

# ベクトル解析の公式（の導出）まとめ

荒木 亮

2023 年 12 月 26 日

三次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}$  上で定義されたベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$  を考える.

ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の外積は,

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k \quad (1)$$

のように書ける. ここで,  $\epsilon_{ijk}$  は Eddington's epsilon や Levi-Civita symbol と呼ばれるテンソルで,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is an even permutation of } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is a odd permutation of } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

$$(4)$$

と定義される.

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$$

$$\text{L.H.S.} = \epsilon_{ik1}\epsilon_{1mn} + \epsilon_{ik2}\epsilon_{2mn} + \epsilon_{ik3}\epsilon_{3mn} \quad (5)$$

ここで  $(i, k) = (1, 2)$  を代入してみると,

$$\text{L.H.S.} = \epsilon_{121}\epsilon_{1mn} + \epsilon_{122}\epsilon_{2mn} + \epsilon_{123}\epsilon_{3mn} \quad (6)$$

$$= \epsilon_{3mn} \quad (7)$$

$$\text{R.H.S} = \delta_{1m}\delta_{2n} - \delta_{1n}\delta_{2m} \quad (8)$$

これはたしかに等値できる. 同様のことが  $(i, k)$  の他の組み合わせについても成立するので, 与式は成立する.  $\square$

$$\epsilon_{ikl}\epsilon_{klm} = 2\delta_{im}$$

$$\text{L.H.S.} = -\epsilon_{ikl}\epsilon_{lkm} \quad (9)$$

$$= -(\delta_{ik}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kk}) \quad (10)$$

$$= -(\delta_{im} - 3\delta_{im}) \quad (11)$$

$$= 2\delta_{im} \quad (12)$$

より示せた.  $\square$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

成分表記で調べて,

$$\partial_i (\epsilon_{ijk} A_j B_k) = B_k \epsilon_{ijk} \partial_i A_j + A_j \epsilon_{ijk} \partial_i B_k \quad (13)$$

$$= B_k \epsilon_{kij} \partial_i A_j - A_j \epsilon_{jik} \partial_i B_k \quad (14)$$

$$= \text{R.H.S.} \quad (15)$$

で示せた.  $\square$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

右辺の  $i$  成分を調べて,

$$[\text{R.H.S.}]_i = \epsilon_{ijk} A_j (\epsilon_{klm} \partial_l B_m) + \epsilon_{ijk} B_j (\epsilon_{klm} \partial_l A_m) + B_j \partial_j A_i + A_j \partial_j B_i \quad (16)$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} (A_j \partial_l B_m + B_j \partial_l A_m) + \dots \quad (17)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) (A_j \partial_l B_m + B_j \partial_l A_m) + \dots \quad (18)$$

$$= (A_j \partial_i B_j + B_j \partial_i A_j) - (A_j \partial_j B_i + B_j \partial_j A_i) + \dots \quad (19)$$

$$= A_j \partial_i B_j + B_j \partial_i A_j \quad (20)$$

$$= \partial_i (A_j B_j) \quad (21)$$

$$= [\text{L.H.S.}]_i \quad (22)$$

より示せた.  $\square$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$[\text{L.H.S.}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} A_l B_m) \quad (23)$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j (A_l B_m) \quad (24)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (A_l B_m) \quad (25)$$

$$= \partial_j (A_i B_j) - \partial_j (A_j B_i) \quad (26)$$

$$= A_i \partial_j B_j + B_i \partial_j A_j - B_i \partial_j A_j - A_j \partial_j B_i \quad (27)$$

$$= [\text{R.H.S.}]_i \quad (28)$$

より示せた.  $\square$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$[\text{L.H.S.}]_i = \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l A_m) \quad (29)$$

$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \partial_j (\partial_l A_m) \quad (30)$$

$$= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j (\partial_l A_m) \quad (31)$$

$$= \partial_j (\partial_i A_j) - \partial_j (\partial_j A_i) \quad (32)$$

$$= \partial_i (\partial_j A_j) - \partial_j \partial_j A_i \quad (33)$$

$$= [\text{R.H.S.}]_i \quad (34)$$