3　集合を作り得る関係式

[sthmsm!]

定理 3.1. R を関係式とし, x を文字とする．また y を x と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$!y(\forall x(x \in y \leftrightarrow R)) \tag{3.2}$$

が成り立つ.

[sthmsmex!]

定理 3.2. R を関係式とし, x を文字とする．また y を x と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \leftrightarrow \exists ! y(\forall x(x \in y \leftrightarrow R)) \tag{3.19}$$

が成り立つ.

[sthmsmbasis]

定理 3.3. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow R) \to \mathrm{Set}_x(R)$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $\forall x(x \in a \leftrightarrow R)$ ならば, R は x について集合を作り得る.
2) x が定数でなく, $x \in a \leftrightarrow R$ が成り立てば, R は x について集合を作り得る.

[sthmalleqsmlem]

定理 3.4. R と S を関係式とし, x を文字とする．また y を x と異なり, R 及び S の中に自由変数として現れない, 定数でない文字とする．このとき

$$\forall x(R \leftrightarrow S) \to \forall y(\forall x(x \in y \leftrightarrow R) \leftrightarrow \forall x(x \in y \leftrightarrow S)) \tag{3.23}$$

が成り立つ.

[sthmalleqsm]

定理 3.5. R と S を関係式とし, x を文字とする．このとき

$$\forall x(R \leftrightarrow S) \to (\mathrm{Set}_x(R) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(S)) \tag{3.29}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $\forall x(R \leftrightarrow S)$ ならば, $\mathrm{Set}_x(R) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(S)$.

2) x が定数でなく, $R \leftrightarrow S$ が成り立てば, $\mathrm{Set}_x(R) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(S)$.

3) $\forall x(R \leftrightarrow S)$ であるとする．このとき R, S のうちの一方が x について集合を作り得るならば, 他方も x について集合を作り得る.

4) x が定数でなく, $R \leftrightarrow S$ が成り立つとする．このとき R, S のうちの一方が x について集合を作り得るならば, 他方も x について集合を作り得る.

[sthmisetbasis]

定理 3.6. R を関係式, T を対象式とし, x を文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \to (T \in \{x \mid R\} \leftrightarrow (T|x)(R)) \tag{3.45}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) R が x について集合を作り得るならば, $T \in \{x \mid R\} \leftrightarrow (T|x)(R)$.

2) R が x について集合を作り得るとする．このとき $T \in \{x \mid R\}$ ならば, $(T|x)(R)$ である．またこのとき $(T|x)(R)$ ならば, $T \in \{x \mid R\}$ である.

[sthma=iset]

定理 3.7. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow R) \to a = \{x \mid R\}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $\forall x(x \in a \leftrightarrow R)$ ならば, $a = \{x \mid R\}$.

2) x が定数でなく, $x \in a \leftrightarrow R$ が成り立てば, $a = \{x \mid R\}$.

[sthmsmbasis&iset=a]

定理 3.8. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow R) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} = a \tag{3.46}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (3.47) が成り立つ.

(3.47) R が x について集合を作り得るとき, $\{x \mid R\} = a$ ならば, $\forall x(x \in a \leftrightarrow R)$.

[sthmsmtiset&asubset]

定理 3.9. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \to (\forall x(x \in a \to R) \leftrightarrow a \subset \{x \mid R\}), \tag{3.55}$$

$$\mathrm{Set}_x(R) \to (\forall x(R \to x \in a) \leftrightarrow \{x \mid R\} \subset a) \tag{3.56}$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の 1) が成り立つ．

1) R が x について集合を作り得るならば,

$$\forall x(x \in a \to R) \leftrightarrow a \subset \{x \mid R\}, \quad \forall x(R \to x \in a) \leftrightarrow \{x \mid R\} \subset a$$

が共に成り立つ．

更に, R が x について集合を作り得るとき, 次の 2)—5) が成り立つ．

2) $\forall x(x \in a \to R)$ ならば, $a \subset \{x \mid R\}$．また $a \subset \{x \mid R\}$ ならば, $\forall x(x \in a \to R)$.

3) x が定数でなく, $x \in a \to R$ が成り立てば, $a \subset \{x \mid R\}$.

4) $\forall x(R \to x \in a)$ ならば, $\{x \mid R\} \subset a$．また $\{x \mid R\} \subset a$ ならば, $\forall x(R \to x \in a)$.

5) x が定数でなく, $R \to x \in a$ が成り立てば, $\{x \mid R\} \subset a$.

[sthmspiniset]

定理 3.10. A と R を関係式とし, x を文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(A) \to ((\exists x \in \{x \mid A\})(R) \leftrightarrow \exists_A x(R)), \quad \mathrm{Set}_x(A) \to ((\forall x \in \{x \mid A\})(R) \leftrightarrow \forall_A x(R)),$$

$$\mathrm{Set}_x(A) \to ((!x \in \{x \mid A\})(R) \leftrightarrow !_A x(R)), \quad \mathrm{Set}_x(A) \to ((\exists! x \in \{x \mid A\})(R) \leftrightarrow \exists!_A x(R))$$

がすべて成り立つ．またこれらから, 次の (3.67) が成り立つ．

(3.67) A が x について集合を作り得るならば,
$(\exists x \in \{x \mid A\})(R) \leftrightarrow \exists_A x(R)$, $(\forall x \in \{x \mid A\})(R) \leftrightarrow \forall_A x(R)$,
$(!x \in \{x \mid A\})(R) \leftrightarrow !_A x(R)$, $(\exists! x \in \{x \mid A\})(R) \leftrightarrow \exists!_A x(R)$ がすべて成り立つ．

[sthmalleqiset=]

定理 3.11. R と S を関係式とし, x を文字とする．このとき

$$\forall x(R \leftrightarrow S) \to \{x \mid R\} = \{x \mid S\} \tag{3.68}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ．

1) $\forall x(R \leftrightarrow S)$ ならば, $\{x \mid R\} = \{x \mid S\}$.

2) x が定数でなく, $R \leftrightarrow S$ が成り立てば, $\{x \mid R\} = \{x \mid S\}$.

[sthmsmtalltisetsubseteq]

定理 3.12. R と S を関係式とし, x を文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \wedge \mathrm{Set}_x(S) \to (\forall x(R \to S) \leftrightarrow \{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}) \tag{3.71}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ．

1) R と S が共に x について集合を作り得るならば, $\forall x(R \to S) \leftrightarrow \{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}$.

2) R と S が共に x について集合を作り得るとする．このとき $\forall x(R \to S)$ ならば, $\{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}$．またこのとき $\{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}$ ならば, $\forall x(R \to S)$.

3) x は定数でないとする．また R と S は共に x について集合を作り得るとする．このとき $R \to S$ ならば，$\{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}$.

[sthmsmtalleqiset=eq]

定理 3.13. R と S を関係式とし，x を文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \wedge \mathrm{Set}_x(S) \to (\forall x(R \leftrightarrow S) \leftrightarrow \{x \mid R\} = \{x \mid S\}) \tag{3.79}$$

が成り立つ．またこのことから，次の 1), 2) が成り立つ．

1) R と S が共に x について集合を作り得るならば，$\forall x(R \leftrightarrow S) \leftrightarrow \{x \mid R\} = \{x \mid S\}$.

2) R と S が共に x について集合を作り得るとする．このとき $\{x \mid R\} = \{x \mid S\}$ ならば，$\forall x(R \leftrightarrow S)$.