2 包含関係, 外延公理

[sthm=tineq]
定理 2.1. a, b, c を集合とするとき,

$$a = b \to (a \in c \leftrightarrow b \in c), \quad a = b \to (c \in a \leftrightarrow c \in b) \tag{2.1}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $a = b$ ならば, $a \in c \leftrightarrow b \in c$, $c \in a \leftrightarrow c \in b$.

2) $a = b$ とする. このとき $a \in c$ ならば, $b \in c$ である. また $b \in c$ ならば, $a \in c$ である. また $c \in a$ ならば, $c \in b$ である. また $c \in b$ ならば, $c \in a$ である.

[sthm=&in]
定理 2.2. a, b, c を集合とするとき,

$$a = b \wedge a \in c \to b \in c, \quad a = b \wedge b \in c \to a \in c,$$

$$a = b \wedge c \in a \to c \in b, \quad a = b \wedge c \in b \to c \in a$$

がすべて成り立つ.

[sthmn=&in]
定理 2.3. a, b, c を集合とするとき,

$$a \in c \wedge b \notin c \to a \neq b, \quad a \notin c \wedge b \in c \to a \neq b,$$

$$c \in a \wedge c \notin b \to a \neq b, \quad c \notin a \wedge c \in b \to a \neq b$$

がすべて成り立つ. またこのことから, 次の (2.2) が成り立つ.

(2.2) $a \in c$ と $b \notin c$ が共に成り立てば, $a \neq b$. また $a \notin c$ と $b \in c$ が共に成り立てば, $a \neq b$.
また $c \in a$ と $c \notin b$ が共に成り立てば, $a \neq b$. また $c \notin a$ と $c \in b$ が共に成り立てば, $a \neq b$.

[sthmspin=]
定理 2.4. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a = b \to ((\exists x \in a)(R) \leftrightarrow (\exists x \in b)(R)), \quad a = b \to ((\forall x \in a)(R) \leftrightarrow (\forall x \in b)(R)),$$

$$a = b \to ((!x \in a)(R) \leftrightarrow (!x \in b)(R)), \quad a = b \to ((\exists! x \in a)(R) \leftrightarrow (\exists! x \in b)(R))$$

がすべて成り立つ. またこれらから, 次の (2.3) が成り立つ.

(2.3) $a = b$ ならば, $(\exists x \in a)(R) \leftrightarrow (\exists x \in b)(R),\ (\forall x \in a)(R) \leftrightarrow (\forall x \in b)(R),$
$(!x \in a)(R) \leftrightarrow (!x \in b)(R),\ (\exists! x \in a)(R) \leftrightarrow (\exists! x \in b)(R)$ がすべて成り立つ.

[sthmsubsetconst]
定理 2.5. a と b を集合とする. また x を a 及び b の中に自由変数として現れない, 定数でない文字とする. このとき $x \in a \to x \in b$ ならば, $a \subset b$ である.

[sthmsubsetbasis]
定理 2.6. a, b, c を集合とするとき,

$$a \subset b \to (c \in a \to c \in b)$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a \subset b$ ならば, $c \in a \to c \in b$.
2) $a \subset b$ と $c \in a$ が共に成り立つならば, $c \in b$.

[sthmnotsubset]
定理 2.7. a と b を集合とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a \not\subset b \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge x \notin b) \tag{2.8}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a \not\subset b$ ならば, $\exists x(x \in a \wedge x \notin b)$.
2) $\exists x(x \in a \wedge x \notin b)$ ならば, $a \not\subset b$.

[sthmnotsubsetbasis]
定理 2.8. a, b, c を集合とするとき,

$$c \in a \wedge c \notin b \to a \not\subset b \tag{2.11}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (2.12) が成り立つ.

(2.12) $c \in a$ と $c \notin b$ が共に成り立てば, $a \not\subset b$.

[sthm=tsubseteq]
定理 2.9. a, b, c を集合とするとき,

$$a = b \to (a \subset c \leftrightarrow b \subset c), \quad a = b \to (c \subset a \leftrightarrow c \subset b) \tag{2.15}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a = b$ ならば, $a \subset c \leftrightarrow b \subset c$, $c \subset a \leftrightarrow c \subset b$.
2) $a = b$ とする. このとき $a \subset c$ ならば, $b \subset c$ である. また $b \subset c$ ならば, $a \subset c$ である. また $c \subset a$ ならば, $c \subset b$ である. また $c \subset b$ ならば, $c \subset a$ である.

[sthm=&subset]

定理 2.10. a, b, c を集合とするとき,

$$a = b \wedge a \subset c \to b \subset c, \quad a = b \wedge b \subset c \to a \subset c,$$

$$a = b \wedge c \subset a \to c \subset b, \quad a = b \wedge c \subset b \to c \subset a$$

がすべて成り立つ.

[sthmn=&subset]

定理 2.11. a, b, c を集合とするとき,

$$a \subset c \wedge b \not\subset c \to a \neq b, \quad a \not\subset c \wedge b \subset c \to a \neq b,$$

$$c \subset a \wedge c \not\subset b \to a \neq b, \quad c \not\subset a \wedge c \subset b \to a \neq b$$

がすべて成り立つ. またこのことから, 次の (2.16) が成り立つ.

(2.16) $a \subset c$ と $b \not\subset c$ が共に成り立てば, $a \neq b$. また $a \not\subset c$ と $b \subset c$ が共に成り立てば, $a \neq b$.
また $c \subset a$ と $c \not\subset b$ が共に成り立てば, $a \neq b$. また $c \not\subset a$ と $c \subset b$ が共に成り立てば, $a \neq b$.

[sthmsubsetself]

定理 2.12. a を集合とするとき,

$$a \subset a$$

が成り立つ.

[sthm=tsubset]

定理 2.13. a と b を集合とするとき,

$$a = b \to a \subset b, \quad a = b \to b \subset a \tag{2.17}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (2.18) が成り立つ.

(2.18) $a = b$ ならば, $a \subset b,\ b \subset a$.

[sthmsubsettrans]

定理 2.14. a, b, c を集合とするとき,

$$a \subset b \wedge b \subset c \to a \subset c$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (2.22) が成り立つ.

(2.22) $a \subset b$ と $b \subset c$ が共に成り立てば, $a \subset c$.

[sthmspinsubset]
定理 2.15. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a \subset b \to ((\exists x \in a)(R) \to (\exists x \in b)(R)),$$

$$a \subset b \to ((\forall x \in b)(R) \to (\forall x \in a)(R)),$$

$$a \subset b \to ((!x \in b)(R) \to (!x \in a)(R))$$

がすべて成り立つ. またこれらから, 次の (2.26) が成り立つ.

(2.26) $a \subset b$ ならば, $(\exists x \in a)(R) \to (\exists x \in b)(R)$, $(\forall x \in b)(R) \to (\forall x \in a)(R)$, $(!x \in b)(R) \to (!x \in a)(R)$ がすべて成り立つ.

[sthmaxiom1]
定理 2.16. a と b を集合とするとき,

$$a \subset b \wedge b \subset a \leftrightarrow a = b$$

が成り立つ. またこのことから特に, 次の (2.34) が成り立つ.

(2.34) $a \subset b$ と $b \subset a$ が共に成り立てば, $a = b$.

[sthmset=]
定理 2.17. a と b を集合とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(2.37) $$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$ ならば, $a = b$. また $a = b$ ならば, $\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b)$.
2) x が定数でなく, $x \in a \leftrightarrow x \in b$ が成り立てば, $a = b$.

[sthmpsubsetbasis]
定理 2.18. a と b を集合とするとき,

(2.40) $$a \subset b \leftrightarrow a \subsetneqq b \vee a = b$$

が成り立つ.

[sthmpsubset&axiom1]
定理 2.19. a と b を集合とするとき,

(2.45) $$a \subsetneqq b \leftrightarrow a \subset b \wedge b \not\subset a$$

が成り立つ．特に,

$$a \subsetneqq b \to b \not\subset a \tag{2.46}$$

が成り立つ．またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ．

1) $a \subsetneqq b$ ならば, $b \not\subset a$.
2) $a \subset b$ と $b \not\subset a$ が共に成り立てば, $a \subsetneqq b$.

[sthmpsubsettrans]
定理 2.20. a, b, c を集合とするとき,

$$a \subset b \land b \subsetneqq c \to a \subsetneqq c, \tag{2.52}$$

$$a \subsetneqq b \land b \subset c \to a \subsetneqq c, \tag{2.53}$$

$$a \subsetneqq b \land b \subsetneqq c \to a \subsetneqq c \tag{2.54}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (2.55) が成り立つ．

(2.55) $a \subset b$ と $b \subsetneqq c$ が共に成り立てば, $a \subsetneqq c$. また $a \subsetneqq b$ と $b \subset c$ が共に成り立てば, $a \subsetneqq c$. また $a \subsetneqq b$ と $b \subsetneqq c$ が共に成り立てば, $a \subsetneqq c$.