ベクトル解析の公式（の導出）まとめ

荒木 亮

2020 年 10 月 9 日

三次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}$ 上で定義されたベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \ldots$ を考える．

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積は，

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \tag{1}$$

のように書ける．ここで，ϵ_{ijk} は Eddington's epsilon や Levi-Civita symbol と呼ばれるテンソルで，

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is an even permutation of } (1,2,3) & (2) \\ -1 & \text{if } (i,j,k) \text{ is a odd permutation of } (1,2,3) & (3) \\ 0 & \text{else} & (4) \end{cases}$$

と定義される．

$\epsilon_{ikl}\epsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$

$$\text{L.H.S.} = \epsilon_{ik1}\epsilon_{1mn} + \epsilon_{ik2}\epsilon_{2mn} + \epsilon_{ik3}\epsilon_{3mn} \tag{5}$$

ここで $(i,k) = (1,2)$ を代入してみると，

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \epsilon_{121}\epsilon_{1mn} + \epsilon_{122}\epsilon_{2mn} + \epsilon_{123}\epsilon_{3mn} && (6) \\ &= \epsilon_{3mn} && (7) \\ \text{R.H.S} &= \delta_{1m}\delta_{2n} - \delta_{1n}\delta_{2m} && (8) \end{aligned}$$

これはたしかに等値できる．同様のことが (i,k) の他の組み合わせについても成立するので，与式は成立する．□

$\epsilon_{ikl}\epsilon_{klm} = 2\delta_{im}$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= -\epsilon_{ikl}\epsilon_{lkm} && (9) \\ &= -(\delta_{ik}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kk}) && (10) \\ &= -(\delta_{im} - 3\delta_{im}) && (11) \\ &= 2\delta_{im} && (12) \end{aligned}$$

より示せた．□

$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})$

成分表記で調べて，

$$\begin{aligned} \partial_i(\epsilon_{ijk} A_j B_k) &= B_k \epsilon_{ijk} \partial_i A_j + A_j \epsilon_{ijk} \partial_i B_k && (13) \\ &= B_k \epsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \epsilon_{jik} \partial_i B_k && (14) \\ &= \text{R.H.S.} && (15) \end{aligned}$$

で示せた．□

$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$

右辺の i 成分を調べて，

$$
\begin{aligned}
[\text{R.H.S.}]_i &= \epsilon_{ijk}A_j(\epsilon_{klm}\partial_l B_m) + \epsilon_{ijk}B_j(\epsilon_{klm}\partial_l A_m) + B_j\partial_j A_i + A_j\partial_j B_i && (16)\\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}(A_j\partial_l B_m + B_j\partial_l A_m) + \ldots && (17)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})(A_j\partial_l B_m + B_j\partial_l A_m) + \ldots && (18)\\
&= (A_j\partial_i B_j + B_j\partial_i A_j) - (A_j\partial_j B_i + B_j\partial_j A_i) + \ldots && (19)\\
&= A_j\partial_i B_j + B_j\partial_i A_j && (20)\\
&= \partial_i(A_j B_j) && (21)\\
&= [\text{L.H.S.}]_i && (22)
\end{aligned}
$$

より示せた．□

$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{B}$

$$
\begin{aligned}
[\text{L.H.S.}]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}A_l B_m) && (23)\\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j(A_l B_m) && (24)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j(A_l B_m) && (25)\\
&= \partial_j(A_i B_j) - \partial_j(A_j B_i) && (26)\\
&= A_i\partial_j B_j + B_i\partial_j A_j - B_i\partial_j A_j - A_j\partial_j B_i && (27)\\
&= [\text{R.H.S.}]_i && (28)
\end{aligned}
$$

より示せた．□

$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$

$$
\begin{aligned}
[\text{L.H.S.}]_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}\partial_l A_m) && (29)\\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j(\partial_l A_m) && (30)\\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j(\partial_l A_m) && (31)\\
&= \partial_j(\partial_i A_j) - \partial_j(\partial_j A_i) && (32)\\
&= \partial_i(\partial_j A_j) - \partial_j\partial_j A_i && (33)\\
&= [\text{R.H.S.}]_i && (34)
\end{aligned}
$$