乱流モデル勉強会 (LES と RANS)

荒木亮

2018 年 1 月 10 日

概要

「乱流モデル」のうち LES および RANS を対象に概説する．

文章中のノーテーションは [1] に基づいており，この注釈書として読むことを想定している．

1 支配方程式

流体の非圧縮条件と運動方程式である Navier-Stokes 方程式を示す．

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu D_{ij}) \tag{1.2}$$

ただし，粘性項をひずみ速度テンソル D_{ij} で書いている．

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu D_{ij}) &= \nu\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) \\ &= \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \tag{1.4}$$

2 LES

2.1 フィルター操作

・フィルタ関数 $G(y)$ の性質

[1] での定義

$G(y)$ は $y=0$ の近くで正の値をもち，$\lim_{y\to\pm\infty} G(y)=0$ となり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(y)\mathrm{d}y = 1 \tag{7.7}$$

であるようなもの．

[2] での定義

$G(\boldsymbol{x})$ は規格化条件

$$\int G(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 1 \tag{14.2}$$

と対称条件

$$G(\boldsymbol{x}) = G(-\boldsymbol{x}) \tag{14.3}$$

を満たすものとする．

・フィルタ操作と微分操作の交換について

物理量 f にフィルタをかけ，GS(グリッドスケール) 量 $\bar{f}$ とそこからの変動分 f' に分ける．

$$f = \bar{f} + f' \tag{7.7}$$

これは物理量を GS 以上，以下の 2 つのスケールに分離している．しかし，フィルターが物理空間とは数空間のどちらか，あるいは両方でシャープでないため，厳密には分離できていない．

そのため，微分とフィルタの交換

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \tag{2.1}$$

は厳密には成立しない．

・LES の基礎方程式の導出

Eq. 1.1 と Eq. 1.2 にフィルタをかける．フィルタ操作と微分操作が可換であるとして，

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}} &= -\frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu D_{ij})} \leftrightarrow \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\tau_{ij} + 2\nu \overline{D}_{ij}) \end{aligned} \tag{7.16}$$

Eq. 7.16 において，両辺第一項は自明．

左辺第二項を計算する．

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j}} &= \frac{\partial \overline{(u_i u_j)}}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \underbrace{\frac{\partial \overline{(u_i u_j)}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j}}_{\text{これを右辺にまとめる}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} -\left[\frac{\partial \overline{(u_i u_j)}}{\partial x_j} - \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j}\right] + \overline{\frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu D_{ij})} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left[-(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) + 2\nu \overline{D}_{ij}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}(-\tau_{ij} + 2\nu \overline{D}_{ij}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで導入した $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$ を SGS 応力とよぶ．

・τ_{ij} の分解

SGS 応力 τ_{ij} のうち，2 次の相関を含む第一項を $u_i = \bar{u}_i + u_i'$ で分解する．

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ &= \overline{(\bar{u}_i + u_i')(\bar{u}_j + u_j')} - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ &= \left[\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{u_i' u_j'}\right] - \bar{u}_i \bar{u}_j \\ &= \left[\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j\right] + \left[\overline{\bar{u}_i u_j'} + \overline{u_i' \bar{u}_j}\right] + \left[\overline{u_i' u_j'}\right] \\ &= L_{ij} + Cij + R_{ij} \end{aligned} \tag{7.20}$$

ただし Leonard 項 L_{ij}，クロス項 C_{ij}，SGS Reynolds 応力 R_{ij}.

・τ_{ij} の Galilean 不変性について

L_{ij}，C_{ij}，R_{ij} それぞれを一定速度 U_i で移動する系に移して検討する.

$u_i \to u_i^* = u_i + U_i$ とし，$u_i'^* = u_i'$ と $\bar{U} = U$ に注意して計算する.

$$\begin{aligned}
L_{ij}^* &= \overline{\bar{u}_i^* \bar{u}_j^*} - \bar{u}_i^* \bar{u}_j^* \\
&= \overline{(\bar{u}_i + U_i)(\bar{u}_j + U_j)} - (\bar{u}_i + U_i)(\bar{u}_j + U_j) \\
&= \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \bar{\bar{u}}_i U_j + U_i \bar{\bar{u}}_j + U_i U_j - \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i U_j - U_i \bar{u}_j - U_i U_j \\
&= \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j + \big(\bar{\bar{u}}_i - \bar{u}_i\big) U_j + U_i \big(\bar{\bar{u}}_j - \bar{u}_j\big) \\
&\neq L_{ij}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
C_{ij}^* &= \overline{\bar{u}_i^* u_j'^*} + \overline{u_i'^* \bar{u}_j^*} \\
&= \overline{(\bar{u}_i + U_i) u_j'} + \overline{u_i' (\bar{u}_j + U_j)} \\
&= \overline{\bar{u}_i u_j'} + U_i \overline{u_j'} + \overline{u_i' \bar{u}_j} + \overline{u_i'} U_j \\
&\neq C_{ij}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
R_{ij}^* &= \overline{u_i'^* u_j'^*} \\
&= \overline{u_i' u_j'} \\
&= R_{ij}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

より，Reynolds 応力項 R_{ij} のみが Galilean 不変性を満たす.

2.2 Smagorinsky モデル

Eq. 7.16 に示すフィルターされた N-S 式に $\bar{u}_i$ を乗じて総和規約を取ることで，流れ場のエネルギ輸送方程式を導出する.

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tau_{ij} + 2\nu \overline{D}_{ij}) \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} \cdot \bar{u}_i &= \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} \bar{u}_i + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} \bar{u}_i \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \left(\frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i \right) \\
&= \frac{\overline{\mathrm{D}} k_{\mathrm{GS}}}{\overline{\mathrm{D}} t}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$
\begin{aligned}
\text{右辺}\cdot\bar{u}_i &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}\bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\tau_{ij} + 2\nu\overline{D}_{ij})\bar{u}_i \\
\text{第一項}: -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}\bar{u}_i &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(-\frac{1}{\rho}\bar{p}\bar{u}_j\Big) \\
\text{第二項}: \frac{\partial(-\tau_{ij})}{\partial x_j}\bar{u}_i &= \frac{\partial}{\partial x_j}(-\tau_{ij}\bar{u}_i) - (-\tau_{ij})\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\
\text{第三項}: \frac{\partial(2\nu\overline{D}_{ij})}{\partial x_j}\bar{u}_i &= \frac{\partial}{\partial x_j}(2\nu\overline{D}_{ij}\bar{u}_i) - 2\nu\overline{D}_{ij}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}(\nu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\bar{u}_i) - \nu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\
\therefore \text{右辺}\cdot\bar{u}_i &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(-\frac{1}{\rho}\bar{p}\bar{u}_j - \tau_{ij}\bar{u}_i + \nu\frac{\partial k_{\mathrm{GS}}}{\partial x_j}\Big) + \tau_{ij}\overline{D}_{ij} - \bar{\varepsilon}_{\mathrm{GS}} \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

以上をまとめて

$$
\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)k_{\mathrm{GS}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(-\frac{1}{\rho}\bar{p}\bar{u}_j - \tau_{ij}\bar{u}_i + \nu\frac{\partial k_{\mathrm{GS}}}{\partial x_j}\Big) + \tau_{ij}\overline{D}_{ij} - \bar{\varepsilon}_{\mathrm{GS}} \qquad (7.29)
$$

ここで $\tau_{ij}\overline{D}_{ij}$ が SGS スケールへのエネルギ輸送率となる．

SGS スケールに送られるエネルギ $\tau_{ij}\overline{D}_{ij}$ と，SGS スケールで散逸するエネルギ $\varepsilon_{\mathrm{SGS}}$ が釣り合うことを要請する．これは局所平衡の仮定 (エネルギが瞬時に散逸する仮定) である．

$$
\tau_{ij}\overline{D}_{ij} + \varepsilon_{\mathrm{SGS}} = 0 \qquad (7.32)
$$

SGS スケールでのエネルギ散逸 $\varepsilon_{\mathrm{SGS}}$ は，散逸項 ε から導出できる．

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \nu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\
\varepsilon_{\mathrm{SGS}} = \bar{\varepsilon} - \varepsilon_{\mathrm{GS}} &= \nu\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \nu\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \qquad (7.31)
\end{aligned}
$$

結局，モデル化に必要な量のうち SGS 応力 τ_{ij} のみが 2 次の相関を含む．これを 1 次の量で表したい．渦粘性近似を導入する．

$$
\begin{aligned}
\tau_{ij} &= \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i\bar{u}_j \\
\tau_{ij} &\fallingdotseq -2\nu_e\overline{D}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk} \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

ここで，等方成分 $\dfrac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}$ は圧力項にくりこまれる．非等方成分のみ表したのが Eq. 7.33 である．

この仮定を Eq. 7.16 に導入する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i\bar{u}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\tau_{ij} + 2\nu\overline{D}_{ij}) \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{(-2\nu_e\overline{D}_{ij} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}) + 2\nu\overline{D}_{ij}\right\} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\bar{p} + \rho\tau_{kk}/3)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\{2(\nu+\nu_e)\overline{D}_{ij}\} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\{2(\nu+\nu_e)\overline{D}_{ij}\}
\end{aligned} \tag{7.34}$$

2.3 Smagorinsky 定数

前節で導入した渦動粘性係数 ν_e を具体的な形で求めたい．次元解析より $[\nu_e] = [\mathrm{L}^2/\mathrm{T}] = [\mathrm{L}/\mathrm{T}][\mathrm{L}]$ なので，速度スケール q と長さスケール l で表せる．

$$\nu_e = C_v q l \tag{7.35}$$

また，SGS スケールでのエネルギ散逸 $\varepsilon_{\mathrm{SGS}}$ は，$[\varepsilon_{\mathrm{SGS}}] = [\mathrm{L}^2/\mathrm{T}^3] = [\mathrm{L}/\mathrm{T}]^3[1/\mathrm{L}]$ の次元を持つ．

$$\varepsilon_{\mathrm{SGS}} = C_\varepsilon \frac{q^3}{l} \tag{2.10}$$

ここから q を消去する．

$$\frac{\varepsilon_{\mathrm{SGS}}}{\nu_e^3} = \frac{C_\varepsilon}{C_v^3}\frac{1}{l^4} \tag{2.11}$$

また，2 式 Eq. 7.35 と Eq. 2.10 を，Eq. 7.32 で結びつける．

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathrm{SGS}} &= -\tau_{ij}\overline{D}_{ij} \\
&= 2\nu_e\overline{D}_{ij}\overline{D}_{ij} \\
\therefore \frac{\varepsilon_{\mathrm{SGS}}}{\nu_e^3} &= \frac{2\overline{D}_{ij}\overline{D}_{ij}}{\nu_e^2}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

よって，

$$\frac{C_\varepsilon}{C_v^3}\frac{1}{l^4} = \frac{2\overline{D}_{ij}\overline{D}_{ij}}{\nu_e^2} \tag{2.13}$$

ν_e について解き，

$$
\begin{aligned}
\nu_e^2 &= \frac{C_v^3}{C_\varepsilon} l^4 2\overline{D}_{ij}\overline{D}_{ij} \\
\nu_e &= \sqrt{\frac{C_v^3}{C_\varepsilon}} \cdot l^2 \cdot \sqrt{2\overline{D}_{ij}\overline{D}_{ij}} \\
&= C_s^2 \cdot \Delta^2 \cdot |\overline{D}| \qquad (7.37)
\end{aligned}
$$

ここで C_s が Smagorinsky 定数であり，Kolmogorov のエネルギスペクトル指数から理論値を計算することができる．

これによって得られた普遍的な Smagorinsky 定数 C_ε から計算した ν_e は常に正で，GS スケールから SGS スケールへエネルギが流れることを意味する．これは，逆カスケードや壁近傍の流れに対応できない．

これを改良するため，壁法則を導入する，τ_{ij} の分解にさらにモデルを適用する，Smagorinsky 定数 C_ε を時空間変数によるものとする，などの理論がある．

3 RANS

3.1 Reynolds 平均

・平均操作について

流れ場が統計的に定常なら時間平均，空間的に一様なら空間平均を取ればよい．より一般にはアンサンブル平均を用いる．

流速 u_i を平均 $\bar{u}_i$ と乱れ u'_i に分解する．

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \tag{3.1}$$

ここで，平均値も緩やかに変動することから，「平均値と変動値の積 (=相関) の平均」は 0 にならず，「平均値のアンサンブル平均」は平均値と一致しない．

$$\overline{u'_i \bar{u}_j} \neq 0, \quad \bar{\bar{u}}_i \neq \bar{u}_i \tag{6.1}$$

しかし，上式が成り立つような平均操作 を定義し，これを Reynolds 平均とよぶ．

$$\overline{u'_i} = 0, \quad \overline{u'_i \bar{u}_j} = 0, \quad \bar{\bar{u}}_i = \bar{u}_i \tag{6.2}$$

このとき平均操作と微分操作の交換が許される．

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \tag{3.2}$$

・RANS の基礎方程式の導出

Eq. 1.1 と Eq. 1.2 を Reynolds 平均する．

$$\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k}} &= -\frac{1}{\rho}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\frac{\partial}{\partial x_k}(2\nu D_{ik})} \leftrightarrow \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_k)}{\partial x_k} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}(-\tau_{ik} + 2\nu \overline{D}_{ik}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

Eq. 6.6 は Eq. 7.16 と同じ計算で得られるが，左辺第二項のみ異なる．

$$\overline{u_i u_j} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} \tag{6.8}$$

よって Reynolds 応力 τ_{ij} は次式で定まる．

$$\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \tag{6.9}$$

3.2 Reynolds 応力方程式

元の連続の式 Eq. 1.1 から Reynolds 平均された方程式 Eq. 6.4 を除すことで，「変動速度の非圧縮条件」を得る．

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \tag{6.10}$$

元の Navier-Stokes 方程式 Eq. 1.2 から Reynolds 平均された方程式 Eq. 6.6 を除すことで，「変動速度の Navier-Stokes 方程式」を得る．

$$\begin{aligned}
\text{時間微分項}: \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} &= \frac{\partial u_i'}{\partial t} \\
\text{移流項}: \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_k)}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k}(u_i' u_k' + \bar{u}_i u_k' + u_i' \bar{u}_k) \\
\text{圧力項}: -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} \\
\text{粘性項}: \frac{\partial}{\partial x_k}(2\nu D_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x_k}(-\tau_{ik} + 2\nu \overline{D}_{ik}) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{ik} + 2\nu D_{ik}')
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}(-u_i' u_k' - \bar{u}_i u_k' + \tau_{ik} + 2\nu D_{ik}') \tag{6.11}$$

Eq. 6.11 に u_j' を乗じ，Reynolds 平均をとり，添字 i と j を入れ替えて足すことで Reynolds 応力方程式を導出する．Eq. 6.11 の各項に番号をふって再掲する．

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t}_{①} + \bar{u}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}_{②} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}_{③} + \frac{\partial}{\partial x_k}(-u_i' u_{k'④} - \bar{u}_i u_{k'⑤} + \tau_{ik⑥} + 2\nu D_{ik⑦}')$$

丸数字をつけた各項を計算する．

$$
\begin{aligned}
&①: \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial t}u_j'} + \overline{\frac{\partial u_j'}{\partial t}u_i'} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i'u_j'} \\
&②: \overline{\bar{u}_k\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}u_j'} + \overline{\bar{u}_k\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}u_i'} = \bar{u}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'} \\
&③: -\overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}u_j'} - \overline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}u_i'} = -\frac{1}{\rho}\Big(\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i}u_j'} + \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_j}u_i'}\Big) \\
&④: \overline{\frac{\partial(-u_i'u_{k'})}{\partial x_k}u_j'} + \overline{\frac{\partial(-u_j'u_{k'})}{\partial x_k}u_i'} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'u_k'} \\
&⑤: \overline{\frac{\partial(-\bar{u}_i'u_{k'})}{\partial x_k}u_j'} + \overline{\frac{\partial(-\bar{u}_j'u_{k'})}{\partial x_k}u_i'} = -\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u_i'u_k'}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_k} \\
&⑥: \overline{\frac{\partial(\overline{u_i'u_k'})}{\partial x_k}u_j'} + \overline{\frac{\partial(\overline{u_j'u_k'})}{\partial x_k}u_i'} = 0\ (?) \\
&⑦: \overline{2\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i}\Big)\Big]u_j'} + \overline{2\nu\frac{\partial}{\partial x_k}\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}\Big)\Big]u_i'} \\
&\quad = \nu\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\overline{u_i'u_j'} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}
\end{aligned}
$$

各項を一旦まとめ，置き換えられる部分を τ_{ij} で書く．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_i'u_j'} + \bar{u}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'} &= -\frac{1}{\rho}\Big(\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i}u_j'} + \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_j}u_i'}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'u_k'} - \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k} - \overline{u_i'u_k'}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_k} \\
&\quad + \nu\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\overline{u_i'u_j'} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \\
\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)\tau_{ij} &= -\frac{1}{\rho}\Big(\overline{\frac{\partial p'}{\partial x_i}u_j'} + \overline{\frac{\partial p'}{\partial x_j}u_i'}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_k}\overline{u_i'u_j'u_k'} - \tau_{jk}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k} - \tau_{ik}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_k} \\
&\quad + \nu\Big(\frac{\partial^2\tau_{ij}}{\partial x_k^2} - 2\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}\Big)
\end{aligned}
$$

各項を表現しなおす．

$$
\begin{aligned}
\text{左辺}: &\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)\tau_{ij} = \frac{\overline{\mathrm{D}}\tau_{ij}}{\overline{\mathrm{D}}t} \\
\text{圧力項}: &\overline{\frac{1}{\rho}p'\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\Big)} - \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u_i'p'} + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u_j'p'}\Big) \\
&= \overline{\frac{1}{\rho}p'\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\Big)} - \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\frac{1}{\rho}\overline{p'(\delta_{jk}u_i' + \delta_{ik}u_j')}\Big)
\end{aligned}
$$

以上より $\partial/\partial x_k$ でまとめると Reynolds 応力方程式を得る．

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}\tau_{ij}}{\overline{\mathrm{D}}t} = -\tau_{ik}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \tau_{jk}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho}\overline{p'\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\Big)} - 2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} + \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(- \overline{u_i'u_j'u_k'} - \frac{1}{\rho}(\overline{p'u_i'}\delta_{jk} + \overline{p'u_j'}\delta_{ik}) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k}\Big) \tag{3.3}$$

$$\therefore \frac{\overline{\mathrm{D}}\tau_{ij}}{\overline{\mathrm{D}}t} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \frac{\partial J_{ijk}}{\partial x_k} \tag{6.12}$$

各項は，それぞれ Reynolds 応力の

- 生成項 P_{ij}
- 圧力-ひずみ相関項 (再分配項) Π_{ij}
- 散逸項 ε_{ij}
- (速度変動・圧力変動・粘性による) 拡散項 $J_{ijk} = J_{(T)ijk} + J_{(P)ijk} + J_{(V)ijk}$

である．

2 次の変動速度相関である Reynolds 応力の支配方程式にさらに高次 (3 次) の相関項が現れるため，この方程式は閉じていない．以降，3 次変動速度，4 次変動速度…の式を導いても，より高次の相関項が現れてしまう (乱流の完結の問題)．

Reynolds 応力方程式を「閉じた」形にするためのモデルとして，次の 2 つがある．

- 渦粘性モデル: Reynolds 応力自身をモデル化し，渦粘性係数を求める問題に帰着する
- Reynolds 応力方程式モデル: Reynolds 応力方程式の高次項 (圧力-ひずみ相関項 Π_{ij}，散逸項 ε_{ij} と拡散項 $J_{(T)ijk}$，$J_{(P)ijk}$) をモデル化する

3.3 渦粘性モデル

「分子粘性応力 = 粘性係数 × 速度勾配」のアナロジーから，Reynolds 応力テンソルを渦粘性係数とひずみ速度テンソルの積と考える．

$$\rho\tau_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\rho k - 2\mu_T\overline{D}_{ij} \tag{3.4}$$

右辺第一項は，$i = j$ として総和をとったとき，左辺陶片が一致するように定めた．

- 左辺：$\rho\tau_{ii} = 2\rho k$
- 右辺：$\frac{2}{3} \times 3\rho k - 0 = 2\rho k$

この仮定を Eq. 6.4 に導入する．

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i\bar{u}_j)}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\tau_{ij} + 2\nu\overline{D}_{ij}) \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{-(\frac{2}{3}\delta_{ij}k - 2\nu_T\overline{D}_{ij}) + 2\nu\overline{D}_{ij}\right\} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\bar{p} + 2\rho k/3)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\{2(\nu + \nu_T)\overline{D}_{ij}\} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\{2(\nu + \nu_T)\overline{D}_{ij}\} \qquad (6.21)
\end{aligned}
$$

圧力に Reynolds 応力の等方成分が加わり，動粘性係数に 渦 動粘性係数が加わった．結局，渦動粘性係数 ν_T をどうにかして既知の値から求めれば良いことになる．これを定めるために考える「乱流諸量の輸送方程式」の数により，n 方程式モデルという．

3.4 2 方程式モデル

渦動粘性係数 ν_T を求めるため，2 つの量の輸送方程式 を考える ($\leftrightarrow$2 つのパラメータから ν_T を決定する)．パラメータとして次のようなものが考えられる．

- 変動流の運動エネルギの輸送方程式を考え，k(あるいはその平方根=速度) をパラメータとする．
- エネルギ散逸率の輸送方程式を考え，ε をパラメータとする．
- 時間の逆数である ω をパラメータとする．

以下では最も代表的な $k-\varepsilon$ モデルについて述べる．

3.4.1 $k-\varepsilon$ モデル

変動流の運動エネルギ k とエネルギ散逸率 ε をパラメータとする．

Eq. 6.12 で $i = j$ として総和規約を用いることで，変動流エネルギ $k = \overline{\hat{u}_j\hat{u}_j}/2$ の支配方程式が得られる．

$$
\frac{\overline{\mathrm{D}}k}{\overline{\mathrm{D}}t} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial J_{(k)ij}}{\partial x_j} \qquad (6.30)
$$

$$P_k = \frac{1}{2}P_{ii} = -\tau_{ik}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} \tag{6.31}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon_{ii} = \nu\overline{\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}\right)^2} \tag{6.32}$$

$$J_{(k)j} = \frac{1}{2}J_{iij} = -\overline{u_i'u_i'u_j'} - \frac{1}{\rho}\overline{p'u_k'} + \frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{6.33 - 6.35}$$

Π が消えていることに注意．この項はエネルギの再分配に関わっている．

ε の支配方程式を求める．Eq. 6.11 を x_m で偏微分する．

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{u}_k\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}(-u_i'u_k' - \bar{u}_iu_k' + \tau_{ik} + 2\nu D_{ik}') \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \\
\text{右辺} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i\partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_k\partial x_m}(-u_i'u_k' - \bar{u}_iu_k' + \tau_{ik} + 2\nu D_{ik}') \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i\partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_k\partial x_m}(-u_i'u_k' + \tau_{ik}) - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k'}{\partial x_m} - \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k\partial x_m}u_k' + \nu\frac{\partial^3 u_i'}{\partial x_k\partial x_k\partial x_m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} =& -\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k\partial x_m}u_k' - \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k'}{\partial x_m} \\
&- \frac{\partial}{\partial x_k\partial x_m}(u_i'u_k' - \tau_{ik}) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i\partial x_m} + \nu\frac{\partial^3 u_i'}{\partial x_k\partial x_k\partial x_m}
\end{aligned}$$

これに，

- 梶島 [1]: $2\nu\frac{\partial u_i'}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_m}\right]$ の演算を行って，Reynolds 平均を施す．
- 木田・柳瀬 [2]: $\frac{\partial u_i'}{\partial x_m}$ を乗じ，i,j について和をとり，両辺 ν を掛けてアンサンブル平均する．

ことで ε の支配方程式を得る．

[2] の方法で計算する．

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\frac{\partial u_i'}{\partial x_m} =& -\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k\partial x_m}u_k'{}_{①} - \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_m}\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}{}_{①} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k'}{\partial x_m}{}_{①} \\
&- \frac{\partial}{\partial x_k\partial x_m}(u_i'u_k' - \overline{u_i'u_k'})_{②} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i\partial x_m}{}_{③} + \nu\frac{\partial^3 u_i'}{\partial x_k\partial x_k\partial x_m}{}_{④}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&①: -\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_m} u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} - \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_m}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_k}{\partial x_m}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \\
&\quad \to -2u'_k \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_m}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} - 2\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\frac{\partial u'_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u'_m}{\partial x_k}\frac{\partial u'_m}{\partial x_i}\Big) \\
&②: -\frac{\partial}{\partial x_k \partial x_m}(u'_i u'_k - \overline{u'_i u'_k})\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \\
&\quad \to -2\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\frac{\partial u'_k}{\partial x_m}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}\Big\{u'_k\Big(\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\Big)^2\Big\} + 2\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_k}}{\partial x_m \partial x_k} \\
&③: -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p'}{\partial x_i \partial x_m}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \\
&\quad \to -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial p'}{\partial x_m}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\Big) \\
&④: \nu\frac{\partial^3 u'_i}{\partial x_k \partial x_k \partial x_m}\frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \\
&\quad \to \nu\frac{\partial^2}{\partial x_k}\Big(\frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\Big)^2 - 2\nu\Big(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_m \partial x_k}\Big)^2
\end{aligned}
$$

これに ν を乗じアンサンブル平均を取ると，ε の支配方程式が得られる．(未確認)

$$
\frac{\overline{\mathrm{D}}\varepsilon}{\overline{\mathrm{D}}t} = P_\varepsilon - \Phi_\varepsilon + \frac{\partial J_{(\varepsilon)ij}}{\partial x_j} \tag{6.39}
$$

$$
\begin{aligned}
P_\varepsilon =& -2\nu\overline{\Big(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u'_k}{\partial x_i}\frac{\partial u'_k}{\partial x_j}}\Big)\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - 2\nu\overline{u'_i\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_k} \\
& -2\nu\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \qquad (6.40) \\
\Phi_\varepsilon =& 2\nu^2\overline{\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k}} \qquad (6.41) \\
J_{(\varepsilon)j} =& -\nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}u'_j} - \frac{\nu}{\rho}\overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \nu\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \qquad (6.42\text{ - }6.44)
\end{aligned}
$$

以上より 2 パラメータ k，ε の支配方程式が得られた．これらの次元は $[k] = [L^2/T^2]$，$[\varepsilon] = [L^2/T^3]$ である．

2.3 節より，渦動粘性係数の次元は $[\nu_T] = [\mathrm{L}^2/\mathrm{T}] = [\mathrm{L}^4/\mathrm{T}^4][\mathrm{T}^3\mathrm{L}^2]$ と書くことができる．そこで，無地限定数 C_μ を導入し，k と ε によって次のように書ける．

$$
\nu_T = C_\mu \frac{k^3}{\varepsilon} \tag{6.38}
$$

これによって ν_T を二つのパラメータで評価することができて，Eq. 6.21 が閉じた．

k，ε の支配方程式を並べる．

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}k}{\overline{\mathrm{D}}t} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial J_{(k)ij}}{\partial x_j} \tag{6.30}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}\varepsilon}{\overline{\mathrm{D}}t} = P_\varepsilon - \Phi_\varepsilon + \frac{\partial J_{(\varepsilon)ij}}{\partial x_j} \tag{6.39}$$

ここで, <u>これらの方程式も 3 次以上の項を含み，Reynolds 応力の方程式として閉じていない</u>ことに注意する．これを解消するため，拡散項 $J_{(\cdot)ij}$ に勾配拡散近似を導入する．

$$J_{(\cdot)ij} = \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\cdot} + \nu\right)\frac{\partial\ \cdot}{\partial x_j} \tag{6.37, 6.46}$$

また，ε 方程式の生産項と消滅項を一括してモデル化する．

$$P_\varepsilon - \Phi_\varepsilon = (C_{\varepsilon 1}P_k - C_{\varepsilon 2}\varepsilon)\frac{\varepsilon}{k} \tag{6.45}$$

以上をまとめて，k，ε の支配方程式は次のようになる．

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}k}{\overline{\mathrm{D}}t} = P_k - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu_T}{\sigma_k} + \nu\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] \tag{6.50}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{D}}\varepsilon}{\overline{\mathrm{D}}t} = (C_{\varepsilon 1}P_k - C_{\varepsilon 2}\varepsilon)\frac{\varepsilon}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} + \nu\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] \tag{6.51}$$

参考文献

[1] 梶島. 乱流の数値シミュレーション. 養賢堂, 2014.

[2] 木田・柳瀬. 乱流力学. 朝倉書店, 2000.