

# 特 別 研 究

## 論文タイトル一行目 論文タイトル二行目

20〇〇年2月 提出

後藤 晋教授  
大槻 道夫准教授  
本告 遊太郎助教

} 指導

大阪大学基礎工学部  
システム科学科4年

阪大 太郎

# 目次

第 1 章	緒言	1
第 2 章	乱流の統計的普遍則と動力学	1
2.1	乱流とエネルギーカスケード描像 . . . . .	2
第 3 章	粒子画像流速測定による室内実験	2
3.1	実験装置 . . . . .	3
3.1.1	系の無次元化 . . . . .	4
第 4 章	スペクトル要素 <b>Fourier</b> 法による直接数値計算	5
4.1	スペクトル要素法の基礎 . . . . .	5
4.2	三次元円柱座標系におけるスペクトル要素 <b>Fourier</b> 法 . . . . .	5
4.2.1	三次元円柱座標系の非圧縮 Navier-Stokes 方程式 . . . . .	6
第 5 章	結言	6
	参考文献	10
	付録	11
A.1	PIV における誤ベクトル判定アルゴリズム . . . . .	11
A.1.1	中央値フィルタによる誤ベクトル除去 . . . . .	11

# 記号表

この章では論文中で使用する記号を定義する．ここでの分類はテンプレート作成者が用いたものなので，自身で適切と思う分類に更新すること．

## パラメータ，無次元量

$\pi$	: 円周率
$\nu$	: 動粘性係数
$\rho$	: 密度
Re	: Reynolds 数

## 物理量

$L$	: 乱流の特徴長さ
$U$	: 乱流の特徴速度
$T$	: 乱流の特徴時間スケール
<hr/>	
$\mathbf{u} = (u, v, w)$	: 流速
$p$	: 圧力
$\epsilon$	: エネルギー散逸率
$\Pi$	: エネルギー流束
<hr/>	
$\mathbf{x} = (x, y, z)$	: 大域座標
$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$	: 局所座標
$t$	: 時刻

ここで，物理量の中でも種類の違うものを `hline` で区切っている．

## 関数，演算子

$Cor[A, B](\alpha)$	: $A$ と $B$ の $\alpha$ に関する相関関数
$\delta_{ij}$	: Kronecker のデルタ
$\langle(\cdot)\rangle$	: 空間平均
$\overline{(\cdot)}$	: 時間平均
$\mathcal{A}$	: 局所座標と大域座標を結ぶ写像

## 上付き・下付き文字

- $(\cdot)^e$  : 局所座標系の量  
 $(\cdot)_l \equiv \underline{(\cdot)^e}$  : 局所座標を並べた量  
 $(\cdot)_g \equiv \mathcal{A}(\cdot)_l$  : 大域座標の量

# 第1章 緒言

短い緒言をここに書く。修論では英語で要旨を書くので、次章の研究背景から始めればよい。

吾輩は猫である。名前はまだ無い。

どこで生れたかとうと見当がつかぬ。何でも薄暗いじめじめした所でニャーニャー泣いていた事だけは記憶している。吾輩はここで始めて人間というものを見た。しかもあとで聞くとそれは書生という人間中で一番獰悪な種族であったそうだ。この書生というのは時々我々を捕えて煮て食うという話である。しかしその当時は何という考もなかったから別段恐いとも思わなかった。ただ彼の掌に載せられてスーと持ち上げられた時何だかフワフワした感じがあったばかりである。掌の上で少し落ちついて書生の顔を見たのがいわゆる人間というものの見始であろう。この時妙なものだと思った感じが今でも残っている。第一毛をもって装飾されべきはずの顔がつるつるしてまるで薬缶だ。その後猫にもだいぶ逢ったがこんな片輪には一度も出会わした事がない。のみならず顔の真中があまりに突起している。そうしてその穴の中から時々ぷうぷうと煙を吹く。どうも咽せぼくて実に弱った。これが人間の飲む煙草というものである事はようやくこの頃知った。

この書生の掌の裏でしばらくはよい心持に坐っておったが、しばらくすると非常な速力で運転し始めた。書生が動くのか自分だけが動くのか分らないが無暗に眼が廻る。胸が悪くなる。到底助からないと思っていると、どさりと音がして眼から火が出た。それまでは記憶しているがあとは何の事やらいくら考え出そうとしても分らない。

ふと気が付いて見ると書生はいない。たくさんおった兄弟が一疋も見えぬ。肝心の母親さえ姿を隠してしまった。その上今までの所とは違って無暗に明るい。眼を明いていられぬくらいだ。はてな何でも容子がおかしいと、のそのそ這い出して見ると非常に痛い。吾輩は藁の上から急に笹原の中へ棄てられたのである。

## 第2章 乱流の統計的普遍則と動力学

本章では、今日の乱流理論の基礎となっている Kolmogorov の理論を局所平衡仮説を軸にまとめる。まず 2.1 節で乱流とその現象論的描像であるエネルギーカスケード描像を導入する。

## 2.1 乱流とエネルギーカスケード描像

乱流とは流体が時空間的にきわめて乱れたふるまいをする現象であり、身の回りのいたるところで見られる。乱流を普遍的に記述することは理学的にも工学的にも重要な問題であり、長年に渡り膨大な研究がおこなわれてきた [1-4]。

複数の文献を一度に引用する場合、`cite` コマンドを複数使うのではなく上記のようになる。

非圧縮流体の運動は Navier-Stokes 方程式と非圧縮条件

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

(2.2)

複数行だての数式を執筆するのに `empheq` パッケージを、ベクトルや演算子の記述に `physics` パッケージを用いている。

で記述される。これらの方程式は流れのマクロな特徴速さスケール  $U$  と特徴長さスケール  $L$  で無次元化されており、無次元量である Reynolds 数

$$\text{Re} \equiv \frac{UL}{\nu} \quad (2.3)$$

に支配されている。ただし、 $\nu$  は流体の動粘性係数である。Re は流体に作用する慣性と粘性の比、非線形項と線形項の比、あるいは流れに注入されるエネルギー流束の大きさを表すパラメータなどと表現される [5, p. 8, p. 409]。

参考文献でページ数まで指定したい場合、上記のようになる。

一般に Re が  $\mathcal{O}(10^3)$  を超えると流れは乱流となる。

乱流を説明する現象論として、Richardson の提唱したエネルギーカスケード描像がある [6, 7]。その模式図を図 2.1 に示す [8]。この描像は乱流をさまざまなスケールの渦を用いて説明する。まず、境界条件や外力によってマクロな長さスケール  $L$  程度の渦にエネルギーが注入される。エネルギーを持った大スケール渦は自身より小さな渦を生成し、これにエネルギーを伝達する。このエネルギー伝達が繰り返しおこなわれることで、エネルギーが漸次より小さなスケールに「カスケード」する。最終的に粘性が支配するスケール  $\eta$  程度の渦に伝達されたエネルギーは熱として散逸する。エネルギーカスケードは次節以降で述べる Kolmogorov の乱流理論の骨子となる重要な描像である。

## 第3章 粒子画像流速測定による室内実験

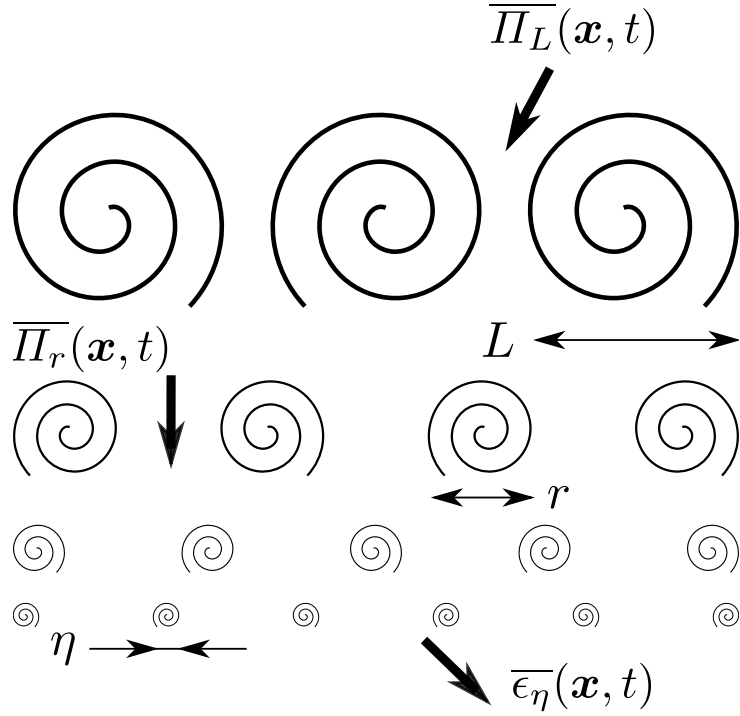


図 2.1: エネルギーカスケード描像の模式図．図の上部が大スケール渦，下部が小スケール渦を表し，エネルギーが大スケールから小スケールに（上から下に）「カスケード」する様子を模式的に示している．

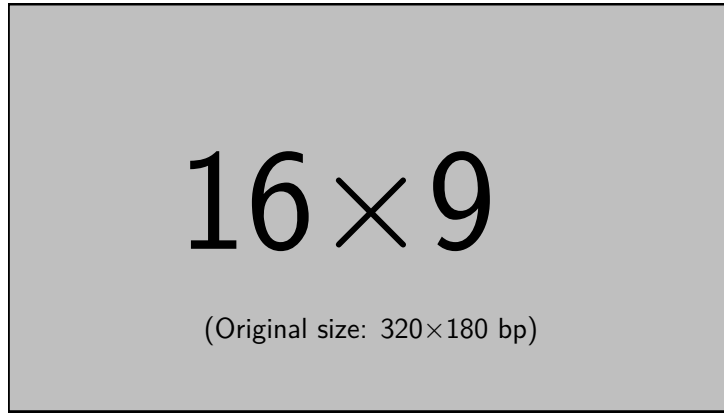


図 3.1: 三次元 CAD による実験装置の模式図．

本章では，閉じた系の乱流を粒子画像流速測定（Particle Image Velocimetry, PIV）実験で測定した結果を報告する．3.1 節で実験装置の諸元についてまとめる．

### 3.1 実験装置

実験装置の模式図を図 3.1 に，実験に使用する機材の一覧を表 3.1 に示す．

表 3.1: 実験機材の一覧

機材名称	メーカー	型番
円筒容器	アクリル製	加工品
回転円盤	樹脂製	加工品
サーボモータ	オリエンタルモーター社製	NX940AS-PS5
モータ制御用ソフトウェア	オリエンタルモーター社製	MEXE02
ハイスピードカメラ	BASLER 社製	acA 1920-150 $\mu$ m
脱気装置	ERC 社製	ERC-3302W
ロッドレンズ	シグマ光機社製	RODB-05L10
ミラー	シグマ光機社製	TFA-10S05-10
プリズム	シグマ光機社製	PRB2-10-550
平面球凸レンズ	シグマ光機社製	SLB-30-800P

例えば現時点では作っていない図を将来的に追加したい場合，このようなダミー図を用いると良い．これ以外にもさまざまなアスペクト比の図が用意されている（mwe パッケージのドキュメントを参照せよ）．

表に罫線は少ないほうがよい．とくに表全体を囲むような罫線は無いほうがきれいに表示される（と思う）．

### 3.1.1 系の無次元化

円盤の半径  $D/2$  m と回転円盤の外周速度  $U$  m/s より Reynolds 数

$$\text{Re} \equiv \frac{UD/2}{\nu} \quad (3.1)$$

を定義する．

単位付きの数値を記述する場合，上記のように `siunitx` パッケージを用いる．

ただし，外周速度  $U$  は円盤の回転周期  $T$  s と半径  $D/2$  をもちいて

$$U \equiv \frac{2\pi D/2}{T} \quad (3.2)$$

で表せる．このとき，Reynolds 数の定義は

$$\begin{aligned} \text{Re} &\equiv \frac{UD/2}{\nu} \\ &= \frac{\pi D^2}{2\nu T} \end{aligned} \quad (3.3)$$



となる．作動流体である水の動粘度は  $\nu = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  とする．実験で変化させるのは  $T$  のみであり，例えば  $T = 2.0 \text{ s}$  のとき，Reynolds 数は

$$\text{Re} = \frac{\pi D^2}{2\nu T} \quad (3.4)$$

$$= \frac{\pi \times (0.200)^2}{2 \times 1.0 \times 10^{-6} \times 2.0} \doteq 3.1 \times 10^4 \quad (3.5)$$

となる．

## 第4章 スペクトル要素 Fourier 法による直接数値計算

本章では，スペクトル要素 Fourier 法により平滑円盤で駆動される von Kármán 流を直接数値計算（Direct Numerical Simulation, DNS）した結果を報告する．4.1 節でスペクトル要素法の基礎をまとめる．4.2 節で円柱座標系で周方向に一次元 Fourier スペクトル法，軸および半径方向に二次元スペクトル要素法を用いたスペクトル要素 Fourier 法のアルゴリズムをまとめる．

### 4.1 スペクトル要素法の基礎

乱流の数値計算にはさまざまな手法が用いられてきた．スペクトル法とは適切な性質をもつ基底関数により物理量を波数空間に展開することで方程式を数値的に解く手法であり，高精度な反面領域で問題を考える領域形状が単純なものに制限される [9]．これに対し，きわめて複雑な形状の物体まわりの流れを計算する必要がある産業界では空間を離散化し隣接する座標点の情報を用いる差分法 [10] や方程式を弱形式で定義し空間を離散化した「要素」の接点の情報を用いる有限要素法などが広く用いられている [11]．本研究で用いるスペクトル要素法とは，1980 年代に提唱された「スペクトル法の精度と有限要素法の一般性を融合した\*」計算手法である [13]．

### 4.2 三次元円柱座標系におけるスペクトル要素 Fourier 法

本研究では三次元円柱座標系  $\boldsymbol{x} = (z, r, \theta)$  で

- 周方向（ $\theta$  方向）に一次元 Fourier スペクトル法
- 軸・半径方向（ $z, r$  方向）に二次元スペクトル要素法

を組み合わせたスペクトル要素 Fourier 法（spectral element-Fourier method）[14, 15] を実装した．

---

\*“combines the generality of the finite element method with the accuracy of spectral techniques” [12]

### 4.2.1 三次元円柱座標系の非圧縮 Navier-Stokes 方程式

無次元化された非圧縮 Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{N}(\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

を用いる.

#### 支配方程式の対角化

円柱座標系に起因する  $v_k, w_k$  の方程式の右辺に現れた余分な項を, 対角化

$$\begin{cases} \tilde{v}_k = v_k + i w_k \\ \tilde{w}_k = v_k - i w_k \\ [\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_r]_k = [\mathbf{N}(\mathbf{u})_r]_k + i[\mathbf{N}(\mathbf{u})_\theta]_k \\ [\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_\theta]_k = [\mathbf{N}(\mathbf{u})_r]_k - i[\mathbf{N}(\mathbf{u})_\theta]_k \end{cases} \quad (4.3)$$

で消去する.

ここでは4行だての数式にひとつだけ式番号をつけるため, 1-2, 4行目に nonumber コマンドを付加しているが, そのために式番号が3行目に表示されてしまっている (4行の真ん中ではない). いろいろなやり方があるようだが, empheq パッケージと相性の良い方法が見つけられていない.

#### 支配方程式の対称化

対角化された支配方程式に存在する  $1/r^2$  に関する特異点を除去するために  $r$  を乗じ, 対称化された支配方程式と非圧縮条件

$$\begin{cases} \frac{\partial r u_k}{\partial t} + r[\mathbf{N}(\mathbf{u})_z]_k = -r \frac{\partial}{\partial z} p_k + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial z} r \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r} \right) u_k \\ \frac{\partial r \tilde{v}_k}{\partial t} + r[\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_r]_k = - \left( r \frac{\partial}{\partial r} - k \right) p_k + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial z} r \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(k+1)^2}{r} \right) \tilde{v}_k \\ \frac{\partial r \tilde{w}_k}{\partial t} + r[\tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{u})_\theta]_k = - \left( r \frac{\partial}{\partial r} + k \right) p_k + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial}{\partial z} r \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(k-1)^2}{r} \right) \tilde{w}_k \\ \frac{\partial r u_k}{\partial z} + \frac{\partial r v_k}{\partial r} + i k w_k = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

を得る.

## 第5章 結言

本研究では、閉じた系の乱流に注目して室内実験と直接数値計算を通じて系の大規模な時空間変動について解析した [16].

ようやくの思いで笹原を這い出すと向うに大きな池がある。吾輩は池の前に坐ってどうしたらよかろうと考えて見た。別にこれという分別も出ない。しばらくして泣いたら書生がまた迎に来てくれるかと考え付いた。ニャー、ニャーと試みにやって見たが誰も来ない。そのうち池の上をさらさらと風が渡って日が暮れかかる。腹が非常に減って来た。泣きたくても声が出ない。仕方がない、何でもよいから食物のある所まであるこうと決心をしてそろりそろりと池を左りに廻り始めた。どうも非常に苦しい。そこを我慢して無理やりに這って行くとようやくの事で何となく人間臭い所へ出た。ここへ這入ったら、どうにかなると思って竹垣の崩れた穴から、とある邸内にもぐり込んだ。縁は不思議なもので、もしこの竹垣が破れていなかったなら、吾輩はついに路傍に餓死したかも知れんのである。一樹の蔭とはよく云ったものだ。この垣根の穴は今日に至るまで吾輩が隣家の三毛を訪問する時の通路になっている。さて邸へは忍び込んだもののこれから先どうして善いか分らない。そのうちに暗くなる、腹は減る、寒さは寒し、雨が降って来るという始末でもう一刻の猶予が出来なくなった。仕方がないからとにかく明るくて暖かそうな方へ方へとあるいて行く。今から考えるとその時はすでに家の内に這入っておったのだ。ここで吾輩は彼の書生以外の人間を再び見るべき機会に遭遇したのである。第一に逢ったのがおさんである。これは前の書生より一層乱暴な方で吾輩を見るや否やいきなり頸筋をつかんで表へ抛り出した。いやこれは駄目だと思ったから眼をねぶって運を天に任せていた。しかしひもじいのと寒いのはどうしても我慢が出来ん。吾輩は再びおさんの隙を見て台所へ這い上った。すると間もなくまた投げ出された。吾輩は投げ出されては這い上り、這い上っては投げ出され、何でも同じ事を四五遍繰り返したのを記憶している。その時におさんと云う者はつくづくいやになった。この間おさんの三馬を偷んでこの返報をしてやってから、やっと胸の痞が下りた。吾輩が最後につまみ出されようとしたときに、この家の主人が騒々しい何だといいいながら出て来た。下女は吾輩をぶら下げて主人の方へ向けてこの宿なしの小猫がいくら出しても出しても御台所へ上って来て困りますという。主人は鼻の下の黒い毛を捻りながら吾輩の顔をしばらく眺めておったが、やがてそんなら内へ置いてやれといったまま奥へ這入ってしまった。主人はあまり口を聞かぬ人と見えた。下女は口惜しそうに吾輩を台所へ抛り出した。かくして吾輩はついにこの家を自分の住家と極める事にしたのである。

吾輩の主人は滅多に吾輩と顔を合せる事がない。職業は教師だそう。学校から帰ると終日書齋に這入ったぎりほとんど出て来る事がない。家のものは大変な勉強家だと思っている。当人も勉強家であるかのごとく見せている。しかし実際はうちのものがいうような勤勉家ではない。吾輩は時々忍び足に彼の書齋を覗いて見るが、彼はよく昼寝をしている事がある。時々読みかけてある本の上に涎をたらしている。彼は胃弱で皮膚の色が淡黄色を帯びて弾力のない不活潑な徴候をあらわしている。その癖に大飯を食う。大飯を食った後でタカジャスターゼを飲む。飲んだ後で書物をひろげる。二三ページ読むと眠くなる。涎を本の上へ垂らす。これが彼の毎夜繰り返す日課である。吾輩は猫ながら時々考える

事がある。教師というものは実に楽なものだ。人間と生れたら教師となるに限る。こんなに寝ていて勤まるものなら猫にでも出来ぬ事はないと。それでも主人に云わせると教師ほどつらいものはないそうで彼は友達が来る度に何とかかんとか不平を鳴らしている。

吾輩がこの家へ住み込んだ当時は、主人以外のものにははなはだ不人望であった。どこへ行っても跳ね付けられて相手にしてくれ手がなかった。いかに珍重されなかったかは、今日に至るまで名前さえつけてくれないのでも分る。吾輩は仕方がないから、出来得る限り吾輩を入れてくれた主人の傍にいる事をつとめた。朝主人が新聞を読むときは必ず彼の膝の上に乗る。彼が昼寝をするときは必ずその背中に乗る。これはあながち主人が好きという訳ではないが別に構い手がなかったからやむを得るのである。その後いろいろ経験の上、朝は飯櫃の上、夜は炬燵の上、天気の良い日は縁側へ寝る事とした。しかし一番心持の好いのは夜に入ってここのうちの小供の寝床へもぐり込んでいっしょにねる事である。この小供というのは五つと三つで夜になると二人が一つ床へ入って一間へ寝る。吾輩はいつでも彼等の中に己れを容るべき余地を見出してどうにか、こうにか割り込むのであるが、運悪く小供の一人が眼を醒ますが最後大変な事になる。小供は——ことに小さい方が質がわるい——猫が来た猫が来たといって夜中でも何でも大きな声で泣き出すのである。すると例の神経胃弱性の主人は必ず眼をさまして次の部屋から飛び出してくる。現にせんだってなどは物指で尻をひどく叩かれた。

# 謝辞

指導教授，先輩，同期，後輩，家族などへの謝辞を記述する．

## 参考文献

- [1] H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence* (MIT Press, 1972).
- [2] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics, second edition: volume 6 (course of theoretical physics)*, 2nd ed., Course of theoretical physics / by L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 6 (Butterworth-Heinemann, Jan. 1987).
- [3] 木田 重雄, 柳瀬 眞一郎, 乱流力学 (朝倉書店, 1999).
- [4] U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, 1995).
- [5] 巽 友正, 流体力学, 新物理学シリーズ (培風館, 1982).
- [6] S. Goto, Y. Saito, and G. Kawahara, Hierarchy of antiparallel vortex tubes in spatially periodic turbulence at high Reynolds numbers, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 64603 (2017).
- [7] 後藤 晋, 発達した乱流—エネルギーカスケードをめぐって, *日本物理学会誌* **73**, 457 (2018).
- [8] 大阪大学基礎工学研究科 後藤研究室, <http://fm.me.es.osaka-u.ac.jp/index.html> (2020/1/30 に参照).
- [9] 石岡 圭一, スペクトル法による数値計算入門 (東京大学出版会, 2004).
- [10] 梶島 岳夫, 乱流の数値シミュレーション (養賢堂, 1999).
- [11] 菊地 文雄, 有限要素法の数理: 数学的基礎と誤差解析, 計算力学と CAE シリーズ 13 (培風館, 1994).
- [12] A. Patera, A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion, *J. Comput. Phys.* **54**, 468 (1984).
- [13] G. Karniadakis and S. Sherwin, *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*, 2nd ed., Numerical Mathematics and Scientific Computation (OUP Oxford, 2005).
- [14] G. E. Karniadakis, M. Israeli, and S. A. Orszag, High-Order Splitting Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations, *J. Comput. Phys.* **97**, 414 (1991).
- [15] H. M. Blackburn and S. J. Sherwin, Formulation of a Galerkin spectral element-Fourier method for three-dimensional incompressible flows in cylindrical geometries, *J. Comput. Phys.* **197**, 759 (2004).
- [16] 荒木 亮, von Kármán 乱流の時空間大変動とエネルギーカスケードの動力学, 大阪大学基礎工学研究科 修士論文 (2020).
- [17] 可視化情報学会, *PIV* ハンドブック, 第 2 版 (森北出版, 2018).

# 付録

本文に書くと冗長になる

- 実験の手順
- 数値計算や解析の（重要ではない）アルゴリズム
- 生データやより詳細な結果を示す図，表

などをここに執筆する．なお，本文とは独立した章番号としている．

## A.1 PIVにおける誤ベクトル判定アルゴリズム

### A.1.1 中央値フィルタによる誤ベクトル除去

近傍流速ベクトルの中央値を用いたフィルタリングで誤ベクトルを除去する [17, p.161]. PIVによって格子状に得られた流速場のうち， $(i, j)$  座標における流速ベクトルを  $\mathbf{u}_{i,j}$  と書く．このベクトルの周囲に存在する最大 8 本の流速ベクトルの中央値ベクトル  $\mathbf{u}_M$  を算出する．このとき，閾値を  $\delta_{\text{th}} = 2$  として

$$|\mathbf{u}_{i,j} - \mathbf{u}_M| \geq \delta_{\text{th}} \quad (\text{A.1})$$

となるものを誤ベクトルと判定する．ただし，実装上はベクトル  $\mathbf{u} = (u, v)$  の成分自乗和を用いて

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{i,j}|^2 - |\mathbf{u}_{i,j}|^2 &\equiv (u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2) - (u_{M:i,j}^2 + v_{M:i,j}^2) \\ &\geq \delta_{\text{th}}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

と計算している．