Grundlagen der Analysis[1] (Teil 2)

Dozent: Prof. Dr. Friedemann Schuricht
LaTeX: rydval.jakub@gmail.com
Version: 11. November 2016
Technische Universität Dresden

[1] Math Ba ANAG: Grundlagen der Analysis, SS 2014

Inhaltsverzeichnis

I Differentiation **1**

16 Wiederholung und Motivation **1**
16.1 Menge aller linearen stetigen Abbildungen 2
16.2 Landau-Symbole 2

17 Ableitung **4**
17.1 Einfache Beispiele für Ableitungen 7

18 Richtungsableitungen und partielle Ableitungen **14**
18.1 Anwendung: Eigenschaften von Gradienten 15
18.2 $\mathbb{R}$-differenzierbar und $\mathbb{C}$-differenzierbar 17
18.3 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 19

19 Mittelwertsatz und Anwendungen **20**
19.1 Anwendung des Mittelwertsatzes in $\mathbb{R}$ 24

20 Stammfunktionen **27**

II Integration **31**

21 Messbare Mengen und Messbare Funktionen **31**
21.1 Lebesgue-Maß 31
21.2 Messbare Mengen 33
21.3 Messbare Funktionen 36

22 Integral **41**
22.1 Integral für Treppenfunktionen 41
22.2 Erweiterung auf messbare Funktionen 41
22.3 Lebesgue-Integral 42
22.4 Grenzwertsätze 47
22.5 Parameterabhängige Integrale 49
22.6 Riemann-Integral 50

23 Integration auf $\mathbb{R}$ **52**
23.1 Uneigentliche Integrale 54

24 Satz von Fubini **57**
24.1 Mehrfachintegrale 57
24.2 Integration durch Koordinatentransformation 60

III Differentiation II **62**

25 Höhere Ableitungen und Taylorscher Satz **62**
25.1 Analysis von Räumen Y_k 64
25.2 Norm in X_k und Y_k 65
25.3 Partielle Ableitungen 65
25.4 Anwendungen 69
25.5 Taylorscher Satz 69

26 Extremwerte **73**
26.1 Lokale Extrema ohne Nebenbedingung 73
26.2 Definitheit in Anwendungen 74
26.3 Lokale Extrema mit Gleichungsbedingung 74
26.4 Globale Extrema mit abstrakter Nebenbedingung 75

27 Inverse und implizite Funktionen **76**

28 Funktionenfolgen **83**
28.1 Anwendung auf Potenzreihen 84

Teil I
Differentiation

16 Wiederholung und Motivation

In diesem Teil ist $\mathbb{K}^n$ n-dimensionaler Vektorraum über Körper $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Die Elemente $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $x_j \in \mathbb{K}$, hier $j = 1, ..., n$. Standardbasis hat die Form $\{e_1, ..., e_n\}$, wobei $e_j = (0, ..., 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{j}, 0, ..., 0)$.

Alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent (Bsp. $\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$, vgl. *Satz 11.5*). Folglich ist die Konvergenz auf $\mathbb{K}^n$ unabhängig von spezieller Norm! Verwende i.d.R. Euklidische Norm:

$$|x| := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$

Wir benutzen das übliche Standardskalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} \overline{x_j} y_j \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n$$

Es gilt vor allem

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y| \ \forall x, y \in \mathbb{K}^n. \qquad \text{(C.-S. Ugl.)}$$

Eine *lineare Abbildung* $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ kann bzgl. *Standardbasen* in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ stets mittels $(m \times n)$-Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

beschrieben werden: $A(x) = \mathcal{A}x \ \forall x \in \mathbb{K}^n$. Beachte: $\mathcal{A}$ ändert sich bei Veränderung der Basen! Da stets Bezug auf Standardbasis ist, können wir $A = \mathcal{A}$ identifizieren (d.h. Matrix wird nun auch mit A bezeichnet).

Die *transponierte Matrix* der Matrix $\mathcal{A}$ ist

$$\mathcal{A}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Hinweis: $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ wird in der Regel als *Zeilenvektor* geschrieben aber bei Matrizenmultiplikation als *Spaltenvektor* betrachtet und x^T als Zeilenvektor. Seien z.B. $x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$, dann wird $y \cdot x^T \in \mathbb{K}^{m \times n}$ als *Tensorprodukt* mit $y \otimes x$ bezeichnet. Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist stets stetig (unabhängig von Norm in $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$, vgl. *Satz 15.5*).

16.1 Menge aller linearen stetigen Abbildungen

Die *Menge aller linearen stetigen Abbildungen*

$$L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) := \{A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \mid A \text{ ist linear}\}$$

ist normierter Raum über $\mathbb{K}$ mit Norm $\|A\| := \sup\{|Ax| \mid |x| \leq 1\}$ (vgl. *Satz 13.8*).

Beachte: $\|\cdot\|$ hängt von der Norm in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ ab.

$L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ kann mit $\mathbb{K}^{m\times n}$ identifiziert werden und $\mathbb{K}^{m\times n}$ kann mit $\mathbb{K}^{m\cdot n}$ identifiziert werden (beide sind isomorph bzgl. Vektorraumstruktur). Folglich: Konvergenz einer Folge $\{A_n\}$ in $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ bzw. $\mathbb{K}^{m\times n}$ ist unabhängig von spezieller Norm. Verwende in der Regel *Euklidische Norm*:

$$\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Es gilt:

(i) $|Ax| \leq |A| \cdot |x| \ \forall x \in \mathbb{K}^n$,
(ii) $|Ax| \leq \|A\| \cdot |x| \ \forall x \in \mathbb{K}^n$.

16.2 Landau-Symbole

Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, g : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, x_0 \in \overline{D}$.

– $f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$ g.d.w.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0.$$

– $f(x) = O(g(x))$ für $x \longrightarrow x_0$ g.d.w.

$$\exists \delta > 0, c \geq 0 : \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq c \ \forall x \in (B_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}) \cap D.$$

Wichtiger Spezialfall: $g(x) := |x - x_0|^k, k \in \mathbb{N}$.

Beispiel 1. Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x_0 \in D$ Häufungspunkt von D. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig in } x_0 &\iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\left|f(x) - f(x_0)\right|}{1} = 0 \\ &\iff f(x) = f(x_0) + o(1) \text{ für } x \longrightarrow x_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Interpretation von (1): Setze $r(x) := f(x) - f(x_0) \overset{(1)}{\Longrightarrow} r(x) = o(1)$ für $x \longrightarrow x_0$

$$\Longrightarrow r(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$

d.h. $o(1)$ ersetzt eine "Restfunktion" $r(x)$ mit Eigenschaft (2). Wegen $o(1) = o(|x - x_0|^1)$

(d.h. $k = 0$) sagt man auch (1) ist Approximation 0-ter Ordnung der Funktion f in der Nähe von x_0.

Beispiel 2. Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x_0 \in D$, D offen. Was bedeutet

$$f(x) = f(x_0) + o(|x - x_0|), x \longrightarrow x_0? \tag{3}$$

(a) Betrachte f auf einem Strahl $x = x_0 + ty, y \in \mathbb{R}^n$ ist fest, $|y| = 1, t \in \mathbb{R}$.

$$(3) \overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} 0 = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{|f(x_0 + ty) - f(x_0)|}{|t|}, \quad \text{d.h. } \underbrace{\frac{|\triangle f|}{|t|}}_{\text{Anstieg der Sekante}} \overset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(b)

$$\begin{aligned}
(3) \implies f(x) &= f(x_0) + \underbrace{\frac{o(|x - x_0|)}{|x - x_0|}}_{=o(1)} \cdot |x - x_0|, x \longrightarrow x_0 \\
\implies f(x) &= f(x_0) + \underbrace{o(1)}_{\text{Steht für Funktion } r\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ mit } r(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.} |x - x_0|, x \longrightarrow x_0 \\
\implies f(x) &= f(x_0) + r(x)|x - x_0| \\
\implies |f(x) - f(x_0)| &\leq \rho(t)|x - x_0| \text{ mit } \rho(t) := \sup_{|x - x_0| \leq t} |r(x)| \overset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Graph von f liegt in der Nähe von x_0 in "immer flacheren kegelförmigen Mengen", d.h. Graph von f "schmiegt sich" an horizontale Ebene durch Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

(c) Bedingung (3) ist offenbar nicht erfüllt.

Beobachtung: Horizontale Ebene ist Graph einer affin linearen Funktion $\tilde{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Zentrale Frage: Gibt es zu Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, x_0 \in D$ eine affin-lineare Funktion $\tilde{A} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, so dass sich in der Nähe von x_0 der Graph von f an den Graph von $\tilde{A}$ "schmiegt"? Wegen $f(x_0) = \tilde{A}x_0$ folgt $\tilde{A}(x) = A(x - x_0) + f(x_0)$.

Frage: Was heißt "anschmiegen"?

$$f(x) - \underbrace{(f(x_0) + A(x - x_0)}_{\tilde{A}x} = o(|x - x_0|),$$

d.h. die Abweichung wird schneller kleiner als $|x - x_0|$!

17 Ableitung

Differentiation ≈ lokale Linearisierung. Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen. Funktion f heißt *differenzierbar in* $x_0 \in D$, falls es eine lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ gibt mit

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(|x - x_0|), x \longrightarrow x_0. \tag{1}$$

Abbildung A heißt dann *Ableitung von* f *in* x_0 und wird $f'(x_0)$ bzw. $Df(x_0)$ bezeichnet. Statt Ableitung sagt man auch *(totales) Differential*, *Fréchet-Ableitung*, *Jakobimatrix*, *Funktionalmatrix*,... . Andere Bezeichnungen sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0),\ \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}, df(x_0), ...$$

Somit ist (1) gleichwertig mit

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|), x \longrightarrow x_0. \tag{2}$$

Beachte: $f'(x_0)$ ist i.a. (von x_0 abhängige) Matrix! Affin lineare Abbildung $\tilde{A}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approximiert Funktion f in der Nähe von x_0 und heißt *Linearisierung* von f in x_0. Man nennt (1) auch Approximation 1. Ordnung von f in der Nähe von x_0.

Satz 1. *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen. Dann: f ist differenzierbar in $x_0 \in D$ mit Ableitung $f'(x_0) \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ g.d.w. eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(a) *Für ein $r : D \to \mathbb{K}^m$ mit $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{r(x)}{|x-x_0|} = 0$ ist*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)\ \forall x \in D. \tag{3}$$

(b) *Für $R : D \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ($\sim \mathbb{K}^{m\times n}$) mit $\lim_{x\to x_0} R(x) = 0$ (d.h. Matrizen $R(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow}$ Nullmatrix in $\mathbb{K}^{m\times n}$) ist*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)(x - x_0)\ \forall x \in D. \tag{4}$$

(c) *Für ein $Q : D \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ($\sim \mathbb{K}^{m\times n}$) mit $\lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = f'(x_0)$ (d.h. Matrizen $Q(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow}$ Matrix $f'(x_0)$ in $\mathbb{K}^{m\times n}$) ist*

$$f(x) = f(x_0) + Q(x)(x - x_0)\ \forall x \in D. \tag{5}$$

Bemerkung: (3) kann auch geschrieben werden als

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Beweis. Zu (a): Offenbar ist $r(x) = o(|x-x_0|)$, folglich gilt (a) $\Longleftrightarrow$ f ist differenziarbar in x_0 mit Ableitung $f'(x_0)$. Zeige noch (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a):

– (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $R : D \to \mathbb{K}^{m\times n}$ gegeben durch

$$R(x_0) := 0, R(x) := \frac{r(x)}{|x-x_0|^2} \cdot (x-x_0)^T$$

für $x \neq x_0$ (Spalte $\times$ Zeile = Matrix)

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ R(x)(x-x_0) &= \left(\frac{r(x)}{|x-x_0|^2} \cdot (x-x_0)^T\right) \cdot (x-x_0) \\ &= \frac{r(x)}{|x-x_0|^2} \cdot \langle x-x_0, x-x_0\rangle = r(x)\ \forall x \neq x_0.\end{aligned}$$

Wegen $0 = r(x_0) = R(x_0)(x_0 - x_0)$ folgt

$$\lim_{x\to x_0} |R(x)| = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|r(x)\cdot (x-x_0)^T|}{|x-x_0|^2} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|r(x)|}{|x-x_0|} = 0 \implies \text{(b)}.$$

– (b) $\Longrightarrow$ (c): Setze $Q(x) := f'(x) + R(x)\ \forall x \in D \implies$ (5). Wegen $\lim_{x\to x_0} Q(x) = f'(x)$ folgt (c).

– (c) $\Longrightarrow$ (a): Setze $r(x) := \Big(Q(x) - f'(x_0)\Big)(x-x_0)\ \forall x \in D \implies$ (3). Wegen $|r(x)| \leq |Q(x) - f'(x_0)| \cdot |x - x_0|$ folgt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|r(x)|}{|x-x_0|} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} |Q(x) - f'(x_0)| = 0.$$

■

Satz 2. *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann*

(1) *Funktion f ist stetig in x_0.*
(2) *Ableitung $f'(x_0)$ ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Zu (1): (4) liefert

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \Big(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R(x)(x-x_0)\Big) = f(x_0)$$

$\Longrightarrow$ Behauptung.

Zu (2): Angenommen $A_1, A_2 \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ sind Ableitungen von f in x_0.

Seien R_1, R_2 zugehörige Terme in (4). Dann gilt für $x = x_0 + ty,\ \forall y \in \mathbb{K}^n, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |(A_1 - A_2)(ty)| &\overset{\triangle-Ugl.}{\leq} |R_1(x_0+ty)(ty)| + |R_2(x_0+ty)(ty)| \\ &\leq |R_1(x_0+ty)||ty| + |R_2(x_0+ty)||ty| \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{|t|} \end{aligned}$$

$$\overset{t\neq 0}{\Longrightarrow}\ 0 \leq |(A_1 - A_2)y| \leq \Big(|R_1(x_0+ty)| + |R_2(x_0+ty)|\Big)|y| \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

$$\Longrightarrow\ (A_1 - A_2)y = 0\ \forall y \in \mathbb{K}^n \implies A_1 = A_2 \implies \text{Behauptung.}$$

■

Spezialfälle für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

(1) $m = 1$; $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$: $f'(x_0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist Zeilenvektor, $f'(x_0)^{\mathrm{T}}$ betrachtet als Vektor in $\mathbb{R}^n$ heißt *Gradient*. Offenbar ist $f'(x_0)^{\mathrm{T}} \cdot y = \langle f'(x_0), y\rangle\ \forall y \in \mathbb{R}^n$ (in diesem Fall Matrizenmultiplikation äquivalent zum Skalarprodukt) $\implies$ (2) hat Form

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \langle f'(x_0), x - x_0\rangle}_{\text{affin lineare Funktion } \tilde{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \text{ (in } x)} + o(|x - x_0|) \tag{6}$$

(2) $n = 1$; $f : D \subset \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^m$ (z.B. $D = (a, b)$): f (bzw. Bild $f(D)$) ist Kurve in $\mathbb{R}^m$ (vgl. Kapitel 15), $f'(x_0)$ ist Spaltenvektor in $\mathbb{R}^m$ ($\sim \mathbb{R}^{m\times 1}$). Gleichung (2) kann man schreiben als $f(x_0 + t) = \underbrace{f(x_0) + t \cdot f'(x_0)}_{\text{affin lineare Funktion } \tilde{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \text{ (in } t)} + o(t), t \longrightarrow 0, t \in \mathbb{R}$

$$\iff \underbrace{\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}}_{\text{heißt Differenzenquotient von } f \text{ in } x_0} = f'(x_0) + o(1),\ t \longrightarrow 0 \iff \underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t}}_{\text{heißt Differentialquotient von } f \text{ in } x_0} = f'(x_0). \tag{7}$$

Beachte:

- f ist differenzierbar in $x_0 \iff$ Differentialquaotient existiert in x_0.
- (7) ist nicht erklärt im Fall $n > 1$!

Interpretation für $m > 1$: Falls f nicht differenzierbar in x_0 ist, bzw. x_0 Randpunkt von D ist und $f(x_0)$ definiert, betrachtet man in (7) auch einseitige Grenzwerte (vgl. Kapitel 14).

Wir nennen $\lim_{t\downarrow 0} \frac{\left(f(x_0+t) - f(x_0)\right)}{t} =: f_r'(x_0)$ *rechtsseitige Ableitung von f in x_0* (falls existent). Definiere analog die *linksseitige Ableitung in x_0* $f_l'(x_0)$.

(3) $n = 1, m = 1; f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (vgl. Schule): $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ ist Zahl und (7) gilt.

Beobachtung: (7) gilt allgemein für $n = 1$, nicht für $n > 1$!

Folgerung 3. *Sei $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}^m, D$ offen. Dann: f ist differenzierbar in $x_0 \in D$ mit Ableitung $f'(x_0) \in L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m)$*

$$\iff \exists f'(x_0) \in L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m) : \lim_{y \to 0} \frac{f(x_0 + y) - f(x_0)}{y} = f'(x_0) \tag{8}$$

(alternativ: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$).

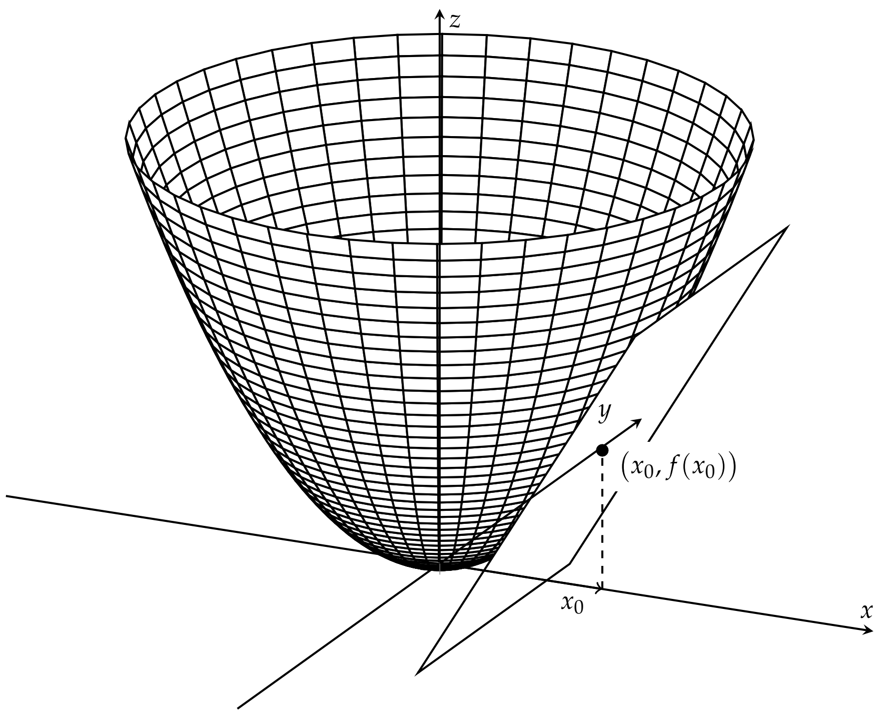
17.1 Einfache Beispiele für Ableitungen

Beispiel 4. Sei $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ affin linear, d.h. $f(x) = Ax + a \ \forall x \in \mathbb{K}^n$ mit $A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $a \in \mathbb{K}^m$ fest. Dann gilt für beliebige $x_0 \in \mathbb{K}^n$: $f(x) = Ax_0 + a + A(x - x_0) = f(x_0) + A(x - x_0) \overset{(1)}{\Longrightarrow} f$ ist differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = A$. Insbesondere gilt für konstante Funktion $f'(x_0) = 0$.

Beispiel 5. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = |x|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Offenbar gilt $|x - x_0|^2 = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = |x|^2 - 2\langle x_0, x \rangle + 2\langle x_0, x_0 \rangle - \langle x_0, x_0 \rangle = |x|^2 - 2\langle x_0, x - x_0 \rangle - |x_0|^2 \implies f(x) = f(x_0) + \langle 2x_0, x - x_0 \rangle + \underbrace{|x - x_0|^2}_{o(|x - x_0|)}$ (vgl. (6) im Spezialfall (1)).

Wegen $2x_0 \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ folgt $f = |\cdot|^2$ ist differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = 2x_0 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Tangentialebene an Graph von $f(x) = |x|^2$ in $\mathbb{R}^3$



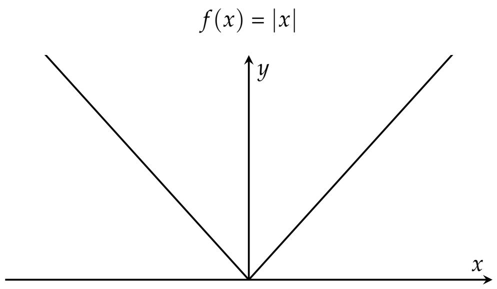
Beispiel 6. Sei $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, f(x) = x^k, k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$: $f(x) = 1\ \forall x \implies f'(x_0) = 0\ \forall x_0$ (vgl. *Beispiel 4*). Für $k \geq 1$: $(x_0 + y)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_0^{k-j} y^j = x_0 + kyx_0^{k-1} + o(y)$, $y \longrightarrow 0 \implies f(x_0 + y) = f(x_0) + kx_0^{k-1} y + o(y),\ y \longrightarrow 0 \overset{(1)}{\implies} f'(x_0) = kx_0^{k-1}$.

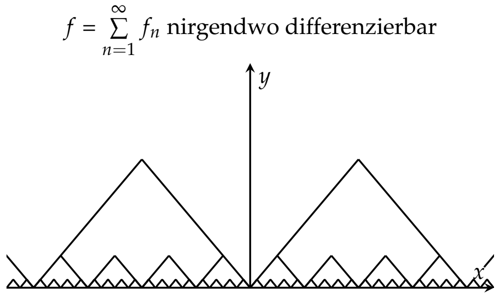
Beispiel 7. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist f nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn angenommen Ableitung $f'(0) \in \mathbb{R}^n (\sim \mathbb{R}^{1 \times n})$ existiere, fixiere $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| = 1$:

$$|tx| = 0 + \langle f'(0), tx \rangle + o(t), t \longrightarrow 0, t \in \mathbb{R} \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{t}$$

$$\overset{t \neq 0}{\implies} \underbrace{\frac{|t|}{t}}_{=\pm 1} = \underbrace{\langle f'(0), x \rangle}_{\text{feste Zahl in } \mathbb{R}} + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\overset{t\to 0}{\longrightarrow 0}} \implies ↯.$$

Anschaulich: es gibt keine Tangential-ebene an Graph von f in $(0, |0|) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Folglich: f ist stetig in $x_0 \not\Longrightarrow f$ ist differenzierbar in x_0, d.h. die Umkehrung von *Satz 2.1* gilt nicht! Hinweis: Es gibt stetige Funktionen, die in keinem Punkt x differenzierbar sind!





Vgl. Hildebrand, Ana. 1, S.192, Königsberger, Analysis 1, Kap. 9.11

Beispiel 8. Sei $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ mit $f(x) = e^x\ \forall x \in \mathbb{K} \implies f$ ist differenzierbar mit $f'(x_0) = e^{x_0}\ \forall x_0 \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$). Denn: Nach *Lemma 13.10* ist

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \text{ in } \mathbb{C} \tag{9}$$

$\implies \lim_{y \to 0} \frac{(e^{x_0 + y} - e^{x_0})}{y} = \lim_{y \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{(e^y - 1)}{y} = e^{x_0} \overset{(8)}{\implies}$ Behauptung.

Beispiel 9. Seien $f := \sin, g := \cos$, $(f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{K}) \implies \sin' x_0 = \cos x_0$, $\cos' x_0 = -\sin x_0\ \forall x_0 \in \mathbb{K}$. Denn:

$$\frac{\sin y}{y} = \frac{(e^{iy} - e^{-iy})}{2iy} = \frac{1}{2} \left(\frac{(e^{iy} - 1)}{iy} + \frac{(e^{-iy} - 1)}{-iy} \right) \overset{y \to 0}{\longrightarrow} 1$$

$\big($vgl. (9)$\big)$

$$\implies \lim_{y \to 0} \frac{\big(\sin(x_0 + y) - \sin(x_0)\big)}{y} \overset{\textit{Satz 13.14}}{=} \lim_{y \to 0} \frac{2}{y} \sin \frac{y}{2} \cos \left(x_0 + \frac{y}{2} \right) = \cos x_0\ \forall x_0 \in \mathbb{K}.$$

Leite die Ableitung von cos in x_0 analog her.

Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen.

- Falls f differenzierbar in allen $x_0 \in D$ ist, dann heißt f *differenzierbar auf* D und Funktion $f' : D \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ heißt *Ableitung von* f.
- Ist Funktion $f' : D \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ stetig (auf D), dann heißt Funktion f *stetig differenzierbar* (auf D) bzw. "C^1-Funktion".

Wiederholung: f' ist stetig in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$. Matrix A konvergiert $\iff$ alle Einträge von A konvergieren.

$$\mathrm{C}^1(D, \mathbb{K}^m) := \{f : D \to \mathbb{K}^m \mid f \text{ ist stetig differenzierbar auf } D\}.$$

Beispiel 10. (a) Sei $f(x) = x^k \ \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_{>0} \implies f'(x) = kx^{k-1} \ \forall x \in \mathbb{R} \implies f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Sei $f(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{C} \implies f'(x) = e^x \ \forall x \in \mathbb{C} \implies f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

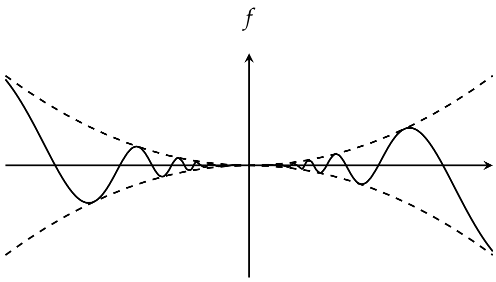
(c) Sei $f(x) = |x|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \implies f'(x) = 2x \ \forall x \in \mathbb{R}^n \implies f \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

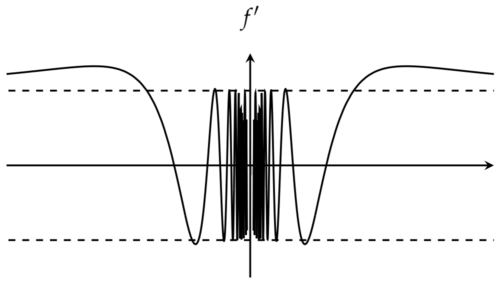
Beispiel 11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0, f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \ \forall x \neq 0$. Wegen

$$\frac{\left|x^2 \sin \frac{1}{x}\right|}{|x|} \leq |x| \overset{x\to 0, x\neq 0}{\longrightarrow} 0$$

folgt $f(x) = o(|x|), x \longrightarrow 0 \implies f(x) = f(0) + o(x - 0) + o(|x - 0|), x \longrightarrow 0 \implies f$ ist differenzierbar in $x = 0$ mit $f'(0) = 0$.

Rechenregeln liefern für $x \neq 0$: $f'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \ \forall x \neq 0$. Für Folge $x_k := \frac{1}{k\pi}$ gilt: $\lim\limits_{k\to\infty} 2x_k \cdot \sin \frac{1}{x_k} = 0, \cos \frac{1}{x_k} = \pm 1 \implies \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht $\implies f \notin \mathrm{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. D.h. Ableitung einer differenzierbarer Funktion muss nicht stetig sein.





Man beobachtet:

- (1) $\big($bzw. (2)$\big)$ ist häufig ungeeignet zur Bestimmung von $f'(x_0)$.
- (8) ist nützlich für konkrete Berechnungen in Fall $n = 1$.

Strategie: Zurückführung auf "einfache" Fälle durch Rechenregeln und Reduktion.

Satz 12 (Rechenregeln). *Sei $D \subset \mathbb{K}$ offen, $f, g : D \to \mathbb{K}^m, \lambda : D \to \mathbb{K}$ differenzierbar in $x_0 \in D \implies (f \pm g) : D \to \mathbb{K}^m, (\lambda \circ f) : D \to \mathbb{K}^m, (f \cdot g) : D \to \mathbb{K}$ (Skalarprodukt) sind differenzierbar in $x_0 \in D$ und $\frac{1}{\lambda} : D \to \mathbb{K}$ ist differenzierbar in x_0 falls $\lambda(x_0) \neq 0$ mit:*

(a) $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) \in \mathbb{K}^{m \times n}$,
(b) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot \lambda'(x_0) \in \mathbb{K}^{m \times n}$,
(c) $(f \cdot g)'(x_0) = f(x_0)^T \cdot g'(x_0) + g(x_0)^T \cdot f'(x_0) \in \mathbb{K}^{1 \times n}$,
(d) $\left(\frac{1}{\lambda}\right)'(x_0) = -\frac{1}{\lambda(x_0)^2} \cdot \lambda'(x_0) \in \mathbb{K}^{1 \times n}$.

Folgerung 13 (Quotientenregel). *Seien $\lambda, \mu : D \to \mathbb{K}$ differenzierbar in $x_0 \in D, D$ offen, $D \subset \mathbb{K}^n, \lambda(x_0) \neq 0 \implies \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) : D \to \mathbb{K}$ ist differenzierbar in x_0 mit*

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)'(x_0) = \frac{\lambda(x_0) \cdot \mu'(x_0) - \mu(x_0) \cdot \lambda'(x_0)}{\lambda(x_0)^2} \in \mathbb{K}^{1 \times n}.$$

Beweis. (von *Folgerung 13*) Setze in *Satz 12* $f = \mu$ (d.h. $m = 1$) und betrachte Produkt $\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot \mu$. ∎

Beweis. (von *Satz 12*) Nach *Satz 1.c* existierten $P, Q : D \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \Delta : D \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + P(x)(x - x_0), \lim_{x \to x_0} P(x) = f'(x_0), \\ g(x) &= g(x_0) + Q(x)(x - x_0), \lim_{x \to x_0} Q(x) = g'(x_0), \\ \lambda(x) &= \lambda(x_0) + \Delta(x)(x - x_0), \lim_{x \to x_0} \Delta(x) = \lambda'(x_0). \end{aligned}$$

Mit *Satz 1.c* ergibt sich Behauptung wie folgt: Zu (a):

$$f(x) \pm g(x) = f(x_0) \pm g(x_0) + \underbrace{\big(P(x) \pm Q(x)\big)}_{\xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0) + g'(x_0) \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)}(x - x_0)$$

$\implies$ Behauptung. Zu (b):

$$\lambda(x) \cdot f(x) = \lambda(x_0) \cdot f(x_0) + \underbrace{\left(\lambda(x_0) \cdot P(x) + \underbrace{f(x_0) \cdot \Delta(x)}_{\in \mathbb{K}^{m \times n}} + \underbrace{\Delta(x)(x - x_0)}_{\in \mathbb{K}} \cdot P(x)\right)}_{\xrightarrow{x \to x_0} \lambda(x_0) f'(x_0) + f(x_0) \lambda'(x_0) \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)}(x - x_0)$$

$\implies$ Behauptung. Zu (c): Analog zu (b). Zu (d):

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \frac{1}{\lambda(x_0)} - \frac{\lambda(x) - \lambda(x_0)}{\lambda(x)\lambda(x_0)} = \frac{1}{\lambda(x_0)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{\lambda(x_0)\lambda(x)} \Delta(x)\right)}_{\xrightarrow{x \to x_0} -\frac{1}{\lambda(x_0)^2} \lambda'(x_0)}(x - x_0)$$

$\implies$ Behauptung ∎

Beispiel 14. Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, c \in \mathbb{K}, f$ differenzierbar in $x_0 \in D$ $\overset{\textit{Satz 12.b}}{\Longrightarrow} (cf)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$ (da c konstante Funktion $D \to \mathbb{K}$ ist).

Beispiel 15. Sei $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Polynom $\big(f(x) = \sum_{l=0}^{k} a_l x^l\big) \implies f$ ist differenzierbar $\forall x_0 \in \mathbb{K}$ mit $f'(x_0) = \sum_{l=1}^{k} l a_l x_0^{l-1}$.

Beispiel 16. Sei $f = \frac{f_1}{f_2}$ rationale Funktion auf $\mathbb{K}$ (d.h. $f_1, f_2 : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ sind Polynome) $\implies f$ ist differenzierbar auf $\mathbb{K} \backslash \{\text{Nullstellten von } f_2\}$.

Beispiel 17. Seien $\tan : \mathbb{K} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{K}, \cot : \mathbb{K} \backslash \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{K} \overset{\text{Q.Regel}}{\Longrightarrow}$ $\tan' x_0 = \frac{(\sin' x_0 \cos x_0 - \cos' x_0 \sin x_0)}{(\cos x_0)^2} = \frac{(\cos^2 x_0 + \sin^2 x_0)}{(\cos x_0)^2} = \frac{1}{\cos^2 x_0}\ \forall x_0 \in D, \overset{\text{analog}}{\Longrightarrow} \cot' x_0 = -\frac{1}{\sin^2 x_0}\ \forall x_0 \in D.$

Satz 18 (Kettenregel). *Sei* $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, g : \tilde{D} \subset \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^l, D, \tilde{D}$ *offen,* f *differenzierbar in* $x_0 \in D, g$ *differenzierbar in* $f(x_0) \in \tilde{D} \implies g \circ f : D \to \mathbb{K}^l$ *ist differenzierbar in* x_0 *mit* $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ $(\in \mathbb{K}^{l \times m})$.

Beweis. Nach *Satz 1.c)* existieren $P : D \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), Q : \tilde{D} \to L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^l)$ mit

$$f(x) = f(x_0) + P(x)(x - x_0), \lim_{x \to x_0} P(x) = f'(x_0), \tag{10}$$

$$g(y) = g(f(x_0)) + Q(y)(y - f(x_0)), \lim_{y \to f(x_0)} Q(y) = g'(f(x_0)). \tag{11}$$

$$\implies (g \circ f)(x_0) + \underbrace{Q(f(x)) \cdot P(x)}_{\overset{x \to x_0}{\longrightarrow} g'(f(x_0)) f'(x_0)} (x - x_0) \overset{\textit{Satz 1.c}}{\Longrightarrow} \text{Behauptung.}$$

■

Beispiel 19. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}_{>0}, a \neq 1)$. Offenbar $a^x = \big(e^{\ln a}\big)^x = e^{x \cdot \ln a}$ $\implies f(x) = g(h(x))$ mit $g(y) = e^y,\ h(x) = x \cdot \ln a$. Wegen $g'(y) = e^y\ \forall y \in \mathbb{R},\ h'(x) = \ln a\ \forall x \in \mathbb{R} \overset{\textit{Satz 18}}{\Longrightarrow} f'(x_0) = e^{x_0 \ln a} \cdot \ln a = a^{x_0} \cdot \ln a\ \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Beispiel 20. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ $(a \in \mathbb{R}_{>0} \backslash \{1\}$. Fixiere $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, sei $\{x_n\}$ beliebige Folge in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $x_n \longrightarrow x_0 \underset{\text{stetig}}{\overset{f \text{ ist}}{\Longrightarrow}} y_n := \log_a x_n \longrightarrow \log_a x_0 =: y_0 \implies$ $\lim_{n \to \infty} \frac{\big(f(x_n) - f(x_0)\big)}{(x_n - x_0)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\log_a x_n - \log_a x_0)}{(a^{\log_a x_n} - a^{\log_a x_0})} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{(a^{y_n} - a^{y_0})}{(y_n - y_0)}} \overset{\textit{Beispiel 19}}{=} \frac{1}{a^{y_0} \cdot \ln a}$ $\underset{\text{beliebig}}{\overset{\{x_n\} \text{ ist}}{\Longrightarrow}} f'(x_0) = \frac{1}{x_0 \cdot \ln a}\ \forall x > 0$. Spezialfall: $(\ln x)' = \frac{1}{x}\ \forall x > 0$.

Beispiel 21. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, f(x) = x^r$ $(r \in \mathbb{R}$. Wegen $x^r = e^{r \ln x}$ liefert Kettenregel (Analog zu *Beispiel 19*): $f'(x_0) = \frac{\big(r \cdot e^{r \cdot \ln x_0}\big)}{x_0} = r \cdot \frac{x_0^r}{x_0} = r \cdot x_0^{r-1}\ \forall x_0 > 0$. Spezialfall: Sei $f(x) = \frac{1}{x^k} \implies f'(x) = \frac{-k}{x^{k+1}}$.

Zu *Beispiel 11*: Sei $f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Dann $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

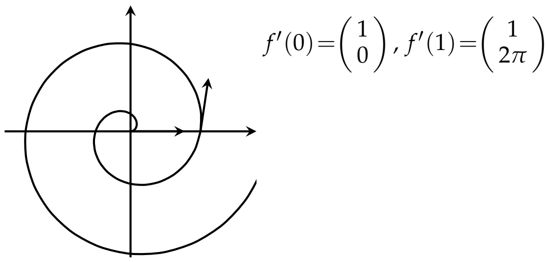
Satz 22 (Reduktion auf skalare Funktionen). *Sei* $f = (f_1, ..., f(n)) : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ *offen,* $x_0 \in D$. *Dann gilt:* f *ist differenzierbar in* $x_0 \iff f_j$ *ist differenzierbar in* x_0 $\forall j = 1, ..., m$. *Im Falle der Differenzierbarkeit hat man*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}. \tag{12}$$

Beachte: Ableitungen $f_1', ..., f_n'$ sind selbst Vektoren.

Bemerkung 23. *Mit* Satz 22 *kann man die Berechnung der Ableitungen stets auf skalare Funktionen* $\tilde{f} : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *zurückführen. Die Matrix in* (12) *besteht aus* m *Zeilen* $f_j'(x_0) \in \mathbb{K}^{1 \times m}$.

Beispiel 24. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t\cos(2\pi t),\ t\sin(2\pi t))^{\mathrm{T}}$, dann $f'(t) = (\cos(2\pi t) - t \cdot \sin(2\pi t)2\pi,\ \sin(2\pi t) + t \cdot \cos(2\pi t)2\pi)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$.



Lemma 25. *Sei* $f = (f_1, f_2) : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^l, D$ *offen,* $x_0 \in D$. *Funktion* f *ist differenzierbar in* x_0 *gdw.* $f_1 : D \to \mathbb{K}^k$ *und* $f_2 : D \to \mathbb{K}^l$ *differenzierbar sind in* x_0. *Im Falle der Differenzierbarkeit gilt*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(k+l) \times n}. \tag{13}$$

Hinweis: Da $\mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^l$ mit $\mathbb{K}^{k+l}$ identifiziert werden kann, kann man f auch als Abbildung von D nach $\mathbb{K}^{k+l}$ ansehen. Dementsprechend kann die Matrix in (13) auch als $((k+l) \times n)$ Matrix aufgefasst werden.

Beweis. "$\Longrightarrow$": Man hat

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)(x - x_0), R(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0 \tag{14}$$

da $f'(x_0), R(x) \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^l) \implies f'(x_0)y = (A_1y, A_2y), R(x)y = (R_1(x)y, R_2(x)y)$ mit $A_1, R_1(x) \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k), A_2, R_2(x) \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^l)$

$$\overset{(14)}{\Longrightarrow} f_j(x) = f_j(x_0) + A_j(x - x_0) + R_j(x)(x - x_0), R_j(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0, j = 1, 2 \tag{15}$$

$\Longrightarrow$ f_j ist differenzierbar in x_0 mit $f_j'(x_0) = Aj, j = 1, 2$ $\Longrightarrow$ Behauptung. Insbesondere folgt auch (13).

"$\Longleftarrow$": Es gilt (15) mit $Aj = f_j'(x_0)$. Setze $A := (f_1'(x_0),\, f_2'(x_0))^{\mathrm{T}}, R(x) := (R_1(x),\, R_2(x))^{\mathrm{T}}$ $\Longrightarrow$ $A, R(x) \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^k \times \mathbb{K}^l)$ $\overset{(15)\text{ mit}}{\underset{A_j = f_j'(x_0)}{\Longrightarrow}}$ $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + R(x)(x - x_0), R(x) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar in x_0 und (13) gilt.

■

Beweis. (von *Satz 22*) Mehrfache Anwendung von *Lemma 25* (z.B. mit $k = 1$ und $l = n - j$, für $j = 1, ..., n - 1$). ■

18 Richtungsableitungen und partielle Ableitungen

Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, $x \in D$. Ziel: Zurückführung der Berechnung der Ableitung $f'(x)$ auf Berechnung von der Ableitungen von Funktionen $\tilde{f} : \tilde{D} \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

- Wegen dem *Reduktionssatz* kann sich man bereits auf $m = 1$ beschränken.
- Für Berechnung der Ableitung von $\tilde{f}$ ist neben den Rechenregeln und Kettenregel auch Differentialquotient verfügbar.

Idee: Betrachte f auf Gerade $t \to x + tz$ (z ist Richtungsvektor) durch x. Dann ist $t \in \mathbb{K}$ skalares Argument $\implies$ Differentialquotient ist anwendbar. Spezialfälle: Richtungsvektor $z = e_j$ liefert partielle Ableitungen. Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, $x \in D, z \in \mathbb{K}^n$. Falls $a \in L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m)$ ($\sim \mathbb{K}^m$) existiert mit

$$f(x + tz) = f(x) + ta + o(t), t \longrightarrow 0, t \in \mathbb{K} \tag{1}$$

Dann heißt f *differenzierbar in* x *in Richtung* z und $D_z f(x) := a$ heißt Richtungsableitung von f in x in Richtung z (Andere Bezeichnungen: $f'(x; z), \partial_z f(x), \frac{\partial f}{\partial z}(x), \delta f(x; z)...$). Bemerkungen:

- Wegen $B_\epsilon(x) \subset D$ für ein $\epsilon > 0$ existiert $\tilde{\epsilon} > 0$ mit $x + tz \in D\ \forall t \in B_{\tilde{\epsilon}}(x) \subset \mathbb{K}$.
- $f'(x; 0)$ existiert offenbar stets für $z = 0$ mit $f'(x; 0) = 0$.

Satz 1. *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, $x \in D, z \in \mathbb{K}^n$. Dann f ist differenzierbar in x in Richtung z mit $D_z f(x) \in L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m)$*

$$\iff \textit{für } \varphi(t) := f(x + tz) \textit{ existiert } \varphi'(0) \textit{ und } D_z f(x) = \varphi'(0) \tag{2}$$

$$\iff \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tz) - f(x)}{t} = a \ \big(a \in L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m)\big) \textit{ existiert und } D_z f(x) := a. \tag{3}$$

Beispiel 2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x_1^2 + |x_2|$. Existiert Richtungsableitung in $x = (x_1, 0)$ in Richtung $z = (z_1, z_2)$?
Sei $\varphi(t) := f(x + tz) = (x_1 + tz_1)^2 + |tz_2| = \overbrace{x_1^2 + 2x_1z_1 + t^2z_1^2}^{\varphi_1(t)} + \overbrace{|t||z_2|}^{\varphi_2(t)} \implies \varphi_1'(0) = x_1z_1$ existiert $\forall x_1, z_1 \in \mathbb{R}$, $\varphi_2'(x) = 0$ existiert nur für $z_2 = 0$ (vgl. *Beispiel 17.7*) $\implies \varphi'(0) = 2x_1z_1$ existiert nur für $x_1, z_1 \in \mathbb{R}, z_2 = 0 \overset{(2)}{\implies}$ Richtungsableitung von f existiert für alle $x = (x_1, 0)$ nur in Richtung $z = (z_1, 0)$ mit $D_z f(x) = 2x_1z_1$.

Wiederholung: Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, dann ist die Ableitung definiert als lineare Abbildung A mit

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + A(x - x_0)}_{\text{affin linear}} + \underbrace{r(x)}_{=o(|x - x_0)},$$

Ausdrücke $\lim_{x \to x_0} \frac{\big(f(x) - f(x_0)\big)}{\big(x - x_0\big)}$ und $\lim_{t \to 0} \frac{\big(f(x+t) - f(x)\big)}{t}$ sind für uns keine Definitionen der Ableitung, weil sie nicht generalisierbar genug sind. Beide Formeln sind aber für die Berechnung wichtig. Frage: Existiert $D_z f(x)\ \forall z$ falls f differenzierbar in x ist?

Satz 3. *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, f differenzierbar in $x \in D$. Dann existiert Richtungsableitung $D_z f(x)\ \forall z \in \mathbb{K}^n$ und*

$$D_z f(x) = f'(x) \cdot z \in \mathbb{K}^{n\times 1}. \tag{4}$$

Hinweis: Richtungsableitung ist linear in z.

Beweis. f ist differenzierbar in $x \implies f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + o(|y-x|), y \longrightarrow x \overset{y=x+tz}{\implies} f(x+tz) = f(x) + t \cdot f'(x) \cdot z + o(t), t \longrightarrow 0 \overset{(1)}{\implies}$ Behauptung. ■

Beispiel 4. Betrachte $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2\ \forall x$,

(a) (2) liefert $\varphi(t) = |x+tz|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i+tz_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2tx_iz_i + t^2z_i^2 \implies \varphi'(t) = \sum_{i=1}^n 2x_iz_i + 2tz_i^2 \overset{(2)}{\implies} \varphi'(0) = 2\sum_{i=1}^n x_iz_i = 2\langle x, z\rangle = D_zf(x)\ \forall x, z \in \mathbb{R}^n$.

(b) *Beispiel 17.5* liefert $f'(x) = 2x\ \forall x \in \mathbb{R}^n \overset{(4)}{\implies} D_zf(x) = 2xz = 2\langle x, z\rangle\ \forall x, z \in \mathbb{R}^n$.

Folglich gilt Für $|z| = 1$ und $x \in \mathbb{R}^n$ fest:

- $D_zf(x) = 0 \iff x \perp z$,
- $D_zf(x)$ ist maximal (x fest) $\iff z = \frac{x}{|x|}$.

18.1 Anwendung: Eigenschaften von Gradienten

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, D$ offen, f differenzierbar in $x \in D$. $N_c := \{x \in D \mid f(x) = c\}$ heißt *Niveaumenge* von f. Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \to N_c$ ($\delta > 0$) Kurve mit $\gamma(0) = x$, γ ist differenzierbar in 0. Ein $z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $z = \gamma'(0)$ für eine derartige Kurve γ heißt *Tangentialvektor* an N_c in x. Offenbar $\varphi(t) := f(\gamma(t)) = c \overset{\textit{Ketten-}}{\underset{\textit{-regel}}{\implies}} \varphi'(0) = f'(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$

$$\implies D_{\gamma'(0)}f(x) = \langle f'(x), \gamma'(0)\rangle = 0. \tag{5}$$

Satz 5 (Eigenschaften des Gradienten). *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, D$ offen, f differenzierbar in $x \in D$. Dann:*

(1) *Gradient $f'(x)^{\mathrm{T}}$ steht senkrecht auf Niveaumenge $N_{f(x)}$, d.h. $\langle f'(x), z\rangle = 0$ für alle Tangentialvektoren z an $N_{f(x)}$ in x,*
(2) *Richtungsableitung $D_zf(x) = 0$ für alle Tangentialvektoren z an $N_{f(x)}$ in x,*
(3) *Gradient $f'(x)^{\mathrm{T}}$ zeigt in Richtung des "steilsten Anstiegs" von f in x und $|f'(x)|$ ist "steilster Anstieg", d.h. falls $f'(x) \neq 0$ gilt für Richtung $\tilde{z} := \frac{f'(x)^{\mathrm{T}}}{|f'(x)|}$:*

$$D_{\tilde{z}}f(x) = \max\{D_zf(x) \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{R}^n \text{ mit } |z| = 1\} = |f'(x)|.$$

Beachte: Euklidische Norm ist hier wichtig!

Beweis. (1), (2) folgen direkt aus (5) und (4). Zu (3): Für $|x| = 1$ gilt $D_zf(x) \overset{(4)}{=} \langle f'(x), z\rangle = |f'(x)|\langle\tilde{z}, z\rangle \underset{\textit{Ugl.}}{\overset{\textit{C.-Schw.}}{\leq}} |f'(x)||\tilde{z}||z| = |f'(x)| = \frac{\langle f'(x), f'(x)\rangle}{|f'(x)|} = \langle f'(x), \tilde{z}\rangle \overset{(4)}{=} D_{\tilde{z}}f(x))) \implies$ Behauptung. ■

Feststellung: Für $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist lineare Abbildung $f'(x) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch Kenntnis von n linear unabhängigen Vektoren bestimmt $\overset{(4)}{\Longrightarrow}$ $f'(x)$ ist eindeutig bestimmt durch Kenntnis von $D_{e_j} f(x) = f'(x) \cdot e_j$ $(\in \mathbb{K}^{m\times 1})$ für $j = 1, ..., n$. Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, $x \in D$ (nicht notwendig differenzierbar in x). Falls Richtungsabbildung $D_{e_j} f(x)$ existiert heißt f *partiell differenzierbar bzgl.* x_j *im Punkt* x und $D_{e_j} f(x)$ heißt *partielle Ableitung von* f *bzgl.* x_j *in* x. Bezeichnung: $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x), \quad D_j f(x), \quad f_{x_j}(x).$ Wegen $f(x) + te_j = f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, ..., x_n)$ liefert *Satz 1*:

Folgerung 6. *Sei* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}^m, D$ *offen. Dann:* f *ist partiell differenzierbar bzgl.* x_j *in* x *mit Ableitung* $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$

$$\Longleftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_j, ..., x_n)}{t} \; (\in \mathbb{K}^{m\times 1}) \tag{6}$$

existiert und $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = a$.

Bemerkung 7. *Zur Berechnung von* $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ *differenziert man skalare Funktion* $x_j \to f(x_1, ..., x_j,$
$..., x_n)$ *(d.h. alle* x_k *mit* $k \neq j$ *werden als feste Parameter angesehen).*

Beispiel 8. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 \sin x_2 + e^{x_3 - x_1} \implies \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = 2x_1 \sin x_2 - e^{x_3 - x_1}, \; \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) = x_1^2 \cos x_2, \; \frac{\partial}{\partial x_3} f(x) = e^{x_3 - x_1}$.

Folgerung 9. *Sei* $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ *offen,* f *differenzierbar in* $x \in D$

$$\Longrightarrow D_z f(x) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \; \forall z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Beweis. (4) liefert $D_z f(x) = f'(x) \cdot z = f'(x) \cdot \sum_{j=1}^n z_j e_j = \sum_{j=1}^n z_j \big(f'(x) e^j\big) = \sum_{j=1}^n z_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$. ∎

Beispiel 10. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. f ist differenzierbar nach *Beispiel 4* $\implies \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = 2x_j$ für j=1,...,n $\overset{(7)}{\Longrightarrow} D_z f(x) = \sum_{j=1}^n 2x_j z_j = 2\langle x, z\rangle$ (vgl. *Beispiel 4*).

Theorem 11 (Vollständige Reduktion). *Sei* $f = (f_1, ..., f_m) : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ *offen,* f *differenzierbar in* $x \in D$. *Dann*

$$f'(x) \overset{(a)}{=} \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix} \overset{(b)}{=} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right) \overset{(c)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\textit{Jacobi-Matrix}} \in \mathbb{K}^{m\times n}. \tag{8}$$

Bemerkung 12. *Falls f differenzierbar in x ist, dann reduziert* Theorem 11 *Berechnung von $f'(x)$ auf Ableitungen skalarere Funktionen $\tilde{f} : \tilde{D} \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$.*

Beweis. (von *Theorem 11*) Zu (a): Folgt nach *Satz 17.22*. Zu (b): Benutze $f'(x) \cdot z = D_z f(x)$ und *Folgerung 9*. Zu (c): Entweder $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j}, ..., \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_j}\right)^T$ analog zu (a), oder $f_j'(x) = \left(\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j}, ..., \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_n}\right)$ analog zu (b). ■

Frage: Gilt Umkehrung von *Theorem 11* bzw. *Satz 3*, d.h. falls alle partielle Ableitungen $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ bzw. alle Richtungsableitungen $D_z f(x)$ existieren, ist dann f differenzierbar in x? NEIN!

Beispiel 13. Betrachte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1} \text{ falls } x_1 \neq 0, \\ 0 \text{ falls } x_1 = 0. \end{cases}$$

Berechne Richtungsableitung in $x = 0$ mittels (3). $D_z f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\left(f(0+tz)-f(0)\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tz)}{t}$
$\implies D_z f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2 z_2^2)}{(t^2 z_1)} = \frac{z_1}{z_2}$ $\forall z = (z_1, z_2), z_1 \neq 0$. $D_{(0,z_2)} f(0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \implies D_z f(0)$ existiert $\forall z \in \mathbb{R}^2$. Aber $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \neq 0 = f(0) \implies f$ ist nicht stetig in $x = 0 \overset{Satz\ 17.2}{\implies} f$ ist nicht differenzierbar in $x = 0$.

Ausblick: Alle partielle Ableitungen $\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j}$ sind stetig in $x \implies f$ ist differenzierbar in x und (8) gilt!

18.2 $\mathbb{R}$-differenzierbar und $\mathbb{C}$-differenzierbar

Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist differenzierbar in $z_0 \in D$ offen g.d.w. eine $\mathbb{K}$-lineare Funktion $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Funktion f in z_0 "lokal approximiert". Man müsste genauer sagen: Funktion f ist $\mathbb{K}$-differenzierbar in z_0. Wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ kann jeder Vektorraum über $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachtet werden (nicht umgekehrt) und jede $\mathbb{C}$-lineare Abbildung zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen kann auch als $\mathbb{R}$-linear betrachtet werden, d.h. jede $\mathbb{C}$-differenzierbare Funktion $f : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist auch $\mathbb{R}$-differenzierbar. Umkehrung dieser Aussage gilt i.a. nicht!

Beispiel 14. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$.

(a) Funktion f ist additiv und $f(tz) = t \cdot f(z)$ $\forall t \in \mathbb{R} \implies f$ ist $\mathbb{R}$-linear. Wegen $f(z) = \overline{z} = \overline{z_0} + \overline{z - z_0} = f(z_0) + f(z - z_0) + 0$ folgt, dass f $\mathbb{R}$-differenzierbar ist in z_0 $\forall z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) Angenommen f wäre $\mathbb{C}$-differenzierbar in $z_0 \in \mathbb{C}$, dann $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{(\overline{z_0 + z} - \overline{z_0})}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{\overline{z}}{z}$ "=" $\pm 1 \implies \lightning \implies f$ ist nicht $\mathbb{C}$-differenzierbar.

Allgemein: *Funktion $f : D \subset X \to Y, D$ offen, $(X,Y) = (\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ oder $(X,Y) = (\mathbb{C}^n, \mathbb{R}^m)$ bzw. $(X,Y) = (\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ heißt $\mathbb{R}$-differenzierbar in $z_0 \in D$ falls* Satz 17.1 *mit entsprechender $\mathbb{R}$-linearer Abbildung $A : X \to Y$ gilt.* Beachte: falls X oder Y nur Vektorraum über R ist, dann ist $\mathbb{C}$-differenzierbar nicht erklärt! Spezialfall: Sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, D$ offen, $z_0 \in D$. Vergleiche $\mathbb{R}$-differenzierbar und $\mathbb{C}$-differenzierbar: Sei f $\mathbb{R}$-differenzierbar in z_0, d.h. $\exists\mathbb{R}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + Az + o(|z|), z \longrightarrow z_0. \tag{9}$$

Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{für } z = x \in \mathbb{R}: \quad A(1) &= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}}} \tfrac{f(z_0+x)-f(z_0)}{x} =: f_x(z_0), \\ \text{für } z = iy, y \in \mathbb{R}: \quad A(i) &= \lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in \mathbb{R}}} \tfrac{f(z_0+iy)-f(z_0)}{y} =: f_y(z_0). \end{aligned} \tag{10}$$

Nenne $f_x(z_0), f_y(z_0)$ partielle Ableitung von f in z_0. Sei f $\mathbb{C}$-differenzierbar in z_0, d.h. $f(z_0 + z) = f(z_0) + \underbrace{f'(z_0)}_{\in\mathbb{C}} \cdot z + o(|z|)$

$$\stackrel{(10)}{\Longrightarrow} f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0). \tag{11}$$

Satz 15. *Sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}, D$ offen, $z_0 \in D$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} f \text{ ist } \mathbb{C}\text{-differenzierbar in } z_0 \iff & f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-differenzierbar in } z_0 \\ & \text{mit } f_x(z_0) = -if_y(z_0). \end{aligned} \tag{12}$$

Beweis. "$\Longrightarrow$": Vgl. oben (11). "$\Longleftarrow$": Mit $z = x + iy$ liefert die Gleichung (9): $f(z_0 + z) = f(z_0) + A(x+iy) + o(|z|) = f(z_0) + xA(1) + yA(i) + o(|z|) = f(z_0) + f(z_0) + f_x(z_0)x + f_y(z_0)y + o(|z|) \stackrel{(12)}{=} f(z_0) + f_x(z_0)(x + iy) + o(|z|) = f(z_0) + \underbrace{f_x(z_0)z + o(|z|)}_{=:f'(z_0)\in\mathbb{C} \text{ als } \mathbb{C}-\text{Ableitung}}$. ■

Identifiziere $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f' : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gemäß $z = x + iy \cong (x,y)^{\mathrm{T}}, f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \cong (u(x,y), v(x,y))^{\mathrm{T}} = \tilde{f}(x,y)$. Lineare Algebra liefert: $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear $\iff \exists w \in \mathbb{C} : A \cdot z = w \cdot z \ \forall z \in \mathbb{C}$. $\tilde{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{R}$-linear

$$\iff \tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ (bzgl. Standardbasis).}$$

Lemma 16. *Sei $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$-linear. Dann gilt: A ist $\mathbb{C}$-linear, d.h $\exists w = \alpha + \beta : Az = w \cdot z \ \forall z \in \mathbb{C}$*

$$\iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : A(x + iy) \cong \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Selbststudium. ■

18.3 Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Siehe (13). Somit entspricht $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ speziellen $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Falls f $\mathbb{R}$-differenzierbar in z_0 ist, liefert (10): $f_x(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$, $f_y(z_0) = u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)$. Folglich gilt:

$$(12) \iff \begin{array}{l} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{array} \tag{13}$$

Somit entspricht $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $z \mapsto f'(z_0) \cdot z$ einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ -u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Hinweis: $\mathbb{C}$-differenzierbare Funktionen werden in Funktionentheorie untersucht. Es gilt z.B.: f ist $\mathbb{C}$-differenzierbar auf offener Menge $D \implies$ Ableitung $f' : D \to \mathbb{C}$ ist auch $\mathbb{C}$-differenzierbar auf $D \implies f$ ist beliebig oft differenzierbar auf D.

19 Mittelwertsatz und Anwendungen

Wir sagen $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *besitzt ein Minimum* (*Maximum*) auf D falls eine Minimalstelle (Maximalstelle) $x_0 \in D$ existiert mit

$$f(x_0) \leq f(x)\big(f(x_0) \geq f(x)\big) \ \forall x \in D \tag{1}$$

Funktion f hat *lokales Minimum (lokales Maximum)* in $x_0 \in D$ falls

$$\exists \epsilon > 0 : f(x_0) \leq f(x)\big(f(x_0) \geq f(x)\big) \ \forall x \in B_\epsilon(x_0) \cap D \tag{2}$$

Hat man in (1) oder (2) für $x \neq x_0$ "<" bzw. ">", so sagt man *strenges* (*lokales*) *Minimum* bzw. *Maximum.* Hinweis: f hat Minimum auf $D \overset{\text{vgl. Kapitel 5}}{\iff} \min\{f(x) \mid x \in D\}$ existiert (d.h. $\inf\{f(x) \mid x \in D\}$ wird angenommen). Maximum analog.

Theorem 1 (notwendige Optimalitätsbedingung). *Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, D$ offen, f differenzierbar in $x_0 \in D$ und habe lokales Minimum bzw. Maximum in x_0*

$$\implies f'(x_0) = 0 \ (\in \mathbb{R}^{1\times n}). \tag{3}$$

Bemerkung 2.

- Theorem 1 *ist neben* Satz von Weierstraß (Theorem 15.3) *wichtigster Satz für Optimalprobleme, denn (3) dient der Bestimmung von "Kandidaten" für Minimal- und Maximalstellen.*
- (3) *besagt, dass Tangentialebene an Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ horizontal ist.*

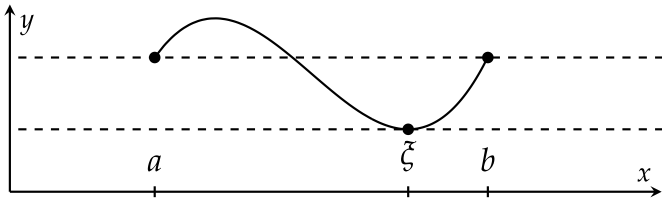
Beweis. Für Minimum (Maximum analog). Fixiere beliebiges $z \in \mathbb{R}^n$. D ist offen $\implies$ $\exists \delta > 0 : x_0 + tz \in D \ \forall t \in (-\delta, \delta), f$ ist differenzierbar in x_0, Minimum liegt in x_0

$$\begin{aligned}
&\implies 0 \leq f(x_0 + tz) - f(x_0) = tf'(z_0) \cdot z + o(t), t \longrightarrow 0 \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{t} \\
&\overset{t>0}{\implies} 0 \leq f'(z_0)z + o(1) \\
&\overset{t\to 0}{\implies} 0 \leq f'(z_0)z \ \forall z \in \mathbb{R}^n \\
&\overset{\pm z}{\implies} f'(z_0)z = 0 \ \forall z \in \mathbb{R}^n \\
&\implies f'(z_0) = 0.
\end{aligned}$$

■

Dies ist einfache, aber wichtige Anwendung!

Satz 3 (von Rolle). *Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $-\infty < a < b < \infty, f$ differenzierbar auf (a, b) und $f(a) = f(b)$. Dann $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.*



Beweis. f ist stetig, $[a,b]$ ist kompakt. Dann nach *Theorem 15.3* $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x$. Angenommen $f(x_1) = f(x_2) = f(a) \implies f$ ist konstant $\implies f'(\xi) = 0$ $\forall \xi \in (a,b)$. Anderenfalls sei $f(x_1) < f(a) \implies \xi := x_1 \in (a,b) \overset{\text{Theorem 1}}{\implies} f'(\xi) = 0$. Analog für $f(x_2) > f(a)$.

■

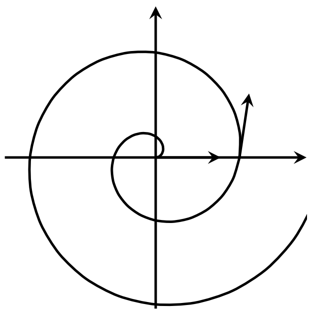
Setze für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n$:

- $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \mathbb{K}^n \mid t \in [0,1]\}$ ist *abgeschlossenes Segment (abgeschlossene Verbindungsstrecke)*,
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \mathbb{K}^n \mid t \in (0,1)\}$ ist *offenes Segment (offene Verbindungsstrecke)*.

Folgender Satz ist einer der wichtigsten der Differentialrechnung.

Theorem 4 (Mittelwertsatz). *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, D$ offen, f differenzierbar auf D und seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ mit $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \subset D$. Dann*

$$\exists \boldsymbol{\xi} \in (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = f'(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}). \tag{4}$$



Bemerkung 5.
- *Für* $n = 1$ *schreibt man (4) auch als* $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ *falls* $x \neq y$.
- Mittelwertsatz *gilt nicht mit* $\mathbb{C}$ *und nur für* $m = 1$.
- Theorem 4 *gilt bereits für* $D \subset \mathbb{R}^n$ *beliebig,* f *stetig auf* $[x,y] \subset D$, f *differenzierbar auf* $(x,y) \subset \operatorname{int} D$.

Beweis. Setze $\varphi(t) = f\big(x + t(y-x)\big) - \big(f(y) - f(x)\big)t$ $\forall t \in [0,1] \underset{\text{diff.-bar}}{\overset{f \text{ ist}}{\implies}} \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig, $\varphi(0) = \varphi(1) = f(x), \varphi$ ist differenzierbar auf $(0,1)$ mit

$$\varphi'(t) = f'\big(x + t(y-x)\big) \cdot (y - x) - \big(f(y) - f(x)\big) \tag{5}$$

$\overset{\text{Satz 3}}{\Longrightarrow} \exists \tau \in (0,1) : \varphi'(\tau) = 0 \overset{(5)}{\Longrightarrow} f(y) - f(x) = f'\big(\underbrace{x + \tau(y-x)}_{=:\xi \in (x,y)}\big) \cdot (y-x) \implies$ Behauptung.

■

Satz 6 (verallgemeinerter Mittelwertsatz in $\mathbb{R}$). *Seien $f, g : [x,y] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (x,y) mit $x, y \in \mathbb{R}, x < y$.*

$$\implies \exists \xi \in (x,y) : \big(f(y) - f(x)\big) \cdot g'(\xi) = \big(g(y) - g(x)\big) \cdot f'(\xi).$$

Beweis. Sei $h(t) := \big(f(y) - f(x)\big) \cdot g'(t) - \big(g(y) - g(x)\big) f(t)\ \forall t \in [x,y] \implies h : [x,y] \to \mathbb{R}$ ist stetig, differenzierbar auf $(x,y), h(x) = h(y) \overset{\text{Satz 3}}{\Longrightarrow} \exists \xi \in (x,y) : 0 = h'(\xi) = \big(f(y) - f(x)\big) \cdot g'(\xi) - \big(g(y) - g(x)\big) f'(\xi) \implies$ Behauptung.

■

Frage: Mittelwertsatz gilt für $m = 1$, was ist bei $m > 1$?

Folgerung 7. *Sei $f = (f_1, ..., f_m) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, D$ offen, f differenzierbar auf D und $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \subset D$, dann*

$$\exists \boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_m \in (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1'(\boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ f_m'(\boldsymbol{\xi}_m) \end{pmatrix} \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}). \tag{6}$$

Beweis. Gleichung in (6) ist äquivalent zu m skalaren Gleichungen $f_j(y) - f_j(x) = f_j'(\boldsymbol{\xi}_j)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ mit $j = 1, ..., m$ und diese folgen direkt aus *Theorem 4* für $f_j : D \to \mathbb{R}$. ■

Frage: Ist in (6) auch $\boldsymbol{\xi}_1 = ... = \boldsymbol{\xi}_m$ möglich? I.a. nicht!

Beispiel 8. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = (\cos x, \sin x)^{\mathrm{T}}\ \forall x \in \mathbb{R}$. Angenommen $\exists \xi \in (0, 2\pi) : f(2\pi) - f(0) = f'(\xi)(2\pi - 0) \implies 0 = f'(\xi) = (-\sin \xi, \cos \xi)^{\mathrm{T}}$, d.h. $\sin \xi = \cos \xi = 0 \implies ↯$, d.h. $\xi_1 = \xi_2$ in (6) ist nicht möglich.

Ausweg: Für $m > 1$ gilt statt (4) Abschätzung (7), die meist ausreicht und ebenso wichtig ist, wie der *Mittelwertsatz.*

Theorem 9 (Schrankensatz). *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, f differenzierbar auf D, seien $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \subset D$*

$$\exists \boldsymbol{\xi} \in (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : |f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})| \leq |f'(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})| \leq \|f'(\boldsymbol{\xi})\| \cdot |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|. \tag{7}$$

Beachte: *Theorem 9* gilt auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$!

Beweis. Sei $f(x) \neq f(y)$. Setze $r := \frac{\big(f(y) - f(x)\big)}{|f(y) - f(x)|} \in \mathbb{K}^m$, offenbar $|r| = 1$. Betrachte $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) := \Re\langle f\big(x + t(y-x)\big), r\rangle$. (*Wiederholung:* $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i$.) Da f differenzierbar ist, gilt $\langle f\big(x + s(y-x)\big), r\rangle = \langle f\big(x + t(y-x)\big), r\rangle + \langle f'\big(x + t(y-x)\big)(s-t)(y-x), r\rangle + o(|s-t||y-x|), s \longrightarrow t \implies \varphi$ ist differenzierbar auf $(0,1)$

mit $\varphi'(t) = \Re\langle f'\big(x + t(y-x)\big)(y-x), r\rangle\ \forall t \in (0,1)$. *Theorem 4* liefert $\exists \tau \in (0,1)$: $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau)(1-0) \overset{\xi = x+\tau(y-x)}{\Longrightarrow} |f(y) - f(x)| = \Re\langle f(y) - f(x), r\rangle = \varphi(1) - \varphi(0) = \Re\langle f'(\xi)(y-x), r\rangle \leq |\langle f'(\xi)(y-x), r\rangle| \underset{\text{Ugl.}}{\overset{\text{C.-Schw.}}{\leq}} |f'(\xi)(y-x)| \cdot |r| \leq \|f'(\xi)\||y-x|$. ∎

Wiederholung: Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt konvex, falls $[x,y] \subset M\ \forall x, y \in M$.

Satz 10 (Lipschitz-Stetig). *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, f stetig differenzierbar auf D, sei $M \subset D$ kompakt und konvex $\implies |f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})| < L|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|\ \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ mit*

$$L := \max_{\boldsymbol{\xi} \in M} \|f'(\boldsymbol{\xi})\| < +\infty. \tag{8}$$

D.h. f ist Lipschitz-stetig auf M mit Lipschitz-konstante L.

Bemerkung 11. *Wegen $\|f'(\boldsymbol{\xi})\| \leq |f'(\boldsymbol{\xi})|$ (vgl.* Kapitel 16*) kann man in* (7) *und* (8) *auch $|f'(\boldsymbol{\xi})|$ benutzen.*

Beweis. (zu *Satz 10*) Sei $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M \underset{\text{konvex}}{\overset{M \text{ ist}}{\Longrightarrow}} [\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset M$. $f' : M \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ist stetig, M ist kompakt $\overset{\textit{Theorem 15.3}}{\Longrightarrow} \|f'(\boldsymbol{\xi})\|$ besitzt Maximum auf M und Behauptung folgt aus *Theorem 9* . ∎

Bekanntlich: $f(x)$ ist konstant $\forall x \implies f'(x) = 0$. Gilt die Umkehrung dieser Aussage?

Satz 12. *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen und zusammenhängend. f ist differenzierbar auf D mit $f'(x) = 0\ \forall x \in D \implies f(x)$ ist konstant $\forall x \in D$.*

Beweis. D ist offen, zusammenhängend, $\mathbb{K}^n$ ist normierter Raum $\overset{\text{Satz 15.8}}{\Longrightarrow}$ D ist bogenzusammenhängend. Wähle $x, y \in D$, dann $\exists \varphi : [0,1] \to D$ ist stetig, $\varphi(0) = x,\ \varphi(1) = y$. D ist offen $\implies \forall t \in [0,1]$ existiert $r(t) > 0 : B_{r(t)}(\varphi(t)) \subset D$. Nach *Satz 15.1* ist $\big\{B_{r(t)}(\varphi(t)) \mid t \in [0,1]\big\}$ offene Überdeckung von $\varphi([0,1]) \implies$ es existiert eine endliche Überdeckung, d.h. $\exists t_1, ..., t_n \in (0,1]$ mit $\varphi([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^n B_{r(t_i)}(\varphi(t_i))$. Falls wir noch zeigen, dass f konstant auf jeder Kugel $B_r(z) \subset D$ ist, dann wäre $f(x) = f(y)$ und so folgt die Behauptung, weil x, y beliebig sind. Sei $B_r(z) \subset D$ und $x, y \in B_r(z) \underset{\text{Vorraus.}}{\overset{\textit{Theorem 9}}{\Longrightarrow}}$ $|f(y) - f(x)| \leq \underbrace{\|f'(\xi)\|}_{=0}|y-x| = 0 \implies f(x) = f(y) \underset{\text{beliebig}}{\overset{x,y \text{ sind}}{\Longrightarrow}} f$ ist konstant auf $B_r(z)$.

∎

Beispiel 13. Sei $f : D = (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $f'(x) = 0$ auf $D \overset{\text{Satz 12}}{\Longrightarrow} f$ ist konstant auf $(0,1)$ und $(2,3)$. Aber auf jedem Intervall kann die Konstante anderes sein!

Zurück zu Frage nach dem *Theorem 18.11*: Gilt die Implikation “alle partielle Ableitungen existieren $\implies$ die Ableitung existiert”? Nein. Aber:

Theorem 14. *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, $x \in D$. Falls alle partielle Ableitungen $f_{x_j}(y)$ mit $j = 1, ..., n$ für alle $y \in B_r(x) \subset D$ für ein $r > 0$ existieren und falls $y \longrightarrow f_{x_j}(y)$ stetig in x ist für $j = 1, ..., n$, dann ist f differenzierbar in x mit $f'(x) = \Big(f_{x_1}(x), ..., f_{x_n}(x)\Big) \in \mathbb{K}^{m\times n}$.*

Beweis. Fixiere $y = \big(y_1, ..., y_n\big) \in B_r(0)$. Betrachte Eckpunkte eines Quaders in D: $a_0 := x, a_k := a_{k-1};\ y_k e_k$ für $k = 1, ..., n \implies a_n = x + y$. Offenbar ist $\varphi_k(t) := f(a_{k-1}+te_k y_k) - f(a_{k-1}) - t f_{x_k}(a_{k-1})y_k$ stetig auf $[0,1]$ und differenzierbar auf $(0,1)$ mit $\varphi_k'(t) = f_{x_k}(a_{k-1} + te_k y_k)y_k - f_{x_k}(a_{k-1})y_k \overset{\text{Theorem 9}}{\implies} |\varphi_k(1) - \varphi(0)| = |f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(a_{k-1})y_k| \le \sup_{t\in(0,1)} |\varphi_k'(t)|$ für $k = 1, ..., n$. Es gilt mit $A := \Big(f_{x_1}(x), ..., f_{x_n}(x)\Big)$:

$$
\begin{aligned}
\Big|f(x+y) - f(x) - Ay\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^n f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(x)y_k\Big| \\
&\overset{\triangle\text{ Ugl.}}{\le} \sum_{k=1}^n \Big|f(a_k) - f(a_{k-1}) - f_{x_k}(x)y_k\Big| \\
&\underset{\text{Def.}\varphi_k}{\overset{\triangle\text{ Ugl.}}{\le}} \sum_{k=1}^n \Big|\varphi_k(1) - \varphi_k(0)\Big| + \Big|f_{x_k}(a_{k-1})y_k - f_{x_k}(x)y_k\Big| \\
&\le |y| \sum_{k=1}^n \sup_{t\in(0,1)} \Big|f_{x_k}(a_{k-1} + te_k y_k) - f_{x_k}(a_{k-1})\Big| + \Big|f_{x_k}(a_{k-1}) - f_{x_k}(x)\Big| \\
&\overset{\triangle\text{ Ugl.}}{\le} |y| \underbrace{\sum_{k=1}^n \sup \Big|f_{x_k}(a_{k-1} + te_k y_k) - f_{x_k}(x)\Big| + 2\Big|f_{x_k}(a_{k-1} - f_{x_k})(x)\Big|}_{=:\varrho(y) \overset{y\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ da partielle Ableitungen } f_{x_k} \text{ stetig in } x \text{ sind}}
\end{aligned}
$$

$\implies f(x+y) = f(x) + Ay + R(y)$ mit $\frac{|R(y)|}{|y|} \le \varrho(y) \overset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, d.h. $R(y) = o(|y|), y \longrightarrow 0$
$\overset{\text{Satz 17.1}}{\implies} f$ ist differenzierbar in x mit $f'(x) = A$. ■

19.1 Anwendung des Mittelwertsatzes in $\mathbb{R}$

Satz 15 (Monotonie). *Sei $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:*

(1) *$f'(x) \ge 0$ (bzw. ≤ 0) $\forall x \in (a,b) \iff f$ ist monoton wachsend (bzw. fallend) auf (a,b).*
(2) *$f'(x) > 0$ (bzw. < 0) $\forall x \in (a,b) \implies f$ ist streng monoton wachsend (bzw. fallend) auf (a,b).*
(3) *$f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b) \iff f$ ist konstant auf (a,b).*

Bemerkung 16. *In (2) gilt die Rückrichtung nicht (betrachte $f(x) = x^3$)!*

Beweis. (jeweils für wachsend, fallend analog) Sei $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$.

"$\Longrightarrow$": In (1), (2), (3) nach *Theorem 4* $\exists \xi \in (a,b) : f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) \underset{(=)}{>} 0$.
Behauptung folgt, da x, y beliebig sind.

"$\Longleftarrow$": In (1), (3): $0 \underset{(=)}{\leq} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \overset{y \to x}{\longrightarrow} f'(x) \Longrightarrow$ Behauptung.

$\blacksquare$

Satz 17 (Zwischenwertsatz für Ableitungen). *Sei $f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a < x_1 < x_2 < b$. Dann: $f'(x_1) < \gamma < f'(x_2) \Longrightarrow \exists \tilde{x} \in (x_1, x_2) : f'(\tilde{x}) = \gamma$ (analog $f'(x_2) < \gamma < f'(x_1)$).*

Beweis. Funktion $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(x) - \gamma x$ ist differenzierbar auf (a,b). Nach *Satz von Weierstraß* $\exists \tilde{x} \in [x_1, x_2]$ mit $g(\tilde{x}) \leq g(x)\ \forall x \in [x_1, x_2]$. Angenommen $\tilde{x} = x_1 \Longrightarrow 0 \leq \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} \overset{x \to x_1}{\longrightarrow} g'(x_1) = f'(x_1) - \gamma \overset{\text{Vorraus.}}{<} 0 \Longrightarrow \lightning \Longrightarrow x_1 < \tilde{x}$, analog $\tilde{x} < x_2 \overset{\textit{Theorem 1}}{\Longrightarrow} 0 = g'(\tilde{x}) = f'(\tilde{x}) - \gamma \Longrightarrow$ Behauptung.

$\blacksquare$

Betrachte nun "unbestimmte" Grenzwerte $\lim\limits_{y \to x} \frac{f(y)}{g(y)}$ der Form "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{0}{0}$" $\big($z.B. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\big)$.

Satz 18 (Regel von de l'Hospital). *Seien $f, g : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$ und entweder*

(1) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0,\ \lim_{x \uparrow a} g(x) = 0$ *oder*
(2) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \infty,\ \lim_{x \uparrow a} g(x) = \infty$.

Dann existiert $\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \Longrightarrow \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *existiert und*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{9}$$

Analoge Aussage gilt für $x \uparrow b$ für $x \longrightarrow +\infty, x \longrightarrow -\infty$.

Bemerkung 19. (1) *Vgl. Analogie zu* Satz von Stolz *für Folgen (*Satz 9.34*).*
(2) *Satz kann auch auf Grenzwerte der Form "$0 \cdot \infty$", "1^∞", "0^0", "∞^0", "$\infty - \infty$" angewendet werden, falls man folgende Identitäten verwendet: $\alpha \cdot \beta = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta}}$, $\alpha^\beta = e^{\beta \cdot \ln \alpha}$, $\alpha - \beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$.*

Beweis. Zu (1): Mit $f(a) := 0, g(a) := 0$ sind f, g stetig auf $[a, b) \overset{\text{Satz 6}}{\Longrightarrow} \forall x \in (a, b)\ \exists \xi = \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. Wegen $\xi(x) \longrightarrow a$ für $x \longrightarrow a$ folgt die Behauptung. Zu (2): Sei $\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: \gamma \in \mathbb{R}(\gamma = \pm\infty$ ähnlich), o.B.d.A. $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ auf (a, b). Sei $\epsilon > 0$ fest $\implies \exists \delta > 0 : \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \gamma\right| < \epsilon\ \forall \xi \in (a, a + \delta) \implies \left|\frac{\big(f(y)-f(x)\big)}{\big(g(y)-g(x)\big)} - \gamma\right| \underset{\exists\xi\in(a,a+\delta)}{\overset{\text{Satz 6}}{\leq}} \left|\frac{\big(f(y)-f(x)\big)}{\big(g(y)-g(x)\big)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \gamma\right| < \epsilon\ \forall x, y \in (a, a + \delta)$ Fixiere $y \in (a, a + \delta)$, dann $g(x) \neq g(y), f(x) \neq f(y)\ \forall x \in (a, a + \delta_1)$ für ein $0 < \delta_1 < \delta$ und $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\big(f(y)-f(x)\big)}{\big(g(y)-g(x)\big)} \cdot \frac{\big(1-\frac{g(y)}{g(x)}\big)}{\big(1-\frac{f(y)}{f(x)}\big)} \overset{x\downarrow a}{\longrightarrow} 1 \implies \exists \delta_2 > 0 : \delta_2 < \delta_1$ und $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)}\right| < \epsilon\ \forall x \in (a, a + \delta_2)$ $\implies \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \gamma\right| \leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\big(f(y)-f(x)\big)}{\big(g(y)-g(x)\big)}\right| + \left|\frac{\big(f(y)-f(x)\big)}{\big(g(y)-g(x)\big)} - \gamma\right| < 2\epsilon\ \forall x \in (a, a + \delta_2) \underset{\text{beliebig}}{\overset{\epsilon>0 \text{ ist}}{\Longrightarrow}}$ Behauptung. Andere Fälle: $x \uparrow b$ analog, $x \longrightarrow \infty$ wird mittels $x = \frac{1}{y}$ auf $y \downarrow 0$ zurückgeführt, $x \longrightarrow -\infty$ analog. ■

Beispiel 20, 21, 22. Es ist $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Denn $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$. Weiterhin ist $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 0$. Denn $\lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$. Und $\lim_{x\to 0} \frac{2-2\cos x}{x^2} = 1$. Denn $\lim_{x\to 0} \frac{(2-2\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\textit{Beispiel 20}}{=} 1$.

Beachte: Satz 18 wird in Wahrheit zweimal angewendet!

Beispiel 23. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = e^y\ \forall y \in \mathbb{R}$. Denn $\left(1 + \frac{y}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1+\frac{y}{x}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}$ und

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{y}{x}} \cdot \frac{-y}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{1 + \frac{y}{x}} = y.$$

Behauptung folgt, weil e^x stetige Funktion ist (vgl. *Satz 13.9*).

20 Stammfunktionen

Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{m\times n}$ ($\sim L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$). *Frage:* Existiert Funktion F mit $F' = f$ auf D? $F : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ heißt *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f auf D falls F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)\ \forall x \in D$.

Satz 1. *Sei $F : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ Stammfunktion von $f : D \to \mathbb{K}^{m\times n}$ und sei $D \subset \mathbb{K}^n$ Gebiet (offene zusammenhängende Menge). Dann: $\tilde{F}$ ist Stammfunktion von f auf $D \iff \tilde{F} = F + c$ für ein $c \in \mathbb{K}^n$. Falls f eine Stammfunktion besitzt, dann gibt es eine Menge von Stammfunktionen, die auf einem Gebiet bis auf additive Konstante eindeutig bestimmt sind.*

Für Stammfunktion von f schreibt man auch $\int f\,\mathrm{d}x$ bzw. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Symbol Steht für die Menge aller Stammfunktionen, man schreibt auch $F = \int f\,\mathrm{d}x$, falls es eine Stammfunktion gleich F gibt. Weiterhin verwendet man $\int f\,\mathrm{d}x$ bzw. $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ auch als Bezeichnung für den Funktionswert $F(x)$ einer Stammfunktion F von f. Vorsicht! *Wiederholung:* Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sind zusammenhängend.

Beweis. (von *Satz 1*)

"$\Longleftarrow$": Offenbar ist $\tilde{F}$ differenzierbar mit $\tilde{F}' = F' = f$.
"$\Longrightarrow$": $F'(x) - F'(x) = 0\ \forall x \in D \overset{Satz\ 19.12}{\Longrightarrow} \tilde{F}(x) - F(x) = c$ für ein $x \in \mathbb{K}^n$.

■

Seien $f, g : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{m\times n}, D$ Gebiet, $x \in \mathbb{K}$. Dann liefern *Satz 1* und Differentiationsregeln:

$$\int (f \pm g)\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x \pm \int g\,\mathrm{d}x, \int cf\,\mathrm{d}x = c\int f\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Falls jeweils rechte Seite existiert, d.h. $f \to \int f\,\mathrm{d}x$ ist gewisserweise linear. *Hinweis:* Aussage bleibt richtig, wenn D nur offen ist, wir beschränken uns aber meist auf Gebiete. Betrachte zunächst Spezialfall $n = m = 1$: Sei $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}, D$ offen. Beispiele zur Differentiation liefern folgende Stammfunktionen:

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
e^x	e^x
x^k	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$ ($k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$)

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ ($x > 0, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$)
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$ ($x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$)
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Strategie: Rechenregeln für weitere Stammfunktionen definieren.

Satz 2 (partielle Integration). *Seien $f, g : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}, D$ Gebiet, mit zugehörigen Stammfunktionen: $F, G : D \to \mathbb{K}$. Falls $(fG) : D \to \mathbb{K}$ Stammfunktion besitzt, dann auch $(Fg) : D \to \mathbb{K}$ besitzt eine Stammfunktion mit*

$$\int Fg\,\mathrm{d}x = F(x)G(x) - \int fG\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Interpretation: Es gibt Stammfunktion $\widehat{Fg}$ von Fg und eine Stammfunktion $\widehat{fG}$ von fG mit
$$\widehat{Fg}(x) = F(x)G(x) - \widehat{fG}(x). \tag{2'}$$

Bemerkung 3. *(2) kann als Umkehrung der Produktregel betrachtet werden.*

Beweis. (von *Satz 2*) Sei $H : D \to \mathbb{K}$ Stammfunktion von $fG \implies \frac{d}{dx}\Big(F(x)G(x) - H(x)\Big) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - H'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) = F(x)g(x) \implies$ Behauptung. ∎

Beispiel 4. Zeige $\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - x$ auf $\mathbb{R}_{>0}$. Denn $\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1 \cdot \ln x}_{gF} \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \underbrace{x \ln x}_{GF} - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{Gf} \mathrm{d}x = x\ln x - x.$

Beispiel 5. Bestimme $\int x^2 e^x \,\mathrm{d}x$. Es ist $\int \overbrace{x^2 e^x}^{Fg} \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \overbrace{x^2 e^x}^{FG} - \int \overbrace{2xe^x}^{fG} \mathrm{d}x$, $\int \overbrace{2xe^x}^{\tilde{F}\tilde{g}} \mathrm{d}x \overset{(2)}{=} \overbrace{2xe^x}^{FG} - \int \overbrace{2e^x}^{\tilde{f}\tilde{G}} \mathrm{d}x = 2xe^x - 2e^x \implies \int x^2 e^x \,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2).$

Satz 6 (Integration durch Substitution). *Sei $f : D \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}, D$ Gebiet, mit Stammfunktion $F : D \to \mathbb{K}$ und sei $\varphi : D \to D$ differenzierbar. Dann hat $f(\varphi(\cdot))\varphi'(\cdot) : D \to \mathbb{K}$ Stammfunktion mit*
$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)). \tag{3}$$

Interpretation: Analog zu (2).

Beispiel 7. (3) kann als Umkehrung der Kettenregel angesehen werden.

Beweis. Funktion $F(\varphi(\cdot))$ ist nach Kettenregel auf D differenzierbar mit $\frac{d}{dx}F(\varphi(x)) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \implies$ Behauptung. ∎

Beispiel 8. Bestimme $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$ auf $\mathbb{R}_{>0}$. Offenbar $\frac{\ln x}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln \frac{1}{x}$. Wähle $\varphi(x) := \frac{1}{x}, f(y) = \ln y \implies \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2}, F(y) = y \ln y - y$ ist Stammfunktion von f (vgl. *Beispiel 4*). $f(\varphi(x))\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln \frac{1}{x} \overset{(3)}{\implies} F(\varphi(x)) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1+\ln x}{x} = \int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x.$

Weitere nützliche Regel prüft man leicht durch Differentiation:

Satz 9. *Sei $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, I$ offenes Intervall, $f(x) \neq 0$ auf I. Dann gilt*
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln |f(x)|. \tag{4}$$

Beispiel 10. Betrachte $f(x) = \tan x \; \forall x \in I_k := \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$:
$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \mathrm{d}x = -\ln|\cos x|.$$

Betrachte nun wieder allgemeinen Fall $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^{m\times n}$. *Reduktion:* Nach *Theorem 18.11* kann man sich auf $m = 1$ beschränken, d.h. falls

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & \cdots & f_{mn} \end{pmatrix},$$

dann reicht die Untersuchung der Zeilen $(f_{j1}, ..., f_{jn})$. *Ziel:* Reduktion auf $n = 1$. Betrachte somit $f : D \subset \mathbb{K}^n \to)\mathbb{K}^n, D$ Gebiet ($n = 1, b$ beliebig). Sei $F : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ Stammfunktion von $f = (f_1, ..., f_n)$

$$\overset{\text{Theorem 18.11}}{\Longrightarrow} F_{x_j}(x) = f_j(x)\ \forall x \in D, j = 1, ..., n \tag{5}$$

$\Longrightarrow\ x_j \to F_j(x_1, ..., x_j, ..., x_n)$ ist Stamfunktion von $x_j \mapsto f(x_1, ..., x_j, ..., x_n)$. Hierbei sind x_i mit $i \neq j$ als Parameter anzusehen. Ist $x_j \mapsto F_j(x_1, ..., x_j, ..., x_n)$ eine Stammfunktion von $x_j \mapsto f_j(x_1, ..., x_j, ..., x_n)$, dann erhält man alle Stammfunktionen durch Addition einer Konstante, die jedoch von Parameter abhängen kann, d.h. durch

$$x_j \mapsto F_j(x_1, ..., x_j, ..., x_n) + \varphi_j(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n) \tag{6}$$

mit beliebiger Funktion φ_j erhält man Stammfunktion. Schließlich muss gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(F_j(x) + \varphi_i(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_n)\Big) = f_i(x)\ \forall i \neq j, j = 1, ..., n. \tag{7}$$

Beispiel 11. Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (\alpha xy, x^2 + y^2)^{\mathrm{T}}, \alpha \in \mathbb{R}$ Parameter. Suche Stammfunktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Stammfunktion von $x \to f_1(x, y)$: $F(x, y) = \overbrace{\frac{\alpha}{2}x^2y}^{F_1(x,y)} + \varphi_1(y)$ (φ_1 ist unbekannte Funktion) Stammfunktion von $y \to f_2(x, y)$: $F(x, y) = \underbrace{x^2 + \frac{1}{3}y^3}_{F_2(x,y)} + \varphi_2(x)$ (φ_2 ist unbekannte Funktion)

$\overset{(7)}{\Longrightarrow}\ F_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}F_1(x, y) + \varphi'(y) \overset{(7)}{=} f_2(x, y)$, d.h. $\frac{\alpha}{2}x^2 + \varphi_1'(y) = x^2 + y^2$,

$$\varphi_1(y) = \Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\, x^2 + y^2\ \forall x, y. \tag{8}$$

Offenbar kann (8) nur gelten, falls die rechte Seite unabhängig von x ist, d.h. $\alpha = 2$ (für $\alpha \neq 2$ existiert keine Stammfunktion von f!) $\overset{(8)}{\Longrightarrow}\ \varphi_1(y) = \frac{1}{3}y^3 + c_1$ (c_1 ist Konstante). *Analog:* $F_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}F_2(x, y) + \varphi_2'(x) = f_1(x, y) \Longrightarrow \varphi_2'(x) = (\alpha - 2)xy \overset{\alpha=2}{=} 0 \Longrightarrow \varphi_2(x) = c_2$ (c_2 ist Konstante) $\Longrightarrow F(x, y) = F_1(x, y)\varphi_1(y) = F_2(x, y) + \varphi_2(x) = x^2y + \frac{1}{3}y^3 + c, c \in \mathbb{R}$ beliebig. Diese sind alle Stammfunktionen von f.

Bemerkung 12. – *Mit obiger Strategie wird Bestimmung einer Stammfunktion auf $n = 1$ zurückgeführt.*

– *Nicht alle Funktionen besitzen Stammfunktion.*

Ausblick: In *Kapitel 27* formulieren wir notwendige Bedingung in *Satz 27.18* (sogenannte *Integrabilitätsbedingung*) für Existenz einer Stammfunktion (die in gewissen Mengen D auch hinreichend ist):

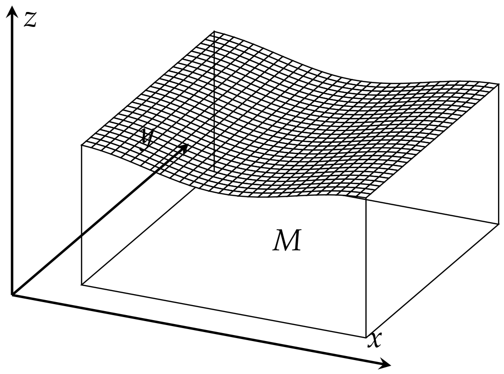
$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) \ \forall i, j, x \in D.$$

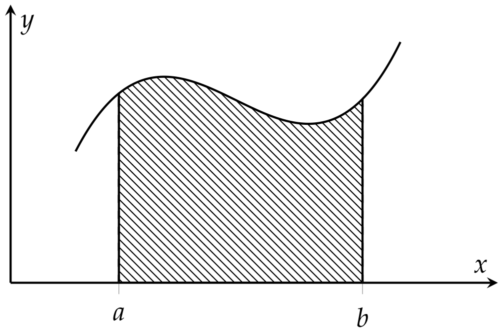
Teil II
Integration

Integration kann betrachtet werden als:

- verallgemeinerte Summation, d.h. $\int_M f \, \mathrm{d}x$ ist Grenzwert von Summen.
- lineare Abbildung über Menge der Funktionen, d.h. $\int : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ linear, da

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f \, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g \, \mathrm{d}x.$$





Als Grundlage benötigt man "Volumen" (Maß) für allgemeine Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, die komponentenweise auf $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}^m$ erweitert werden können. (Benutze $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$ bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.) *vgl. Lawrence C. Evans/Ronald F. Gariepy: Measure Theory and Fine Properties of Functions*

21 Messbare Mengen und Messbare Funktionen

Wir führen zunächst das *Lebesgue-Maß* ein und behandeln dann messbare Mengen und messbare Funktionen.

21.1 Lebesgue-Maß

Setze $\mathcal{Q} := \big\{(I_1 \times ... \times I_n) \subset \mathbb{R}^n \mid I_j \subset \mathbb{R} \text{ ist beschränktes Intervall}\big\}$, $\emptyset$ ist als beschränktes Intervall zugelassen. Elemente $Q \in \mathcal{Q}$ heißen *Quader*. Sei $|I_j|$ die Länge des Intervalls $I_j \subset \mathbb{R}$ (wobei $|\emptyset| = 0$), dann heißt

$$v(Q) := (|I_1| \cdot ... \cdot |I_n|) \text{ für } Q = (I_1 \times ... \times I_n) \in \mathcal{Q} \tag{1}$$

Volumen von $Q \in \mathcal{Q}$. *Beachte:* $v(Q) = 0$ für dünne Quader, d.h. falls ein $|I_j| = 0$. Insbesondere $v(\emptyset) = 0$. Wir möchten für beliebige Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ ein "Volumenmaß" definieren, das mit dem Volumen für Quader kompatibel ist. Wir betrachten dafür eine *Mengenfunktion* (vgl. *Maß und Integrationstheorie*) $|\cdot| : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit

$$|M| := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \mid M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \in \mathcal{Q} \right\} \text{ für alle } M \subset \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

die man *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$ nennt. $|M|$ heißt Lebesgue-Maß von M, oft Schreibt man $\mathcal{L}^n(M)$. Hinweis: Das Lebesgue-Maß wird in der Literatur vielfach nur für messbare Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert und die Erweiterung auf alle $M \subset \mathbb{R}^n$ wie in (2) wird dann als äußeres Lebesgue-maß bezeichnet.

Lemma 1. *Man kann sich in* (2) *auf offene Quader* $Q_j \in \mathcal{Q}$ *beschränken.*

Beweis. Fixiere $\epsilon > 0$, sei $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j, Q_j \in \mathcal{Q}$ und $\alpha := \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) = |M| + \epsilon$. Wähle offene $\tilde{Q}_j \in \mathcal{Q}$ mit $Q_j \subset \tilde{Q}, v(\tilde{Q}_j) < v(Q_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$. Folglich $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{Q}_j$ und $|M| \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(\tilde{Q}_j) < \alpha + \epsilon < |M| + 2\epsilon$. Wegen $\epsilon > 0$ folgt die Behauptung. ■

Satz 2. *Es gilt*

$$M_1 \subset M_2 \implies |M_1| \leq |M_2| \tag{3}$$

und die Abbildung $M \mapsto |M|$ *ist* σ-subadditiv*, d.h.*

$$\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k|, \text{ für } M_k \subset \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \tag{4}$$

Beweis. (3) folgt direkt aus (2). Für (4) fixiere $\epsilon > 0$. Dann $\exists Q_{kj} \in \mathcal{Q} : M_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_{kj}, \sum_{j=1}^{\infty} v(Q_{kj}) < |M_k| + \frac{\epsilon}{2^k}$. Wegen $\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \subset \bigcup_{k,j=1}^{\infty} Q_{kj}$ folgt $|\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k| \leq \sum_{j,k=1}^{\infty} v(Q_{kj}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |M_k| + \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ folgt die Behauptung. ■

$N \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge* falls $|N| = 0$. Offenbar gilt:

$$\tilde{N} \subset N, |N| = 0 \implies |\tilde{N}| = 0. \tag{5}$$

$$|N_k| = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \overset{(4)}{\implies} \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \right| = 0. \tag{6}$$

Nach (3), (4) gilt:

$$M \subset \mathbb{R}^n, |N| = 0 \implies |M| = |M \backslash N|. \tag{7}$$

Denn: $|M\backslash N| \overset{(3)}{\leq} |M| \overset{(4)}{\leq} \underbrace{|M \cap N|}_{=0} + |M\backslash N| = |M\backslash N| \implies (7)$.

Beispiel 3. (a) $|\emptyset| = 0$,

(b) $|\{x\}| = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $|\{x \in P \mid P \text{ ist abzählbar}\}| = 0$ (Vereinigung von Mengen mit einem Element), folglich $\mathcal{L}^1(\mathbb{Q}) = 0, \mathcal{L}^1(\mathbb{N}) = 0$ (d.h. wir betrachten $\mathbb{Q}, \mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^1 => n = 1$),

(c) $|M| = 0$ falls $M \subsetneqq \mathbb{R}^n$ echter affiner Unterraum ist,

(d) $|\partial Q| = 0$ für $Q \in \mathcal{Q}$,

(e) "schöne" stetige/differenzierbare Kurven in $\mathbb{R}^2$ und "schöne" stetige/differenzierbare Kurven und Flächen in $\mathbb{R}^3$ sind Nullmengen.

Folgerung 4. *Es ist $v(Q) = |Q|$ für alle $Q \in \mathcal{Q}$. Im folgenden schreiben wir stets $|Q|$ statt $v(Q)$.*

Beweis. Sei $Q \in \mathcal{Q}$. Da offenbar $v(Q) = v(\operatorname{Cl} Q)$ und $|Q| = |\operatorname{Cl} Q|$, sei o.B.d.A. Q abgeschlossen. Für jedes $\epsilon > 0$ existieren nach *Lemma 1* offene Quader $Q_j \in \mathcal{Q}$ mit $Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} v(Q_j) \leq |Q| + \epsilon$. Da Q kompakt ist, wird es bereits von endlich vielen Q_j überdeckt, d.h. o.B.d.A. $Q \subset \bigcup_{j=1}^{k} Q_j$ Mittels einer geeigneter Zerlegung der Q_j folgert man aus (1), dass $v(Q) \leq \sum_{j=1}^{k} v(Q_j)$. Somit ist

$$|Q| \overset{(2)}{\leq} v(Q) \leq |Q| + \epsilon.$$

Behauptung folgt, da $\epsilon > 0$. ∎

Eine Eigenschaft gilt *fast überall* (f.ü.) auf $M \subset \mathbb{R}^n$, falls eine Nullmenge existiert so, dass die Eigenschaft für alle $x \in M \backslash N$ gilt. Man sagt dann auch, dass die Eigenschaft für fast alle (f.a.) $x \in M$ gilt.

Beispiel 5. Für die *Dirichlet-Funktion* mit

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in Q, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

ist $f = 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}$.

21.2 Messbare Mengen

Frage: Gilt für paarweise disjunkte Mengen M_k in (4) die Gleichheit? Obwohl dies wünschenswert wäre, gibt es "sehr exotische" Mengen, für die dies nicht gilt (vgl. Bemerkung zu Auswahlaxiom). Deshalb betrachten wir "gutartige" Mengen. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *messbar*, falls

$$|\tilde{M}| = |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \backslash M| \ \forall \tilde{M} \subset \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Man betrachte, dass nach (4) stets

$$|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \backslash M| \ \forall \tilde{M}, M \subset \mathbb{R}^n.$$

Beim Nachweis der Messbarkeit muss man nur "$\geq$" prüfen.

Satz 6. (a) *$\emptyset, \mathbb{R}^n$ sind messbar,*
(b) *$M \subset \mathbb{R}^n$ ist messbar $\implies$ $M^c = \mathbb{R}^n \backslash M$ ist messbar,*
(c) *$\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sind messbar $\implies$ $\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$ sind messbar.*

Eine Menge $\mathcal{F}$ von Teilmengen $M \subset X$ (hier $X = \mathbb{R}^n$) mit Eigenschaften (a)-(c) heißt *σ-Algebra*. Wegen $M_1 \backslash M_2 = M_1 \cap M_2^c$ folgt sofort M_1, M_2 sind messbar $\implies$ $M_1 \backslash M_2$ ist messbar.

Beweis. (zu *Satz 6*)

Zu (a): Mit $|\emptyset| = 0$ folgt dies direkt aus (7).

Zu (b): $\tilde{M} \cap M = \tilde{M} \backslash M^c$ und $\tilde{M} \backslash M = \tilde{M} \cap M^c$ in (8) liefert die Behauptung.

Zu (c): Es gilt bereits

$$|\tilde{M}| \leq |\tilde{M} \cap M| + |\tilde{M} \backslash M| \ \forall \tilde{M}, M \subset \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

d.h. man muss nur "$\geq$" zeigen: Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Für beliebiges $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ hat man $(\tilde{M} \cap M_1) \cup ((\tilde{M} \backslash M_1) \cap M_2) = \tilde{M} \cap (M_1 \cup M_2)$, $(\tilde{M} \backslash M_1) \backslash M_2 = \tilde{M} \backslash (M_1 \cup M_2) \implies |\tilde{M}| = |\tilde{M} \cap M_1| + |\tilde{M} \backslash M_1| = |\tilde{M} \cap M_1| + |(\tilde{M} \backslash M_1) \cap M_2| + |(\tilde{M} \backslash M_1) \backslash M_2| \overset{(4)}{\geq} |\tilde{M} \cap (M_1 \cup M_2)| + |\tilde{M} \backslash (M_1 \cup M_2)|$. Somit ist $M_1 \cup M_2$ messbar. Wegen $(M_1 \cap M_2)^c = M_1^c \cup M_2^c$ ist $M_1 \cap M_2$ messbar. Für endlich viele messbare Mengen $M_1, ..., M_k$ folgt die Messbarkeit von $\bigcup_{j=1}^k M_j$ und $\bigcap_{j=1}^k M_j$ durch Induktion. Seien nun abzählbar viele $M_1, M_2, ... \subset \mathbb{R}^n$ messbar, paarweise disjunkt, Dann sind auch alle $A_k := \bigcup_{j=1}^k M_j$ messbar und für beliebiges $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ erhält man schrittweise

$$\begin{aligned} |\tilde{M} \cap A_k| &= |(\tilde{M} \cap A_k) \cap A_{k-1}| + |(\tilde{M} \cap A_k) \backslash A_{k-1}| \\ &= |\tilde{M} \cap A_{k-1}| + |\tilde{M} \cap M_k| \\ &\vdots \\ &= |\tilde{M} \cap A_1| + \sum_{j=2}^k |\tilde{M} \cap M_j| \\ &= \sum_{j=1}^k |\tilde{M} \cap M_j|. \end{aligned} \tag{10}$$

Mit $A := \bigcup_{j=1}^\infty M_j$ folgt $|\tilde{M}| = |\tilde{M} \cap A_k| + |\tilde{M} \setminus A_k| \geq \sum_{j=1}^k |\tilde{M} \cap M_j| + |\tilde{M} \backslash A| \ \forall k \in \mathbb{N} \overset{k \to \infty}{\implies} |\tilde{M}| \geq \sum_{j=1}^\infty |\tilde{M} \cap M_j| + |\tilde{M} \backslash A| \overset{(4)}{\geq} |\tilde{M} \cap A| + |\tilde{M} \backslash A| \implies A$ ist messbar. Falls M_j nicht paarweise disjunkt sind, argumentieren wir mit $M_j' := A_j \backslash A_{j-1}$ und benutzen $\bigcup_{k=1}^\infty M_k = \bigcup_{k=1}^\infty M_k'$. Die Messbarkeit von $\bigcap_{k=1}^\infty M_k$ folgt $(\bigcap_{k=1}^\infty M_k)^c = \bigcup_{k=1}^\infty M_k^c$.

■

Satz 7. *Seien $\{M_j\}_{j \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ messbar.*

(a) *Das Maß $|\cdot|$ ist σ-additiv, d.h. für paarweise disjunkte M_j gilt*

$$\left| \bigcup_{j=1}^\infty M_j \right| = \sum_{j=1}^\infty |M_j|,$$

(b) *Falls $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} |M_k| = \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k \right|,$$

(c) *Falls $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ und $|M_1| < \infty$, dann*

$$\lim_{k\to\infty} |M_k| = \left| \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k \right|.$$

Beweis. Zu (a): Aus (10) mit $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ erhält man $\sum_{k=1}^{m} |M_k| = |\bigcup_{k=1}^{m} M_k| \overset{(3)}{\leq} |\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k| \overset{(4)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} |M_k|$. Grenzübergang $m \to \infty$ liefert die Behauptung.

Zu (b): Nach (a) gilt $|M_k| = |M_1| + \sum_{j=1}^{k} |M_j \backslash M_{j-1}|$ und folglich ist $\lim_{k\to\infty} |M_k| = |M_1| + \sum_{j=1}^{\infty} |M_j \backslash M_{j-1}| \overset{(a)}{=} |\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k|$.

Zu (c): Sei $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Wegen $|M_1 \backslash M_k| = |M_1| - |M_k|$. Nach (a) hat man: $|M_1| \overset{(4)}{\leq} |A| + |M_1 \backslash A| = |A| + \left| \bigcup_{j=1}^{\infty} M_1 \backslash M_k \right| \overset{(b)}{=} |A| + \lim_{k\to\infty} |M_1 \backslash M_k| = |A| + |M_1| - \lim_{k\to\infty} |M_k| \leq \lim_{k\to\infty} |M_k| + |M_1| - \lim_{k\to\infty} |M_k| = |M_1|$. Subtraktion von $|M_1|$ liefert die Behauptung.

∎

Satz 8. *Es gilt:*

(a) *Alle Quader $Q \in \mathcal{Q}$ sind messbar.*
(b) *Offene und abgeschlossene Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ sind messbar.*
(c) *Alle Nullmengen $N \subset \mathbb{R}^n$ sind messbar.*
(d) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $M_0 \in \mathbb{R}^n$ unterscheidet sich von M nur um eine Nullmenge, d.h. $|(M \backslash M_0) \cup (M_0 \backslash M)| = 0$, dann ist M_0 messbar.*

Beweis. Zu (a): Sei $Q \in \mathcal{Q}$ Quader. Für $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n, \epsilon > 0$ wählen wir Q_j mit $\tilde{M} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq |\tilde{M}| + \epsilon$. Aus (1) folgert man $|Q_j| = |Q_j \cap Q| + |Q_j \backslash Q|$, da man $Q_j \backslash Q$ in endlich viele disjunkte Quader zerlegen kann $\implies |\tilde{M} \cap Q| + |\tilde{M} \backslash Q| \overset{(4)}{\leq} \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j \cap Q| + \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j \backslash Q| = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leq |\tilde{M}| + \epsilon$. Da ϵ beliebig ist, gilt $|\tilde{M}| \geq |\tilde{M} \cap Q| + |\tilde{M} \backslash Q|$ und (9) liefert die Behauptung.

Zu (b): Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachte die Folge $\{x_k\}_{k=-1}^{\infty}$ aller rationalen Punkte in M und $W_k \subset M$ sei jeweils größter offener Würfel mit Mittelpunkt x_k und Kantenlänge kleiner als eins. Dann ist $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$, denn für jedes $x \in M$ ist $B_\epsilon(x) \subset M$ für ein $\epsilon > 0$ und somit ist $x \in W_k$ für ein x_k nahe genug bei x. Folglich ist M messbar nach *Satz 6*. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist das Komplement $\mathbb{R}^n \backslash M$ offen und somit messbar. Damit ist $M = \mathbb{R}^n \backslash (\mathbb{R}^n \backslash M)$ messbar.

Zu (c): Für eine Nullmenge N und eine Menge $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ ist $|\tilde{M}| \overset{(4)}{\leq} |\tilde{M} \cap N| + |\tilde{M} \backslash N| \overset{(3)}{\leq} |N| + |\tilde{M}| \overset{(7)}{=} |\tilde{M}|$.

Zu (d): Mit den Nullmengen $N_1 := M \backslash M_0, N_2 = M_0 \backslash M$ gilt $M_0 = (M \backslash N_1) \cup N_2$. Da $M \backslash N_1$ messbar ist, erhält man für beliebige $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$: $|\tilde{M} \cap M_0| + |\tilde{M} \backslash M_0| = |\tilde{M} \cap \big((M \backslash N_1) \cup N_2\big)| + |\tilde{M} \backslash \big((M \backslash N_1) \cup N_2\big)| \overset{(3),(4)}{\leq} |M \cap (M \backslash N_1)| + |\tilde{M} \cap N_2| + |\tilde{M} \backslash (M \backslash N_1)| = |\tilde{M}|$. Mit (a) folgt, dass M_0 messbar ist.

■

21.3 Messbare Funktionen

Wir führen nun die für die Integrationstheorie grundlegende Klasse von Funktionen ein. Dabei erlauben wir $\pm\infty$ als Funktionswerte und benutzen die Bezeichnung:

- $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, \infty]$. Sowie für $a \in \mathbb{R}$: $(a, \infty] := (a, \infty) \cup \{\infty\}$, definiere analog $[a, \infty], [-\infty, a), [-\infty, a]$ (vgl. *Kapitel 5*).
- Für gegebenes $\epsilon > 0$ definieren wir offene ϵ-Kugeln um $\pm\infty$ durch $B_\epsilon(\infty) = \left(\frac{1}{\epsilon}, \infty\right]$ bzw. $B_\epsilon(-\infty) = \left[-\infty, -\frac{1}{\epsilon}\right)$.
- $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ heißt offen, falls für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ existiert so, dass $B_\epsilon(x) \subset U$. Damit sind insbesondere die offene Mengen aus $\mathbb{R}$ auch offen in $\overline{\mathbb{R}}$ und die offene Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ bilden eine Topologie (vgl. *Kapitel 8*).
- Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *messbar* falls D messbar ist und $f^{-1}(U)$ für jede offene Menge U messbar ist.

Folgerung 9. *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit D messbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist messbar,*
(b) *$f^{-1}([-\infty, a))$ ist messbar für alle $a \in \mathbb{Q}$,*
(c) *$f^{-1}([-\infty, a])$ ist messbar für alle $a \in \mathbb{Q}$.*

Beweis. Aus den Eigenschaften messbarer Mengen folgt mit $f^{-1}([-\infty, a]) = \bigcup_{k=1}^\infty f^{-1}([-\infty, a + \frac{1}{k})), f^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{k=1}^\infty f^{-1}([-\infty, a - \frac{1}{k}])$ die Äquivalenz von (b) und (c). Offenbar (a) $\implies$ (b) $\iff$ (c). Gelte nun (b) (damit auch (c)). Für $a, b \in \mathbb{Q}$ ist dann $f^{-1}\big((a, b)\big) = f^{-1}([-\infty, b)) \cap f^{-1}((a, \infty]) = f^{-1}([-\infty, b)) \cap f^{-1}([-\infty, a])^c$ messbar und offensichtlich ist auch $f^{-1}\big((a, \infty]\big)$ messbar. Da jede offene Menge $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ die abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $(a, b), [-\infty, a), (a, \infty]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ist, folgt die Messbarkeit von $f^{-1}(U)$, somit gilt (a). ■

Hinweis: Wir werden sehen, dass die Menge aller messbaren Funktion alle Stetige Funktionen erhält, aber auch noch viele andere. Für $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $\chi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in M, \\ 0 \text{ falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash M \end{cases}$$

charakteristische Funktion von M.

Folgerung 10. *$\chi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist messbar g.d.w. $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar ist.*

Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion* (in Literatur oft *Einfache Funktion*) falls es $M_1, ..., M_k \subset \mathbb{R}^n$ und $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$ gibt mit $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$h(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{M_j}(x) \tag{11}$$

Die Menge der Treppenfunktionen $T(\mathbb{R}^n)$ ist mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation für Funktionen ein Vektorraum. Man beachte, dass die Darstellung in (11), d.h. die Wahl von M_j und c_j nicht eindeutig ist. Insbesondere kann man M_j stets paarweise disjunkt wählen.

Folgerung 11. *Die Treppenfunktion $h \in T(\mathbb{R}^n)$ ist messbar g.d.w. es wenigstens eine Darstellung (11) gibt, bei der alle M_j messbar sind.*

Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die *Nullfortsetzung*

$$\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \text{ durch } \overline{f}(x) := \begin{cases} f(x) \text{ falls } x \in D, \\ 0 \text{ falls } x \in \mathbb{R}^n \backslash D. \end{cases} \tag{12}$$

Satz 12. *Es gilt:*

(a) *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, dann ist auch die Nullfortsetzung $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar.*

(b) *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $D' \subset D$ messbar. Dann ist f auf D' messbar, d.h. $f_{|D'}$ ist messbar.*

(c) *Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, sei f messbar und $f = g$ f.ü. auf D. Dann ist g messbar.*

Beispiel 13. *Dirichlet-Funktion* auf $\mathbb{R}$ ist messbar. Funktion $h = 0$ ist messbare Treppenfunktion auf $\mathbb{R}$ und stimmt mit der *Dirichlet-Funktion* f.ü. überein.

Beweis. (von *Satz 12*)

Zu (a): Für offenes $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ ist $\overline{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ falls $O \notin U$ und anderenfalls $\overline{f}^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cup (\mathbb{R}^n \backslash D) \implies \overline{f}^{-1}(U)$ ist messbar.

Zu (b): Für offenes $U \subset \overline{R}$ ist $(f_{|D'})^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap D'$ messbar.

Zu (c): Für $U \subset \overline{R}$ offen ist $f^{-1}(U)$ messbar und $g^{-1}(U)$ unterscheidet sich von $f{-}1(U)$ nur um eine Nullmenge. Somit ist $g^{-1}(U)$ nach *Satz 8* messbar.

■

- Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha \in \overline{R}$ schreibt man verkürzt $\{f > \alpha\} := \{x \in D \mid f(x) \geq \alpha\}$. Definiere analog $\{f \geq \alpha\}, \{f < \alpha\}, \{f \leq \alpha\}$.
- Die Funktionen $f^+ := f \cdot \chi_{\{f>0\}}$, $f^- := -f \cdot \chi_{\{f<0\}}$ heißen *positiver Teil* und *negativer Teil* von f und es gilt $f = f^+ - f^-$.
- Definiere für $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ neue Funktion $f := \max(f_1, f_2) : D \to \overline{\mathbb{R}}$ durch $f(x) := \max\{f_1(x), f_2(x)\}\ \forall x \in D$. Analog $\min(f_1, f_2)$, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\limsup\limits_{k\to\infty} f_k$, $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k$.

Bei punktweiser Konvergenz $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ für fast alle $x \in M$ schreibt man auch $f_k \longrightarrow f$ f.ü. auf D.

Satz 14 (zusammengesetzte messbare Funktion). *Für $D \subset \mathbb{R}^n$ messbar gilt:*

(a) $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sind messbar* $\Longrightarrow$ $f \pm g, f \cdot g$ *sind messbar.*
(b) $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *sind messbar,* $c \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $f^\pm$, $|f|$, $c \cdot f$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ *sind messbar.*
(c) $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist messbar* $\forall k \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}, \inf\limits_{k\in\mathbb{N}}, \limsup\limits_{k\to\infty}, \liminf\limits_{k\to\infty}$ *sind messbar.*

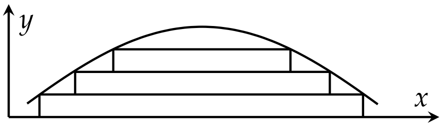
Hinweis: In (a) betrachten wir nur Funktionen mit werten in $\mathbb{R}$, sonst ist zusammengesetzte Funktion eventuell nicht erklärt.

Beweis. $\forall a \in \mathbb{Q}$ gilt $(f+g)^{-1}\big([-\infty, a)\big) = \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \\ \alpha + \beta \leq a}} f^{-1}\big([-\infty, \alpha)\big) \cap g^{-1}\big([-\infty, \beta)\big)$ ist messbar. Für $c > 0$ ist $(cf)^{-1}\big([-\infty, a)\big) = f^{-1}\big([-\infty, \frac{a}{c}]\big)$ messbar als Menge, $(-cf)^{-1}\big([-\infty, a)\big) = f^{-1}\big([-\frac{a}{c}, \infty]\big)$ ist messbar $\Longrightarrow$ cf ist messbar ($c = 0$ ist trivial) $\Longrightarrow$ $-f, f - g$ sind messbar. Wegen $(f^2)^{-1}\big([-\infty, a)\big) = f^{-1}\big([-\infty, \sqrt{a})\big) \backslash f^{-1}\big([-\infty, -\sqrt{a})\big)$ $\forall a \geq 0$ ist f^2 messbar $\Longrightarrow$ $f \cdot g = \frac{1}{2}\big((f+g)^2 - f^2 - g^2\big)$ ist messbar. Falls $g \neq 0$ auf D, ist für $a > 0$, dann: $\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}\big([-\infty, -a)\big) = g^{-1}\left(\left(-\frac{1}{a}, 0\right)\right)$, $\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}\big([a, \infty)\big) = g^{-1}\left(\left(0, \frac{1}{a}\right]\right)$ und mit $\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}\big([-\infty, 0)\big) = g^{-1}\left((-\infty, 0]\right)$ folgt die Messbarkeit von $f \cdot \frac{1}{g} = \frac{f}{g}$. Aus Messbarkeit von $\{f > 0\}, \{f < 0\}$ folgt Messbarkeit von $f^\pm = f \cdot \chi_{\{f \lessgtr 0\}}, |f| = f^+ + f^-, \max(f, g) = (f-g)^+ + g, \min(f, g) = -(f-g)^{-1} + g$ liefert (a),(b).

Zu (c): Verwende $\Big(\inf_{k\in\mathbb{N}}\Big)^{-1}\big([-\infty, a)\big) = \bigcup_{k=1}^\infty f_k^{-1}\big([-\infty, a)\big)$, $\Big(\sup_{k\in\mathbb{N}}\Big)^{-1}\big([-\infty, a)\big) = \bigcap_{k=1}^\infty f_k^{-1}$ $\big([-\infty, a)\big)$ $\Longrightarrow$ $\inf f_k, \sup f_k$ sind messbar. Folglich sind $\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_{j\geq 1} \inf\limits_{k\geq j} f_k$, $\limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_{j\geq 1} \sup_{k\geq j} f_k$ messbar.

∎

Satz 15 (Approximation messbarer Funktionen). *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}, D$ messbar. Dann: f ist messbar $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Folge $\{h_k\}$ von Treppenfunktionen mit $h_k \longrightarrow f$ f.ü. auf D.*



Beweis. "$\Longrightarrow$": f ist messbar, somit ist auch $f^{\pm}$ messbar. Setze mit $h_0^{\pm} := 0$ schrittweise $M_k^{\pm} := \{x \in D \mid f^{\pm}(x) \geq \frac{1}{k} + h_{k-1}^{\pm}(x)\}, h_k^{\pm} := \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\chi_{M_j}$ für $k \geq 1$. Da $h_{k-1}^{\pm}$ messbar ist, ist $M_k^{\pm} = \left(f^{\pm} - \frac{1}{k} - h_{k-1}^{\pm}\right)\left([0,\infty)\right)$ messbar, $h_k^{\pm}$ ist Treppenfunktion und $f^{\pm} \geq h_k^{\pm}$ auf D. Falls $f^{\pm}(x) = \infty$, dann $x \in M_k^{\pm}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und $h_k^{\pm}(x) \longrightarrow f^{\pm}(x)$. Falls $0 < f^{\pm}(x), \infty$, dann für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ ist $x \notin M_k^{\pm}$. Somit $0 \leq f^{\pm}(x) = h_{k-1}^{\pm}(x) < \frac{1}{k} \implies h_k^{\pm}(x) \longrightarrow f^{\pm}(x) \implies h_k^{+}(x) - h_k^{-}(x) \longrightarrow f^{+}(x) - f^{-}(x) = f(x)$.

"$\Longleftarrow$": Sei $\tilde{f}(x) := \limsup_{k\to\infty} h_k(x)$ $\forall x \in D \implies f(x) = \tilde{f}(x)$ f.ü. auf D, *Satz 14* liefert: h_k ist messbar $\implies \tilde{f}$ ist messbar. Da $f = \tilde{f}$ f.ü. folgt, dass f messbar ist,

■

Aus dem Beweis folgt:

Folgerung 16. *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f \geq 0$. Dann existiert Folge $\{h_k\}$ von Treppenfunktionen mit $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq ... \leq f$ auf D und $h_k \longrightarrow f$ f.ü. auf D.*

Satz 17. *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und D messbar, $N \subset \mathbb{R}^n$ mit $|N| = 0$ und f stetig auf $D \backslash N \implies f$ ist messbar auf D.*

Beweis. Offenbar gilt: $\tilde{D} \backslash D \backslash N$ ist messbar, da f stetig auf $\tilde{D}$ ist, ist $f^{-1}(U) \backslash N$ offen in $\tilde{D}$ für $U \subset \mathbb{R}$ offen, d.h. $f^{-1}(U) \backslash N = M \cap \tilde{D}$ für ein $m \subset \mathbb{R}^n$ offen $\implies f^{-1}(U) \backslash N$ ist messbar $\overset{\text{Satz 8}}{\implies} f^{-1}(U)$ ist messbar $\implies f$ ist messbar. ■

Beispiel 18. Folgende Funktionen sind messbar:

- Stetige Funktionen auf offenen und abgeschlossenen Mengen (wähle $N = \emptyset$ in *Satz 17*). Insbesondere konstante Funktionen sind messbar.
- Funktionen auf offenen und abgeschlossenen Mengen, die f.ü. mit einer stetigen Funktion übereinstimmen.
- $\tan, \cot$ auf $\mathbb{R}$ (setze z.B. $\tan(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \cot k\pi = 0$ $\forall k$).
- $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ auf $[-1, 1]$ (setze beliebigen Wert in $x = 0$).
- $\chi_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist für $|\partial M| = 0$ messbar auf $\mathbb{R}$ (da χ auf $\operatorname{int} M, \operatorname{ext} M$ stetig ist).

Hinweis: Dirichlet-Funktion ist stetig auf $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ und somit nach *Satz 17* messbar, man beachte aber, dass dies nicht bedeutet, dass die *Dirichlet-Funktion* auf $\mathbb{R}$ f.ü. stetig ist.

Lemma 19 (Egorov). *Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbar $\forall k \in \mathbb{N}$, sei $A \subset D$ messbar mit $|A| < \infty$ und gelte $f_k(x) \longrightarrow f(x)$ für f.a. $x \in A$. Dann existiert $\forall \epsilon > 0$ messbare Menge $B \subset A$ mit $|A \backslash B| < \epsilon$ und $f_k \longrightarrow f$ gleichmäßig auf B.*

Beweis. Offenbar ist f messbar auf A und Mengen $M_{ml} := \bigcap_{j=l}^{\infty} \left\{ x \in A \;\middle|\; |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{2^m} \right\}$ für $m, l \in \mathbb{N}$ sind messbar mit $M_{m1} \supset M_{m2} \supset ... \;\forall m \in \mathbb{N}$. Wegen $f_k(x) \longrightarrow f(x)\; \forall x \in A \backslash N$ für eine Nullmenge N folgt $\bigcap_{l \in \mathbb{N}} M_{ml} \subset N$ und $\left|\bigcap_{l \in \mathbb{N}} M_{ml}\right| = 0 \;\forall m \in \mathbb{N} \overset{\text{Satz 7.(c)}}{\Longrightarrow} \forall m \in \mathbb{N}\; \exists l_m \in N$ mit $|M_{ml_m}| < \frac{\epsilon}{2^n}$. Mit $M := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} M_{ml_m}$ und $B := A \backslash M$ folgt $|A \backslash B| = |M| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |M_{ml_m}| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon$. Weiterhin hat man $\forall n \in \mathbb{N}$: $|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}\; \forall x \in B, k \geq l_m$ liefert die gleichmäßige Konvergenz auf B. ■

Beispiel 20. Betrachte $f_n(x) = x^n$ auf $[0, 1]$. Man hat $f_n(x) \longrightarrow 0$ f.ü. auf $[0, 1]$, $f_n \longrightarrow f$ gleichmäßig auf $[0, \alpha]$ mit $\alpha \in (0, 1)$, aber nicht gleichmäßig auf $[0, 1]$.

22 Integral

22.1 Integral für Treppenfunktionen

Sei $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ messbare Treppenfunktion mit $h = \sum_{j=1}^k c_j \chi_{M_j}$ ($c_j \in \mathbb{R}, M_j \subset \mathbb{R}^n$ sind messbar) und sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann heißt h *integrierbar* auf M falls $|M_j \cap M| < \infty \; \forall j : c_j \neq 0$ und

$$\int_M h \, \mathrm{d}x = \int_M h(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{j=1}^k c_j |M_j \cap M| \tag{1}$$

heißt *elementares Integral* von h auf M. Die Menge der auf M integrierbaren Treppenfunktionen bezeichnen wir mit T^1.

$$\int_M : T^1(M) \to \mathbb{R} \text{ mit } h \mapsto \int_M h \, \mathrm{d}x$$

ist *Integralabbildung.*

Folgerung 1. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar. Dann gilt:*

(a) (Linearität) *Integralabbildung $\int_M : T^1(M) \to \mathbb{R}$ ist linear.*
(b) (Monotonie) *Integralabbildung ist monoton auf $T^1(M)$, d.h.*

$$h_1 \leq h_2 \implies \int_M h_1 \, \mathrm{d}x \leq \int_M h_2 \, \mathrm{d}x$$

(c) (Beschränkheit)

$$\left| \int_M h \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_M |h| \, \mathrm{d}x \; \forall h \in T^1(M)$$

(d) *Für $h \in T^1(M)$ gilt:*

$$\int_M |h| \, \mathrm{d}x = 0 \iff h = 0 \text{ f.ü. auf } M.$$

Hinweis: $\int_M |h| \, \mathrm{d}x$ ist Halbnorm auf Vektorraum $T^1(M)$. ($\int_M |h| \, \mathrm{d}x = 0$ nicht nur für Nullfunktion.)

22.2 Erweiterung auf messbare Funktionen

Sinnvoll:

- Linearität und Monotonie erhalten
- gewisse Stetigkeit der Integralabbildung

$$h_k \longrightarrow f \text{ im geeigneter Weise } \implies \int_M h_k \, \mathrm{d}x \longrightarrow \int_M f \, \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Nach *Satz 21.15* sollte man in (2) Folgen von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ mit $h_k(x) \longrightarrow f(x)$ f.ü. auf M betrachten. Aber es gibt zu viele konvergente Folgen für konsistenten Integralbegriff.

Beispiel 2. Betrachte $f = 0$ auf $\mathbb{R}$, wähle Folge $\{\alpha_k\} \subset \mathbb{R}$ und dazu Treppenfunktion

$$h_k(x) = \begin{cases} k \cdot \alpha_k \text{ auf } \left(0, \frac{1}{k}\right), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Offenbar hat man $h_k \longrightarrow 0$ f.ü. auf $\mathbb{R}$ und $\int_{\mathbb{R}} h_k \,\mathrm{d}x = \alpha_k$.

$\Longrightarrow$ je nach Wahl von $\{\alpha_k\}$ haben wir ganz unterschiedliches Konvergenzverhalten von $\int_{\mathbb{R}} h_k \,\mathrm{d}x$ $\Longrightarrow$ kein eindeutiger Grenzwert in (2) ist möglich $\Longrightarrow$ stärker Konvergenzbegriff in (2) ist nötig. *Motivation:*

- Nur monotone Folgen von Treppenfunktionen *oder*
- Beschränktheit aus *Folgerung 1* erhalten

Wir erhalten jeweils das gleiche Ergebnis (1. Variante ist technisch etwas aufwendiger) Beschränktheit aus *Folgerung 1.(c)* bedeutet insbesondere $\left|\int_M h_k \,\mathrm{d}x - \int_M f \,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_M h_k - f \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_M |h_k - f| \,\mathrm{d}x \;\; \forall k.$ $h_k \longrightarrow f$ g.d.w. $\int_M |h_k - f| \,\mathrm{d}x \longrightarrow 0 \implies$ Integralabbildung ist stetig bzgl. dieser Konvergenz. Wegen $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x \leq \int_M |h_k - f| \,\mathrm{d}x + \int_M |h_l - f| \,\mathrm{d}x \;\; \forall k, l \in \mathbb{N}$ müsste $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x$ klein sein $\forall k, l$ groß.

22.3 Lebesgue-Integral

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, Folge $\{h_k\}$ in $T^1(M)$ heißt *L^1-Cauchy-Folge* (kurz L^1-CF) falls $\forall \epsilon > 0: \;\exists k_0 \in \mathbb{N}: \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x < \epsilon \;\; \forall k, l > k_0$. Messbare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *integrierbar auf Menge* $M \subset D$ falls Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ in $T^1(M)$ existiert mit

$$\{h_k\} \text{ ist } L^1\text{-Cauchy-Folge auf } M \text{ und } h_k \longrightarrow f \text{ f.ü. auf } M. \tag{4}$$

Für integrierbare Funktion f heißt eine solche Folge $\{h_k\}$ zugehörige *L^1-CF auf M*. Wegen

$$\left|\int_M h_k \,\mathrm{d}x - \int_M h_l \,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_M h_k - h_l \,\mathrm{d}x\right| \overset{\text{Folgerung 1}}{\leq} \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x \tag{5}$$

ist $\left\{\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right\}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und somit konvergent. Grenzwert

$$\int_M f \,\mathrm{d}x := \int_M f(x) \,\mathrm{d}x := \lim_{k \to \infty} \int_M h_k \,\mathrm{d}x \tag{6}$$

heißt *(Lebesgue-)Integral* von f auf M. *Beachte:* Integrale unter Grenzwert in (6) sind elementare Integrale gemäß (1). *Sprechweise:* Funktion f ist integrierbar auf M bedeutet stets $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ ist messbar und $M \subset D$ ist messbar. Menge der auf M integrierbaren Funktionen ist

$$L^1(M) := \{f : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist integrierbar auf } M\}.$$

Bemerkung 3. (a) *Integral in (6) kann als vorzeichenbehaftetes Volumen des "Zylinders" im $\mathbb{R}^{n+1}$ unter (bzw. über) dem Graphen von f interpretiert werden.*

(b) *Sei* $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots$ *monotone Folge integrierbarer Treppenfunktionen mit* $h_k \longrightarrow f$ *f.ü. auf* M *und sei Folge* $\left\{\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right\}$ *in* $\mathbb{R}$ *beschränkt. Dann gilt* (6) *und monotone Folge* $\left\{\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right\}$ *konvergiert in* $\mathbb{R}$ *(d.h.* $\{h_k\}$ *ist* L^1*-CF zu* f*).*

(c) $\{h_k\}$ *aus* Beispiel 2 *ist nur dann* L^1*-CF falls* $\alpha_k \longrightarrow 0$.

Frage: Ist Definition des Integrals in (6) unabhängig von Wahl einer konkreten L^1-CF $\{h_k\}$ zu f? JA!

Satz 4 (Eindeutigkeit des Integrals). *Definition des Integrals in* (6) *ist unabhängig von spezieller Wahl einer* L^1*-CF* $\{h_k\}$ *zu* f*.*

Vergleiche Integral $\int_M h \,\mathrm{d}x$ einer Treppenfunktion in (1) mit dem in (6): Offenbar ist konstante Folge $\{h_k\}$ mit $h_k = h \ \forall k$ L^1-CF zu h $\underset{(6)}{\overset{\text{Satz 4}}{\Longrightarrow}}$ Integral $\int_M h \,\mathrm{d}x$ in (6) stimmt mit Elementarintegral aus (1) überein.

Folgerung 5. *Für Treppenfunktionen stimmt das in* (1) *definierte Elementarintegral mit dem in* (6) *definierten Integral überein. Insbesondere ist der von* (1) *eingeführte Begriff "integrierbar" mit dem in* (4) *identisch. Gleichung* (1) *mit Treppenfunktion* χ_M *für* $|M| < \infty$, M *messbar liefert wichtige Identität:*

$$|M| = \int_M 1 \,\mathrm{d}x = \int_M \mathrm{d}x \ \forall M \subset \mathbb{R}^n,$$

d.h. Integral liefert Maß messbarer Mengen.

Beweis. (von *Satz 4*) *Beachte:* Alle Integrale im Beweis sind Elementarintegrale gemäß (1)! Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar und seien $\{h_k\}, \{\tilde{h}_k\}$ zugehörige L^1-CF in $T^1(M)$. $\Longrightarrow \ \forall \epsilon > 0 \ \exists k_0$ mit $\int_M |h_k - \tilde{h}_k| - |h_l - \tilde{h}_l| \,\mathrm{d}x \leq \int_M |h_k - h_l| + |\tilde{h}_k - \tilde{h}_l| \,\mathrm{d}x < \epsilon \ \forall k, l \geq k_0 \implies \{h_k - \tilde{h}_k\}$ ist L^1-CF mit $(h_k - \tilde{h}_k) \longrightarrow 0$ f.ü. auf M. Da $\left\{\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right\}, \left\{\int_M \tilde{h}_k \,\mathrm{d}x\right\}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren, bleibt zu zeigen:

$$\{h_k\} \text{ ist } L^1\text{-CF in } T^1(M) \text{ mit } h_k \longrightarrow 0 \text{ f.ü. auf } M \implies \int_M h_k \,\mathrm{d}x \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{7}$$

Da Konvergenz von $\left\{\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right\}$ bereits bekannt ist, reicht es Grenzwert für TF zu zeigen. Wähle TF derart, dass $\int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2^l} \ \forall k \geq l$. Fixiere $l \in \mathbb{N}$ und setze $M_l := \{x \in M \mid h_l(x) \neq 0\}$, offenbar ist M_l messbar und $|M_l| < \infty$. Sei nun $\epsilon_l := \frac{1}{2^l |M_l|}$ falls $|M_l| > 0$ und $\epsilon_l := 1$ falls $|M_l| = 0$, weiterhin sei $M_{l_k} := \{x \in M_l \mid |h_k(x)| > \epsilon_l\}$. Für $k > l$ folgt: $\left|\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_M |h_k| \,\mathrm{d}x = \int_{M_l} |h_k| \,\mathrm{d}x + \int_{M \setminus M_l} |h_k| \,\mathrm{d}x \leq \int_{M_l \setminus M_{l_k}} |h_k| \,\mathrm{d}x + \int_{M_{l_k}} |h_k| \,\mathrm{d}x + \int_{M \setminus M_l} |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{M \setminus M_l} |h_l| \,\mathrm{d}x}_{=0} \leq \epsilon_l |M_l| + \int_{M_{l_k}} |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x + \int_{M_{l_k}} |h_l| \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2^l} \leq \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^l} + c_l |M_{l_k}| + \frac{1}{2^l}$ mit $c_l := \sup_{x \in M} |h_l(x)|$. Nach *Lemma 21.19* existiert $k_l > l$ mit $|\underbrace{\{x \in M_l \mid |h_k(x)| > \epsilon_l\}}_{=M_{k_l}}| \leq \frac{1}{2^l(c_l+1)} \ \forall k > k_l \implies \left|\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{4}{2^l} \ \forall k > k_l \underset{\text{beliebig}}{\overset{l \in \mathbb{N} \text{ ist}}{\Longrightarrow}}$ $\int_M h_k \,\mathrm{d}x \longrightarrow 0$. ∎

Satz 6 (Rechenregeln). *Seien f, g differenzierbar auf $M \subset \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) (Linearität) *$f \pm g$, cf sind integrierbar auf M mit $\int_M f \pm g \,\mathrm{d}x = \int_M f \,\mathrm{d}x + \int_M g \,\mathrm{d}x$, $\int_M cf \,\mathrm{d}x = c \int_M f \,\mathrm{d}x$.*
(b) *Sei $\tilde{M} \subset M$ messbar. Dann ist $f \cdot \chi_{\tilde{M}}$ integrierbar auf M und f integrierbar auf $\tilde{M}$ mit $\int_M f \cdot \chi_{\tilde{M}} \,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{M}} f \,\mathrm{d}x$.*
(c) *Sei $M = M_1 \cup M_2$ für M_1, M_2 disjunkt, messbar. Dann ist f messbar auf $M_1 \cup M_2$ mit $\int_M f \,\mathrm{d}x = \int_{M_1} f \,\mathrm{d}x + \int_{M_2} f \,\mathrm{d}x$.*
(d) *Sei $f = \tilde{f}$ f.ü. auf M. Dann ist $\tilde{f}$ integrierbar auf M mit $\int_M f \,\mathrm{d}x = \int_M \tilde{f} \,\mathrm{d}x$.*
(e) *Die Nullfortsetzung $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ von f (vgl.* Satz 21.12*) ist auf jeder messbaren Menge $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar mit $\int_{M \cap \tilde{M}} f \,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{M}} \overline{f} \,\mathrm{d}x$.*

Aussage (d) bedeutet, dass Änderung der Funktionswerte von f auf Nullmenge das Integral nicht verändert. *Beachte:* Derartige Änderung beeinflusst auch die Messbarkeit nicht!

Beweis. Seien $\{h_k\}$ und $\{\tilde{h}_k\}$ aus $T^1(\mathbb{R}^n)$ L^1-CF zu f bzw. g.

Zu (a): Es ist $h_k + \tilde{h}_k \longrightarrow f + g$ f.ü. auf M. Wegen $\int_M |(h_k + \tilde{h}_k) - (h_l + \tilde{h}_l)| \,\mathrm{d}x \leq \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x + \int_M |\tilde{h}_k - \tilde{h}_l| \,\mathrm{d}x$ ist $\{h_k + \tilde{h}_k\}$ L^1-CF zu $f + g \implies f + g$ ist integrierbar auf M und Grenzübergang in $\int_M h_k + \tilde{h}_k \,\mathrm{d}x = \int_M h_k \,\mathrm{d}x + \int_M \tilde{h}_k \,\mathrm{d}x$ liefert die Behauptung für $f + g$, analog für cf. Wegen $f - g = f + (-g)$ folgt der Rest.

Zu (b): Offenbar ist $\{\chi_{\tilde{M}} h_k\}$ L^1-CF zu $\chi_{\tilde{M}} f$ auf M und $\{h_k\}$ ist L^1-CF zu f auf $\tilde{M}$. Mit $\int_M h_k \chi_{\tilde{M}} \,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{M}} h_k \,\mathrm{d}x \;\forall k \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

Zu (c): Nach (b) ist f auf M_1, M_2 integrierbar. Wegen $f = \chi_{M_1} f + \chi_{M_2} f$ folgt die Behauptung aus (a) und (b).

Zu (d): Da $\{h_k\}$ auch L^1-CF zu $\tilde{f}$ ist, folgt die Integrierbarkeit mit gleichem Integral.

Zu (e): Es ist $\{\chi_{M \cap \tilde{M}} h_k\}$ L^1-CF zu f auf $M \cap \tilde{M}$ und auch zu $\tilde{f}$ auf $\tilde{M}$. Damit folgt leicht die Behauptung.

■

Satz 7 (Eigenschaften des Integrals). *Es gilt:*

(a) (Integrierbarkeit) *Für $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar gilt: f ist integrierbar auf $M \iff |f|$ ist integrierbar auf M.*
(b) (Beschränktheit) *Sei f integrierbar auf M, dann $\left|\int_M f \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_M |f| \,\mathrm{d}x$.*
(c) (Monotonie) *Seien f, g integrierbar auf M, dann $f \leq g$ f.ü. auf $M \implies \int_M f \,\mathrm{d}x \leq \int_M g \,\mathrm{d}x$.*
(d) *Sei f integrierbar auf M, dann $\int_M |f| \,\mathrm{d}x = 0 \iff f = 0$ f.ü. auf M.*

In Analogie zu Treppenfunktionen ist $\|f\|_1 := \int_M |f| \,\mathrm{d}x$ auf $L^1(M)$ eine Halbnorm, aber keine Norm. $\|f\|_1$ heißt L^1-Halbnorm. *Hinweis:* Lineare Abbildung $A : X \to Y$ durch $\|Ax\|_y \leq c\|x\|_y$ liefert den Begriff "Beschränktheit" in (6).

Beweis. Zu (a): Sei f integrierbar auf M und sei $\{h_k\}$ L^1-CF zu f, dann $\|h_k\| \longrightarrow |f|$ f.ü. auf M. Wegen $\int_M \big||h_k| - |h_l|\big| \,\mathrm{d}x \overset{\text{Folgerung 1.b}}{\leq} \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x$ ist $\{|h_k|\}$ L^1-CF zu $|f| \implies |f|$ ist integrierbar, andere Richtung später.

Zu (b): Für L^1-CF $\{h_k\}$ zu f gilt nach *Satz 1.c* $\left|\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_M |h_k| \,\mathrm{d}x$. Da $\{|h_k|\}$ L^1-CF zu f folgt die Behauptung durch Grenzübergang.

Zu (c): Nach Rechenregel ist $(g-f)$ integrierbar. Wegen $|g-f| = g-f$ f.ü. auf M folgt $0 \leq \left|\int_M (g-f) \,\mathrm{d}x\right| \overset{\text{(b)}}{\leq} \int_M |g-f| \,\mathrm{d}x \overset{\text{Satz 6.d}}{=} \int_M g \,\mathrm{d}x - \int_M f \,\mathrm{d}x \implies$ Behauptung.

Zu (a): Für "$\Longleftarrow$" sei $|f|$ integrierbar, wähle zu $f^\pm$ $(f = f^+ - f^-)$ jeweils monotone Folge von Treppenfunktionen $\{h_k^\pm\}$ gemäß *Folgerung 21.16*, folglich liefert $h_k := h_k^+ - h_k^-$ Folge von Treppenfunktionen $h_k \longrightarrow f$ f.ü. auf M. Wegen $|h_k| \leq |f|$ f.ü. auf M ist $\int_M |h_k| \,\mathrm{d}x \leq \int_M |f| \,\mathrm{d}x \forall k \in \mathbb{N}$. Folglich ist monotone Folge $\int_M |h_k| \,\mathrm{d}x$ in $\mathbb{R}$ beschränkt und damit konvergent. Da $h_k^\pm$ jeweils gleiches Vorzeichen haben wie "$\int^\pm$" und Folgen monoton sind, ist $\big||h_l| - |h_k|\big| = |h_l| - |h_k| = |h_l - h_k|$ $\forall l > k$ und somit auch $\int_M |h_l - h_k| \,\mathrm{d}x = \int_M |h_l| - |h_k| \,\mathrm{d}x = \left|\int_M |h_l| \,\mathrm{d}x - \int_M |h_k| \,\mathrm{d}x\right|$ $\forall l > k$. Als konvergente Folge ist $\left\{\int_M |h_k| \,\mathrm{d}x\right\}$ CF in $\mathbb{R}$ und folglich ist $\{h_k\}$ L^1-CF und sogar L^1-CF zu f. Damit ist f integrierbar.

Zu (d): Für $f = 0$ f.ü. auf M ist offenbar $\int_M |f| \,\mathrm{d}x = 0$. Sei nun $\int_M |f| \,\mathrm{d}x = 0$. Mit $M_k := \{x \in M \mid |f| \geq \frac{1}{k}\}$ ist $\forall k \in \mathbb{N}$ $0 = \int_{M \setminus M_k} |f| \,\mathrm{d}x + \int_{M_k} |f| \,\mathrm{d}x \geq \int_{M \setminus M_k} 0 \,\mathrm{d}x + \int_{M_k} \frac{1}{k} \,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{k}|M_k| \geq 0 \implies |M_k| = 0$ $\forall k$, wegen $\{f \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k \implies |\{f \neq 0\}| \leq \sum_{k=1}^\infty |M_k| = 0 \implies$ Behauptung.

■

Folgerung 8. *Sei f auf M integrierbar*

(a) *Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha_1 \leq f \leq \alpha_2$ f.ü. auf M* $\implies \alpha_1 |M| \leq \int_M f \,\mathrm{d}x \leq \alpha_2 |M|$.

(b) *Es gilt $f \geq 0$ f.ü. auf M* $\implies \int_{M_k} f \,\mathrm{d}x \geq 0$.

(c) *Es gilt $\tilde{M} \subset M$ messbar, $f \geq 0$ f.ü. auf M* $\implies \int_{\tilde{M}} |f| \,\mathrm{d}x \leq \int_M f \,\mathrm{d}x$ *(linkes Integral existiert nach* Satz 6.b*)*

Beweis. Wegen $\int_M \alpha_j \,\mathrm{d}x = \alpha_j |M|$ für $|M|$ endlich folgt (a) direkt aus Monotonie des Integrals. Fälle $|M| = +\infty$ folgen leicht direkt.

Zu (b): Folgt mit $\alpha_1 = 0$ aus (a).
Zu (c): Folgt, da $\chi_{\tilde{M}} f \leq f$ f.ü. auf M aus Monotonie.

■

In Vorüberlegungen zu Integral wurde gewisse Stetigkeit der Integralabbildung angestrebt. Integral bzgl. L^1-Halbnorm ist stetig.

Satz 9. *Sei $f, f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \subset \mathbb{R}^n$ und sei* $\lim_{k\to\infty} \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}x = 0$ $\big(\|f_k - f\|_1 \longrightarrow 0\big)$. *Dann ist* $\lim_{k\to\infty} \int_M f_k \,\mathrm{d}x = \int_M f \,\mathrm{d}x$. *Weiterhin gibt es Teilfolge $\{f_{k'}\}$ mit $f_{k'} \longrightarrow f$ f.ü. auf M.*

Beweis. Aus Beschränktheit nach *Satz 7* folgt $\left|\int_M f_k \,\mathrm{d}x - \int_M f \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}x \xrightarrow{k\to 0} 0 \implies$ erste Konvergenzaussage. Wähle nun TF $\{f_{k_l}\}_l$ mit $\int_M |f_k - f| \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2^{l+1}} \forall l \in \mathbb{N}$. Für $\epsilon > 0$ sei $M_\epsilon := \{x \in M \mid \limsup_{l\to\infty} |f_{k_k} - f| \geq \epsilon \implies M_\epsilon \subset \bigcup_{l=j}^\infty \{|f_{k_l} - f| > \epsilon\} \; \forall j \in \mathbb{N} \implies |M_\epsilon| \leq \sum_{l=j}^\infty \left|\{|f_{k_l} - f| > \epsilon\}\right| \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{l=j}^\infty \int_M |f_{k_l} - f| \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{l=j}^\infty \frac{1}{2^{l+1}} = \frac{1}{2^j \epsilon} \; \forall j \in \mathbb{N} \implies |M_\epsilon| = 0 \; \forall \epsilon > 0 \implies f_{k_l} \xrightarrow{l\to\infty} f$ f.ü. auf M. ∎

Satz 10 (Majorantenkriterium). *Seien $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, $M \subset D$ messbar. Dann $|f| \leq g$ f.ü. auf M und g integrierbar auf $M \implies f$ ist integrierbar auf M. Man nennt g auch* integrierbare Majorante *von f.*

Lemma 11. *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar auf M, sei $f \geq 0$ auf M und sei $\{h_k\}$ Folge von Treppenfunktionen mit*

$$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq ... \leq f \text{ und } \int_M h_k \,\mathrm{d}x \text{ beschränkt} \tag{8}$$

$\implies \{h_k\}$ ist L^1-CF zu f und falls $h_k \longrightarrow f$ f.ü. auf M ist f integrierbar (vgl. Folgerung 21.16*).*

Beweis. Offenbar sind alle h_k integrierbar und wegen Monotonie ist $\left|\int_M h_k \,\mathrm{d}x - \int_M h_l \,\mathrm{d}x\right| = \int_M |h_k - h_l| \,\mathrm{d}x \; \forall k \geq l$. Da $\left\{\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right\}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ als monotone, beschränkte Folge, ist es CF in $\mathbb{R}$, somit ist $\{h_k\}$ L^1-CF. Falls noch $h_k \longrightarrow f$ f.ü., dann ist $\{h_k\}$ L^1-CF zu f und damit ist f integrierbar. ∎

Beweis. (zu *Satz 10*) Mit f ist auch $|f|$ messbar und nach *Folgerung 21.16* existiert Folge $\{h_k\}$ von Treppenfunktionen mit $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq ... \leq |f| \leq g$ auf M und $h_k \longrightarrow |f|$ f.ü. auf M. $\left\{\int_M h_k \,\mathrm{d}x\right\}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}$ da g integrierbar ist $\overset{\text{Lemma 11}}{\implies} \{h_k\}$ ist L^1-CF zu $|f| \implies |f|$ ist integrierbar auf $M \overset{\text{Satz 7}}{\implies} f$ ist integrierbar auf M. ∎

Folgerung 12. *Seien $f, g : M \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar und $|M| < \infty$. Dann*

(a) *Falls f beschränkt auf M ist, dann ist f integrierbar auf M.*
(b) *Seien f beschränkt und g integrierbar auf M, dann ist $f \cdot g$ integrierbar auf M.*

Hinweis: Folglich sind stetige Funktionen auf kompakten Mengen integrierbar (vgl. *Theorem von Weierstraß*).

Beweis. Sei $|f| \leq \alpha$ auf M für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist konstante Funktion $f_1 = \alpha$ integrierbare Majorante von $|f|$ und $f_2 = \alpha|g|$ ist integrierbare Majorante zu $f \cdot g$. Majorantenkriterium liefert die Behauptung. ∎

22.4 Grenzwertsätze

Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergang ist zentrale Frage, die grundlegende Grenzwertsätze beansprucht. Ziel: $\lim_{k\to\infty}\int_M f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x$

Theorem 13 (Lemma von Fatou). *Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty]$ integrierbar auf $M \subset D$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x)\ \forall x \in M$ integrierbar auf M und*

$$\int_M f\,\mathrm{d}x = \int_M \liminf_{k\to\infty} f_k\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty}\int_M f_k\,\mathrm{d}x$$

falls Grenzwert rechts existiert.

Keine Gleichheit hat man z.B. für $\{h_k\}$ aus *Beispiel 2* mit $\alpha_k = 1\ \forall k$. Denn $\int_{\mathbb{R}} 0\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k\to\infty} h_k\ \mathrm{d}x < \liminf_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} h_k\,\mathrm{d}x = 1$.

Beweis. Auf M ist $0 \leq g_k := \inf_{l\geq k} f_l \leq l_j\ \forall j \geq k, k \in \mathbb{N}$. $g_j \leq g_2 \leq ...$ und $\lim_{k\to\infty} g_k = \liminf_{k\to\infty} f_k = f$, damit sind nach *Satz 21.14* alle g_k messbar und nach *Satz 10* auch integrierbar. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wählen wir gemäß *Folgerung 21.16* Folge $\{h_{k_l}\}_l$ von Treppenfunktionen mit $0 \leq h_{k_1} \leq h_{k_2} \leq ... \leq g_k, h_{k_l} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} g_k$ f.ü. auf M. Nach *Lemma 11* ist $\{h_{k_l}\}_l$ L^1-CF zu g_k. Wendet man *Satz 21.19 (von Egorov)* auf $g_l \longrightarrow f$ auf $B_k(0) \cap M$ an, dann $\exists A'_k \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $|A'_k| < \frac{1}{2^{k+1}}$ und (evtl. TF) $|g_k - f| < \frac{1}{k}$ auf $\big(B_k(0) \cap M\big)\backslash A'_k$.

Analog für Folge $h_{k_l} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} g_k : \exists A''_k \subset \mathbb{R}^n$ mit $|A''_k| < \frac{1}{2^{k+1}}$ und (evtl. TF) $|h_{k_l} - g_k| < \frac{1}{k}$ auf $\big(B_k(0)\cap\big)\backslash A''_k$. Setze $A_k := A'_k \cup A''_k$, offenbar $|A_k| < \frac{1}{2^k}, h_k := h_{k_k}$. Definiere rekursiv $\tilde{h}_1 := h_1, \tilde{h}_k := \max(\tilde{h}_{k-1}, h_k) \implies h_k \leq \tilde{h}_k \leq g_k \leq f_k$ und $\tilde{h}_{k-1} \leq \tilde{h}_k\ \forall k \in \mathbb{N} \implies$ $|\tilde{h}_k - f| \leq |\tilde{h}_k - g_k| + |g_k - f| \leq |h_k - g_k| + |g_k - f| \leq \frac{2}{k}$ auf $\big(B_k(0)\cap M\big)\backslash A_k$. Mit $\tilde{A}_l := \bigcup\limits_{k=l}^{\infty} A_k$ folgt $|\tilde{A}_l| \leq \frac{1}{2^{l-1}}$ und $|\tilde{h}_k - f| \leq \frac{2}{k}$ auf $\big(B_k(0) \cap M\big)\backslash \tilde{A}_l\ \forall k \geq l$. Folglich $\tilde{h}_k \longrightarrow f$ f.ü. auf M und wegen Monotonie ist $\{\tilde{h}_k\}$ L^1-CF zu f. $\int_M f\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{k\to\infty}\int_M \tilde{h}_k\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{Monot.}}{\leq} \liminf_{k\to\infty}\int_M f_k\,\mathrm{d}x \implies$ Behauptung. ∎

Theorem 14 (monotone Konvergenz). *Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf $M \subset D\ \forall k \in \mathbb{N}$ mit $f_1 \leq f_2 \leq ...$ f.ü. auf M und $f_k \longrightarrow f$ f.ü. auf M, dann ist f ist integrierbar auf M und*

$$\int_M f\,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{k\to\infty} f_k\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_M f_k\,\mathrm{d}x$$

falls Grenzwert rechts existiert.

Bemerkung 15. Theorem 14 *bleibt richtig falls man $f_1 \geq f_2 \geq ...$ f.ü. auf M hat. Ferner ist wegen Monotonie die Beschränktheit der Folge $\big\{\int_M f_k\,\mathrm{d}x\big\}$ für Existenz der Grenzwerten ausreichend.*

Hinweis: Für messbare Funktion f schreibt man auch $\int_M f \, \mathrm{d}x = \pm\infty$ falls es Folge integrierbarer Funktionen $\{f_k\}$ gibt mit $\pm f_1 \leq \pm f_2 \leq ... \leq f$ und $\int_M f_k \, \mathrm{d}x \longrightarrow \pm\infty$.

Beweis. Nach *Theorem 13 (von Fatou)* ist $f - f_1 = \lim_{k\to\infty} f_k - f_1$ integrierbar auf M und damit auch $f = (f - f_1) + f_1$. $\implies \int_M f - f_1 \, \mathrm{d}x \leq \lim_{k\to\infty} \int_M f_k - f_1 \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \, \mathrm{d}x - \int_M f_1 \, \mathrm{d}x$
$\overset{\text{Monot.}}{\leq} \int_M f \, \mathrm{d}x - \int_M f_1 \, \mathrm{d}x = \int_M f - f_1 \, \mathrm{d}x \implies$ Behauptung. ∎

Theorem 16 (majorisierte Konvergenz). *Seien $f_k, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar für $k \in \mathbb{N}$ und sei g integrierbar auf $M \subset D$ mit $|f_k| \leq g$ f.ü. auf M $\forall k \in \mathbb{N}$ und $f_k \longrightarrow f$ f.ü. auf M*

$$\implies \lim_{k\to\infty} \int_M |f_k - f| \, \mathrm{d}x = 0 \tag{9}$$

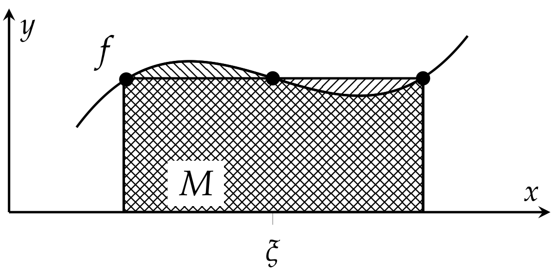
und $\int_M f \, \mathrm{d}x = \int_M \lim\limits_{k\to\infty} f_k \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty} \int_M f_k \, \mathrm{d}x$ wobei alle Integrale existieren.

Beweis. Nach *Majorantenkriterium* sind f.ü. alle f_k integrierbar auf M. Nach *Theorem 13* gilt: $\int_M 2g \, \mathrm{d}x = \int_M 2g - |f_k - f| \, \mathrm{d}x \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M 2g - |f_k - f| \, \mathrm{d}x \implies 0 \leq \liminf_{k\to\infty} \int_M 2g \, \mathrm{d}x - \int_M |f_k - f| \, \mathrm{d}x \implies (9). \overset{\text{Satz 9}}{\implies}$ Behauptung. ∎

Folgerung 17. *Seien $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar auf M für $k \in \mathbb{N}$. Sei $|M| < \infty$ und konvergiere $f_k \longrightarrow f$ gleichmäßig auf M $\implies$ f ist integrierbar auf M und $\int_M f \, \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \, \mathrm{d}x$.*

Theorem 18 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und zusammenhängend und sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig*

$$\implies \exists \xi \in M : \int_M f \, \mathrm{d}x = f(\xi)|M|.$$



Beweis. Aussage ist klar für $|M| = 0$, sei deshalb $|M| > 0$. f ist stetig auf kompakter Menge $M \underset{\text{(von Weierstraß)}}{\overset{\text{Theorem 15.3}}{\implies}} \exists$ Minimalstelle $x_1 \in M$, Maximalstelle $x_2 \in M$. Setze $\gamma := \int_M f \, \mathrm{d}x \overset{\text{Folgerung 8}}{=} f(x_1) \leq \frac{\gamma}{|M|} \leq f(x_2) \underset{\text{(Zwischenwertsatz)}}{\overset{\text{Theorem 15.11}}{\implies}} \exists \xi \in M : f(\xi) = \frac{\gamma}{|M|} \implies$ Behauptung. ∎

22.5 Parameterabhängige Integrale

Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^m$ Menge von Parametern, $f : M \times P \to \mathbb{R}$. Betrachte parameterabhängige Funktion

$$F(p) := \int_M f(x,p)\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Satz 19 (Stetigkeit). *Sei $M \cup \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^m$ und $f : M \times P \to \mathbb{R}$ Funktion mit*

– *$f(x,\cdot)$ messbar $\forall p \in P$,*
– *$f(x,\cdot)$ stetig für f.a. $x \in M$.*

Weiterhin gebe es integrierbare Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ mit $|f(x,p)| \le g(x)$ für f.a. $x \in M$ und $\forall p \in P$. Dann existieren Integrale in (10) *$\forall p \in P$ und F ist stetig auf P.*

Beweis. $f(\cdot,p)$ ist integrierbar auf M $\forall p \in P$ nach *Satz 10*. Fixiere $p \in P$ und betrachte $\{p_k\}$ in P mit $p_k \longrightarrow p$. Setze $f_k(x) := f(x,p_k)$. Stetigkeit von $f(x,\cdot)$ liefert $f_k(x) = f(x,p_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x,p)$ für f.a. $x \in M$ $\overset{\textit{Theorem 16}}{\Longrightarrow}$ $F(p_k) = \int_M f_k\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_M f(x,p)\,\mathrm{d}x = F(p) \underset{\text{beliebig}}{\overset{p\in P \text{ ist}}{\Longrightarrow}}$ Behauptung. ■

Satz 20 (Differenzierbarkeit). *Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $P \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : M \times P \to \mathbb{R}$ mit*

– *$f(\cdot,p)$ ist integrierbar auf M $\forall p \in P$,*
– *$f(x,\cdot)$ ist stetig differenzierbar auf P für f.a. $x \in M$.*

Weiterhin gebe es integrierbare Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ mit $|f_p(x,p)| \le g(x)$ für f.a. $x \in M$ und $\forall p \in P \implies f$ aus (10) *ist differenzierbar auf P mit*

$$F'(p) = \int_M f_p(x,p)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Hinweis: Integral in (11) ist komponentenweise zu verstehen und liefert für jedes $p \in P$ Wert in $\mathbb{R}^m$. Betrachtet man für $p = (p_1, ..., p_m) \in \mathbb{R}^m$ nun p_j als Parameter und fixiert andere p_i, dann liefert (11) partielle Ableitung

$$F_{p_j}(p) = \int_M f_{p_j}(x,p)\,\mathrm{d}x \text{ für } j = 1, ..., n.$$

Beweis. Selbststudium (vgl. *Königsberger: Analysis 2, Abschnitt 8.4*). ■

22.6 Riemann-Integral

Das Riemann-Integral ist ein klassischer Integralbegriff mit konzeptioneller Bedeutung. Seine Einführung ist etwas einfacher als bei Lebesgue-Integral, da keine messbare Mengen und Funktionen erforderlich sind. Das Riemann-Integral selbst ist aber weniger leistungsfähig und wird nur in speziellen Situationen angewandt. Es werden ebenfalls Funktionen durch Treppenfunktionen approximiert: Seien $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Q \in \mathcal{Q}$ beschränkte Funktion, $T_{\mathcal{Q}}(Q)$ Menge der Treppenfunktionen der Form

$$h = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{Q_j} \text{ mit } \bigcup_{j=1}^{l} Q_j = Q,\ Q_j \in \mathcal{Q} \text{ sind paarweise disjunkt}, c_j \in \mathbb{R}.$$

– Quader $\{Q_j\}_{j=1}^{l}$ werden als *Zerlegung zugehörig zu h* bezeichnet.

– Für Quader $Q' = I_1' \times ... \times I_n' \in \mathcal{Q}$ mit Intervallen $I_j \in \mathbb{R}$ heißt $\sigma_Q := \max |I_j'|$ (wobei $|I_j'|$ ist Intervalllänge) *Feinheit* von Q' (setze $\sigma_\emptyset = 0$).

– Für $h = \sum_{j=1}^{l} c_j \chi_{Q_j}$ heißt $\sigma_h := \max_j \sigma_{Q_j}$ *Feinheit der Treppenfunktion h.*

– Treppenfunktion $h = \sum_{j=1}^{l} c_j \chi_{Q_j} \in T_{\mathcal{Q}}(Q)$ heißt *(Riemann-)zulässig* für f falls $\forall j\ \exists x_j \in Q_j : c_j = f(x_j)$, d.h. auf jedem Quader Q_j stimmt h mit f in (mindestens) einem Punkt x_j überein.

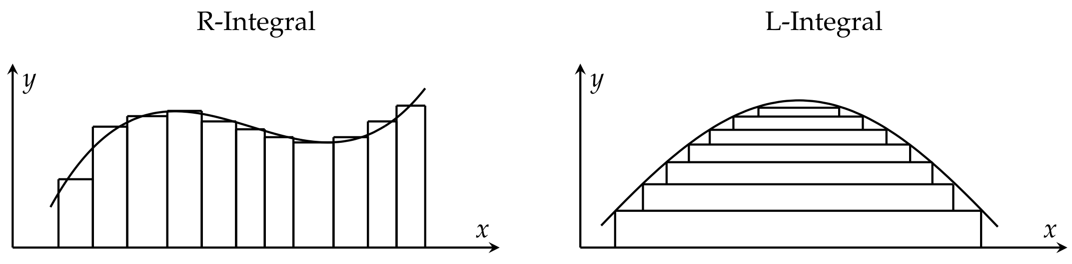
– Zu zulässigen h nennen wir $S(h) := h = \sum_{j=1}^{l} c_j |Q_j| = h = \sum_{j=1}^{l} f(x_j) \chi_{Q_j}$ *Riemann-Summe* zu h.

– Folge $\{h_k\}$ zulässiger Treppenfunktionen zu f, deren Feinheit gegen Null geht (d.h. $\sigma_{h_k} \longrightarrow 0$) heißt *Riemann-Folge* zu f.

– Funktion f heißt *Riemann-integrierbar* (*R-integrierbar*) auf Q falls $s \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$S = \lim_{k\to\infty} S(h_k) \text{ für alle Riemann-Folgen } \{h_k\} \text{ zu } f \tag{12}$$

und Grenzwert $R\text{-}\int_Q f(x)\,\mathrm{d}x := S$ heißt *Riemann-Integral* (kurz *R-Integral*) von f auf Q.



Satz 21. *Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $Q \in \mathcal{Q}$ abgeschlossen. Dann ist f (Lebesgue-)integrierbar und Riemann-integrierbar auf Q mit*

$$R\text{-}\int_Q f \,\mathrm{d}x = \int_Q f \,\mathrm{d}x.$$

Bemerkung 22. *Sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und $N := \{x \in Q \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\}$. Dann kann man zeigen: f ist R-integrierbar $\iff$ N ist Nullmenge. Man sieht jedoch leicht: Dirichlet-Funktion (*Beispiel 21.5*) auf* $[0,1]$ *ist nicht R-integrierbar, denn Treppenfunktionen $h_0 = 0$ und $h_1 = 1$ auf* $[0,1]$ *sind mit beliebig feiner Zerlegung $\{Q_j\}$ jeweils zulässig mit Riemann-Summen* 0 *bzw.* 1*, d.h. eindeutiger Grenzwert in* (12) *ist nicht möglich.*

Beweis. (Zu *Satz 21*) Als stetige Funktion ist f auf Q messbar und beschränkt und somit (Lebesgue-)integrierbar. Fixiere nun $\epsilon > 0$ und sei $h_k = \sum_{j=1}^{l_k} f(x_{k_j})\chi_{Q_{k_j}}$ Riemann-Folge von Treppenfunktionen zu f. Für $|Q| = 0$ folgt Behauptung leicht, da $S(h_k) = 0 \; \forall k \in \mathbb{N}$. Sei nun $|Q| > 0$. Da f auf kompakter Menge Q gleichmäßig stetig ist (*Satz 14.29*), existiert $\delta > 0$ mit $\big|f(x) - f(\tilde{x})\big| < \frac{\epsilon}{|Q|}$ falls $|x - \tilde{x}| < \delta$. Da $\sigma_{h_k} \longrightarrow 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} : \sigma_{h_k} < \frac{\delta}{\sqrt{n}} \; \forall k \geq k_0 \implies |x - \tilde{x}| < \delta \; \forall x, \tilde{x} \in Q_{k_j}$ falls $k \geq k_0$ und $\big|f(x) - f(x_{k_j})\big| < \frac{\epsilon}{|Q|} \; \forall x \in Q_{k_j}$ mit $k \geq k_0 \implies \left|\int_Q f \,\mathrm{d}x - \int_Q h_k \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_Q |f - h_k| \,\mathrm{d}x \leq \frac{\epsilon}{|Q|}|Q| = \epsilon \; \forall k \geq k_0$. Da $S(h_k) = \int_Q h_k \,\mathrm{d}x$ und $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt $S(h_k) \longrightarrow \int_Q f \,\mathrm{d}x$ für jede Riemann-Folge $\{h_k\}$ zu $f \implies f$ ist R-integrierbar und Behauptung folgt. ∎

Bemerkung 23. *Begriff des R-Integrals kann in gewissen Fällen auf unbeschränkte Funktionen und unbeschränkten Mengen ausgedehnt werden durch Betrachtung von Grenzwerten*

$$R - \int_Q f \,\mathrm{d}x := \lim_{k \to \infty} R - \int_{Q_k} f \,\mathrm{d}x \tag{13}$$

(vgl. uneigentliche Integrale in Kapitel 23*).*

Falls f (Lebesgue-)integrierbar ist erhält man diese weise das (Lebesgue-)Intergal $\int_Q f \,\mathrm{d}x$. Es gibt spezielle Fälle in denen Grenzwert (13) *existiert obwohl $\int_Q f \,\mathrm{d}x$ nicht definiert ist (vgl.* Beispiel 23.19 *unten).*

23 Integration auf $\mathbb{R}$

Ziel: Integrale tatsächlich berechnen. Sei $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ auf Intervallen $I = (\alpha, \beta) \subset \overline{\mathbb{R}}$ (mit $\alpha \leq \beta$). Da Randpunkte eines Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ Nullmenge sind, könnte man statt (α, β) auch $[\alpha, \beta], (\alpha, \beta], [\alpha, \beta)$ verwenden, ohne den Wert des Integrals zu ändern. Dann heißt $\int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}x$ mit

$$\int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}x := \int_I f\,\mathrm{d}x \text{ und } \int_\beta^\alpha f\,\mathrm{d}x := -\int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}x$$

(wobei $\alpha = -\infty$ bzw. $\beta = \infty$ zugelassen sind) *bestimmtes Integral* von f auf I. Beachte: Alle Intervalle sind messbare Mengen (vgl. *Satz 21.6* und *Satz 21.8*). Nach *Satz 22.6*:

Satz 1. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar auf I. Dann ist f auch auf allen Teilintervallen $\tilde{I} \subset I$ integrierbar.*

Theorem 2 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und integrierbar auf Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in I$. Dann:*

(a) *$\tilde{F} : I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{F}(x) := \int_{x_0}^x f(y)\,\mathrm{d}y\ \forall x \in I$ ist Stammfunktion von f auf I,*
(b) *Für jede Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ von f auf I gilt*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ \forall a, b \in I. \tag{1}$$

Bemerkung 3.
- *Damit besitzt jede stetige Funktion auf I Stammfunktion.*
- *(1) ist zentrale Formel zur Berechnung von Integralen auf $\mathbb{R}$. In (1) schreibt man auch*

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = F\Big|_a^b = \Big[F(x)\Big]_a^b = \Big[F\Big]_a^b.$$

Beweis. Zu (a): Fixiere $x \in I$, dann gilt für $t \neq 0$: $\frac{\tilde{F}(x+t) - \tilde{F}(x)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int_{x_0}^{x+t} f\,\mathrm{d}y - \int_{x_0}^x f\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{t}\int_x^{x+t} f\,\mathrm{d}y =: \varphi(t)$ wobei nach *Satz 1* alle Integrale existieren $\overset{\textit{Theorem 22.18}}{\Longrightarrow}$ $\forall t \neq 0\ \exists \xi_t \in [x, x+t]$ (bzw. $[x+t, x]$): $\varphi(t) = \frac{1}{|t|} f(\xi_t) \cdot |t| = f(\xi_t) \underset{\text{stetig}}{\overset{f \text{ ist}}{\Longrightarrow}} \tilde{F}'(x) = \lim_{t \to 0} \varphi(t) = f(x) \implies$ Behauptung.

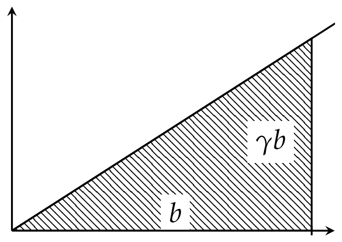
Zu (b): Für beliebige Stammfunktion F von f gilt $F(x) = \tilde{F}(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ (vgl. *Satz 20.1*) $\implies F(b) - F(a) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_{x_0}^b f\,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^a f\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}x \implies$ Behauptung. ∎

Beispiel 4. $\int_a^b \gamma x\,\mathrm{d}x = \frac{\gamma}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{\gamma}{2}(b^2 - a^2)$.

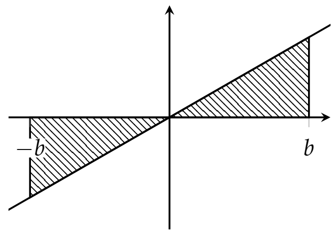
- Sei $a = 0$, dann ist Integral oben gleich $\frac{b \cdot (\gamma b)}{2}$.
- Sei $a = -b < 0$, dann ist Integral gleich 0.

Beispiel 5. $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$.

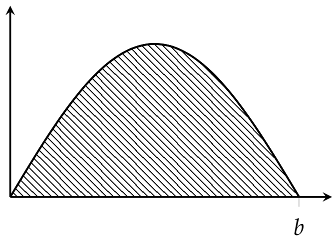
Zu *Beispiel 4*



Zu *Beispiel 4*



Zu *Beispiel 5*



Satz 6 (Substitution für bestimmte Integrale). *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und streng monoton, $a, b \in I$. Dann*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,\mathrm{d}y. \tag{2}$$

Formal: Ersetze $x = \varphi(x)$ und $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = \varphi'(y)\,\mathrm{d}y$. Ersetzung des Arguments von f durch $x = \varphi(y)$ bezeichnet man als *Substitution* bzw. *Variablentransformation.*

Beweis. Sei $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f auf I (existiert nach *Theorem 2*) $\overset{\text{Satz 20.6}}{\Longrightarrow}$ $F\big(\varphi(\cdot)\big)$ ist Stammfunktion zu $f\big(\varphi(\cdot)\big)\varphi'(\cdot)$ $\overset{\text{Theorem 2}}{\Longrightarrow}$ $\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(y)\big)\varphi'(y)\,\mathrm{d}y = F\big(\varphi(y)\big)\Big|_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \implies$ Behauptung. ∎

Beispiel 7. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \underset{\mathrm{d}x=\cos y\,\mathrm{d}y}{\overset{x=\varphi(y)=\sin y}{=}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \cos y\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}$.

Satz 8 (partielle Integration für bestimmte Integrale). *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig und F bzw. G zugehörige Stammfunktion, $a, b \in I$. Dann*

$$\int_a^b f \cdot G\,\mathrm{d}x = F \cdot G\Big|_a^b - \int_a^b F \cdot g\,\mathrm{d}x.$$

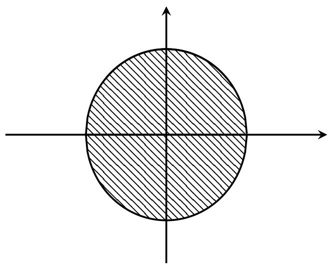
Beweis. Wegen $\int f \cdot G\,\mathrm{d}x = F(x) \cdot G(x) - \int F \cdot g\,\mathrm{d}x$ (vgl. *Satz 20.2*) folgt aus (1): $\int_a^b f \cdot G\,\mathrm{d}x = \big[\int f \cdot G\,\mathrm{d}x\big]_a^b = \big[F \cdot G\big]_a^b - \big[\int F \cdot g\,\mathrm{d}x\big]_a^b = F \cdot G\Big|_a^b - \int_a^b F \cdot g\,\mathrm{d}x. \implies$ Behauptung. ∎

Beispiel 9 (Fläche des Einheitskreises). Betrachte $y = \sqrt{1-x^2}$. Dann $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 \cdot \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[x \cdot \sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{-2x}{2\cdot\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Beispiel 7}}{=} \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \implies$ Viertelkreis hat Fläche $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$, folglich ist die Kreisfläche π.

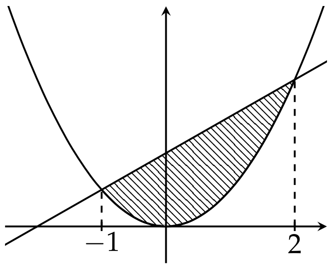
Beispiel 10. Berechne Fläche zwischen Graphen von $f(x) = x^2, g(x) = x + 2$. Setze $f(x) - g(x) = x^2 - x - 2 \implies x_1 = -1, x_2 = 2$. $\int_{-1}^{2} g - f \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = \frac{7}{6}$.

Beispiel 11. Berechne Flächen zwischen Graphen von $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x, g(x) = x$. Schnittpunkte sind bei $x_{1,3} = \pm\sqrt{2}, x_2 = 0$. Betrachte $g - f$ auf $[0, 2]$. Dann $\int_0^{\sqrt{2}} g - f \,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} 2x - x^3 \,\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = 1$. Analog $\int_{-\sqrt{2}}^{0} g - f \,\mathrm{d}x = 1 \implies$ gesuchte Fläche ist 2.

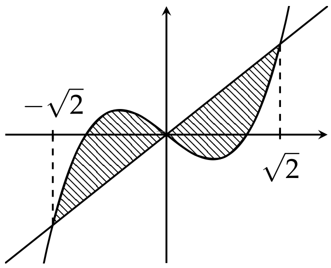
Zu *Beispiel 9*



Zu *Beispiel 10*



Zu *Beispiel 11*



Satz 12 (Differenz von Funktionswerten). *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, D$ offen, f stetig differenzierbar, $[x, y] \subset D$. Dann*

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'\big(x + t(y - x)\big) \cdot (y - x) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'\big(x + t(y - x)\big) \,\mathrm{d}t \cdot (y - x).$$

Hinweis: Linke Seite ist Element in $\mathbb{R}^m$ und Integrale sind jeweils komponentenweise zu verstehen (Mitte: $\mathbb{R}^n$, rechts: $\mathbb{R}^{n \times m}$). Man vergleiche *Theorem 19.4 (Mittelwertsatz)* und *Theorem 19.9 (Schrankensatz)*.

Beweis. Sei $f = (f_1, ..., f_m), \varphi_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_k(t) = f_k\big(x + t(y - x)\big) \implies \varphi_k$ ist differenzierbar auf $(0, 1)$ mit $\varphi_k'(t) = f_k'\big(x + t(y - x)\big) \cdot (y - x) \overset{\text{Theorem 2}}{\implies} f_k(y) - f_k(x) = \varphi_k(1) - \varphi_k(0) = \int_0^1 \varphi_k'(t) \,\mathrm{d}t \implies$ Behauptung. ■

23.1 Uneigentliche Integrale

Frage: Kann man $\int_I f \,\mathrm{d}x$ für I unbeschränkt bzw. f unbeschränkt berechnen? Strategie: Verwende Hauptsatz mittels Grenzprozess!

Satz 13. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig für $a, b \in \mathbb{R}$. Dann: f ist integrierbar auf $[a, b] \iff \lim_{\substack{\alpha \downarrow a \\ \alpha \neq a}} \int_\alpha^b |f| \,\mathrm{d}x$ existiert $\implies \int_a^b |f| \,\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{\alpha_k}^b f \,\mathrm{d}x$ für eine Folge $\alpha_k \downarrow a$.*

Bemerkung 14. (a) *Analoge Aussage gilt für $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ (vgl.* Folgerung 22.12*).*

(b) *Falls f beschränkt auf $(a, b]$, dann ist f stets integrierbar.*

(c) *Integrale können mittels Hauptsatz berechnet werden.*

(d) *Für uneigentliche Integrale $\int_a^b f \, \mathrm{d}x$ im Sinne von Riemann-Integral muss nur $\lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f \, \mathrm{d}x$ existieren (vgl.* Beispiel 19*).*

Beweis. Seien $\alpha_k, a < \alpha_k \ \forall k$,

$$f_k(x) := \begin{cases} f(x) & \text{auf } [\alpha_k, b], \\ 0 & \text{auf } (a, \alpha_k). \end{cases}$$

Offenbar $|f_k| \leq |f|$, $f_k \longrightarrow f$, $|f_k| \longrightarrow |f|$ f.ü. auf (a, b).

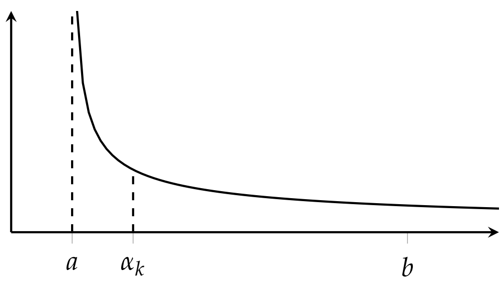
"$\Longrightarrow$": f ist integrierbar auf $(a, b]$ $\overset{\textit{majorisierte}}{\underset{\textit{Konvergenz}}{\Longrightarrow}}$ $\lim_{k \to \infty} \int_\alpha^b |f| \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_a^b |f_k| \, \mathrm{d}x = \int_a^b |f| \, \mathrm{d}x \Longrightarrow$ Behauptung. $\overset{\text{analog}}{\underset{\text{ohne Beträge}}{\Longrightarrow}}$ (3).

"$\Longleftarrow$": Folge $\{|f_k|\}$ ist monoton wachsend und $\lim_{k \to \infty} \int_a^b |f_k| \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{\alpha_k}^b |f| \, \mathrm{d}x$ existiert $\overset{\textit{monotone}}{\underset{\textit{Konvergenz}}{\Longrightarrow}}$ f ist integrierbar.

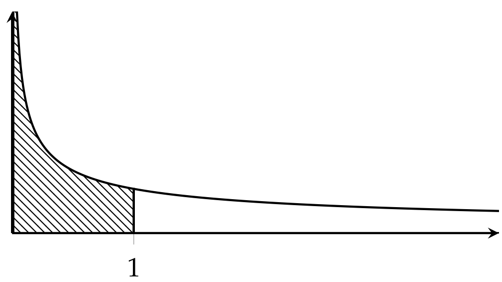
■

Beispiel 15. $\int_0^1 \frac{1}{x^\gamma} \, \mathrm{d}x$ existiert für $0 < \gamma < 1$ und nicht für $\gamma \geq 1$. Denn für $\gamma \neq 1$ ist $\int_{\alpha_k}^1 \frac{1}{x^\gamma} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma} \Big|_{\alpha_k}^1 = \frac{1}{1-\gamma} \left(1 - \alpha_k^{1-\gamma}\right) \overset{\alpha_k \downarrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\gamma}$ für $1 - \gamma > 0$ (keine Konvergenz für $1 - \gamma < 0$), $\gamma = 1$ analog mit Stammfunktion $\ln x$.

Zu *Beispiel 14* (f_k)



Zu *Beispiel 15*



Satz 16. *Sei $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ stetig, dann: f ist integrierbar auf $[\alpha, \infty] \iff \lim_{\beta \to \infty} \int_a^\beta |f| \, \mathrm{d}x$ existiert $\Longrightarrow \int_0^\infty f \, \mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_a^{\beta_k} f \, \mathrm{d}x$ für eine Folge $\beta_k \longrightarrow \infty$.*

Bemerkung 17. (a) *Analoge Aussage gilt für $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$.*

(b) *Integrale können mittels Hauptsatz berechnet werden.*

(c) *Für uneigentliche Riemann-Integrale muss nur* $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ *existieren.*

Beweis. Analog zu *Satz 13*. ■

Beispiel 18. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x$ existiert für $\gamma > 1$ und nicht für $0 \le \gamma \le 1$. Für $\gamma \neq 1$ ist $\int_1^{\beta_k} \frac{1}{x^\gamma}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\gamma}x^{1-\gamma}\Big|_1^{\beta_k} = \frac{1}{\gamma-1}\left(1-\beta_k^{1-\gamma}\right) \overset{\beta_k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\gamma-1}$ für $1-\gamma<0$ (keine Konvergenz für $1-\gamma>0$). Fall $\gamma = 1$ analog mit Stammfunktion $\ln x$.

Beispiel 19. Betrachte $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (*beachte:* $\frac{\sin x}{x} \overset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$). Offenbar $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x \overset{\textit{Beispiel 5}}{=} \frac{2}{k\pi}\ \forall k \ge 1 \implies \int_0^{k\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|\,\mathrm{d}x \ge \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty \implies \frac{\sin x}{x}$ ist nicht integrierbar auf $(0,\infty)$. Aber $\int_1^\beta \frac{1}{x}\sin x\,\mathrm{d}x \underset{\text{Integration}}{\overset{\text{partielle}}{=}} \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos\beta}{\beta} - \int_1^\beta \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ wegen $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}\ \forall x \neq 0$, $\frac{1}{x^2}$ integrierbar auf $(1,\infty)$ nach *Beispiel 18* $\implies \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert nach *Satz 22.10* $\implies \lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existiert $\implies \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ existiert als uneigentliches Integral im Sinne des R-Integrals (vgl. *Bemerkung 17*) aber nicht als L-Integral.

24 Satz von Fubini

24.1 Mehrfachintegrale

Ziel: Reduktion der Berechnung von $\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}x$ auf Integrale über $\mathbb{R}$. Betrachte Integrale auf $X \times Y$ mit $X = \mathbb{R}^p, Y = \mathbb{R}^q, (x, y) \in X \times Y$. $|M|_X$ ist Maß auf X, Q_X Quader in X usw.

Theorem 1 (Fubini). *Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $X \times Y$. Dann:*

(a) *Für Nullmenge $N \subset Y$ ist $x \longrightarrow f(x, y)$ integrierbar auf X $\forall y \in Y \backslash N$.*
(b) *Jedes $F : Y \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(y) := \int_X f(x, y) \, \mathrm{d}x \ \forall y \in Y \backslash N$$

ist integrierbar auf Y und

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) = \int_Y F(y) \, \mathrm{d}y = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \tag{1}$$

Rechte Seite in (1) *heißt* iteriertes Integral *bzw.* Mehrfachintegral.

Bemerkung 2. *Analoge Aussage gilt bei Vertauschung von X und Y mit*

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{2}$$

Theorem 1 mit $f = \chi_N$ für Nullmenge $N \subset X \times Y$ liefert Beschreibung von Nullmengen in $X \times Y$.

Folgerung 3. *Sei $N \subset X \times Y$ Nullmenge und $N_Y := \{x \in X \mid (x, y) \in N\} \implies \exists$ Nullmenge $\tilde{N} \subset Y$ mit $|N_Y|_X = 0 \ \forall y \in Y \backslash \tilde{N}$.*

Hinweis: $\tilde{N} = \emptyset$ tritt z.B. auf für $N = \mathbb{R} \times \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ($\tilde{N} = \mathbb{Q}$).

Beweis. (Zu *Theorem 1*)

Zu (a): Zeige: *Theorem 1* gilt für $f = \chi_M$ mit $M \subset X \times Y$ messbar, $|M|_{X \times Y} < \infty$: $\exists Q_{k_j} \in \mathcal{Q}_{X \times Y}$, paarweise disjunkt für festes k, mit

$$M \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_{k_j} = R_k, |M| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left| Q_{k_j} \right| \leq |M| + \frac{1}{k}. \tag{3}$$

Wähle $Q'_{k_j} \in \mathcal{Q}_X, Q''_{k_j} \in \mathcal{Q}_Y$ mit $Q_{k_j} = Q'_{k_j} \times Q''_{k_j}$ $\forall k, j \in \mathbb{N}$. Mit $M_Y := \{x \in X \mid (x, y) \in M\}$ gilt

$$|M_Y|_X \leq \sum_{j=1}^{\infty} |Q'_{k_j}|_X \cdot \chi_{Q''_{k_j}}(y) =: \psi_k(y) \in [0, \infty] \ \forall y \in Y. \tag{4}$$

Für festes k ist $y \longrightarrow \psi_{k_l} := \sum_{j=1}^{l} |Q'_{k_j}|_X \cdot \chi_{Q''_{k_j}}(y)$ monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen in $T^1(y)$ mit $\psi_k(y) = \lim_{l\to\infty} \psi_{k_l}(y) \ \forall y \in Y$ $\Longrightarrow \int_Y \psi_{k_l}(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{l} |Q'_{k_j}| \cdot |Q''_{k_j}|_Y = \sum_{j=1}^{k} |Q_{k_j}|_{X\times Y} \overset{(3)}{\leq} |M| + \frac{1}{k}$. Nach *Lemma 22.11* ist $\{\psi_{k_j}\}_l$ L^1-CF zu ψ_k und ψ_k integrierbar auf Y mit

$$|M| \overset{(3)}{\leq} \int_Y \psi_k \,\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{\infty} |Q_{k_j}|_{X\times Y} \leq |M| + \frac{1}{k}. \tag{5}$$

Da $\{\psi_k\}$ monoton fallend ist (wegen $R_{k+1} \subset R_k$) existiert $\psi(y) := \lim_{k\to\infty} \psi_k(y) \geq 0 \ \forall y \in Y$. Grenzwert in (5) mittels *majorisierter Konvergenz* liefert

$$|M| = \int_Y \psi \,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

Falls $|M| = 0$ folgt $\psi(y) = 0$ f.ü. auf $Y \Longrightarrow |M_Y|_X \leq \psi(y) = 0$ f.ü. auf $Y \Longrightarrow$ *Folgerung 3* ist bewiesen. Folge $\{\chi_{R_k}\}$ ist monoton fallend mit $\chi_{R_k} \longrightarrow \chi_M$ f.ü. auf $X \times Y$ und χ_{R_k} integrierbar auf $X \times Y \Longrightarrow \{\chi_{R_k}\}$ ist L^1-CF zu χ_M und $\int_{X\times Y} \chi_{R_k} \,\mathrm{d}(x,y) \longrightarrow \int_{X\times Y} \chi_M \,\mathrm{d}(x,y)$.
Nach *Folgerung 3* existiert Nullmenge $\tilde{N} \subset Y$ mit $\chi_{R_k}(\cdot,y) \longrightarrow \chi_M(\cdot,y)$ f.ü. auf $X \ \forall y \in Y\backslash\tilde{N} \Longrightarrow \psi_k(y)$ ist endlich $\forall y \in Y\backslash\tilde{N} \overset{(3),(4)}{\Longrightarrow} \chi_{R_k}(\cdot,y)$ ist integrierbar auf $X \ \forall k \in \mathbb{N}, y \in Y\backslash\tilde{N} \underset{\textit{Konvergenz}}{\overset{\textit{monotone}}{\Longrightarrow}} \chi_M(\cdot,y)$ ist integrierbar auf $X \ \forall y \in Y\backslash\tilde{N}$ mit $\psi_k(y) = \int_X \chi_{R_k}(x,y)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_X \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x$ für f.a. $y \in Y$ $\overset{(6)}{\Longrightarrow} \int_{X\times Y} \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = |M| = \int_Y \left(\int_X \chi_M(x,y)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$ d.h. Behauptung für $f = \chi_M \underset{\textit{des Integrals}}{\overset{\textit{Linearität}}{\Longrightarrow}}$ Behauptung ist richtig für alle Treppenfunktionen.

Zu (b): Sei $f \geq 0$ integrierbar auf $X \times Y$. Wähle zu f monotone Folge von Treppenfunktionen $\{h_k\}$ gemäß *Folgerung 21.16*, dann $\int_{X\times Y} h_k(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{(a)}{=} \int_Y \left(\int_X h_k \,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y$. Analog zu (a) folgt: $h_k(\cdot,y) \longrightarrow f(\cdot,y)$ f.ü. auf X für f.a. $y \in Y \underset{\textit{Konvergenz}}{\overset{\textit{monotone}}{\Longrightarrow}}$ Behauptung für f. Allgemein: Zerlege $f = f^+ - f^-$ und argumentiere für $f^\pm$ separat.

■

Satz 4 (Tonelli). *Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ messbar. Dann:*

$$f \textit{ ist integrierbar} \iff \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \textit{ oder } \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \textit{ existiert.} \tag{7}$$

Bemerkung 5. (a) *Falls eines der iterierten Integrale in* (7) *existiert, dann gelten* (1) *und* (2).

(b) *Existenz von z.B.* $\int_Y \big(\int_X |f| \,\mathrm{d}x\big) \,\mathrm{d}y$ *heißt:* $\exists$ *Nullmenge* $\tilde{N} \subset Y$ *sodass* $F(y) := \int_X |f(x,y)| \,\mathrm{d}x$ *existiert* $\forall y \in Y \backslash \tilde{N}$ *und mit* $F(y) := 0$ $\forall y \in \tilde{N}$ *ist* F *integrierbar auf* Y.

Beweis. "$\Longrightarrow$": Mit f ist auch $|f|$ integrierbar und Behauptung folgt nach *Theorem 1.*
"$\Longleftarrow$": Sei $W_k := (-k,k)^{p+q} \subset X \times Y$ Würfel, $f_k := \min\{|f|, k \cdot \chi_{W_k} \implies f_k$ ist integrierbar auf $X \times Y$. Offenbar ist $\{f_k\}$ wachsend, $f_k \longrightarrow |f|$ f.ü. auf $X \times Y$. Falls oberes Integral in (7) existiert, dann: $\int_{X\times Y} f_k)\,\mathrm{d}(x,y) \overset{Fubini}{=} \int_Y \big(\int_X f_k \,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y \leq \int_Y \big(\int_X |f| \,\mathrm{d}x\big)\,\mathrm{d}y < \infty$ $\implies \int_{X\times Y} f_k \,\mathrm{d}(x,y)$ ist beschränkte Folge $\underset{Konvergenz}{\overset{monotone}{\Longrightarrow}}$ $|f|$ ist integrierbar $\overset{Satz\ 22.7}{\Longrightarrow}$ f ist integrierbar $\implies$ Behauptung.

$\blacksquare$

Folgerung 6. *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *integrierbar auf* $\mathbb{R}^n, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, *dann*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} ... \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, ..., x_n)\,\mathrm{d}x_1 \right) ... \,\mathrm{d}x_n. \tag{8}$$

Beweis. Mehrfache Anwendung von *Theorem 1.* $\blacksquare$

Bemerkung 7. (1) *Reihenfolge der Integration in* (8) *ist beliebig.*
(2) *Iterierte Integrale reduzieren Integration auf reelle Integrale über* $\mathbb{R}$.
(3) *Für* $\int_M f \,\mathrm{d}x$ *ist* $\chi_M \cdot f$ *gemäß* (8) *integrierbar wobei evtl.* $\int_{\mathbb{R}} ... \,\mathrm{d}x$ *durch* $\int_a^b ... \,\mathrm{d}x$ *mit geeigneten Grenzen ersetzt wird.*

Beispiel 8. Sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $M = [a,b] \times [c,d] \implies f$ ist messbar, beschränkt auf $M \implies M$ ist integrierbar auf $M \implies \chi_M f$ ist integrierbar auf $\mathbb{R}^2$ $\implies \int_M f \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_M f \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} \chi_M(x_1,x_2) f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\big)\,\mathrm{d}x_2 = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_a^b \chi_{[c,d]}(x_2) f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\Big)\,\mathrm{d}x_2 = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\Big)\,\mathrm{d}x_2$. Z.B. $f(x_1,x_2) = x_1 \cdot \sin x_2, M = [0,1] \times [0,\pi]$, dann: $\int_M f \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \Big(\int_0^1 x_1 \cdot \sin x_2 \,\mathrm{d}x_1\Big)\,\mathrm{d}x_2 = \int_0^\pi \big[\frac{1}{2} x_1^2 \cdot \sin x_2\big]_0^1 \,\mathrm{d}x_2 = \big[-\frac{1}{2} \cdot \cos x_2\big]_0^\pi = 1.$

Beispiel 9. Sei $f : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, $M := \big\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\big\} \implies \chi_M f$ ist integrierbar auf $\mathbb{R}^2 \implies \int_M f \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \big(\int_{\mathbb{R}} \chi_M f \,\mathrm{d}y\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$
Sei z.B. $f(x,y) := |y| \implies \int_M |y| \,\mathrm{d}(x,y) = 2 \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{-1}^1 \big[\frac{1}{2} y^2\big]_0^{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 1 - x^2 \,\mathrm{d}x = \big[x - \frac{1}{3}x^3\big]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$.

Beispiel 10. Sei $f : M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig, M Tetraeder mit Ecken $0, e_1, e_2, e_3$.

$$\int_M f \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Z.B. $f(x,y,z) = 1$: $\int_M 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1 \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big[z\Big]_0^{1-x-y} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$

$\int_0^1\int_0^{1-x} 1-x-y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$. (Volumen des Tetraeders)

24.2 Integration durch Koordinatentransformation

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^m$ bijektiv, wobei U, V offen sind. Funktion f heißt *Diffeomorphismus* falls f und f^{-1} stetig differenzierbar auf U bzw. V sind, U und V heißen dann *diffeomorph.*

Theorem 11 (Transformationssatz). *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ Diffeomorphismus $\implies$ $f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar $\iff$ $f\big(\varphi(\cdot)\big)|\det \varphi'(\cdot)| : U \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt*

$$\int_U f\big(\varphi(y)\big)|\det \varphi'(y)|\,\mathrm{d}y = \int_V f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Formal: $x = \varphi(y)$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y = |\det \varphi'(y)|\,\mathrm{d}y$.

Beweis. Vgl. Literatur (z.B. *Königsberger: Analysis 2, Kapitel 9*). ∎

Hinweis: Sei $U = Q \in \mathcal{Q}$ Würfel, $V := \varphi(Q), \tilde{y} \in Q, \tilde{x} := \varphi(\tilde{y}) \overset{(9)}{\implies} |V| = \int_V 1\,\mathrm{d}x = \int_Q |\det \varphi'(y)|\,\mathrm{d}y \overset{Q \text{ klein}}{\approx} |\det \varphi'(\tilde{y})||Q|$, d.h. $|\det \varphi'(y)|$ beschreibt (infinitesimale) relative Veränderung des Maßes unter Transformation φ.

Beispiel 12. Sei $V = B_R(0) \subset \mathbb{R}^3$ Kugel mit Radius $R > 0$. Zeige: $|B_R(0)| = \int_V 1\,\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{4}{3}\pi R^3$. Benutze Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^3$):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(r,\alpha,\beta) := \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\beta \\ r\sin\alpha\cos\beta \\ r\sin\beta \end{pmatrix}.$$

Für $(r,\alpha,\beta) \in U := (0,R) \times (-\pi,\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ mit $H = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0\}, \tilde{V} := V \backslash H$ ist: $|H|_{\mathbb{R}^3} = 0$, $\varphi : U \to \tilde{V}$ differenzierbar, injektiv,

$$\varphi'(r,\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\cos\beta & -r\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & r\cos\alpha\cos\beta & -r\sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{pmatrix}$$

$\implies$ $\det \varphi'(r,\alpha,\beta) = r^2\cos\beta \neq 0$ auf $U \overset{\text{Satz 27.8}}{\implies} \varphi : U \to \tilde{V}$ ist Diffeomorphismus $\implies$ $|B_R(0)| = \int_V 1\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\tilde{V}} 1\,\mathrm{d}(x,y,z) + \int_H 1\,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{(9)}{=} \int_U |\det \varphi'(r,\alpha,\beta)|\,\mathrm{d}(r,\alpha,\beta) + \underbrace{|H|}_{=0} \overset{\text{Fubini}}{=}$

$\int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\beta \,\mathrm{d}\beta \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}r = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} \Big[r^2 \sin\beta \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}r = \int_0^R \int_{-\pi}^{\pi} 2r^2 \mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}r = \int_0^R 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi r^3 \Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi r^3.$

Beispiel 13. Betrachte Rotationskörper in $\mathbb{R}^3$. Sei $g : [a,b] \to [0,\infty]$ stetig. Rotiere Graphen von g um z-Achse, bestimme Volumen des (offenen) Rotationskörpers $V \subset \mathbb{R}^3$. Benutze Zylinderkoordinaten:

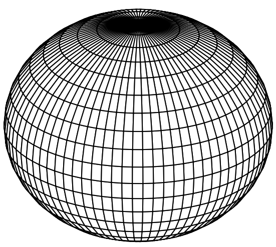
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \varphi(r,\alpha,z) := \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \\ z \end{pmatrix}.$$

Auf $U := \big\{(r,\alpha,z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \in \big(0, g(z)\big), \alpha \in (-\pi,\pi), z \in (a,b)\big\}$ mit $H := \big\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq 0\big\}$, $\tilde{V} := V \setminus H$ gilt: $|H| = 0$ und $\varphi : V \to \tilde{V}$ ist differenzierbar, injektiv,

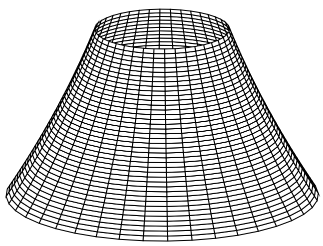
$$\varphi'(r,\alpha,z) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -r\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $\det \varphi'(r,\alpha,z) = r > 0$ auf $U \overset{\textit{Satz 27.8}}{\Longrightarrow} \varphi : U \to \tilde{V}$ ist Diffeomorphismus. V ist messbar (da offen) $\Longrightarrow$ $\tilde{V}$ ist messbar, offenbar ist $f = 1$ integrierbar auf $\tilde{V}$ $\Longrightarrow$ $|V| = |\tilde{V}| = \int_{\tilde{V}} 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) \overset{(9)}{=} \int_U |\det \varphi'(r,\alpha,z)| \mathrm{d}(r,\alpha,z) \overset{\textit{Fubini}}{=} \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{g(z)} r \mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{g(z)} \mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}z$. Sei z.B. $g(z) = R$ auf $[a,b]$, dann ist $|V| = \pi \cdot \int_a^b R^2 \,\mathrm{d}z = \pi R^2 (b-a)$ Volumen des Kreiszylinders.

Zu *Beispiel 12*



Zu *Beispiel 13*



Teil III

Differentiation II

25 Höhere Ableitungen und Taylorscher Satz

Vorbetrachtung: Sei X endlich-dimensionaler, normierter Raum über $\mathbb{K}$ (d.h. Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Norm $\|\cdot\|$, $\dim X = l \in \mathbb{N}$). Offenbar ist X und $\mathbb{K}^l$ isomorph als Vektorraum, schreibe $X \simeq \mathbb{K}^l$. Z.B. $X = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{K}^{m \cdot n}$. Für $g : D \subset \mathbb{K}^n \to X$, D offen kann man bisherige Resultate bzgl. Ableitung aus *Kapitel V* übertragen. Insbesondere heißt $g'(x) \in L(\mathbb{K}^n, X)$ Ableitung von g in $x \in D$ falls $g(x+y) = g(x) + g'(x)y + o(|y|), y \longrightarrow 0$. Betrachte nun $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, D offen, f differenzierbar auf D. Falls $g := f' : D \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) =: Y_1$ differenzierbar in $x \in D$ ist, heißt $f''(x) := g'(x) \in L(\mathbb{K}^n, Y_1) = L\big(\mathbb{K}^n, L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)\big)$ zweite Ableitung von f in x. Offenbar gilt dann:

$$f'(x, y) = f'(x) + f''(x) \cdot y + o(|y|), y \longrightarrow 0 \tag{1}$$

bzw.

$$f'(x+y) \cdot z = f'(x) \cdot z + \underbrace{\underbrace{\big(f''(x)y\big)}_{\in \mathbb{K}^{m \times n}} z}_{\in \mathbb{K}^m} + o(|y|) \ \forall z \in \mathbb{K}^n. \tag{2}$$

Interpretation: Betrachte $f''(x)$ als "kubische" bzw. "dreidimensionale" Matrix (heißt auch *Tensor 3. Ordnung*). Beachte: Ausdruck $\big(f''(x) \cdot y\big) \cdot z$ ist jeweils linear in y und x. Frage: Wie definiert man höhere Ableitungen, d.h. von $f'' : D \to L(\mathbb{K}^n, Y_1)$ usw.? Offenbar sind

$$\begin{aligned}
Y_2 :=& L(\mathbb{K}^n, Y_1) = L\big(\mathbb{K}^n, L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)\big) \simeq L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^{m \times n}) \simeq L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^{m \cdot n}) \simeq \mathbb{K}^{m \cdot n^2}. \\
Y_3 :=& L(\mathbb{K}^n, Y_2) \simeq L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^{m \cdot n^2}) \simeq \mathbb{K}^{m \cdot n^3} \\
& \vdots
\end{aligned}$$

jeweils endlich-dimensionale normierte Räume. Definiere nun rekursiv $\forall k \in \mathbb{N}$:

(i) Räume: $Y_0 := \mathbb{K}^m$ mit $|\cdot|$, $Y_{k+1} := L(\mathbb{K}^n, Y_k)$ mit Standardnorm $\|A\|_{k+1} = \sup_{|z| \leq 1} \|Az\|_{Y_k}$ (vgl. *Satz 13.8*). Analog zu oben ist $Y_k \simeq \mathbb{K}^{m \cdot n^k}$ normierter Raum.

(ii) Ableitungen: Sei $f^{(0)} := f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, D$ offen. Falls $f(k) : D \to Y_k$ differenzierbar in $x \in D$ ist, heißt $f^{(k+1)}(x) := \big(f^{(k)}\big)'(x) \in L(\mathbb{K}^n, Y_k)$ *$(k+1)$-te Ableitung* von f in x (beachte $f^{(1)}(x) = f'(x)$).

Somit gilt

$$f^{(k)}(x+y) = f^{(k)}(x) + f^{(k+1)}(x) \cdot y + o(|y|) \ (\in Y_k) \text{ für } y \longrightarrow 0. \tag{3}$$

– f heißt *k-fach differenzierbar* (auf D) falls $f^{(k)}(x)$ existiert $\forall x \in D$.

– f heißt *k-fach stetig differenzierbar* (auf D) oder C^k-Funktion falls f k-fach differenzierbar und $f^{(k)} : D \to Y_k$ stetig ist.

$$C^k(D, \mathbb{K}^m) := \{f : D \to \mathbb{K}^m \mid f \text{ ist } k\text{-fach stetig differenzierbar auf } D\}.$$

Hinweis: Falls $f^{(k)}(x)$ existiert, dann ist $f^{(k-1)}$ stetig in x (vgl. *Satz 17.2*). Spezialfall: Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, dann $f'(x) \in Y_1 = L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{K}^m$, $f''(x) \in Y_2 = L(\mathbb{K}, Y_1) \simeq L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{K}^m$. Allgemein ist $f^{(k)}(x) \in Y_k = L(\mathbb{K}, Y_{k-1}) \simeq L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{K}^m$, d.h. für $n = 1$ kann $f^{(k)}(x)$ stets als m-Vektor in $\mathbb{K}^m$ betrachtet werden.

Beispiel 1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot \sin x \implies f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x \implies f''(x) = 2\cos x - x \cdot \sin x \implies f'''(x) = -3\sin x - x \cdot \cos x$ ... .

Beispiel 2. Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) := (x^3, \ln x)^{\mathrm{T}}$. Dann $f'(x) = (3x^2, \frac{1}{x})^{\mathrm{T}} \implies f''(x) = (6x, -\frac{1}{x^2})^{\mathrm{T}} \implies f'''(x) = (6, \frac{2}{x^3})^{\mathrm{T}}$.

Beispiel 3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^3 & \text{für } x \geq 0, \\ -x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \geq 0, \\ -3x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases} \implies f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{für } x \geq 0, \\ -6x & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Aber $f'''(0)$ existiert nicht, d.h. $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aber $f \notin C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beispiel 4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

$\underset{\text{-studium}}{\overset{\text{Selbst-}}{\Longrightarrow}}$ $f^{(k)}(x)$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ mit $f^{(k)}(0) = 0\ \forall k$, d.h. $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ \forall k \in \mathbb{N}$. Man schreibt $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Satz (Leibniz-Regel). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, die an der Stelle $x \in I$ n-fach differenzierbar sind. Dann*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Beweis. Vollständige Induktion liefert:

(IA) $(f \cdot g)^{(1)} = (f \cdot g)' \underset{\textit{-regel}}{\overset{\textit{Produkt-}}{=}} f' \cdot g + f \cdot g'$.

(IS) $(f \cdot g)^{(n+1)} = ((f \cdot g)^{(n)})' = (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)})' \underset{\textit{linear}}{\overset{\textit{Ableitung}}{=}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}$

$= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$
$= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$.

$\implies$ Behauptung. ■

25.1 Analysis von Räumen Y_k

Für $A \in Y_k = L(\mathbb{K}^n, Y_{k-1}) \simeq \mathbb{K}^{m \cdot n^k}$ und $y_1, ..., y_k \in \mathbb{K}^n$ gilt: $A \cdot y_1 = L(\mathbb{K}^n, Y_{k-2})(A \cdot y_1) y_2 \in Y_{k-2} = L(\mathbb{K}^n, Y_{k-3})$ ... $\big(...\big((A \cdot y_1) \cdot y_2\big) \cdot ... \cdot y_k\big) \in Y_0 = \mathbb{K}^m$. Ausdrucke links sind offenbar linear in jedem $y_j \in \mathbb{K}^n$ separat für $j = 1, ..., k$. Betrachte $X_k := L^k(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) := \{B : \mathbb{K}^n \times ... \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \mid y_j \to B(y_1, ..., y_k) \text{ ist linear } \forall j = 1, ..., k\}$. Element $B \in X_k$ heißt *k-lineare Abbildung*, X_k ist Vektorraum.

Beispiel 5. $B \in L^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit $B(x, y, z) := (xyz, (x + y) \cdot z)^{\mathrm{T}}$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ ist 3-lineare Abbildung. (Beachte: B ist nicht linear als Abbildung auf $\mathbb{R}^3$.)

Satz 6. *Für $k \in \mathbb{N}$ ist $I_k : Y_k \to X_k$ mit*

$$(I_k A)(y_1, ..., y_k) := \underbrace{\Big(...\underbrace{\big(\underbrace{(A \cdot y_1)}_{\in Y_{k-1}} \cdot y_2\big)}_{\in Y_{k-2}} \cdot ... \cdot y_k\Big)}_{\in Y_0 = \mathbb{K}^m} \; \forall A \in Y_k, y_j \in \mathbb{K}^n, j = 1, ..., k \tag{4}$$

ein Isomorphismus bzgl. Vektorraumstruktur (also $X_k \simeq Y_k$).

Hinweis: Somit kann man $f^{(k)}$ auch als Element von X_k betrachten, d.h. $f^{(k)}(x) \in X_k = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Damit wird z.B. (2)

$$f'(x + y) \cdot z = f'(x) \cdot z + f''(x)(y, z) + o(|y|) \cdot z \; \forall z \in \mathbb{K}^n \tag{5}$$

und für $n = 1$ gilt $f^{(k)}(x)(y_1, ..., y_k) = \underbrace{f^{(k)}(x)}_{\in \mathbb{K}^n} \cdot \underbrace{(y_1 \cdot ... \cdot y_k)}_{\text{Produkt von Zahlen}}$ $\forall y_j \in \mathbb{K}$

Beweis. I_k ist offenbar linear auf Y_k, weiterhin ist I_k injektiv, denn $I_k(A) = 0$ g.d.w. $A = 0$. Zeige mittels vollständiger Induktion, dass I_k surjektiv ist:

(IA) Offenbar ist $x_1 = y_1$ und $I_1 A = A \implies I_1$ ist surjektiv.

(IS) Sei I_k surjektiv und $B \in X_{k+1}$. Setze $\tilde{B}_{y_1} := B(y_1, \cdot, ..., \cdot) \in X_k \; \forall y_1 \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{aligned} \tilde{B} \in L(\mathbb{K}^n, X_k) &\implies A := I{-}1_k \tilde{B} \in L(\mathbb{K}^n, Y_k) = y_{k+1} \qquad (6) \\ &\implies (I_{k+1}A)(y_1, ..., y_{k+1}) \overset{(4)}{=} \Big(...((\underbrace{Ay_1}_{\in Y_k})y_2)...y_{k+1}\Big) \\ &\qquad\qquad = \big(I_k(Ay_1)\big)(y_2, ..., y_{k+1}) \\ &\qquad\qquad \overset{(6)}{=} (\tilde{B}_{y_1})(y_2, ..., y_{k+1}) = B(y_1, ..., y_{k+1}) \\ &\implies B = I_{k+1}A \implies I_{k+1} \text{ ist surjektiv} \\ &\implies I_k \text{ ist isomorph } \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

■

25.2 Norm in X_k und Y_k

Für $A \in Y_k$ folgt aus rekursiver Definition: $\left(...\left(\left(A \cdot \frac{y_1}{|y_1|}\right)\frac{y_2}{|y_2|}\right)...\frac{y_k}{|y_k|}\right) \le \|A\|_{y_k} \; \forall y_j \in \mathbb{K}^n, y_j \neq 0$

$$\implies \Big(...\big((Ay_1)y_2\big)...y_k\Big) \le \|A\|_{y_k}|y_1||y_2|...|y_k| \; \forall y_1, ..., y_k \in \mathbb{K}^n. \qquad (7)$$

Verwende für $A \in X_k = L^k(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ die Norm $\|A\|_{X_k} := \sup\{|A(y_1, ..., y_k)| \mid y_j \in \mathbb{K}^n, |y_j| \le 1\}$.

Satz 7. *Mit Isomorphismus $I_k : Y_k \to X_k$ aus* Satz 6 *gilt* $\|I_k(A)\|_{X_k} = \|A\|_{Y_k}$ $A \in Y_k \; \forall A \in Y_k$.

Beweis. Selbststudium/Übungsaufgabe. ■

Bemerkung 8. $\|f^k(x)\|$ *ist unabhängig davon, ob man* $f^{(k)}(x)$ *als Element von* X_k *oder* Y_k *betrachtet.*

25.3 Partielle Ableitungen

Seien $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$, d.h. $x_j \in \mathbb{K}$, $e_1, ..., e_n$ Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^n$. Betrachte $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen. Wiederholung: Partielle Ableitung $f_{x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) = D_{x_j} f(x)$ ist Richtungsableitung $f'(x, e_j) = D_{e_j} f(x) \in L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m)$. Nenne $f_{x_1}(x), ..., f_{x_n}(x)$ *partielle Ableitungen 1. Ordnung* von f in x. Für $g : D \to X$ definieren wir partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} g(x) := g_{x_j}(x) \in L(\mathbb{K}, X)$. Analog zu *Satz 18.1* ist

$$g(x + te_j) = g(x) + g_{x_j}(x)t + o(t), \; t \longrightarrow 0, \; t \in \mathbb{K}. \qquad (9)$$

Für $g = f_{x_i} : D \to L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m)$ ist dann: $g_{x_j} \in L\big(\mathbb{K}, L(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m)\big) \simeq L^2(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m) \simeq \mathbb{K}^m$ die partielle Ableitung $f_{x_i x_j}(x)$ von f nach x_i und x_j. Andere Notationen sind

$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial_{x_i}} f(x), D_{x_i x_j} f(x), \ldots$ Diese $f_{x_i x_j}$ heißen *partielle Ableitungen 2. Ordnung* von f in x. Mittels Rekursion

$$f_{x_{j1} \ldots x_{jk} x_i}(x) := \frac{\partial}{\partial x_i} f_{x_{j1}, \ldots, x_{jk}}(x) \tag{10}$$

erhält man Schrittweise partielle Ableitung der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ von f in x $f_{x_{j1} \ldots x_{jk}}(x) = D_{x_{j1}} \ldots D_{x_{jk}} \ f(x) \in L^k(\mathbb{K}, \mathbb{K}^m)$. Man berechnet diese durch schrittweises Ableiten von $x_i \to f(x_1, \ldots, x_n), \ x_j \to f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, usw. .

Beispiel 9. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := y \cdot \sin x \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Dann:

$f_x(x, y) = y \cdot \cos x$	$f_y(x, y) = \sin x$
$f_{xx}(x, y) = -y \cdot \sin x$	$f_{yx}(x, y) = \cos x$
$f_{xy}(x, y) = \cos x$	$f_{yy}(x, y) = 0$

Beobachtung: $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

Wir verwenden die abkürzende Schreibweise $f_{x_j x_j x_j}(x) =: \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_j \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^3}{\partial x_j^3} f(x), \ f_{x_i x_j x_j x_l x_l}(x) =: \frac{\partial^5}{\partial x_l^2 \partial x_j^2 \partial x_i} f(x)$. Für $m = 1$ (d.h. $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$) sei

$$\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix} =: \text{Hess} \, f$$

die *Hesse-Matrix* (erhält alle partielle Ableitungen 2: Ordnung).

Beispiel 10. Sei $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^{\mathrm{T}} = (x_1^2 x_2, x_1 x_2 + x_2^2)^{\mathrm{T}}$. Dann $f_{x_1}(x_1, x_2) = (2x_1 x_2, x_2)^{\mathrm{T}}, f_{x_2}(x_1, x_2) = (x_1^2, x_1 + 2x_2)^{\mathrm{T}}$ D.h.

$$\begin{pmatrix} 2x_1 x_2 & x_1^2 \\ x_2 & x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

ist *Jakobi-Matrix* von f, ferner sind:

$$\text{Hess} \, f_1 = \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}, \ \text{Hess} \, f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Anschaulich: Alle partielle Ableitungen 2. Ordnung bilden eine "dreidimensionale Matrix".

Frage: Besteht ein Zusammenhang zwischen $f^{(k)}(x)$ und partiellen Ableitungen?

Theorem 11. *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, D$ offen, $x \in D$. Dann:*

(a) *Falls $f^{(k)}(x)$ existiert, dann existieren alle partielle Ableitungen der Ordnung k in x und*

$$f_{x_{j1} \ldots x_{jk}}(x) = f^{(k)}(x)(e_{jk}, \ldots, e_{j1}). \tag{11}$$

(b) *Falls alle partielle Ableitungen $f_{x_{j1}\dots x_{jk}}(y)$ der Ordnung k für alle $y \in B_r(x) \subset D$ für ein $r > 0$ existieren und falls diese alle stetig in x sind, dann ist f k-fach differenzierbar, d.h. $f^{(k)}(x)$ existiert.*

Bemerkung 12. (b) *ist wichtiges Kriterium zur Prüfung der Differenzierbarkeit, k-te Ableitung kann dann mittels* (11) *bestimmt werden.*

Beweis. Jeweils mittels vollständiger Induktion nach k; (a) basiert auf *Theorem 18.11*, (b) basiert auf *Theorem 19.14*. ■

Beispiel 13. (Zu *Beispiel 10*) $f^{(2)}(x) = f''(x) \in L^2(\mathbb{R}^2\mathbb{R}^2)$ existiert $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$ nach *Theorem 11* und kann als "Vektor von Hesse-Matrizen" dargestellt werden:

$$f^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} \text{Hess}\, f_1 \\ \text{Hess}\, f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Was ist nun $f''(x)(x_1, y_2)$ für (Vektoren) $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$?
$f''(x)(y_1, y_2) = f''(x)\left((y_{11}, y_{12})^{\mathrm{T}}, (y_{21}, y_{22})^{\mathrm{T}}\right)$
$= f^{(2)}(x)(y_{11}e_1 + y_{12}e_2, y_{21}e_1 + y_{22}e_2) = y_{11}f''(x)(e_1, y_2) + y_{12}f''(x)(e_2, y_2) = y_{11}y_{21}f''(x)(e_1, e_1) + y_{12}y_{21}f''(x)(e_2, e_1) + y_{11}y_{22}f''(x)(e_1, e_2) + y_{12}y_{22}f''(x)(e_2, e_2) \overset{(11)}{=} y_{11}y_{21}f_{x_1x_2}(x) + y_{12}y_{21}f_{x_1x_2}(x) + y_{11}y_{22}f_{x_2x_1}(x) + y_{12}y_{22}f_{x_2x_2}(x) \qquad (\in \mathbb{R}^2)$

$$= \begin{pmatrix} \langle (\text{Hess}\, f_1)(x) \cdot y_1, y_2 \rangle \\ \langle (\text{Hess}\, f_2)(x) \cdot y_1, y_2 \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Analoge Rechnung liefert allgemein:

Folgerung 14. *Für $f = (f_1, ..., f_m) : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, existiere $f^{(2)}(x)$ für $x \in D$. Dann:*

$$f^{(2)}(x)(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \langle (\text{Hess}\, f_1)(x) \cdot y_1, y_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle (\text{Hess}\, f_m)(x) \cdot y_1, y_2 \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{12}$$

Bemerkung 15. *Für höhere Ableitung wird Darstellung $f^{(k)}(x)(y_1, ..., y_k)$ mittels partiellen Ableitungen immer komplexer, wird aber selten gebraucht.*

Frage: Kann man Reihenfolge bei partiellen Ableitungen vertauschen? (Vgl. *Beispiel 9.*)

Beispiel 16. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ Dann

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ \\ \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Insbesondere ist $f_x(0,y) = -y \ \forall y \in \mathbb{R}$, also $f_{xy}(0,0) = -1$, analog $f_y(x,0) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Also $f_{yx}(0,0) = 1 \neq -1 = f_{xy}(0,0)$.

Satz 17 (Satz von Schwarz). *Für $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, D$ offen, mögen die partielle Ableitungen $f_{x_i}, f_{x_j}, f_{x_i,x_j}$ auf D existieren. Falls $f_{x_ix_j}$ stetig in $x \in D$ ist,*

$$\textit{dann existiert } f_{x_jx_i}(x) \textit{ und } f_{x_ix_j}(x) = f_{x_jx_i}(x). \tag{14}$$

Folgerung 18. *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, D$ offen, f k-fach differenzierbar (d.h. $f \in C^k(D,\mathbb{R}^m)$), dann existieren alle partielle Ableitungen bis Ordnung k und Reihenfolge kann beliebig vertauscht werden.*

Beweis. Existenz der partiellen Ableitungen und denen Stetigkeit folgt aus *Theorem 11*, beliebige Vertauschung der Reihenfolge kann durch schrittweises Vertauschen von zwei benachbarten Veränderlichen erzielt werden $\overset{\textit{Satz 17}}{\Longrightarrow}$ Behauptung. ■

Zur Veranschaulichung: $f_{x_3x_1x_2}(x) \overset{(10)}{=} D_{x_2}f_{x_3x_1}(x) \overset{\textit{Satz 17}}{=} D_{x_2}f_{x_1x_3}(x) \overset{(10)}{=} f_{x_1x_3x_2}(x) \overset{(10)}{=} (f_{x_1})_{x_3x_2}(x) \overset{\textit{Satz 17}}{=} (f_{x_1})_{x_2x_3}(x) \overset{(10)}{=} f_{x_1x_2x_3}(x)$.

Beweis. (Zu *Satz 17*) O.B.d.A. sei $m = 1$, fixiere $\epsilon > 0$, dann $\exists \delta > 0$ mit $x+se_i+te_j \in D$ und

$$\Big| f_{x_ix_j}\big(x + se_i + te_j\big) - f_{x_ix_j}(x) \Big| < \epsilon \ \forall s,t \in (-\delta,\delta). \tag{15}$$

$\varphi(s) := f(x + se_i + te_j) - f(x + se_i)$ ist differenzierbar auf $(-\delta,\delta)\ \forall t \in (-\delta,\delta) \underset{\textit{-satz}}{\overset{\textit{Mittelwert-}}{\Longrightarrow}}$ $\exists \sigma \in (0,s) : \varphi(s) - \varphi(0) = \varphi'(\sigma) \cdot s = \big(f_{x_i}(x + \sigma e_i + te_j) - f_{x_i}(x + \sigma e_i)\big) \cdot s$ Für $t \to f_{x_i}(x + \sigma e_i + te_j) : \exists \tau \in (0,t) : \varphi(s) - \varphi(0) = f_{x_ix_j}\underbrace{x + \sigma e_i + \tau e_j}_{=:\tilde{x}}st$ (σ, τ abhängig von s,t)

$$\Longrightarrow \left| \frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{st} - f_{x_ix_j}(x) \right| \leq \underbrace{\left| \frac{\varphi(s) - \varphi(0)}{st} - f_{x_ix_j}(\tilde{x}) \right|}_{=0} + |f_{x_ix_j}(\tilde{x}) - f_{x_ix_j}(x)|$$
$$< \epsilon \ \forall s,t \in (-\delta,\delta),\ \ s,t \neq 0. \tag{16}$$

Wegen $\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(s)-\varphi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+se_i+te_j)-f(x+se_i)}{t} - \frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} = f_{x_j}(x + se_i) - f_{x_j}(x)$ folgt aus (16):

$$\left| \frac{f_{x_j}(x + se_i) - f_{x_j}(x)}{s} \right| \leq \epsilon \ \forall s \in (-\delta,\delta), s \neq 0 \tag{17}$$

$\overset{\epsilon > 0}{\Longrightarrow} f_{x_jx_i}(x) = \lim\limits_{s\to 0} \frac{f_{x_j}(x+se_i)-f_{x_j}(x)}{s} \overset{(17)}{=} f_{x_ix_j}(x)$. ■

25.4 Anwendungen

Frage: Wann besitzt $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times n}$ Stammfunktion F? (Vgl. *Kapitel 20*, o.B.d.A. $m = 1$.)

Satz 19 (notwendige Integrabilitätsbedingung). *Sei $f = (f_1, ..., f_n) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, D$ Gebiet, f stetig differenzierbar. Damit f Stammfunktion $F : D \to \mathbb{R}$ besitzt, muss folgende* Integrabilitätsbedingung *gelten:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)\ \forall x \in D,\ i, j = 1, ..., n. \tag{18}$$

Bemerkung 20. (18) *ist hinreichend falls z.B. D konvex ist. (Vgl.* Analysis 3.*)*

Beweis. f habe Stammfunktion $F \implies F \in C^2(D) \overset{(20.5)}{\implies} F_{x_j}(x) = f_j(x)\ \forall x \in D,\ j = 1, ..., n \implies F_{x_j x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j(x)\ \forall x \in D,\ i, j = 1, ..., n \underset{\textit{Schwarz}}{\overset{\textit{Satz von}}{\implies}} F_{x_i x_j}(x) = F_{x_j x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)$. ■

Beispiel 21. Nochmals *Beispiel 20.11* mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(x, y) = (\alpha xy, x^2 + y^2)^{\mathrm{T}} \implies \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) = \alpha x,\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) = 2x \overset{(18)}{\implies} \alpha = 2$.

Satz 22. *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, D$ offen, konvex, f stetig differenzierbar. Dann:*

(a) *f ist konvex $\iff \langle f'(x), y - x\rangle \le f(y) - f(x)\ \forall x, y \in D$.*
(b) *falls sogar $f \in C^2(D)$, dann gilt: f ist konvex $\iff f''(x) = (\text{Hess} f)(x)$ ist positiv definit $\forall x \in D$.*

Beweis. (Vgl. Literatur.) ■

25.5 Taylorscher Satz

Ziel: Bessere lokale Approximation als Linearisierung. Verwende allgemein Polynome $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ der Ordnung k, d.h.

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + ... + \sum_{j_1,...,j_k=1}^{n} a_{j_1...j_k} x_{j_1} \cdot ... \cdot x_{j_k} \text{ mit } a_0, a_j, a_{ij}, ... \in \mathbb{K}. \tag{19}$$

Notation: $f^{(k)}(x)(y, ..., y) = f^{(k)}(x)y^k$. Wiederholung: $f \in C(D) : f(x + y) = f(x) + o(1), y \longrightarrow 0,\ f \in C^1(D) : f(x + y) = f(x) + f'(x)y + o(|y|), y \longrightarrow 0$.

Theorem 23 (Taylorscher Satz). *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, k-fach differenzierbar auf D, $x \in D$. Dann:*

$$f(x + y) = f(x) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x)y^j + R_k(y) \text{ falls } [x, x + y] \subset D, \tag{20}$$

wobei

$$|R_k(y)| \leq \frac{1}{k!}\left|f^{(k)}(x+\tau y)y^k\right| \leq \frac{1}{k!}\left\|f^{(k)}(x+\tau y)\right\||y|^k \text{ für ein } \tau = \tau(y) \in (0,1). \tag{21}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, m = 1$ *gilt sogar:*

$$R_k(y) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x+\tau y)y^k \text{ (Lagrangesches Restglied).} \tag{22}$$

Falls $f \in C^k(D, \mathbb{K}^m)$ *gilt:*

$$R_k(y) = \frac{1}{k!}f^k(x)y^k + o(|y|^k), y \longrightarrow 0. \tag{23}$$

Bemerkung 24. *Entscheidende Aussage in* Theorem 23 *ist nicht* (20)*, sondern Eigenschaft des Restgliedes.*

Beweis. Sei $[x, x+y] \subset D$, definiere $R_k(y) := f(x+y) - f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!}f^{(j)}(x)y^j \implies$ (20) und sei $\varphi(t) := f(x+y) - f(x+ty) - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{(1-t)^j}{j!}f^{(j)}(x+ty)y^i - (1-t)^k R_k(y)$. Offenbar $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$. Da f k-fach differenzierbar ist, ist $\varphi : [0,1] \to \mathbb{K}^m$ $\mathbb{R}$-differenzierbar auf $(0,1)$ mit

$$\begin{aligned}\varphi'(t) =& -f'(x+ty)\cdot y + \sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{(1-t)^{j-1}}{(j-1)!}f^{(j)}(x+ty)y^j - \frac{(1-t)^j}{j!}f^{(j+1)}(x+ty)y^{j+1}\right)\\ &+ k(1-t)^{k-1}R_k(y)\\ =& -\frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x+ty)y^k + k(1-t)^{k-1}R_k(y).\end{aligned} \tag{24}$$

Zu (a): Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, m = 1$: Nach MWS $\exists \tau \in (0,1) : 0 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \overset{(24)}{\implies}$ (22).

Zu (b): zu (21) mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Sei $\psi(t) := \langle \varphi(t), v\rangle$ für $v \in \mathbb{R}^m$ fest $\implies \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $(0,1)$ mit $\psi'(t) = \langle \varphi'(t), v\rangle \overset{MWS}{\implies} \exists \tau \in (0,1) : 0 = \langle \varphi'(\tau), v\rangle$

$$\implies \langle R_k(y), v\rangle = \frac{1}{k!}\langle f^{(k)}(x+\tau y)y^k, v\rangle \text{ mit } v = \frac{R_k(y)}{|R_k(y)|}, (|R_k(y)| \neq 0, \text{ sonst klar}): \tag{25}$$

$\langle R_k(y), v\rangle = |R_k(y)| = \frac{1}{k!}\langle f^{(k)}(x+\tau y)y^k, v\rangle \overset{|v|=1}{\leq} \frac{1}{k!}\left|f^{(k)}(x+\tau y)y^k\right| \overset{(7)}{\implies}$ (21).

Zu (c): $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Identifiziere $\mathbb{C}^m$ mit $\mathbb{R}^{2m}$ und setze $\psi(t) := \langle \varphi(t), v\rangle_{\mathbb{R}^{2m}}$. Beachte: $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}\Re\varphi_j(t) = \Re\frac{d}{dt}\varphi_j(t)$ $\forall j$ (vgl. Beweis von *Theorem 19.9*) und $\big\langle R_k(y), R_k(y)\big\rangle_{\mathbb{R}^{2n}} = \big|R_k(y)\big|^2_{\mathbb{C}^m}$. Argumentiere nun wie in (b).

Zu (d): Zu (23): Setze $R_k(y) = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)y^k + r_k(y)$ in (25). Wähle $v = \frac{r_k(y)}{|r_k(y)|}$(falls $r_k(y) \neq 0) \implies \frac{|r_k(y)|}{|y|^k} \leq \frac{1}{k!|y|^k}\cdot\left|\big(f^{(k)}(x+\tau(y)y) - f^{(k)}(x)\big)y^k\right| \overset{(8)}{\leq} \frac{1}{k!}\left\|f^{(k)}(x+\tau(y)y) - f^{(k)}(x)\right\| \overset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, da $f^{(k)}$ stetig ist, d.h. $r_k(y) = o(|y|^k), y \longrightarrow 0$.

■

Rechte Seite in *(20)* ohne Restglied heißt *Taylorpolynom* von f in x von Grad $k-1$ und *(20)* heißt *Taylorentwicklung* von f in x.

Folgerung 15 (Taylorformel mit partiellen Ableitungen). *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, f k-fach differenzierbar auf D, $x \in D$, $[x, x+y] \subset D$. Dann:*

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} \sum_{j_1,\dots,j_l=1}^{n} f_{x_{j_l} \dots x_{j_1}}(x) y_{j_1 \dots j_l} + R_k(y). \tag{26}$$

Wobei $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$ (d.h. $y_j \in \mathbb{K}$ sind Zahlen).

Beweis. Selbststudium. Benutze (11). ■

Bemerkung 26. *Falls alle partielle Ableitungen von f bis Ordnung k existieren und stetig sind auf D, dann ist $f \in C^k(D)$ und* (26) *gilt (vgl.* Theorem 11*).*

Beispiel 27. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \cos x$. Für $x = 0$ gilt: $\cos y = \cos 0 + \frac{1}{1!}(\cos' 0)y + \frac{1}{2!}(\cos'' 0)y^2 + ... + \frac{1}{k!}(\cos^{(k)} 0)y^k + o(|y|^k) \overset{k=8}{=} 1 - 0 \cdot y - \frac{1}{2}y^2 + 0 \cdot y^3 + \frac{1}{24}y^4 - 0 \cdot y^5 - \frac{1}{720}y^6 + 0 \cdot y^7 + \frac{1}{40320}y^8 + o(|y|^8)$ (bleibt auch für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ richtig).

Beispiel 28. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x_1^2 + x_1 x_2 + \sin x_2$, wobei $x = (x_1, x_2)$. Taylorentwicklung von f in $x_0 = (1, \pi)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ ist: $f(x+y) = f(x_0) + f'(x_0)y + \frac{1}{2!}f''(x_0)y^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)y^3 + o(|y|^2)$. Offenbar:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + \cos x_2 \end{pmatrix}, \quad f''(x) = (\operatorname{Hess} f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -\sin x_2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ alle dritte partielle Ableitungen sind Null außer $f_{x_2 x_2 x_2} = -\cos x_2$. $f(x_0 + y) = f(x_0) + f_{x_1}(x_0)y_1 + f_{x_2}(x_0)y_2 + \frac{1}{2}f_{x_1 x_1}(x_0)y_1^2 + \frac{2}{2}f_{x_1 x_2}(x_0)y_1 y_2 + \frac{1}{2}f_{x_2 x_2}(x_0)y_2^2 + \frac{1}{6}f_{x_2 x_2 x_2}(x_0)y_2^3 + o(|y|^3) = 1 + \pi + (2+\pi)y_1 + 0 \cdot y_2 + y_1^2 + y_1 y_2 + 0 \cdot y_2^2 - \frac{1}{6}y_2^3 + o(|y|^3), y \longrightarrow 0$.

Frage: Falls $f \in C^\infty(D)$, könnte man vermuten, dass

$$f(x+y) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) y^k? \tag{27}$$

Die rechte Seite heißt *Taylorreihe.*

Beispiel 29. Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) := \sin x$, für $x = 0$:

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ (-1)^l & \text{für } k = 2l+1. \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ (27) hat Form: $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \mp ... = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{y^{2l+1}}{(2l+1)!}$ gilt $\forall y \in \mathbb{C}$ (vgl. Definition von sin in *Kapitel 13*), analog cos.

Beispiel 30. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für x>0,} \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Nach *Beispiel 4*: $f \in C^\infty(\mathbb{R}), f^{(k)}(0)\ \forall k \in \mathbb{N} \overset{(27)}{\underset{x=0}{\Longrightarrow}} f(x) = 0\ \forall y \implies \lightning \implies$ (27) gilt nicht für alle $f \in C^\infty(D)$.

Wiederholung: Reihe konvergiert falls Folge von Partialsummen konvergiert. Damit (27) gilt, muss die Reihe auch gegen $f(x+y)$ konvergieren.

Satz 31 (Taylorreihe). *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, D offen, $f \in \mathbb{C}^\infty(D, \mathbb{K}^m)$, $x \in D, B_r(x) \subset D$. Falls $\lim_{k\to\infty} R_k(y) = 0\ \forall y \in B_r(x)$, dann gilt die* Taylorformel (27) *$\forall y \in B_r(x)$ und f heißt* analytisch *in x.*

Beweis. Behauptung folgt direkt aus *Theorem 23*. ∎

Beispiel 32. Funktionen $\sin, \cos, \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind jeweils analytisch in allen $x \in \mathbb{C}$ und (27) gilt jeweils $\forall y \in \mathbb{C}$. (Beweis ist klar für $x = 0$ nach Definition, für $x \neq 0$ ist dies Übungsaufgabe/Selbststudium.)

26 Extremwerte

26.1 Lokale Extrema ohne Nebenbedingung

Betrachte $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, f differenzierbar. Notwendige Bedingung: f hat lokales Minimum bzw. Maximum in $x \in D \implies f'(x) = 0$ (vgl. *Theorem 19.1*). Frage: Was ist hinreichende Bedingung? $f^{(k)}$ für $k \geq 2$ heißt *positiv definit* (bzw. *negativ definit*) falls

$$f^{(k)}(x)y^k \overset{(<)}{>} 0 \;\forall y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \tag{1}$$

und *positiv semidefinit* (bzw. *negativ semidefinit*) falls $f^{(k)}(x)y^k \overset{(\leq)}{\geq} 0 \;\forall y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. $f^{(k)}(x)$ heißt *indefinit* falls

$$\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} : f^{(k)}(x)y_1^k < 0 < f^{(k)}(x)y_2^k. \tag{2}$$

Hinweis: Falls k ungerade ist, $f^{(k)}(x) \neq 0$, dann ist $f^{(k)}(x)$ indefinit (denn $f^{(k)}(x)(-y)^k = (-1)^k f^{(k)}\;(x)y^k$).

Satz 1 (hinreichende Extremwertbedingung). *Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, D$ offen, $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, $x \in D, k \geq 2$ und sei*

$$f^{(1)}(x) = ... = f^{(k-1)}(x) = 0, \tag{3}$$

dann gilt:

(a) *f hat strenges lokales Minimum (bzw. Maximum) in x falls $f^{(k)}(x)$ positiv (bzw. negativ) definit ist.*
(b) *f hat weder Minimum noch Maximum falls $f^{(k)}(x)$ indefinit ist.*

Bemerkung 2. (1) *Falls $f^{(k)}(x)$ positiv (bzw. negativ) semidefinit ist, dann sind keine Aussagen möglich: Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$. f hat Minimum in $x = 0$ aber $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^3$ hat weder Minimum, noch Maximum in $x = 0$.*
(2) (b) *liefert: $f^{(k)}(x)$ positiv (bzw. negativ) semidefinit ist notwendige Bedingung für lokales Minimum (bzw. Maximum) in x, falls* (3) *gilt.*

Beweis. Zu (a): Für Minimum (Maximum analog): Sei $f^{(k)}(x)$ positiv definit, Abbildung $y \to f^{(k)}(x)y^k$ stetig (folgt aus *25.8*), $S := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y| = 1\}$ kompakt $\overset{\textit{Theorem 15.3}}{\implies} \exists \tilde{y} \in S : f^{(k)}(x)y^k \geq f^{(k)}(x)\tilde{y}^k =: \gamma > 0 \;\forall y \in S$ $\overset{\textit{Theorem 25.23}}{\implies} f(x+y) = f(x) + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x)y^k + o(|y|^k)$

$$= f(x) + \frac{1}{k!}|y|^k \left(\underbrace{f^{(k)}(x)\left(\frac{y}{|y|}\right)^k}_{\geq \gamma} + \underbrace{o(1)}_{\geq -\frac{\gamma}{2}} \right), y \longrightarrow 0$$

falls $y \in B_r(0), r > 0$ klein $\geq f(x) + \frac{\gamma}{2k!}|y|^k \;\forall y \in B_r(0) \implies$ in x ist strenges lokales Minimum $\implies$ Behauptung.

Zu (b): Wähle y_1, y_2 gemäß (2), o.B.d.A. $|y_1| = |y_2| = 1 \underset{|t| \text{ klein}}{\overset{\text{analog zu (a)}}{\Longrightarrow}} f(x + ty_1) = f(x) + \frac{t^k}{k!}\big(f^{(k)}(x)y_1^k + o(1)\big) < f(x)$, $f(x + ty_2) = f(x) + \frac{t^k}{k!}\big(f^{(k)}(x)y_2^k + o(1)\big) > f(x) \Longrightarrow$ Behauptung.

■

26.2 Definitheit in Anwendungen

Wichtiger Spezialfall: Sei k=2 (vgl. Lineare Algebra), dann ist $f''(x) \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n\times n}$ (Hesse Matrix) und $f''(x)y^2 = f''(x)(y, y) = \big\langle (\operatorname{Hess} f)(x)y, y\big\rangle$ (vgl. *25.12*). Für Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von $f''(x)$ gilt:

- A ist positiv (bzw. negativ) definit $\Longleftrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv (bzw. negativ).
- A ist indefinit $\Longrightarrow$ es existieren positive und negative Eigenwerte.

Symmetrische Matrix $A = \big(a_{ij}\big) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist positiv definit g.d.w. alle führenden Hauptminorem positiv sind, d.h.:

$$\alpha_k := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0 \ \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Beachte: A ist negativ definit $\Longleftrightarrow$ $-A$ ist positiv definit. Spezialfall: Sei $n = 2$, dann $\det A < 0 \Longleftrightarrow A$ ist indefinit ($\alpha_1 < 0, \det A > 0 \Longleftrightarrow A$ ist negativ definit).

Beispiel 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \cos x_2 \Longrightarrow f'(x_1, x_2) = (-2x_1, -\sin x_2)^{\mathrm{T}} = 0 \Longrightarrow x_1 = 0, x_2 = k\pi$, d.h. $\tilde{x} = (0, k\pi), k \in \mathbb{Z}$ sind Kandidaten für Extrema $\Longrightarrow f''(\tilde{x})$ ist positiv definit für ungerade $k \Longrightarrow$ in $\tilde{x}$ sind lokale Minima für k ungerade, $f''(\tilde{x})$ ist indefinit für gerade $k \Longrightarrow$ in $\tilde{x}$ sind keine Extrema für k gerade.

26.3 Lokale Extrema mit Gleichungsbedingung

Betrachte $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar, D offen, $g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Ziel: Bestimme Extrema von f auf Menge $G := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$, d.h. suche notwendige Bedingung. Motivation: Für $m = 1$: Gradienten $f'(x_{\max}), g'(x_{\max})$ stehen senkrecht auf Niveaumenge $G \overset{\text{Satz 18.5}}{\Longrightarrow} \exists\lambda \in \mathbb{R} : f'(x_{\max}) + \lambda g'(x_{\max}) = 0$.

Satz 4 (Lagrangesche Multiplikatorenregel, notwendige Bedingung). *Seien* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g : D \to \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar,* D *offen und sei* $x \in D$ *lokales Extremum von* f *bzgl.* G*, d.h.* $\exists r > 0 : f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(y) \ \forall y \in B_r(x)$ *mit* $g(y) = 0$*. Falls* $g'(x)$ regulär *ist, d.h.*

$$\operatorname{rang} g'(x) = m, \tag{4}$$

dann

$$\exists\lambda \in \mathbb{R}^m : f'(x) + \lambda^T \cdot g'(x) = 0. \tag{5}$$

λ *heißt* Lagrangescher Multiplikator.

Bemerkung 5. *Offenbar nur für $m \leq n$.*

- *Extremum in x heißt* regulär*, falls* (4) *gilt.*
- *Zur Bestimmung der Kandidaten für Extrema:* (5) *liefert n Gleichungen für $n+m$ Unbekannten (x, λ) aber* (5) *mit $g(x) = 0$ liefert $n+m$ Gleichungen für $n+m$ Unbekannten (x, λ).*

Beweis. Vgl. Literatur. ∎

Beispiel 6. Bestimme reguläre Extrema von f auf $G = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid g(x) = 0\}$ mit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g(x, y, z) := (x^2 + 4y^2 - 1, z)^{\mathrm{T}}$. Betrachte für $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$0 = f'(x, y, z) + \lambda^T \cdot g'(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) + \lambda^T \cdot \begin{pmatrix} 2x & 8y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

d.h. $2x + 2\lambda_1 x = 0$, $2y + 8\lambda_1 y = 0$, $2z + \lambda_2 = 0$, $x^2 + 4y^2 = 1$, $z = 0 \implies z = 0, \lambda_2 = 0, x(1 + \lambda_1) = 0, y(1 + 4\lambda_1) = 0, x^2 + 4y^2 = 1$. Falls $-x \neq 0$, dann $\lambda_1 = -1, y = 0, x = \pm 1$, falls $-x = 0$, dann $y = \pm\frac{1}{2}, \lambda_1 = -\frac{1}{4}$. Offenbar ist $\operatorname{rang} g'(x, y, z) = 2$ für $(\pm 1, 0, 0), (0, \pm\frac{1}{2}, 0) \implies$ beide sind Kandidaten für reguläre Extrema $\big($vgl. g' in (6) $\big)$. Da G Ellipse in (x, y)-Ebene ist und $f = \|\cdot\|^2$, prüft man leicht direkt, dass sich Minimum in $(0, \pm\frac{1}{2}, 0)$ und Maximum in $(\pm 1, 0, 0)$ befinden.

26.4 Globale Extrema mit abstrakter Nebenbedingung

Betrachte $f : \overline{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, D$ offen, f stetig auf $\overline{D}$, differenzierbar auf D. Existenz: (nach *Theorem 15.3*) D ist beschränkt $\overset{\overline{D} \text{ ist kompakt}}{\implies}$ f besitzt auf $\overline{D}$ Minimum und Maximum. Ziel: Bestimme globale Extremalstellen $x_{\min}, x_{\max}$. Strategie:

(a) Bestimme lokale Extrema in D,
(b) Bestime globale Extrema auf ∂D,
(c) Vergleiche Extrema aus (a) und (b).

Beispiel 7. Sei $f(x_1, x_2) = x_1^2 + \cos x_2$ mit $D = (-1, 1) \times (0, 4)$ (vgl. *Beispiel 3*).

(a) Lokale Extrema in D: $f(0, \pi) = -1$ lokales Minimum.
(b) Globale Extrema auf ∂D:
    (1) $x_1 = \pm 1$: Betrachte $x_2 \to f(\pm 1, x_2) = 1 + \cos x_2$ auf $[0, 4]$. Offenbar $0 = f(\pm 1, \pi) \leq f(\pm 1, x_2) \leq f(\pm 1, 0) = 2$.
    (2) $x_2 = 0$: Betrachte $x_1 \to f(x_1, 0) = x_1^2 + 1$ auf $[-1, 1]$. Offenbar $0 = f(\pm 1, \pi) \leq f(\pm 1, x_2) \leq f(\pm 1, 0) = 2$.
    (3) $x_2 = 4$: Betrachte $x_1 \to x_1^2 + \cos 4$ auf $[-1, 1]$. $\cos 4 = f(0, 4) \leq f(x_1, 4) \leq f(\pm 1, 4) = 1 + \cos 4$.
(c) Vergleich: $x_{\min} = (0, \pi), x_{\max} = (\pm 1, 0)$.

Hinweis: Betrachte für Extrema in (6) eventuell $f_{x_2}(\pm 1, x_2) = -\sin x_2 = 0$ bzw. $f_{x_1}(x_1, 0) = 2x_1 = 0$ usw.

27 Inverse und implizite Funktionen

Frage: Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ differenzierbar, $x \in D$. Wann existiert - zunächst lokal - differenzierbare Umkehrfunktion? Vorbetrachtung: Für f affin linear: Sei $f(x) = Ax + a$ mit $A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, dann liefert lineare Algebra:

- f ist injektiv $\iff \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\} = \{0\} \implies n \leq m$,
- f surjektiv $\implies n \geq m$,
- Bild $f(\mathbb{K}^n) \subset \mathbb{K}^m$ ist affiner Unterraum mit $\dim f(\mathbb{K}^n) \leq n$.

Offenbar ist f^{-1} existent falls f injektiv ist. Damit f^{-1} differenzierbar in $y \in \mathbb{K}^m$ ist, muss $B_\epsilon(y) \subset f(\mathbb{K}^m)$ für ein $\epsilon > 0$ (d.h. y ist innerer Punkt des Bildes) $\overset{f \text{ ist}}{\underset{\text{affin}linear}{\Longrightarrow}} f^{-1}$ existiert und ist differenzierbar (nur für $n = m$ möglich). Dann gilt: f^{-1} existiert und ist differenzierbar $\iff A \in L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ist regulär. Für allgemeine Funktion f: Wann kann man eine differenzierbare Umkehrfunktion in der Umgebung von $f(x)$ erwarten?

- Falls $f'(x)$ regulär ist: scheinbar,
- falls $f'(x)$ nicht regulär ist: ungewiss (im Wendepunkt x_1 und Extremum x_2, f^{-1} existiert nur lokal).

Beispiel 1. Seien $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_j(x) = x^j$. In Umgebung von $x = 0$ sind f_1, f_3 invertierbar, f_2 nicht invertierbar, wobei $f_1'(0) = 1$ regulär und $f_2'(0) = f_3'(0) = 0$ nicht regulär sind.

Beispiel 2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$

Analog zu *Beispiel 17.22* gilt $f'(0) = 1$, d.h. $f'(0)$ ist regulär f ist in keiner Umgebung von $x = 0$ invertierbar. (Problem: f' ist nicht stetig in $x = 0$, Ausblick: f ist invertierbar falls f stetig differenzierbar und $f'(x)$ regulär ist.)

Lemma 3. *Seien $f : U \subset \mathbb{K}^n \to V \subset \mathbb{K}^m, U, V$ offen, f Diffeomorphismus mit $f(U) = V$. Dann ist $n = m$.*

Beweis. Sei $y = f(x) \in V$ für $x \in U \implies f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(x)) = y \overset{\textit{Ketten-}}{\underset{\textit{-regel}}{\Longrightarrow}}$ $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$, $f'(x) \cdot \big(f^{-1}(y)\big)' = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m} \implies \mathcal{R}\big((f^{-1})'(y)\big) = \mathbb{K}^n \implies n \leq m$ und $\mathcal{R}\big(f'(x)\big) = \mathbb{K}^m \implies m \leq n \implies m = n$. ■

Frage: Wie löst man Gleichungen der Form $f(y) = 0$? Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^m, (x, y) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^l$. Bestimme Lösung y in Abhängigkeit von Parameter x für Gleichung

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Anwendung: Manchmal hängt Lösung $y = y(x)$ stetig/differenzierbar von Parameter x ab.

Beispiel 4. Sei $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Betrachte Niveaumenge $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ (entspricht Kurve in $\mathbb{R}^2$). I.a. gibt es mehrere Lösungen von (1) für $\tilde{x}$ fest. Betrachte deshalb lokale Lösungen, d.h. fixiere $(x_0, y_0) \in N$ und suche Lösungen in Umgebung. Frage: Was passiert bei (x_j, y_j)?

$j = 1:$ Kreuzungspunkt, d.h. es existiert keine eindeutige Lösung y (offenbar $f'(x_1, y_1) = 0$).
$j = 2:$ Keine eindeutige Lösung y (offenbar $f_y(x_2, y_2) = f'(x_2, y_2) \cdot (0, 1) = 0$).
$j = 3:$ Eindeutige Lösung y, aber Grenzfall mit $f_y(x_3, y_3) = 0$.
$j = 4:$ Eindeutige Lösung y und offenbar $f_y(x_4, x_4) \neq 0$.

Vermutung: Lokale Lösung existiert falls $f_y(x_0, y_0)$ regulär ist. Allgemein:

(a) Bestimme lokale Lösungen, d.h. in Umgebung einer Lösung $(x_0, y_0) \in D$.
(b) Lokal eindeutige Lösung y ist erforderlich $\forall x \implies y \mapsto f(x, y)$ muss invertierbar sein für festes $x \implies$ ist i.a. nur für $l = m$ möglich (vgl. *Lemma 3*). Betrachte z.B. f affin linear in y, d.h. (1) hat Form $f(x + y) = A(x)y + b(x) = 0$ mit $A(x) \in L(\mathbb{K}^l, \mathbb{K}^m), b(x) \in \mathbb{K}^m \implies$ betrachte somit $f : D \subset \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m \implies$ für gegebenes x hat (1) m skalare Gleichungen mit m skalaren Unbekannten: $f^j(x_1, ..., x_n, y_j, ..., y_m) = 0$.

Faustregel: Wie bei linearen Gleichungssystemen benötige genau m skalaren Gleichungen zur Bestimmung von m skalaren Unbekannten. Mehr Gleichungen heißt i.A. keine Lösung, weniger Gleichungen i.A. viele Lösungen. Funktion $\tilde{y} : \tilde{D} \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ heißt *(lokale) Lösung* von (1) in x auf $\tilde{D}$ falls

$$f\big(x, \tilde{y}(x)\big) = 0 \ \forall x \in \tilde{D}. \tag{2}$$

Man sagt: (1) beschreibt Funktion $\tilde{y}$ implizit (d.h. nicht explizit). Häufig schreibt man $y(x)$ statt $\tilde{y}(x)$. Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$, D offen. $f_x(x, y)$ bzw. $f_y(x, y)$ ist *Ableitung* der Funktion $x \mapsto f(x, y)$ (y ist fest) im Punkt x bzw. vom $y \mapsto f(x, y)$ (x ist fest) im Punkt y und heißt *partielle Ableitung* von f in (x, y) bzgl. x bzw. y.

Theorem 5 (Satz über implizite Fuktionen). *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m$, D offen, f stetig und*

(a) $f(x_0, y_0) = 0$ *für ein* $(x_0, y_0) \in D$,
(b) *partielle Ableitung* $f_y : D \to L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^m)$ *existiert, ist stetig in* (x_0, y_0) *und* $f_y(x_0, y_0)$ *ist regulär.*

Dann:

(1) $\exists r, \rho > 0$ *mit:* $\forall x \in B_r(x_0)\ \exists! y = \tilde{y}(x) \in B_\rho(y_0)$ *mit* $f(x, \tilde{y}(x)) = 0$ *und* $\tilde{y} : B_r(x_0) \to B_\rho(y_0)$ *ist stetig. (*Beachte: $B_r(x_0) \times B_\rho(y_0) \subset D$.*)*
(2) *Falls zusätzlich* $f : D \to \mathbb{K}^m$ *stetig differenzierbar ist, dann ist auch* $\tilde{y}$ *stetig differenzierbar auf* $B_r(x_0)$ *mit*

$$\tilde{y}'(x) = -\underbrace{f_y\Big(x, \tilde{y}(x)\Big)^{-1}}_{\in \mathbb{K}^{m \times m}} \cdot \underbrace{f_x\Big(x, \tilde{y}(x)\Big)}_{\in \mathbb{K}^{m \times m}} \in \mathbb{K}^{m \times m}.$$

Die Menge aller regulären linearen Abbildungen

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in L(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \mid A \text{ ist regulär}\}$$

bildet zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die *allgemeine lineare Gruppe* (engl. *general linear group*).

Lemma 6. (a) *Sei* $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}), B \in L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n), \|B-A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \implies B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$.
(b) $\varphi : \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ *mit* $\varphi(A) = A^{-1}$ *ist stetig.*

Hinweis: (a) liefert, dass $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \subset L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^n)$ offen ist.

Beweis. Zu (a): Es ist $\|\mathrm{id} - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A-B)\| \leq \|A^{-1}\|\|A-B\| < 1$,

$$(\mathrm{id} - A^{-1}B)x\| \leq \|\mathrm{id} - A^{-1}B\||x| < |x| \ \forall x \neq 0. \tag{3}$$

Sei $A^{-1}Bx = 0$ für $x \neq 0 \overset{(3)}{\implies} ↯ \implies C := A^{-1}B$ ist regulär $\implies B = AC$ ist regulär.

Zu (b): Fixiere $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ und betrachte $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ mit

$$\|B-A\| \leq \frac{1}{2\|A^{-1}\|}. \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\forall y \in \mathbb{K}^n}{\implies} |B^{-1}y| &= |A^{-1}AB^{-1}y| \leq \|A^{-1}\| \cdot |AB^{-1}y| \\
&= \|A^{-1}\||(A-B)B^{-1}y + y| \\
&\leq \|A^{-1}\| \ (\|A-B\||B^{-1}y| + |y|) \\
&\overset{(4)}{\leq} \frac{1}{2}|B^{-1}y| + \|A^{-1}\||y| \\
\implies |B^{-1}y| &\leq 2\|A^{-1}\||y| \ \forall y \in \mathbb{K}^n \implies \|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\| \\
\implies \ \|\varphi(B) - \varphi(A)\| &= \|B^{-1} - A^{-1}\| = \|B^{-1}(A-B)A^{-1}\| \\
&\leq \|B^{-1}\|\|A-B\|\|A^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\|^2 \cdot \|A-B\|
\end{aligned}$$

$\implies \lim_{B \to A} \varphi(B) = \varphi(A) \implies \varphi$ ist stetig in $A \overset{A \text{ ist}}{\underset{\text{stetig}}{\implies}}$ Behauptung. ∎

Beweis. (Zu *Theorem 5*) Offenbar ist $f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x,y)$. Setze $\varphi(x,y) := y - f_y(x_0,y_0)^{-1}f(x,y) \ \forall (x,y) \in D$.

Zu (a): Offenbar existieren partielle Ableitungen $\varphi_y(x,y) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m} - f_y(x_0,y_0)^{-1}f_y(x,y) \ \forall (x,y) \in D$. Da f_y stetig in (x_0,y_0) ist und $\varphi_y(x_0,y_0) = 0$ existiert konvexe Umgebung $U(x_0,y_0) \subset D$ von (x_0,y_0) (z.B. Kugel): $\|\varphi_y(x,y)\| < \frac{1}{2} \ \forall (x,y) \in U(x_0,y_0)$. Für feste $(x,y),(x,z) \in U(x_0,y_0)$ liefert *Schrankensatz* ein $\tau \in (0,1)$:

$$|\varphi(x,y) - \varphi(x,z)| \leq \|\varphi_y(x, \underbrace{z+\tau}_{\in U(x_0,y_0)|y-z|})\||y-z| \leq \frac{1}{2}|y-z| \ \forall (x,y),(x,z) \in U(x_0,y_0). \tag{5}$$

Nun existiert $\rho > 0 : \overline{B_\rho(x_0) \times B_\rho(y_0)} \subset U(x_0,y_0)$. Da f stetig ist und $f(x_0,y_0) = 0$ existiert $r > 0$ mit $\|f_y(x_0,y_0)^{-1}f(x,y_0)\| < \frac{1}{2}\rho \ \forall x \in B_r(x_0)$

$\Longrightarrow \quad |\varphi(x,y) - y_0| \leq |\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0)| + |\varphi(x,y_0) - y_0| \overset{(5)}{\leq}$ $\frac{1}{2}|y-y_0| + \|f_y(x_0,y_0)^{-1}\||f(x,y_0)| < \rho \ \forall x \in B_r(x_0),\ y \in \overline{B_\rho(y_0)}$

$$\Longrightarrow \varphi(x,\cdot) : \overline{B_\rho(y_0)} \to B_\rho(y_0) \ \forall x \in B_r(x_0) \tag{6}$$

und $\varphi(x,\cdot)$ ist kontraktiv nach (5) $\forall x \in B_r(x_0)$

$$\overset{\textit{Theorem 15.20}}{\Longrightarrow} \forall x \in B_r(x_0)\ \exists!\text{ Fixpunkt } y = \tilde{y}(x) \in \overline{B_\rho(y_0)} \text{ mit } \tilde{y}(x) = \varphi(x,\tilde{y}(x)). \tag{7}$$

Offenbar ist (7) $\iff f_y(x_0,y_0)^{-1}f(x,\tilde{y}(x)) = 0 \iff f(x,\tilde{y}(x)) = 0$. Wegen (6) und (7) ist sogar $\tilde{y}(x) \in B_\rho(y_0) \Longrightarrow$ Behauptung (1) bis auf Stetigkeit von $\tilde{y}$.

Zu (b): Zeige $\tilde{y}$ ist stetig: Für $x_1, x_2 \in B_r(x_0)$ gilt: $|\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| \overset{(7)}{=} |\varphi(x_2,\tilde{y}(x_2)) - \varphi(x_1,\tilde{y}(x_1))| \leq |\varphi(x_2,\tilde{y}(x_2)) - \varphi(x_2,\tilde{y}(x_1))| + |\varphi(x_2,\tilde{y}(x_1)) - \varphi(x_1,\tilde{y}(x_1))| \underset{\text{Def } \varphi}{\overset{(5)}{\Longrightarrow}}$
$\frac{1}{2}|\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| +$
$\|f_y(x_0,y_0)^{-1}\| \cdot |f(x_2,\tilde{y}(x_1)) - f(x_1,\tilde{y}(x_1))|$

$$|\tilde{y}(x_2) - \tilde{y}(x_1)| \leq 2 \cdot \|f_y(x_0,y_0)^{-1}\||f(x_2,\tilde{y}(x_1)) - f(x_1,\tilde{y}(x_1))| \tag{8}$$

da f stetig ist, folgt $\tilde{y}$ ist stetig auf $B_r(x_0)$.

Zu (c): Zeige (2): Fixiere $x \in B_r(x_0), z \in \mathbb{K}^n$. Da f differenzierbar und $\tilde{y}$ Lösung ist, gilt für $|t|$ klein nach *Satz 17.1.(c)*: $0 = f(x+tz, \tilde{y}(x+tz)) - f(x,\tilde{y}(x))$

$$= \mathrm{D}f(x,\tilde{y}(x)) \cdot \begin{pmatrix} tz \\ \tilde{y}(x+tz) - \tilde{y}(x) \end{pmatrix} + \underbrace{r(t)}_{\overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0} \cdot \begin{pmatrix} tz \\ \tilde{y}(x+tz) - \tilde{y}(x) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow 0 = f_x(x,\tilde{y}(x)) \cdot (tz) + f_y(x,\tilde{y}(x)) \cdot (\tilde{y}(x+tz) - \tilde{y}(x)) + \underbrace{\underbrace{r(t)}_{\longrightarrow 0} \cdot \big(tz, \tilde{y}(x+tz) - \tilde{y}(x)\big)^{\mathrm{T}}}_{=:R(t)}. \tag{9}$$

Wegen (8) existiert $c > 0$:

$$\begin{aligned} |\tilde{y}(x+tz) - \tilde{y}(x)| &\leq c|f(x+tz,\tilde{y}(x)) - f(x,\tilde{y}(x))| \\ &= c|f_x(x,\tilde{y}(x)) \cdot (tz) + o(t)| \\ &\leq c\big(\|f_x(x,\tilde{y}(x))\||z||t| + o(1)|t|\big) \\ &\leq c\big(\|f_x(x,\tilde{y}(x))\||z| + o(1)\big)|t| \text{ für } |t| \text{ klein.} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow R(t) = o(t),\ t \longrightarrow 0$. Wegen $f_y(x_0,\tilde{y}(x_0)) \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{K})$, f_y ist stetig, $\tilde{y}$ ist stetig $\overset{\textit{Lemma 6}}{\Longrightarrow}$ für evtl. kleineres $t > 0$ als oben: $f_y(x,\tilde{y}(x)) \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{K})\ \forall x \in B_r(x_0) \overset{(9)}{\Longrightarrow} \tilde{y}(x+tz) - \tilde{y}(x) = -f_y(x,\tilde{y}(x))^{-1}f_x(x,\tilde{y}(x)) \cdot (tz) + o(t),\ t \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow$ $\tilde{y}'(x;z)$ existiert $\forall z \in \mathbb{K}^n$ mit

$$\tilde{y}'(x;z) = -\underbrace{f_y(x,\tilde{y}(x))^{-1} f_x(x,\tilde{y}(x))}_{\text{ist stetig bzgl. } x \text{ da } f\in C^1 \text{ und nach } \textit{Lemma 6}} \cdot z \ \forall z \in \mathbb{K}^n \tag{10}$$

$\Longrightarrow$ alle partielle Ableitungen $\tilde{y}_{x_j}$ sind stetig auf $B_r(x_0) \overset{\textit{Theorem 19.14}}{\Longrightarrow} \tilde{y}$ ist stetig differenzierbar auf $B_r(x_0)$. Wegen $\tilde{y}'(x)\cdot z = \tilde{y}'(x;z)$ (nach *Satz 19.3*) folgt aus (10) Formel für $\tilde{y}'(x)$.

■

Hinweis: Sei $f = (f^1,...,f^m) : D \subset \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m, D$ offen und seien alle partielle Ableitungen $f^i_{y_j}$ stetig in y (d.h. $y \to f^i_{y_j}(x,y)$ sind stetig für x fest $\forall i,j = 1,...,n$)

$$\overset{\textit{Theorem 19.14}}{\Longrightarrow} f_y(x,y) = \begin{pmatrix} f^1_{y_1}(x,y) & \cdots & f^1_{y_m}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f^m_{y_1}(x,y) & \cdots & f^m_{y_m}(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times m}.$$

Analog erhält man $f_x(x,y) \in \mathbb{K}^{m\times m}$ falls alle $f^i_{x_j}$ stetig in x und y sind $\Longrightarrow$ f ist differenzierbar mit $f'(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$.

Beispiel 7. Sei $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x^2(1-x^2) - y^2 \ \forall x,y \in \mathbb{R}$. Es ist $f_x(x,y) = 2x(1-x^2) - 2x^3 = 2x - 4x^3$, $f_y(x,y) = -2y$. Suche Lösungen von $f(x,y) = 0$. Sei $y_0 = 0$: $f_y(x_0,y_0) = 0$ ist nicht regulär, $\Longrightarrow$ *Theorem 5* ist nicht anwendbar. Sei $y_0 \neq 0$: $f_y(x_0,y_0) \neq 0$ ist regulär, sei $f(x_0,y_0) = 0 \Longrightarrow$ *Theorem 5* ist anwendbar. Z.B. $(x_0,y_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{(2)}}{9}\right)$ it Nullstelle von $f \Longrightarrow \exists r,\rho > 0$ und Funktion $\tilde{y} : f(x,\tilde{y}(x)) = 0 \ \forall x \in B_r(\frac{1}{3})$, $\tilde{y}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\cdot\sqrt{(2)}}{9}$ und $\tilde{y}(x)$ ist einzige Lösung in $B_\varphi\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)$.
$\tilde{y}'\left(\frac{1}{3}\right) = -f_y\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{9}\right)\cdot f_x\left(\frac{1}{3}, \frac{2\cdot\sqrt{2}}{9}\right) = -\left(-\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{27}\right) = \frac{7}{6\sqrt{2}} \approx 0.8$. Seien $y_0 = 0, x_0 = 1$: Hier ist $f_x(1,0) = -2$ regulär $\overset{\textit{Theorem 5}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ lokale Lösung $\tilde{x}(y) : f(\tilde{x}(y),y) = 0 \ \forall y \in B_{\tilde{r}}(0)$ und $\tilde{x}'(0) = 0$. Seien $y_0 = 0, x_0 = 0$: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ sind nicht regulär $\Longrightarrow$ *Theorem 5* ist in keiner Variable anwendbar.

Beispiel 8. Betrachte nichtlineares Gleichungssystem:

$$2e^u + vw = 5,\ v\cos u - 6u + 2w = 7. \tag{7}$$

Offenbar ist $(u,v,w) = (0,1,3)$ eine Lösung. Faustregel sagt: "2 Gleichungen, 3 Unbekannten $\Longrightarrow$ viele Lösungen mit einem Feinheitsgrad" $\Longrightarrow$ suche Lösungen der Form $(u,v) = g(w)$ nahe der obigen Lösung für geeignetes $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Betrachte mit $x := w; y = (y_1,y_2) := (u,v)$ Funktion $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} 2e^{y_1} + y_2 x - 5 \\ y_2\cos y_1 - 6y_1 + 2x - 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow f_y(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^y & x \\ -y_2\sin y_1 - 6 & \cos y_1 \end{pmatrix}$$

(alle partielle Ableitungen sind stetig)

$$\implies f_y(3,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

ist regulär ($\det f_y(3,(0,1)) = 20$) $\overset{\text{Theorem 5}}{\implies}$ $\exists$ Funktion $y : (3-r, 3+r) \to B_\rho((0,1))$ mit $f(x, g(x)) = 0, g(3) = (0,1)$. Insbesondere sind $(u,v,w) = (g(w), w)$ weitere Lösungen von (11).

$$\begin{aligned} g'(3) &= -\, f_y(3,(0,1))^{-1} \cdot f_x(3,(0,1)) = -\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= -\,\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zurück zu erster Frage: Wann hat $f \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ lokal differenzierbare Umkehrfunkion? Betrachte Gleichung $f(x) - y = 0$ Falls diese Gleichung nach x auflösbar wäre, d.h. $\exists g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $f(g(y)) = y \; \forall y \implies g = f^{-1}$.

Theorem 9 (Satz über inverse Funktion). *Sei $f : U \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, U offen, f stetig differenzierbar, $f'(x_0)$ regulär für ein $x_0 \in U \implies$ es existiert offene Umgebung $U_0 \subset U$ von x_0, so dass $V_0 := f(U_0)$ offene Umgebung von $y_0 := f(x_0)$ ist und die auf U_0 eingeschränkte Abbildung $f : U_0 \to V_0$ ist Diffeomorphismus.*

Satz 10 (Ableitung der inversen Funktion). *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, D$ offen, f injektiv und differenzierbar, f^{-1} differenzierbar in $y \in \operatorname{int} f(D)$*

$$\implies \left(f^{-1}\right)'(y) = f'\left(f^{-1}(y)\right)^{-1} \tag{12}$$

(bzw. $\left(f^{-1}\right)'(y) = f'(x)^{-1}$ falls $y = f(x)$). Spezialfall: Sei $n = m = 1$, dann $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Beweis. (Zu *Theorem 9*) Betrachte $\tilde{f} : D \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $\tilde{f}(x,y) = f(x) - y$. Offenbar ist $\tilde{f}$ stetig, $\tilde{f}(x_0, y_0) = 0$ und $\tilde{f}_x(x,y) = f'(x)$, $\tilde{f}_y(x,y) = -\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \; \forall (x,y) \implies \tilde{f}_x, \tilde{f}_y$ sind stetig $\implies \tilde{f}$ ist stetig differenzierbar nach Voraussetzung $\tilde{f}_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ ist regulär $\overset{\text{Theorem 5}}{\implies} \exists r, \rho > 0 : \; \forall y \in B_r(y_0) \; \exists! x = \tilde{x}(y) \in B_\rho(x_0)$ mit $0 = \tilde{f}(\tilde{x}(y), y) = f(\tilde{x}(y)) - y \implies$ Lokal inverse Funktion $f^{-1} = \tilde{x}$ existiert auf $B_r(y_0) =: V_0$ und ist stetig differenzierbar. Setze

$$U_0 := f^{-1}(V_0) = \underbrace{\{x \in D \mid f(x) \in V_0\}}_{\text{ist offen, da } f \text{ stetig ist}} \cap B_\rho(x_0)$$

ist offene Umgebung von $x_0 \implies f'(U_0) = V_0 \implies f : U_0 \to V_0$ ist Diffeomorphismus. ■

Beweis. (Zu *Satz 10*) f^{-1} existiert, f ist differenzierbar, f^{-1} ist differenzierbar in $y = f(x), x \in D$. Wegen $f\left(f^{-1}(y)\right) = y, f^{-1}(f(x)) = x$ folgt $f'\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(y) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$, $\left(f^{-1}\right)'(y) \cdot f'\left(f^{-1}(y)\right) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \implies f'\left(f^{-1}(y)\right) = \left(f^{-1}\right)'(y)$. ■

Als Folgerung erhält man folgende globale Aussagen:

Satz 11 (Satz über offene Abbildung, Diffeomorphiesatz). *Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, D$ offen, f stetig differenzierbar, $f'(x)$ regulär $\forall x \in D$. Dann:*

(a) (Satz über offene Abbildung) $f(D)$ *ist offen.*
(b) (Diffeomorphiesatz) f *ist injektiv* $\implies f : D \to f(D)$ *ist Diffeomorphismus.*

Beweis. Zu (a): Sei $y_0 \in f(D) \implies x_0 \in D : y_0 = f(x_0) \overset{\textit{Theorem 9}}{\implies} \exists$ Umgebung $V_0 \subset f(D)$ von $y_0 \underset{\text{beliebig}}{\overset{y_0 \text{ ist}}{\implies}} f(D)$ ist offen. Zu (b): Offenbar existiert $f^{-1} : f(D) \to D$. Lokale Eigenschaften wie Stetigkeit und Differenzierbakeit folgen aus Theorem 9. ■

Beispiel 12. Sei $f(x) = a^x \ \forall x \in \mathbb{R}\ (a > 0, a \neq 1) \overset{\textit{Beispiel 17.19}}{\implies} f'(x) = a^x \ln a$, f' ist stetig $\underset{f \text{ injektiv}}{\overset{\textit{Satz 11}}{\implies}} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist Diffeomorphismus und $(\log_a y)' = \left(f^{-1}\right)'(y) \overset{y=f(x)}{=} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{(a^x \ln a)} = \frac{1}{(y \ln a)}\ \forall y > 0$ (vgl. *Beispiel 17.20*).

Beispiel 13. Sei $f(x) = \tan x \ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \overset{\textit{Beispiel 17.17}}{\implies} \left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0\ \forall x$, ist stetig $\overset{\textit{Satz 11}}{\implies} \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ist Diffeomorphismus und $\left(\arctan y\right)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{(1+y^2)}\ \forall y \in \mathbb{R}$.

Beispiel 14. Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)^{\mathrm{T}}$. Offenbar ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ mit

$$f'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\cos\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det f'(r,\varphi) = r\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$ ist $f'(r,\varphi)$ regulär $\forall (r,\varphi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \overset{\textit{Theorem 9}}{\implies}$ f ist lokal Diffeomorphismus, d.h. für jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ existiert Umgebung U_0, so dass $f : U_0 \to V_0 : f(U_0)$ Diffeomorphismus ist. Für Ableitung $\left(f^{-1}\right)'(x,y)$ mit $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gilt wegen $r = \sqrt{x^2+y^2}$:

$$\left(f^{-1}\right)'(x,y) = f'(r,\varphi)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \ \forall (x,y) \neq 0.$$

Beachte: $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ ist kein Diffeomorphismus da f nicht injektiv ist (f ist periodisch in φ). Aber $f : \mathbb{R}_{>0} \times (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \backslash \{\text{Strahlen in Richtung } \varphi_0\}$ ist Diffeomorphismus für beliebige $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ nach *Satz 11.(2)*. Folglich: Voraussetzung f ist injektiv in *Satz 11.(2)* kann man nicht weglassen.

28 Funktionenfolgen

Betrachte $f_k : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, D$ offen, f_k differenzierbar für $k \in \mathbb{N}$. *Frage:* Wann konvergiert $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gegen eine differenzierbare Funktion f mit $f_k' \to f'$? *Wiederholung:* Falls alle f_k stetig sind, $f_k \to f$ gleichmäßig auf $D \overset{\textit{Satz 14.19}}{\Longrightarrow} f$ ist stetig.

Beispiel 1. Sei $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{\sin k^2 x}{k}$. Wegen $\|f_k(x)\| \leq \frac{1}{k}$ $\forall k$ $f_k \longrightarrow f$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ für $f = 0$ aber $f_k'(x) = k \cdot \cos k^2 x \not\longrightarrow f'(x) = 0$ $\forall x$.

Satz 2 (Differentiation bei Funktionenfolgen). *Sei $f_k : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, D$ offen, beschränkt, f_k differenzierbar $\forall k$ und*

(a) *$f_k' \to g$ gleichmäßig auf $B_r(x) \subset D$,*
(b) *$\{f_k(x_0)\}$ konvergiert für ein $x_0 \in B_r(x)$*

$\Longrightarrow$ $f_k \longrightarrow f$ gleichmäßig auf $B_r(x)$ und f ist differenzierbar auf $B_r(x)$ mit $f_k'(y) \longrightarrow f'(y)$ $\forall y \in B_r(x)$.

Hinweis: Betrachte $f_k(x) := \frac{x^k}{k^2} + k$ auf $(0,1)$ zu sehen, dass Voraussetzung (b) wichtig ist.

Beweis. Für $\epsilon > 0$ existiert nach (b) $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $f_k(x_0) - f_l(x_0) < \epsilon$ $\forall (k, l \geq k_0)$. Weiter gilt (evtl. für größeres k_0): $\|g(z) - f_k'(z)\| < \epsilon$ und $\|f_k'(y) - f_l'(y)\| < \epsilon$ $\forall k \geq k_0, z, y \in B_r(x)$. *Schrankensatz* liefert: $\forall z, \in B_r(x), k, l \geq k_0$ $\exists \xi \in [z, y]$ mit

$$\Big|\big(f_k(y) - f_l(y)\big) - \big(f_k(z) - f_l(z)\big)\Big| \leq \big\|f_k'(\xi) - f_l'(\xi)\big\||y - z| \overset{(2)}{\leq} \epsilon|y - z| < 2r\epsilon \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \; |f_k(y) - f_l(y)| \leq& \Big|\big(f_k(y) - f_l(y)\big) - \big(f_k(x_0) - f_l(x_0)\Big| + \big|f_k(x_0) - f_l(x_0)\big| \\ \leq& 2r\epsilon + \epsilon = \epsilon(2r + 1) \; \forall y \in B_r(x); k, l \geq k_0 \end{aligned} \tag{4}$$

$\Longrightarrow$ $\{f_k(y)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist CF in $\mathbb{K}^m$ $\forall y$ $\Longrightarrow$ $f_k(y) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(y)$ $\forall y \in B_r(x)$. Mit $l \longrightarrow \infty$ in (4): $f_k \longrightarrow f$ gleichmäßig auf $B_r(x)$. Fixiere $\tilde{x} \in B_r(x), k = k_0$, dann liefert $l \longrightarrow \infty$ in (3): $\big|f(y) - f(\tilde{x}) - (f_k(y) - f_k(\tilde{x})\big| \leq \epsilon|y - \tilde{x}|$ $\forall y \in B_r(x)$. Da f_k differenzierbar ist $\exists \rho = \rho(\epsilon) > 0$ mit $\big|f_k(y) - f_k(\tilde{x}) - f'(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x})\big| \leq \epsilon|y - \tilde{x}|$ $\forall y \in B_\rho(\tilde{x}) \subset B_r(x)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \; \big|f(y) - f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})(y - \tilde{x})\big| \leq& \big|(f(y) - f(\tilde{x})) + (f_k(y) - f_k(\tilde{x}))\big| \\ &+ \big|f_k(y) - f_k(\tilde{x}) - f_k'(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x})\big| \\ &+ \big|f_k'(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x}) - g(\tilde{x})(y - \tilde{x})\big| \\ \overset{(2)}{\leq}& \epsilon|y - \tilde{x}| + \epsilon|y - \tilde{x}| + \epsilon|y - \tilde{x}| \\ =& 3\epsilon|y - \tilde{x}| \; \forall y \in B_\rho(\tilde{x}). \end{aligned} \tag{5}$$

Beachte: $\forall \epsilon > 0$ $\exists \rho > 0$ mit (5) $\Longrightarrow$ $f(y) - f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) \cdot (y - \tilde{x}) = o(|y - \tilde{x}|),\; y \longrightarrow \tilde{x}$ $\Longrightarrow$ $f'(\tilde{x}) = g(\tilde{x}) \underset{\text{beliebig}}{\overset{\tilde{x}\text{ ist}}{\Longrightarrow}}$ Behauptung. ■

28.1 Anwendung auf Potenzreihen

Sei $f : B_R(x_0) \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ gegeben durch Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \;\forall x \in \underbrace{B_R(x_0)}_{\textit{Konvergenzkreis}}. \tag{6}$$

Wiederholung: $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|a_k|}}$ heißt *Konvergenzradius*. Frage: Ist f differenzierbar und kann man gliederweise differenzieren?

Satz 3. *Sei $f : B_R(x_0) \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Potenzreihe gemäß (6) $\implies$ f ist differenzierbar auf $B_R(x_0)$ mit*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1} \;\forall x \in B_R(x_0). \tag{7}$$

Folgerung 4. *Sei $f : B_R(x_0) \subset \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ Potenzreihe gemäß (6)*

$$\implies f \in C^\infty(B_R(x_0), \mathbb{K}) \text{ und } a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0). \tag{8}$$

(D.h. Potenzreihe stimmt mit Taylorreihe von f in x_0 überein.)

Beweis. Wende k-fach *Satz 3* an $\implies$ $f \in C^k(B_R(x_0), \mathbb{K})$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\overset{(7)}{\implies}$ $f'(x_0) = a_1$, $f''(x_0) = 2a_2, ...,$ rekursiv folgt (8). ■

Beweis. (Zu *Satz 3*) Betrachte Partialsummen $f_k(x) := \sum_{j=0}^{k} a_j (x - x_0)^j$ $\forall x \in B_R(x_0)$ $\implies$ $f_k(x_0) = \sum_{j=1}^{k} j a_j (x - x_0)^{j-1}$ $\forall x \in B_R(x_0)$. Wegen $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{(k+1)|a_{k+1}|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k(1+\frac{1}{k})} \cdot \sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}^{\frac{k+1}{k}} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R}$ hat Potenzreihe $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}$ Konvergenzradius R $\implies$ Reihe g konvergiert gleichmäßig auf $B_r(x_0)$ $\forall r \in (0, R)$ (vgl. *Satz 13.(1)*), d.h. $f_k' \longrightarrow g$ gleichmäßig auf $B_r(x_0)$ $\overset{\textit{Satz 2}}{\implies}$ f ist differenzierbar auf $B_r(x_0)$ mit (7) auf $B_r(x_0)$. Da $r \in (0, R)$ beliebig ist, folgt Behauptung. ■

Beispiel 5. Es gilt

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \;\forall x \in (-1, 1). \tag{9}$$

Beweis. $f(x)$ sei Potenzreihe (9), hat Konvergenzradius $R = 1, x_0 = 0$ $\overset{\textit{Satz 3}}{\implies}$ f ist differenzierbar auf $(-1, 1)$ mit $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{\left(1-(-x)\right)} = \frac{1}{\left(1+x\right)}$ (vgl. *geometrische Reihe*). Da $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(1 + x) = \frac{1}{1+x} = f'(x)$ folgt $f(x) = \ln(1 + x) + c,\; c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0 = \ln 1$ ist $f(x) = \ln(1 + x)$ $\forall x \in (-1, 1)$, d.h. (9). ■