergenz auf M.

∎

14 Stetigkeit

Sei stets $f : D \subset X \to Y$, X, Y metrische Räume, $D = \mathcal{D}(f) \neq \emptyset$. y_0 heißt *Grenzwert* der Funktion f im Punkt $x_0 \in D$ falls:

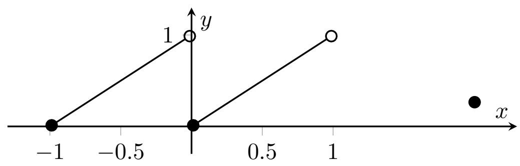
$$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ mit } x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \text{ gilt } f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0. \tag{1}$$

Schreibweise: $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} y_0$ (evtl. $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x) = y_0$).

Beispiel 1. Sei $D = [-1, 1) \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ und $f(x) := \begin{cases} x + 1 \text{ für } [-1, 0), \\ x \text{ für } x \in [0, 1), \\ \frac{1}{3} \text{ für } x = 2. \end{cases}$

Zu *Beispiel 1*

x_0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	ex. nicht	1	$\frac{1}{3}$



Bemerkung 2. *Falls $x_0 \in D$* isolierter Punkt *von D ist, d.h. kein Häufungspunkt von D, dann ist stets* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *(da $x_n \longrightarrow x_0$ nur für $x_n = x_0\ \forall n$).*

Satz 3 ($\epsilon\delta$-Kriterium). *Sei $f : D \subset X \to Y, x_0 \in \overline{D}$. Dann* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x_0) \cap D) \subset B_\epsilon(y_0)$.

Meist in der Literatur: für Grenzwerte werden nur Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq x_0$ betrachtet. Derartige Situationen beschreiben wir mit $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)$.

Beweis. "$\Longrightarrow$": Angenommen $\exists \epsilon > 0 : f(B_\delta(x_0) \cap D) \not\subset B_\epsilon(y_0)\ \forall \delta > 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap D : f(x_n) \notin B_\epsilon(y_0) \implies x_n \longrightarrow x_0$ und $f(x_n) \not\longrightarrow y_0 \implies \lightning \implies$ Behauptung.
"$\Longleftarrow$": Sei $x_n \to x_0, x_n \in D, \epsilon > 0 \implies \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x_0) \cap D) \subset B_\epsilon(y_0) \implies \exists n_0 : x_n \in B_\delta(x_0) \cap D\ \forall n > n_0 \implies f(x_n) \in B_\epsilon(y_0)\ \forall n > n_0 \overset{\epsilon>0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

∎

Satz 4 (Rechenregeln für konvergente Funktionen).

(a) *Sei Y normierter Raum über $\mathbb{K}$, $f, g : D \subset X \to Y, \lambda : D \to \mathbb{K}, x_0 \in \overline{D}$, $f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} y, g(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} \tilde{y}, \lambda(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} \alpha$. Dann gilt: $(f + g)(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} y + \tilde{y}$, $(\lambda \cdot f)(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} \alpha \cdot y$, $\frac{1}{\lambda}(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha}$ falls $\alpha \neq 0$.*

(b) *Sei $f : D \subset X \to Y, g : \tilde{D} \subset Y \to Z, \mathcal{R}(f) \subset \tilde{D}$, X, Y, Z metrische Räume, $x_0 \in \overline{D}, f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} y_0, g(y) \overset{y\to y_0}{\longrightarrow} z_0$. Dann gilt: $g(f(x)) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} z_0$.*

Beweis. Zu (a): Verwende Rechenregeln für folgen.
Zu (b): Anwendung der Definition, beachte $y_0 \in \mathrm{Cl}(\tilde{D})$.

■

Für $f : D \subset X \to Y$ mit $X = \mathbb{R}$ definieren wir *einseitige Grenzwerte*. Zahl $y_0 \in Y$ heißt *linksseitiger* (bzw. *rechtsseitiger*) *Grenzwert* von f im Häufungspunkt x_0 von $D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $D \cap (x_0, \infty)$ falls gilt: $x_n \in D \cap (-\infty, x_0)$ bzw. $x_n \in D \cap (x_0, \infty)$ mit $x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to y_0$. *Schreibweise:* $\lim_{x_n \uparrow x_0} f(x) = y_0 =: f(x_{0-})$ bzw. $\lim_{x_n \downarrow x_0} f(x) = y_0 =: f(x_{0+})$, $f(x_n) \xrightarrow{y \uparrow y_0} y_0$ bzw. $f(x_n) \xrightarrow{y \downarrow y_0} y_0$.

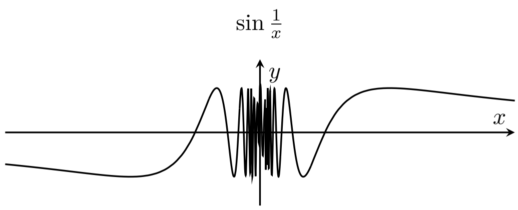
Zu *Beispiel 1*

x_0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
$\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	0	nicht def.	nicht def.
$\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$	nicht def.	$\frac{1}{2}$	1	1	nicht def.

Bemerkung 5. Satz 4 *gilt sinngemäß auch für einseitige Grenzwerte.*

Für $f : D \subset X \to Y$ mit $X = \mathbb{R}$ bzw. $Y = \mathbb{R}$ definieren wir *uneigentliche Grenzwerte* $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0, \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ in dem wir in Grenzwertdefinition $x_0 = \pm\infty$ bzw. $y_0 = \pm\infty$ wählen und bestimmt divergente Folgen $x_n \longrightarrow \pm\infty$ (mit $x_n \in D$) bzw. $f(x_n) \longrightarrow \pm\infty$ betrachten.

Beispiel 6.
- $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim_{x \to x_0} \frac{1}{|x|} = \infty,\ \lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty,\ \lim_{x \uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty.$
- $\lim_{x \to \infty} \sin(x),\ \lim_{x \to \infty} \tan(x),\ \lim_{x \to \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existieren nicht.



Beim Anwenden nur von $x_n = \frac{1}{n\pi}$ konvergiert die Funktion gegen 0 was falsch ist!

Satz ÜA (Rechenregeln für Limes). *Für $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

(a) *Falls* $f(x) > 0\ \forall x \in D \backslash \{x_0\}$, *dann* $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$.
(b) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty \implies \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
(c) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,\ g(x) \geq \alpha\ \forall x \in D \implies \lim_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \infty$.
(d) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,\ g(x) \geq \alpha > 0\ \forall x \in D \implies \lim_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \infty$.

Beweis. Übungsaufgabe. ■

14.1 Landau-Symbole (Vergleich von "Konvergenzgeschwindigkeiten")

Sei $f : D \subset X \to Y, X$ metrischer Raum, Y normierter Raum, $g : D \subset X \to \mathbb{R}, x_0 \in \overline{D} \cap \mathcal{D}\Big(\frac{\|f\|}{g}\Big)$.

- Funktion $f(x)$ ist *"klein o"* von $g(x)$ für $x \to x_0$ falls $\lim_{x\to x_0} \frac{\|f(x)\|}{g(x)} = 0$ (meist $x_0 \notin \mathcal{D}\Big(\frac{\|f\|}{g}\Big)$. Schreibe $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$.
- Funktion $f(x)$ ist *"groß o"* von $g(x)$ für $x \to x_0$ falls $\exists \delta > 0, c \geq 0 : \frac{\|f(x)\|}{g(x)} \leq c \ \forall x \in (B_\delta(x_0)\backslash\{0\}) \cap D$. Schreibe $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$.

Bemerkung 7. *Für $X = \mathbb{R}$ betrachtet man auch $x_0 = \pm\infty$:*

$$B_\delta(\pm\infty) = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x > \frac{1}{\delta} \left(bzw.\ x < \frac{-1}{\delta} \right) \right\}.$$

Beispiel 8. Sei $X = Y = \mathbb{R}$.

- $x^2 = \mathrm{o}(x)$ für $x \to 0$, denn $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$ (man sagt: x^2 geht schneller gegen Null als x).
- $x^5 = \mathrm{o}(x^3)$, $x = \mathrm{o}(1)$ für $x \to 0$ analog.
- $\sin x = \mathcal{O}(x)$ für $x \to 0$, denn für $x \leq 1$ ist $\frac{\sin x}{x} = \frac{x\cdot\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\pm\ldots\right)}{x} \leq 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots \leq e$.
- $x = \mathrm{o}(x^2)$ für $x \to \infty$, denn $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ (man sagt x^2 geht schneller gegen ∞ als x).
- $x^k = \mathrm{o}(e^x)$ für $x \to \infty$. Denn sei $x_n \to \infty$. Dann $\forall n\ \exists L_n \in \mathbb{N} : L_n \leq x_n \leq 2L_n$ (mit $L_n \to \infty$) $\implies \frac{x_n^k}{e^{x_n}} \leq 2^k \cdot \frac{L_n^k}{e^{L_n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Denn $\frac{n^k}{z^n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ nach *Beispiel 9.35.* (Exponentialfunktion geht schneller gegen ∞ als jede Potenzfunktion).

14.2 Relativtopologie

Sei (X, d) metrischer Raum. Für Teilmenge $D \subset X$ ist (D, d) metrischer Raum mit induzierter Metrik (vgl. früheres Beispiel).

- $M \subset D$ heißt *offen* (bzw. abgeschlossen) *relativ zu D* (oder *in D*) falls M offen (bzw. abgeschlossen) in metrischem Raum (D, d) ist.
- $M \subset D$ heißt *Umgebung* von $X \in D$ *relativ zu D* (oder *in D*) falls M Umgebung von X in metrischem Raum (D, d) ist.

Beispiel 9. Sei $X = \mathbb{R}, D = [0, 2)$. $[0, 1), (1, 2)$ sind offen in D, $[0, 1], [1, 2]$ sind abgeschlossen in D. $[0, 1]$ ist Umgebung von $0 \in D$ in D.

Sei $f : D \subset X \to Y$, X, Y metrische Räume, $D = \mathcal{D}(f)$. Funktion f heißt *folgenstetig* im Punkt $x_0 \in D$ falls für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt $x_n \longrightarrow x_0 \implies f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$ (d.h. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$).

Bemerkung 10. *Sei x_0 isolierter Punkt von $D \implies f$ ist folgenstetig in x_0.*

Zu *Beispiel 1*: f ist folgenstetig $\forall x \in D\backslash\{0\}$. Funktion f heißt $\epsilon\delta$-stetig im Punkt $x_0 \in D$ falls $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f\left(B_\delta(x_0) \cap D\right) \subset B_\epsilon(f(x_0))$. Offenbar ist Folgenstetigkeit äquivalent zu $\epsilon\delta$-Stetigkeit nach *Satz 3.* Funktion f heißt *stetig* im Punkt $x_0 \in D$ falls für jede Umgebung V von $f(x_0)$ existiert eine Umgebung U von x_0 in D mit $f(U) \subset V$.

Satz 11. *Sei $f : D \subset X \to Y, x_0 \in D$. Dann gilt: f ist stetig in $x_0 \overset{(a)}{\iff} f$ ist $\epsilon\delta-$stetig in $x_0 \overset{(b)}{\iff}$ f ist folgenstetig in x_0.*

Beweis. ((b) ist bereits klar nach *Satz 3*)

"$\Longrightarrow$": Sei $\epsilon > 0$, $V := B_\epsilon(f(x_0))$ ist Umgebung von $f(x) \implies \exists$ Umgebung U von x_0 in D : $f(U) \subset V \implies \exists \delta > 0 : B_\delta x_0 \cap D \subset D \implies f(B_\delta(x_0) \cap D) \subset V = B_\epsilon(f(x_0)) \implies$ Behauptung.

"$\overset{(a)}{\Longleftarrow}$": Sei V Umgebung von $f(x_0) \implies \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(f(x_0)) \subset V \implies \exists \delta > 0$ mit $f(U) \subset V$ wobei $U := B_\delta(x_0) \cap D$, offenbar ist U Umgebung von x_0 in $D \implies$ Behauptung.

∎

Funktion f heißt *stetig* (*folgenstetig*, *$\epsilon\delta$-stetig*) *auf* $M \subset D$ falls f stetig (folgenstetig, $\epsilon\delta$-stetig) in jedem Punkt $x_0 \in M$ ist.

Beispiel 12. (a) Sei $X = Y = \mathbb{C}, f(z) = x(c \in \mathbb{C}), g(z) = z \; \forall z \in \mathbb{C}$. Dann sind f, g folgenstetig auf $\mathbb{C}$.

(b) Sei $X = Y = \mathbb{R}, f(x) = a^x \; \forall x \in \mathbb{R}(a > 0)$. Dann ist f folgenstetig auf $\mathbb{R}$, denn $x_n \to x_0 \implies |a^{x_n} - a^{x_0}| = |a^{x_0}| \cdot |a^{x_n - x_0} - 1| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (vgl. *Satz 5.20*).

(c) Sei $Y = \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$), $f(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$. Dann ist f folgenstetig in $x_0 \iff f_k$ ist folgenstetig in x_0 für $k = 1, ..., n$ (vgl. *Satz 9.21*).

Hinweis: Begriffe *Stetigkeit* und *Folgenstetigkeit* können auf beliebigen topologischen Räumen erweitert werden, sind aber i.a. nicht äquivalent!

Satz 13. *Sei $f : D \subset X \to Y$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist stetig auf D.*
(2) *$f^{-1}(V)$ ist offen in D für alle $V \in Y$, die offen sind.*
(3) *$f^{-1}(A)$ ist abgeschlossen in D für alle $A \subset Y$ die abgeschlossen sind.*

Beweis. Zu (1) $\Longrightarrow$ (2): Sei $V \subset Y$ offen, Fall $f^{-1}(V) = \emptyset$ klar. Sonst sei $x_0 \in f^{-1}(V) \implies V$ ist Umgebung von $f(x_0) \implies \exists$ Umgebung U von x_0 in $D : f(U) \subset V \implies U \subset f^{-1}(V) \overset{x_0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} f^{-1}(V)$ ist offen in $D \implies$ Behauptung.

Zu (2) $\Longrightarrow$ (1): Sei $x_0 \in D$, V Umgebung von $f(x_0) \implies \exists$ offene Umgebung $\tilde{V} \subset V$ von $f(x_0)$ $\implies U := f^{-1}(\tilde{V})$ ist offen in D, d.h. ist eine Umgebung von x_0 in D mit $f(U) \subset V \implies$ Behauptung.

Zu (2) $\Longrightarrow$ (3): Sei $A \subset Y$ abgeschlossen $\implies Y \backslash A$ ist offen $\implies f^{-1}(Y \backslash A)$ ist offen in $D \implies f^{-1}(A) = D \backslash f^{-1}(Y \backslash A)$ ist abgeschlossen in $D \implies$ Behauptung.

Zu (3) $\Longrightarrow$ (2): Analog zum letzten Fall.

∎

Satz 14 (Rechenregeln für Stetigkeit). (a) *Sei Y normierter Raum über $\mathbb{K}$, $f, g : D \subset X \to Y$, $\lambda : D \to \mathbb{K}, f, g, \lambda$ stetig in $x_0 \in D \implies f + g, \lambda \cdot f$ sind stetig in x_0, $\frac{1}{\lambda}$ ist stetig in x_0 falls $\lambda(x_0) \neq 0$.*

(b) *Sei $f : D \subset X \to Y, g : \tilde{D} \subset Y \to Z$, X, Y, Z metrische Räume, f ist stetig in $x_0 \in D, g$ ist stetig in $f(x_0) \in \tilde{D} \implies g \circ f$ ist stetig in x_0.*

Beweis. Argumentiere mit *"folgenstetig"* und verwende *Satz 4*. Z.b. $x_n \longrightarrow x_0 \implies (f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \overset{x_n \to x_0}{\longrightarrow} f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$. ∎

Beispiel 15. Sei $X = Y = \mathbb{C}$, $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0, a_n \in \mathbb{C}$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{C}$ für $n = 0, 1$ (vgl. *Beispiel 12*) $\underset{Y=\mathbb{C}}{\overset{Satz\ 14}{\Longrightarrow}}$ f ist stetig auf $\mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 16. Sei X metrischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = d(x, \tilde{x})$ (mit $\tilde{x} \in X$ fest) ist stetig auf X, denn $x_n \to x \implies |d(x_n, \tilde{x}) - d(x, \tilde{x})| \leq d(x_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (Beachte $d(x_n, \tilde{x}) \leq d(x_n, x) + d(x, \tilde{x})$ und symmetrischer Fall.)

Beispiel 17. Sei Z normierter Raum über $\mathbb{K}$. Dann sind die Norm, Addition und skalare Multiplikation stetig:

- Sei $f : Z \to \mathbb{R}$ mit $f(z) := \|z\|$ ist stetig auf Z nach *Satz 9.18* ($z_n \to z \implies \|z_n\| \to \|z\|$).
- Sei $X := Z \times Z, x = (z, \tilde{z}) \in X, \|x\|_X := \|z\|_Z + \|\tilde{z}\|_Z$. Dann ist $(X, \|\cdot\|_X)$ normierter Raum (Selbststudium). Add : $X \to Z$ mit Add$(z, \tilde{z}) := z + \tilde{z}$ $\forall z, \tilde{z} \in Z$. Sei $x_n = (z_n, \tilde{z}_n) \to x = (z, \tilde{z}) \implies z_n \to z$ und $\tilde{z}_n \to \tilde{z} \implies z_n + \tilde{z}_n \to z + \tilde{z}$, d.h. Add$(z_n, \tilde{z}_n) \to$ Add$(z, \tilde{z})$. Somit ist Add folgenstetig auf $Z \times Z$.
- Sei $X := \mathbb{K} \times Z, x = (\lambda, z) \in X, \|x\|_X := |\lambda| + \|z\|_Z, (X, \|\cdot\|_X)$ normierter Raum. Dann ist Mult : $X \to Z$ mit $(\lambda, z) := \lambda \cdot z$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, z \in Z \overset{\text{wie oben}}{\Longrightarrow}$ Mult ist folgenstetig auf $\mathbb{K} \times Z$.

Beispiel 18 (Dirichletfunktion). Die *Dirichletfunktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

Satz 19. *Sei $f_n, f : D \subset X \to Y, f_n$ stetig in $x_0 \in D$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig auf $D \implies f$ ist stetig in x_0.*

Beweis. Zeige f ist $\epsilon\delta$-stetig in x_0: Sei $\epsilon > 0 \implies \exists m : d(f_m(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall x \in D$. Da f_m stetig im Punkt x_0 ist, $\exists \delta > 0 : d(f_m(x), f_n(x_0) < \frac{\epsilon}{3}$ $\forall x \in B_\delta(x_0) \implies d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_m(x)) + d(f_m(x), f_m(x_0)) + d(f_m(x_0), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ $\forall x \in B_\delta(x_0) \implies$ Behauptung. ∎

Folgerung 20. *Falls alle f_n stetig auf $M \subset D$ sind und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $M \implies f$ ist stetig auf M.*

Zu *Beispiel 13.22*: $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$, $f_n \to f$ nicht gleichmäßig auf $[0, 1]$. Dann sind alle f_n stetig auf $[0, 1]$, aber f ist nicht stetig in $x = 1$

Satz 21. *Sei $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ $\forall z \in B_R(z_0)$ ($R \in (0, \infty)$ ist ein Konvergenzradius, $a_k \in \mathbb{C}$ $\forall k \in \mathbb{N}$) $\implies f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ ist stetig auf $B_R(z_0)$.*

Beweis. Sei $\tilde{z} \in B_R(z_0) \implies \exists \rho > 0 : \overline{B_\rho(\tilde{z})} \subset B_R(z_0) \overset{\text{Satz 13.26}}{\implies}$ Potenzreihe ist gleichmäßig konvergent auf $\overline{B_\rho(\tilde{z})} \overset{\text{Satz 19}}{\implies} f$ ist stetig in $\tilde{z} \implies$ Behauptung. ∎

Bemerkung 22. *Funktionen $z \to e^z, z \to \sin z, z \to \cos z$ sind stetig auf $\mathbb{C}$, folglich sind $z \to \tan z, z \to \cot z$ stetig auf Definitionsbereichen (nach Rechenregeln).*

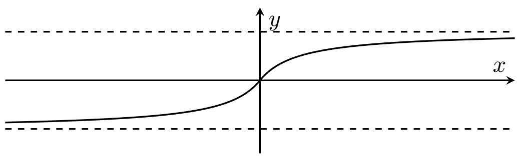
Hinweis: Für stetige Funktionen gilt i.a. nicht: f(offen) ist offen bzw. f(abgeschlossen) ist abgeschlossen.

Beispiel 23. Sei $X = Y = \mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \sin x : f\big((-2,4)\big) = [-1,1]$ ist nicht offen.
(b) $f(x) = e^x : f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$ ist nicht abgeschlossen.

Sei bijektive Abbildung $f : D \subset X \to R \subset Y$, X, Y sind metrische Räume, $D = \mathcal{D}(f), R = \mathcal{R}(f)$ heißt *Homöomorphismus* falls f und f^{-1} stetig sind. Mengen D und R heißen *homöomorph*, falls es einen Homöomorphismus $f : D \to R$ gibt ($D = \mathcal{D}(f), R = \mathcal{R}(f)$). Beachte: Homöomorphismus bildet offene (bzw. abgeschlossene) Mengen auf offene (bzw. abgeschlossene) Mengen ab. (Damit bleiben topologische Eigenschaften erhalten.)

Beispiel 24. Mengen $X = \mathbb{R}^n$ und $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ sind homöomorph, denn $f : X \to B$ mit $f(x) = \frac{x}{(1+|x|)}$ ist stetig und bijektiv mit $f^{-1}(y) = \frac{y}{(1+|y|)}$ stetig auf B.



Beispiel 25 (Stereographische Projektion). Seien $X = \mathbb{R}^{n+1}$, $X_0 = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\}$, $N = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *Nordpol*, $S_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ die *n-dimensionale Einheitssphere*. Betrachte $\sigma : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\sigma(x) := N + \big(\frac{2}{|x-N|^2}\big)(x-N)$ wobei σ stetig ist. Dann $|\sigma(x)| = 1 \iff \langle\sigma(x), \sigma(x)\rangle = 1 \iff \underbrace{|N|^2}_{=1} + \big(\frac{4}{|x-N|^2}\big)\langle N, x-N\rangle + \frac{4}{|x-N|^2} = 1 \iff \langle x, N\rangle = 0 \iff x \in X_0$. Folglich ist $\sigma : X_0 \to S_n\backslash\{N\}$ bijektiv, offenbar ist $\sigma^{-1}(y) = N + \big(\frac{2}{|y-N|^2}\big)(y-N)$ $(= \sigma(y))$ $\forall y \in S_n\backslash\{N\}$ stetig $\implies X_0$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n \implies \mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $S_n\backslash\{N\}$.

Hinweis: σ bildet Geraden in X_0 auf Kreise durch $\mathbb{N}$ ab.

Satz 26 (Existenz stetiger Umkehrfunktion). *Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, D sei Intervall, dann existiert f^{-1} und ist stetig auf $\mathcal{R}(f)$.*

Beweis. Übungsaufgabe. ∎

Beispiel 27. Funktion $f : [0,\infty)$ mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist stetig bzw. $f(x) = \log_a x$ $(a > 0)$ ist stetig.

Satz 28. *Sei $f : X \to Y$ linear, X, Y normierte Räume, $X = \mathcal{D}(f)$. Dann gilt f ist stetig in $x_0 = 0 \overset{(a)}{\iff}$ f ist stetig auf X $\overset{(b)}{\iff}$ f ist beschränkt.*

Beweis. "$\overset{(b)}{\Longrightarrow}$": Klar. "$\overset{(b)}{\Longleftarrow}$": Es ist $\|f(x)\| \leq c\|x\| \; \forall x \in X$, sei $x_n \longrightarrow x_0 \implies \|f(x_n) - f(x_0)\| = \|f(x_n - x_0)\| \leq c\|x_n - x_0\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies f$ ist stetig in $x_0 \overset{x_0 \text{ bel.}}{\Longrightarrow} f$ ist stetig auf X. "$\overset{(a)}{\Longleftarrow}$": Klar. "$\overset{(a)}{\Longrightarrow}$": Sei f stetig in $x_0 = 0$. Angenommen f ist unbeschränkt $\implies \exists$ Folge $\{x_n\} : \|x_n\| = 1$ und $\|f(x)\| \geq n \; \forall n \in \mathbb{N} \implies \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ und $\left\|f\left(\frac{1}{n} \cdot x_n\right)\right\| = \frac{1}{n}\|f(x_n)\| \geq 1 \underset{\text{in } x_0}{\overset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow}} \lightning \implies$ Behauptung. ■

Funktion $f : D \subset X \to Y$, wobei X, Y sind metrische Räume, heißt *gleichmäßig stetig* auf $M \subset D$ falls $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : d\big(f(x), f(\tilde{x})\big) < \epsilon \; \forall x, \tilde{x} \in M$ mit $d(x, \tilde{x}) < \delta$. Beachte: f ist dann $\epsilon\delta-$stetig in jedem $\tilde{x} \in M$ und $\delta > 0$ kann unabhängig von $\tilde{x} \in M$ gewählt werden.

Satz 29. *Sei $f : D \subset X \to Y$, wobei X, Y sind metrische Räume stetig auf kompakter Menge $M \subset D \implies f$ ist gleichmäßig stetig auf M.*

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig

$$\implies \exists \epsilon > 0 \; \forall \delta_n = \frac{1}{n} \; (n \in \mathbb{N}) \; \exists x_n, \tilde{x}_n \in M \text{ mit } d(x_n, \tilde{x}_n) < \frac{1}{n} \text{ und } d(f(x_n), f(\tilde{x}_n) \geq \epsilon \tag{2}$$

$\underset{\text{kompakt}}{\overset{M \text{ ist}}{\Longrightarrow}}$ (evtl. für T.F.) $x_n \longrightarrow x \in M \implies d(\tilde{x}_n, x) \leq d(\tilde{x}_n, x_n) + d(x_n, y) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \tilde{x}_n \longrightarrow x$ $\underset{\text{stetig}}{\overset{f \text{ ist}}{\Longrightarrow}} \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = f(x) \overset{(2)}{\Longrightarrow} \lightning \implies$ Behauptung. ■

Beispiel 30. Funktion $f(x) = \frac{1}{x} \; \forall x \in (0, \infty)$ ist gleichmäßig stetig auf $[\alpha, \beta]$ für $0 < \alpha < \beta < \infty$ und auf $[\alpha, \infty)$ für $0 < \alpha$ aber nicht auf $(0, 1)$, denn sei $0 < \epsilon < 1$. Wähle $x < 1, \tilde{x} = \frac{x}{2} \implies |f(x) - f(\tilde{x})| = \frac{1}{x} > 1 > \epsilon$, aber $|x - \tilde{x}| = \frac{x}{2}$ kann beliebig klein sein für x nahe $0 \implies \nexists \delta = \delta(\epsilon)$ gemäß Definition.

Beispiel 31. Funktion $f(x) = \sin\frac{1}{x} \; \forall x \in (0, \infty)$ ist gleichmäßig stetig auf $[\alpha, \beta]$ und (α, ∞) für $0 < \alpha < \beta < \infty$ aber nicht auf $(0, 1]$ denn: Betrachte $x_k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)}$, dann $|f(x_k - f(x_{k+1}))| = 2$ und $|x_k - x_{k+1}| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Argumente sind beliebig nah aber Funktionswerte nicht.

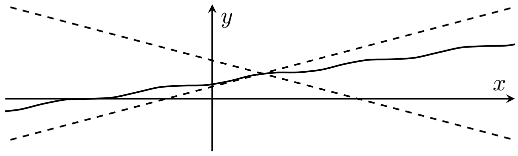
Funktion $f : D \subset X \to Y$, wobei X, Y sind metrische Räume, heißt *Lipschitz-stetig* auf $M \subset D$ falls eine *Lipschtz-konstante* $L > 0$ existiert mit

$$d(f(x), f(\tilde{x})) \leq L \cdot d(x, \tilde{x}) \; \forall x, \tilde{x} \in M. \tag{L}$$

Spezialfall: Sind X, Y normierte Räume, dann hat *(L)* die Form

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \leq L \cdot \|x - \tilde{x}\| \; \forall x, \tilde{x} \in M. \tag{L'}$$

Interpretation: Für $X = Y = \mathbb{R}$ fixiere $\tilde{x}$.



Graph von f liegt vollständig in einem Kegel. Dies muss für jedes $\tilde{x} \in M$ gelten und zwar mit gleichem L.

Satz 32. *Sei $f : D \subset X \to Y$ Lipschitz-stetig auf M, wobei X, Y metrische Räume sind $\implies f$ ist gleichmäßig stetig auf M (und damit stetig).*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, wähle $\delta = \frac{\epsilon}{L}$, wobei L Lipschitz-konstante von f ist $\implies d(f(x), f(\tilde{x}) \leq L \cdot d(x, \tilde{x}) < L \cdot \delta = \epsilon \ \forall x, \tilde{x} \in M$ mit $d(x, \tilde{x}) < \delta \implies$ Behauptung. ∎

Beispiel 33. Sei $f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Dann $|f(x) - f(\tilde{x})| = |x^2 - \tilde{x}^2| = |x + \tilde{x}| \cdot |x - \tilde{x}|$. 1. Fall: $M \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt $\implies \exists L > 0 : |x + \tilde{x}| \leq L \ \forall x, \tilde{x} \in M \implies f$ ist Lipschitz-stetig. 2. Fall: $M \subset \mathbb{R}$ ist unbeschränkt $\implies |x + \tilde{x}|$ ist unbeschränkt $\implies f$ ist nicht Lipschitz-stetig.

Beispiel 34. Funktion $f(x) = \sqrt{x} \ \forall x \in [0, 1]$ ist gleichmäßig stetig aber nicht Lipschitz-stetig, denn $|\sqrt{x} - \sqrt{\tilde{x}}| = |\sqrt{x} - \sqrt{\tilde{x}}| \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{\tilde{x}})}{(\sqrt{x}+\sqrt{\tilde{x}})} = \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{\tilde{x}})} \cdot |\sqrt{x} - \sqrt{\tilde{x}}|$ ist unbeschränkt auf $[0, 1]$.

Beispiel 35. Sei $f : X \to Y$ stetig, linear (X, Y seien normierte Räume) $\implies f$ ist Lipschitz-stetig auf X mit $L = \|f\|$ (vgl. *Satz 13.8*), denn: f ist beschränkt d.h. $\exists c \geq 0 : \|f(x)\| \leq c\|x\| \ \forall x \in X \implies \|f(x) - f(\tilde{x})\| = \|f(x - \tilde{x})\| \leq c\|x - \tilde{x}\| \ \forall x, \tilde{x} \in X$.

Beispiel 36. Norm ist Lipschitz-stetig. Sei $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}, X$ normierter Raum. Offenbar $\|x\| \leq \|x - \tilde{x}\| + \|\tilde{x}\| \implies \|x\| - \|\tilde{x}\| \leq \|x - \tilde{x}\| \ \forall x, \tilde{x} \in X \implies$ Norm ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

Funktion $\tilde{f} : \mathcal{D}(\tilde{f}) \to Y$ heißt *Fortsetzung* (bzw. *Einschränkung*) von $f : \mathcal{D}(f) \to Y$ auf $\mathcal{D}(\tilde{f})$ falls $\mathcal{D}(f) \subset \mathcal{D}(\tilde{f})$ (bzw. $\mathcal{D}(\tilde{f}) \subset \mathcal{D}(f)$) und $\tilde{f}(x) = f(x) \ \forall x \in \mathcal{D}(f)$ (bzw. $\forall x \in \mathcal{D}(\tilde{f})$). Für eine eingeschränkte Funktion f auf $D(\tilde{f})$ schreibe $\tilde{f} = f_{|\mathcal{D}(\tilde{f})}$.

Satz 37. *Sei $f : D \subset X \to Y$ gleichmäßig stetig auf D, wobei X, Y sind metrische Räume, Y ist vollständig $\implies$ es existiert eindeutige stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf $\overline{D}$ und $\tilde{f}$ ist gleichmäßig stetig auf $\overline{D}$.*

Bemerkung: Falls x_0 kein Häufungspunkt von D ist, so kann man stets stetig auf $D \cup \{x_0\}$ fortsetzen (aber nicht eindeutig).

Beweis. Sei f gleichmäßig stetig auf D

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : d(f(x), f(x')) < \epsilon \ \forall x, x' \in D \text{ mit } d(x, x') < \delta(\epsilon) \tag{3}$$

Sei $x_0 \in \overline{D} \backslash D$, dann existiert $x_n \to x_0, x_n \in D, y_n = f(x_n)$.

(a) Fixiere $\epsilon > 0 \overset{\{x_n\} \text{ ist}}{\underset{\text{C.F.}}{\implies}} \exists n_0 : d(x_n, x_m) < \delta(\epsilon) \ \forall n, m > n_0 \overset{(3)}{\implies} d(y_n, y_m) < \epsilon \ \forall m, n > n_0$

$$\overset{\epsilon \text{ ist bel.}}{\implies} \{y_n\} \text{ ist Cauchy-Folge } \overset{Y \text{ ist}}{\underset{\text{vollst.}}{\implies}} y_n = f(x_n) \to \tilde{f}(x_0) \tag{4}$$

(b) Sei $\tilde{\delta}(\epsilon) = \frac{1}{2}\delta(\frac{\epsilon}{2})$ o.B.d.A. ist $\delta(0)$ monoton wachsend, $\tilde{f} = f$ auf D. Sei $x, x' \in \overline{D}$ mit $d(x,x') < \tilde{\delta}(\epsilon), x_n \to x,\ x'_n \to x',\ x_n, x'_n \in D,\ \tilde{f}(x)$ bzw. $\tilde{f}(x')$ falls x, bzw. $x' \in \overline{D} \backslash D$
$\implies d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leq d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x_n)) + \underbrace{d(\tilde{f}(x_n), \tilde{f}(x'_n))}_{\overset{(3)}{<} \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{d(\tilde{f}(x'_n), \tilde{f}(x'))}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} < \epsilon$ groß genug.

Beachte: Die linke Seite ist unabhängig von $n \implies \tilde{f}$ ist gleichmäßig stetig auf $\overline{D}$ (mit $\tilde{\delta}(\epsilon)$) $\implies \tilde{f}$ ist stetig auf $\overline{D} \implies$ Grenzwert in (4) ist unabhängig von der Folge $x_n \to x_0 \implies$ Eindeutigkeit. ∎

Folgerung 38. *Sei $f : D \subset X \to Y$ linear, stetig $\implies$ es existiert eindeutig stetige Fortsetzung von f auf $\overline{D}$.*

Beweis. Funktion f ist Lipschitz-stetig auf $D \overset{\textit{Satz 32}}{\implies} f$ ist gleichmäßig stetig auf $D \overset{\textit{Satz 37}}{\implies}$ Behauptung. ∎

Zu *Beispiel 31*: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ auf $(0, \infty)$ kann offenbar nicht stetig auf $[0, \infty)$ fortgesetzt werden (beachte: *Satz 37* ist nicht anwendbar).

15 Anwendungen

Sei stets $f : D \subset X \to Y$, X, Y metrische Räume, $D = \mathcal{D}(f)$.

Satz 1. *Sei $f : D \subset X \to Y$ stetig, $M \subset D$ kompakt $\implies$ $f(M)$ ist kompakt.*

Beweis. Sei $\{y_n\}$ Folge in $f(M)$ $\implies$ $\exists x_n \in M : f(x_n) = y_n \underset{\text{folgenk.}}{\overset{M \text{ ist}}{\implies}}$ (evtl. für Teilfolgen) $x_n \longrightarrow x_0 \in M \underset{\text{folgenst.}}{\overset{f \text{ ist}}{\implies}} y_n = f(x_n) \longrightarrow f(x_0) \in f(M)$ $\implies$ $\{y_n\}$ besitzt eine konvergente Teilfolge in $f(M)$ $\implies$ $f(M)$ ist folgenkompakt $\implies$ Behauptung. ∎

Satz 2. *Sei $f : D \subset X \to Y$ stetig, injektiv, D kompakt $\implies$ $f^{-1} : f(D) \to D$ ist stetig.*

Beweis. Sei $y_n \to y_0$ mit $y_0, y_n \in f(D)$ $\forall n$, $x_n := f^{-1}(y_n)$ für $n = 0, 1, \ldots$. Sei $\{x_{n'}\}$ beliebige Teilfolge von $\{x_n\} \underset{\text{kompakt}}{\overset{D \text{ ist}}{\implies}} \exists$ Teilfolge $\{x_{n''}\}$ von $\{x_{n'}\}$: $x_{n''} \longrightarrow \tilde{x} \in D \underset{\text{stetig}}{\overset{f \text{ ist}}{\implies}} y_{n''} = f(x_{n''}) \longrightarrow f(\tilde{x}) = y_0 \underset{\text{injektiv}}{\overset{f \text{ ist}}{\implies}} \tilde{x} = x_0 \implies x_{n''} \longrightarrow x_0 \implies x_n \longrightarrow x_0$ (Teilfolgenprinzip, vgl. *Satz 9.12*) $\implies$ $f^{-1}(y_n) \longrightarrow f^{-1}(y_0) \implies f^{-1}$ ist folgenstetig $\implies$ Behauptung. ∎

Theorem 3 (Weierstraß). *Sei $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ stetig, X metrischer Raum, $M \subset D$ kompakt, $M \neq \emptyset$. Dann $\exists x_{min}, x_{max} : f(x_{min}) = \min\{f(x) \mid x \in M\} = \min_{x \in M} f(x)$, $f(x_{max}) = \max\{f(x) \mid x \in M\} = \max_{x \in M} f(x)$.*

Bemerkung 4. Theorem 3 *ist wichtiger Satz für Existenz von Optimallösungen (stetige Funktion besitzt auf kompakter Menge ein Minimum und Maximum). Folglich sind stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt.*

Beweis. (für Minimum, Maximum analog) Sei

$$\alpha := \begin{cases} \inf\{f(x) \mid x \in M\} \text{ falls } f \text{ auf } M \text{ nach unten beschränkt ist,} \\ -\infty \text{ sonst.} \end{cases}$$

$\implies \exists x_n \in M : f(x_n) \longrightarrow \alpha \underset{\text{kompakt}}{\overset{M \text{ ist}}{\implies}}$ (evtl. für Teilfolgen) $x_n \longrightarrow x_{\min} \in M \underset{\text{stetig}}{\overset{f \text{ ist}}{\implies}} f(x_n) \longrightarrow f(x_{\min}) = \alpha \implies$ Behauptung (*beachte* $\alpha \neq -\infty$).

∎

Satz 5. *Sei $f : \mathbb{R}^n \to Y$ linear, Y normierter Raum $\implies$ f ist stetig auf $\mathbb{R}^n$.*

Hinweis: Etwas allgemeiner hat man sogar $f : X \to Y$ linear, X, Y sind normierte Räume, $\dim\ X < \infty \implies f$ ist stetig. (Ist i.a. nicht richtig für $\dim\ X = \infty$.)

Beweis. Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ Standardbasis in $\mathbb{R}^n$, $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ (nach *Satz 11.5* kann man sich o.B.d.A. auf Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^n$ beschränken) $\implies \|f(x)\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\| \cdot \|f(e_k)\| \leq \underbrace{\sum_{k=1}^\infty \|f(e_k)\| \cdot \max_{k=1,...,n} \|x_k\|}_{c\|x\|_\infty \leq \tilde{c}\|x\|}$ $\implies$ f ist beschränkt $\implies$ f ist stetig. ∎

Eine stetige Abbildung $f : I \subset \mathbb{R} \to Y$, wobei I Intervall und Y metrischer Raum ist heißt *Kurve* in Y (gelegentlich wird auch Menge $f(I)$ als *Kurve* und f als zugehörige *Parametrisierung* bezeichnet).

Beachte: Bild $f(I)$ kann für verschiedene f gleich sein.

Beispiel 6. (a) $x \in [0, 2\pi] \mapsto (x, \sin x) \in \mathbb{R}^2$ ist Kurve in $\mathbb{R}^2$,
(b) $x \in [0, 1] \mapsto e^{i\pi x} \in \mathbb{C}$ oder $x \in [0, \pi] \mapsto e^{ix} \in \mathbb{C}$ sind Kurven in $\mathbb{C}$,
(c) Sei Y normierter Raum, $a, b \in Y, f : [0, 1] \to Y$ mit $f(t) = (1 - t) \cdot a + t \cdot b$ ist Kurve (Strecke von a nach b).

Menge $M \subset X$, wobei X ist metrischer Raum heißt *bogenzusammenhängend* (bogenweise zusammenhängend) falls $\forall a, b \in M \; \exists$ Kurve $f : [\alpha, \beta] \to M$ mit $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$. Menge $M \subset X$ heißt *zusammenhängend*, falls $\forall A, B$ gilt: $A, B \subset M$ sind offen in M, disjunkt, $\neq \emptyset \implies M \neq A \cup B$.

Beispiel 7. Sei $X = \mathbb{R}^2, M = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \;\middle|\; x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, 0)\}$. Dann ist M zusammenhängend aber nicht bogenzusammenhängend.

Satz 8. *Sei X metrischer Raum, $M \subset X$. Dann:*

(1) *$X = \mathbb{R}$: M ist zusammenhängend $\iff$ M ist Intervall (offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt, unbeschränkt).*
(2) *M ist bogenzusammenhängend $\implies$ M ist zusammenhängend.*
(3) *Sei X normierter Raum, dann: M ist offen, zusammenhängend $\implies$ M ist bogenzusammenhängend.*

Beweis. Zu (1): "$\Longrightarrow$": Sei M kein Intervall $\implies \exists a, b \in M, s \notin M : a < s < b \implies A := M \cap (-\infty, s), B := M \cap (s, \infty)$ offen in M, disjunkt, $\neq \emptyset$ und $M = A \cup B \implies M$ ist nicht zusammenhängend $\implies$ Behauptung.

"$\Longleftarrow$": Sei M Intervall. Angenommen

$$M = A \cup B \text{ für } A, B \text{ offene Mengen in } M, \text{ disjunkt, } \neq \emptyset. \tag{1}$$

$\implies \exists a \in A, b \in B$ und (o.B.d.A. $0 < b$) $[a, b] \subset M$. Setze $s := \sup\ A \cap [a, b]$ $\implies s \in A$ da $A = M \backslash B$ auch abgeschlossen in $M \implies s < b \implies \exists \epsilon > 0$: $[s, s + \epsilon] \subset A$ da A offen in M ist und $[a, b] \subset M \implies$ ↯ $(s = \sup) \implies$ (1) ist falsch $\implies M$ ist zusammenhängend.

Zu (2): Angenommen

$$M = A \cup B \text{ für } A, B \text{ offene Mengen in } M, \text{ disjunkt }, \neq \emptyset \tag{2}$$

$\implies \exists a \in A, b \in B, a \neq b \implies \exists$ Kurve $f : [\alpha, \beta] \to M$ mit $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$ $\implies I := [\alpha, \beta] = f^{-1}(A \cap C) \cup f^{-1}(B \cap C)$ mit $C := f([\alpha, \beta])$, wobei $f^{-1}(A \cap C)$, $f^{-1}(B \cap C)$ disjunkt, $\neq \emptyset$, offen in I sind, da $A \cap C, B \cap C$ offen in C sind und f stetig ist $\implies I$ ist nicht zusammenhängend $\overset{\text{Zu (1)}}{\implies}$ ↯ $\implies$ (2) ist falsch $\implies$ Behauptung.

Zu (3): Sei $M \neq \emptyset$ (sonst klar), d.h. $\exists a \in M : A := \{x \in M \mid \exists$ Kurve in M von a nach $x\}$. A ist offen in M, denn sei $\tilde{x} \in A \overset{M \text{ ist}}{\underset{\text{offen}}{\Longrightarrow}} \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(\tilde{x}) \subset M \implies B_\epsilon(\tilde{x}) \subset A$, denn $\forall x \in B_\epsilon(\tilde{x})$ kann Kurve von a nach $\tilde{x}$ mit *Strecke* von $\tilde{x}$ nach x zusammengesetzt werden (da X normierter Raum ist). $B := M \backslash A$ ist offen in M, denn sei $\tilde{x} \in B \overset{M \text{ ist}}{\underset{\text{offen}}{\Longrightarrow}} \exists s > 0 : B_\epsilon(\tilde{x}) \subset M$. Angenommen $\exists x \in B_\epsilon(\tilde{x}) \cap A \implies \tilde{x} \in A$ (betrachte Kurve $a \mapsto x \mapsto \tilde{x}$) $\implies \lightning \implies B_\epsilon(\tilde{x}) \subset B \implies B$ ist offen in $M \implies M = A \cup B$, A, B sind offen in M, disjunkt, $A \neq \emptyset \overset{M \text{ ist}}{\underset{\substack{\text{zusammen-}\\\text{hängend}}}{\Longrightarrow}} B = \emptyset \implies M = A \implies$ Behauptung.

∎

Sei X metrischer Raum, $M \subset X$ heißt *Gebiet* falls M offen und zusammenhängend ist. Beachte: Gebiet in einem normiertem Raum ist sogar bogenzusammenhängend. Offenbar: $M \subset X$ ist konvex $\implies M$ ist bogenzusammenhängend.

Beispiel 9. Sei X normierter Raum, dann ist $M = B_r(x)$ konvex $\forall x \in X, r > 0$, denn sei $a, b \in B_r(x), t \in [0,1]$, $\|(1-t)a + tb - x\| = \|(1-t)(a-x) + t(b-x)\| \leq (1-t)\|a-x\| + t\|b-x\| < (1-t)r + tr = r$.

Satz 10. *Sei $f : D \subset X \to Y$ stetig, wobei X, Y metrische Räume sind, dann gilt: $M \subset D$ ist zusammenhängend $\implies f(M)$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen $f(M) = A \cup B, A, B$ sind offen in $f(M)$, disjunkt, $\neq \emptyset \implies M = f_{|M}^{-1}(A) \cup f_{|M}^{-1}(B)$ ist disjunkt, $\neq \emptyset$, offen in M da $f_{|M}$ stetig ist. M ist zusammenhängend $\implies \lightning \implies$ Behauptung. ∎

Theorem 11 (Zwischenwertsatz). *Sei $f : D \subset X \to \mathbb{R}$ stetig, $M \subset D$ zusammenhängend, $a, b \in M \implies f$ nimmt auf M jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Spezialfall: $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. $f(M)$ ist zusammenhängend nach *Satz 10*, $\overset{\text{Satz 8}}{\Longrightarrow} f(M) \subset \mathbb{R}$ ist Intervall $\implies$ Behauptung. ∎

Beispiel 12. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, $(a_j \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$. n ist ungerade $\implies \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ (insbesondere existiert stets Nullstelle), denn (o.B.d.A. $a_n > 0$):

$$f(x) = x^n \cdot \underbrace{\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}_{\overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} a_n} \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty.$$

Beispiel 13. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig mit $f([a,b]) \subset [a,b] \implies f$ besitzt *Fixpunkt*, d.h. $\exists x \in [a,b] : f(x) = x$.

Beweis. Sei $g(x) := f(x) - x$. g ist stetig auf $[a,b], g(a) \geq 0, g(b) \leq 0 \overset{\text{Theorem 11}}{\Longrightarrow} \exists x \in [a,b] : g(x) = 0$. ∎

Theorem 14 (Fundamentalsatz der Algebra). *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ (d.h. $f(z) = a_n z^n + ... + a_1 z + a_0, a_j \in \mathbb{C}, a_n \neq 0, n \geq 1$). Dann besitzt f (mindestens eine) Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ (d.h. $f(z_0) = 0$).*

Folgerung 15. *Jedes Polynom $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ von Grad n, $f \neq 0$ besitzt genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ gezählt mit Vielfachheit, d.h. $\exists z_1, ..., z_l \in \mathbb{C}$, paarweise verschieden $k_1, ..., k_l \in \mathbb{N}_{>0}$, $a_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $k_1 + ... + k_l = n$ und $f(z) = a_n \cdot (z - z_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (z - z_l)^{k_l}$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Hier k_j heißt* Vielfachheit *der Nullstelle z_j.*

Hinweis: In dem *Satz 13.5* wurde gezeigt, dass f höchstens n Nullstellen besitzt.

Beweis. (Von *Folgerung 15*) Behauptung ist richtig für $n = 0, f \neq 0$, sei Grad $n \geq 1 \overset{\text{Theorem 14}}{\Longrightarrow} f$ besitzt Nullstelle $z_1 \in \mathbb{C} \overset{\text{Satz 13.5}}{\Longrightarrow} f(z) = (z - z_1) \cdot f_1(z)$ für Polynom f_1, Grad $f = n - 1$. Falls $n - 1 \geq 1$, wiederhole obige Schritte für f_1 (beachte: eventuell ist z_1 auch Nullstelle von f_1, sonst z_2). Nach n Schritten: Grad $f_n = 0$, setze $a_n := f_n(z) \neq 0 \implies$ Behauptung. ■

Beweis. (Von *Theorem 14*)

Zu (a): $|f|$ besitzt ein Minimum auf $\mathbb{C}$, denn (o.B.d.A. $a_n = 1$) $f(z) = z^n + = z^n(1+r(z))$ mit $r(z) = \frac{a_{n-1}}{z} + ... + \frac{a_0}{z^n}$. $\exists R > 0 : R^n > 2|a_0|$ und $|r(z)| < \frac{1}{2}$ $\forall |z| > R$

$$\implies |f(z)| \geq \frac{1}{2}|z|^n \geq \frac{1}{2}R^n > |f(0)| = |a_0| \; \forall z \notin \overline{B_R(0)} \tag{3}$$

$\overline{B_R(0)}$ ist Kompakt, $|f|$ ist stetig $\overset{\text{Theorem 3}}{\Longrightarrow} \exists \tilde{z} \in \overline{B_R(0)} : |f(\tilde{z})| = \min_{z \in \overline{B_R(0)}} |f(z)| \overset{(3)}{\Longrightarrow} |f(\tilde{z})| \leq |f(z)|$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Zu (b): Angenommen $|f(\tilde{z})| > 0 \implies \frac{1}{f(\tilde{z})} f(\tilde{z}+z) = 1+bz^k+g(z)z^{k+1}$ für Polynom g, $b \neq 0, k \geq 1$. Nach *Satz 13.20* $\exists \beta \in \mathbb{C} : \beta^k = -\frac{1}{b}$ $(\neq 0)$. Offenbar $\lambda \to \left|f(\lambda\beta) \cdot \beta^{k+1}\right|$ ist stetig auf $[0, 1] \subset \mathbb{R} \overset{\text{Theorem 3}}{\Longrightarrow} \exists c > 0 : \left|g(\lambda\beta)\beta^{k+1}\right| \leq c$ $\forall \lambda \in [0, 1] \implies \left|\frac{1}{f(\tilde{z})} f(\tilde{z} + \lambda\beta)\right| = \left|1 - \lambda^k + g(\lambda\beta)\beta^{k+1}\lambda^{k+1}\right| \leq 1 - \lambda^k + \lambda^{k+1}c$ $\forall \lambda \in [0, 1] = 1 - \lambda^k(1 - \lambda c) < 1 - \frac{\lambda^k}{2} < 1 \forall \lambda \in (0, 1), \lambda < \frac{1}{2c} \implies |f(\tilde{z} + \lambda\beta)| < |f(\tilde{z})|$ für kleine $\lambda > 0 \implies \tilde{z}$ ist kein Minimum $\implies$ ↯ $\implies f(\tilde{z}) = 0$.

■

Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch* auf $B_R(z_0) \subset \mathbb{C}$ falls f auf $B_R(z_0)$ durch Potenzreihe in z_0 darstellbar ist, d.h.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \; \forall z \in B_R(z_0).$$

Satz 16. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch auf $B_R(z_0)$ und sei $B_r(z_1) \subset B_R(z_0)$ für $z_1 \in B_R(z_0), r > 0$ $\implies f$ ist analytisch auf $B_r(z_1)$.*

Beweis. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k((z-z_1)+(z_1-z_0))^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \overbrace{a_k \binom{k}{l} (z - z_0)^l (z_1 - z_0)^{k-l}}^{=:b_{kl}}$ $\forall z \in B_R(z_0)$ ($b_{kl} := 0$ für $l > k$). Fixiere $z \in B_r(z_1)$, setze $\tilde{R} := |z - z_1| + |z_1 - z_0| < R$

$\implies \sum_{l=0}^{\infty} |b_{kl}| = |a_k| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{l} |z-z_0|^l \cdot |z_1 - z_0|^{k-l} = |a_k|(|z-z_1| + |z_1 - z_0|)^k = |a_k| \cdot \tilde{R}^k \implies \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |b_{kl}| = \sum_{k=0} \infty |a_k| \cdot \tilde{R}^k < \infty \overset{\text{Satz 12.19}}{\implies} f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{kl} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} (z-z_1)^l \cdot \underbrace{\sum_{k=l}^{\infty} a_k \binom{k}{l} (z_1 - z_0)^{k-l}}_{=:\tilde{a}_l} = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{a}_l (z-z_1)^l \; \forall z \in B_r(z_1).$ ∎

Satz 17 (Identitätssatz). *Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch auf $B_R(z_0)$, sei $z_n \to \tilde{z} \in B_R(z_0)$, $z_n \in B_R(z_0) \backslash \{\tilde{z}\}$ und $f(z_n) = g(z_n)$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies f(z) = g(z)$ $\forall z \in B_R(z_0)$.*

Bemerkung 18. *Analytische Funktionen sind durch werte auf "sehr kleinen" Mengen bereits festgelegt (z.B.* sin, exp, cos *sind auf $\mathbb{C}$ eindeutig durch Werte auf $\mathbb{R}$ festgelegt).*

Beweis. Sei o.B.d.A. $g = 0$ (betrachte sonst $\tilde{f} := f - g$). Nach *Satz 16* $\exists r > 0 : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - \tilde{z})^k$ $\forall z \in B_r(\tilde{z})$. $f(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \underset{\text{stetig}}{\overset{f \text{ ist}}{\implies}} f(\tilde{z}) = 0 = a_0 \implies f(z) = (z - \tilde{z}) \cdot \underbrace{(a_1 + a_2(z - \tilde{z}))}_{=:f_1(z)}$.

Für $z \in B_r(\tilde{z}) \backslash \{\tilde{z}\}$ fest: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - \tilde{z})^k$ konvergiert $\implies \frac{1}{(z-\tilde{z})} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (z - \tilde{z})^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - \tilde{z})^{k-1}$ konvergiert $\implies f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - \tilde{z})^{k-1}$ konvergiert und ist stetig auf $B_r(\tilde{z}) \implies f(z_n) = \underbrace{(z_n - \tilde{z})}_{\neq 0} \cdot f_1(z_n) = 0 \implies f_1(z_n) = 0$ $\forall n \implies f_1(\tilde{z}) = a_1 = 0 \implies f_1(z) = (z - \tilde{z}) \cdot f_2(z) \implies a_2 = 0... \implies a_k = 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \implies f = 0$ auf $B_r(\tilde{z})$. Wähle $z_1 \in B_r(\tilde{z})$ mit $|z_1 - z_0| < |\tilde{z} - z_0| - \frac{r}{2}$, offenbar gibt es Folge $\{z_{1,n}\}$ in $B_r(\tilde{z}) \backslash \{z_1\} : z_{1,n} \to z_1$ und $f(z_{1,n}) = 0$ $\forall n \overset{\text{wie oben}}{\implies} f = 0$ auf $B_{r_1}(z_1)$ mit $r_1 = R - |z_1 - z_0|$. Wiederhole diese Prozedur endlich oft bis $f = 0$ und $B_R(z_0)$. ∎

Wiederholung: Sei X metrischer Raum, Y normierter Raum.

- $B(X, Y) := \{f : X \to Y \mid \|f\|_\infty < \infty\}$ ist normierter Raum der beschränkten Funktionen mit $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_y \mid x \in X\}$.
- $C_b(X, Y) := \{f : X \to Y \mid \|f\|_\infty < \infty, f \text{ ist stetig}\}$ ist Menge der beschränkten stetigen Funktionen und offenbar ein linearer Unterraum von $B(X, Y)$ und damit auch Kern von R mit $\|\cdot\|_\infty$.
- $C(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ ist stetig }\}$, Menge der stetigen Funktionen is offenbar ein Vektorraum (enthält unbeschränkte Funktionen, z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \in X = (0, 1)$).

Beachte: Falls X kompakt ist, dann kann man den Ausdruck $\|f\|_\infty < \infty$ in der Definition von $C_b(X, Y)$ weglassen (vgl. *Theorem 3*), d.h. $C_b(X, Y) = C(X, Y)$, f ist stetig $\implies X \to \|f(x)\|$ ist stetig $\overset{\text{Theorem 3}}{\implies} f$ ist beschränkt auf X. In diesem Fall ist auch $C(X, Y)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ normierter Raum und $\|f\|_\infty = \max_{x \in X} \|f(x)\|_y$.

Satz 19. *Sei X metrischer Raum, Y Banachraum $\implies B(X, Y)$ und $C_b(X, Y)$ sind Banachräume (mit $\|\cdot\|_\infty$).*

Beweis. Zu (a): Sei $\{f_n\}$ Cauchy-Folge in $B(X, Y)$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 : \|f_l(x) - f_n(x)\|_y \leq \|f_l - f_n\|_\infty < \epsilon \; \forall l, n > n_0, x \in X \tag{$*$}$$

$\implies \{f_n(x)\}$ ist Cauchy-Folge in Y $\forall x \in X \underset{\text{vollständig}}{\overset{Y \text{ ist}}{\implies}} f_n(x) \to f(x) \in Y$ $\forall x \in X \underset{(*)}{\overset{l \to \infty}{\implies}} \|f(x) - f_n(x)\|_y \leq \epsilon$ $\forall n > n_0, x \in X \implies \|f - f_n\|_y \leq \epsilon$ $\forall n > n_0 \implies \|f\|_\infty < \infty$ (d.h. $f \in B(X, Y)$) und $f_n \to f$ in $B(X, Y) \implies$ Behauptung.

Zu (b): Sei $\{f_n\}$ Cauchy-Folge in $C_b(X,Y) \overset{(a)}{\Longrightarrow} f_n \to f \in B(X,Y) \overset{\text{Satz 13.24}}{\Longrightarrow} f_n \to f$ gleichmäßig auf $X \underset{\text{Folgerung 14.20}}{\overset{f_n \text{ ist stetig } \forall n}{\Longrightarrow}} f$ ist stetig $\Longrightarrow f \in C_b(X,Y)$.

■

Funktion $f : D \subset X \to X$, wobei X metrischer Raum ist, heißt *Kontraktion* (bzw. *kontraktiv*) auf $M \subset D$ falls $\exists 0 \le L < 1 : d(f(x), f(y)) \le L \cdot d(x,y) \ \forall x, y \in M$. D.h. f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-konstante $L < 1$, folglich ist f auch stetig.

Theorem 20 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei $f : D \subset X \to X$ Kontraktion auf $M \subset D, X$ vollständiger metrischer Raum (z.B. Banachraum), M abgeschlossen und $f(M) \subset M$, dann:*

(1) *f besitzt genau einen Fixpunkt $\tilde{x}$ auf M (d.h. $\exists$ genau ein $\tilde{x} \in M : f(\tilde{x}) = \tilde{x}$).*
(2) *Für $\{x_n\}$ in M mit $x_{n+1} = f(x_n), x_0 \in M$ (beliebig) gilt: $x_n \to \tilde{x}$ und $d(x_n, \tilde{x}) \le \frac{L^n}{(1-L)} \cdot d(x_0, x_1) \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

Hinweis: *Theorem 20* ist eine wichtige Grundlage für Iterationsverfahren in der Numerik.

Beweis. Fixiere $x_0 \in M$ und $\{x_n\}$ gemäß (2) $\Longrightarrow d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n, f(x_{n-1}))) \le L \cdot d(x_n, x_{n-1}) \le ... \le L^n \cdot d(x_1, x_0) \Longrightarrow d(x_{n+k}, x_n) \le d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) \le (L^{n+k-1} + ... + L^n) \cdot d(x_1, x_0)$

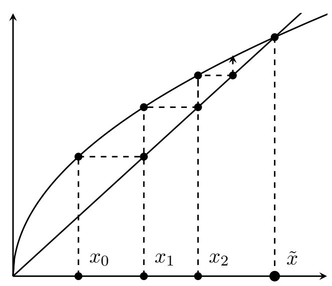
$$\le L^n \cdot \sum_{j=0}^{\infty} L^j \cdot d(x_1, x_0) = \frac{L^n}{1-L} \cdot d(x_1, x_0) \ \forall n, k \in \mathbb{N} \tag{6}$$

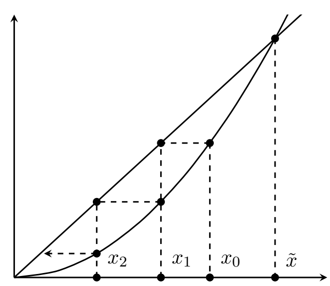
$\Longrightarrow \{x_n\}$ ist Cauchy-Folge (beachte: $L^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) \underset{\text{vollständig}}{\overset{X \text{ ist}}{\Longrightarrow}} x_n \to \tilde{x} \in X \underset{\text{abgeschl.}}{\overset{M \text{ ist}}{\Longrightarrow}} \tilde{x} \in M$. $\Longrightarrow \tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{\text{stetig}}{\overset{f \text{ ist}}{=}} f(\tilde{x})$ d.h. $\tilde{x}$ ist Fixpunkt $\underset{d(\cdot, x_n) \text{ ist stetig}}{\overset{k\to\infty \text{ in (6)}}{\Longrightarrow}} d(\tilde{x}, x_n) \le \frac{L^n}{(1-L)} \cdot d(x_1, x_0)$.
Eindeutigkeit: Sei auch $\tilde{x}' = f(\tilde{x}')$ mit $\tilde{x}' \in M \Longrightarrow d(\tilde{x}, \tilde{x}') = d\big(f(\tilde{x}), f(\tilde{x}')\big) \le L \cdot d(\tilde{x}, \tilde{x}') \overset{L<1}{\Longrightarrow} d(\tilde{x}, \tilde{x}') = 0 \Longrightarrow \tilde{x} = \tilde{x}' \Longrightarrow$ Behauptung. ■

Anwendung: Z.B. Lösen von Gleichungen der Form $g(x) = 0$. Sei $f : D \subset X \to X$, wobei X Banachraum ist.

$$g(x) = 0 \iff \underbrace{g(x) + x = x}_{=:f(x)} \iff \underbrace{f(x) = x}_{\text{Fixpunktproblem}}. \tag{7}$$

Falls f kontraktiv auf abgeschlossener Menge $M \subset D$ ist und $f(M) \subset M \Longrightarrow$ Iterationsverfahren in (2) liefert eine Lösung von (7). Veranschaulichung für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:





Das Iterationsverfahren funktioniert nur bei der ersten Funktion weil sie kontraktiv ist.

15.1 Partialbruchzerlegung

Sei $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rationale Funktion, d.h. $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ für Polynome $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dann heißt z_0 Pol der Ordnung k $(\in \mathbb{N}_{>0})$ von R falls Polynome $\tilde{f}, \tilde{g}$ existieren mit

$$R(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z - z_0)^k \cdot \tilde{g}(z)} \text{ und } \tilde{f}(z_0) \neq 0,\ \tilde{g}(z_0) \neq 0. \tag{8}$$

Motivation: Gelegentlich ist gewisse additive Zerlegung von rationalen Funktionen wichtig. Z.b. $\frac{2x}{(x^2-1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{(x-1)}$.

Lemma 21. *Sei $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rationale Funktion, $z_0 \in \mathbb{C}$ Pol der Ordnung $k \geq 1 \implies \exists! a_1, ..., a_k \in \mathbb{C}, a_k \neq 0$ und $\exists!$ Polynom $\tilde{p}$ mit*

$$R(z) = \underbrace{\frac{a_1}{z - z_0} + \frac{a_2}{(z - z_0)^2} + ... + \frac{a^k}{(z - z_0)^k}}_{=:H(z) \text{ heißt Hauptteil von } R \text{ in } z_0} + \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{g}(z)} \tag{9}$$

(Hier sei g gemäß (8)*.) Beachte: $\frac{\tilde{p}}{\tilde{g}}$ hat keine Pole in z_0.*

Beweis. Seien $\tilde{f}, \tilde{g}$ gemäß (8) gewählt $\implies \tilde{f}(z) \cdot \tilde{g}(z_0) - \tilde{f}(z_0) \cdot \tilde{g}(z)$ hat Nullstelle in $z_0 \implies \exists$ Polynom $p : \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)} - \underbrace{\frac{\tilde{f}(z_0)}{\tilde{g}(z_0)}}_{=:a_k (\neq 0)} = \frac{\left(\tilde{f}(z) \cdot \tilde{g}(z_0) - \tilde{f}(z_0) \cdot \tilde{g}(z)\right)}{\left(\tilde{g}(z) \cdot \tilde{f}(z_0)\right)} = \frac{(z - z_0) \cdot p(z)}{\tilde{g}(z)}$

$$\implies R(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z - z_0) \cdot \tilde{g}(z)} = \frac{a_k}{(z - z_0)^k} + \underbrace{\frac{p(z)}{(z - z_0)^{k-1} \cdot \tilde{g}(z)}}_{=:Q(z)} \forall z \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Falls Q keinen Pol in z_0 hat, dann ist (10) bereits (9) mit $\tilde{p}(z) = \frac{p(z)}{(z-z_0)^{k-1}}$. Für $k = 1$ ist dies der Fall. Sei $k > 1$ und Q habe Pol der Ordnung $\tilde{k}$ in $z_0 \implies \tilde{k} < k$. Zerlege nun Q gemäß (10). Nach höchstens n Schritten erhält man (9). Eindeutigkeit: Sei $\sum_{l=1}^{k} \frac{a_l}{(z-z_0)^l} + \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{g}(z)} = \sum_{l=1}^{k} \frac{b_l}{(z-z_0)^l} + \frac{\tilde{q}(z)}{\tilde{g}(z)}$. Multipliziere die Gleichung mit $(z - z_0)^k$

$$\implies \sum_{l=1}^{k} a_l \cdot (z - z_0)^{k-l} + (z - z_0)^k \cdot \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{g}(z)} = \sum_{l=1}^{k} b_l \cdot (z - z_0)^{k-l} + (z - z_0)^k \cdot \frac{\tilde{q}(z)}{\tilde{g}(z)} \tag{11}$$

$\overset{z=z_0}{\implies} a_k = b_k$ in (11) $\overset{/(z-z_0)}{\implies} a_{k-1} = b_{k-1} \implies ... \implies a_1 = b_1 \implies \tilde{p} = \tilde{q} \implies$ Behauptung. ■

Satz 22 (Partialbruchzerlegung). *Sei $R : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ rationale Funktion, $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ für Polynome f, g. Sei $g(z) = (z - z_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (z - z_l)^{k_l}$ gemäß* Fundamentalsatz der Algebra*. Seien $z_1, ..., z_l$ keine Nullstellen von f und seien $H_1, ..., H_l$ Hauptteile von R in $z_1, ..., z_l$. Dann*

$$\exists \textit{Polynom } p : R(z) = H_1(z) + ... + H_l(z) + p(z)\ \forall z \neq z_j \forall j = 1, ..., l \tag{12}$$

wobei $f(z) = p(z) \cdot g(z) + r(z)\ \forall z$ für Polynom r. $p \equiv 0$ falls $\operatorname{grad} f < \operatorname{grad} g$ *(*vgl. *Satz 12.5* Polynomdivision*).*

Beweis. Sei $g_j(z) = (z - z_{j+1})^{k_{j+1}} \cdot ... \cdot (z - z_l)^{k_l}, j = 1, ..., l-1, g_l(z) := 1$. $\tilde{g}_j(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k_j}}$ ist (nach Kürzen) Polynom $\overset{\textit{Lemma 21}}{\Longrightarrow}$ $R(z) = H_1(z) + \frac{p_1(z)}{g_1(z)} \underset{\text{von } \frac{p_1}{g_1}}{\overset{\text{Zerlegung}}{=}} H_1(z) + H(z) + \frac{p_2(z)}{g_2(z)}$, p_1, p_2 sind Polynome. Offenbar $H_1(z) + \frac{p_2(z)}{g_2(z)} \underset{\text{nenner}}{\overset{\text{Haupt-}}{\Longrightarrow}} \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}_2(z)}$, $\tilde{p}$ ist Polynom $\underset{\text{Eindeutigkeit}}{\overset{\textit{Lemma 21}}{\Longrightarrow}} H = H_2 \implies R(z) = H_1(z) + \frac{p_1(z)}{g_1(z)} = H_1(z) + H_2(z) + \frac{p_2(z)}{g_2(z)} = ... = H_1(z) + ... + H_l(z) + \frac{p(z)}{g_l(z)}$, p ist Polynom $\overset{g_l(z)=1}{\Longrightarrow}$ (12) $\overset{R=\frac{f}{g}}{\Longrightarrow} f = (H_1 + ... + H_l) \cdot g + p \cdot q \implies$ Behauptung. ■

Beispiel 23. Sei $R(z) = \frac{(z^4-3z^2+3z+1)}{(z^3-2z^2+z)}$. Polynomdivision liefert: $(z^4-3z^2+3z+1) \div (z^3-2z^2+z) = z + 2 + \frac{(z+1)}{(z^3-2z^2+z)}$. Vereinfache $z^3 - 2z^2 + z = z(z-1)^2 \implies R(z) = \frac{r}{g} + p = \underbrace{\frac{(z+1)}{z(z-1)^2}}_{=:Q(z)} + z + 2$. $Q(z)$ gibt die Summe der Hauptteile. Q hat Pol erster Ordnung in $z_2 = 0$ und Pol zweiter Ordnung in $z_2 = 1$ $Q(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{b_1}{(z-1)} + \frac{b_2}{(z-1)^2} \overset{/\cdot z(z-1)^2}{\Longrightarrow} z+1 = a_1(z-1)^2 + b_1(z-1)z + b_2 z^2$. $z = 0 \implies a_1 = 1, z = 1 \implies b_2 = 2 \implies z+1 = z^2 + b_1 z^2 - b_1 z \underset{\text{vergleich}}{\overset{\text{Koeffizienten-}}{\Longrightarrow}} b_1 = -1 \implies R(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} + z + 2$.