5 分出と合併の schema

[sthms7]

定理 5.1. R を関係式とし, x と y を異なる文字とする．また u と v を共に x 及び y と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする．このとき次の 1), 2) が成り立つ．

1) $\forall y(\exists u(\forall x(R \to x \in u)))$ ならば, $\forall v(\mathrm{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.

2) y が定数でなく, $\exists u(\forall x(R \to x \in u))$ が成り立てば, $\forall v(\mathrm{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.

[sthms7a]

定理 5.2. a を集合とし, R を関係式とする．また x と y を異なる文字とし, x は a の中に自由変数として現れないとする．また v を x, y と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\forall y(\forall x(R \to x \in a)) \to \forall v(\mathrm{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R))) \tag{5.36}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1)—4) が成り立つ．

1) $\forall y(\forall x(R \to x \in a))$ ならば, $\forall v(\mathrm{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.

2) y が定数でなく, $\forall x(R \to x \in a)$ が成り立てば, $\forall v(\mathrm{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.

3) x が定数でなく, $\forall y(R \to x \in a)$ が成り立てば, $\forall v(\mathrm{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.

4) x と y が共に定数でなく, $R \to x \in a$ が成り立てば, $\forall v(\mathrm{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.

[sthms7b]

定理 5.3. b を集合とし, R を関係式とする．また x と y を互いに異なり, 共に b の中に自由変数として現れない文字とする．また u を x, y と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\forall y(\exists u(\forall x(R \to x \in u))) \to \mathrm{Set}_x(\exists y(y \in b \wedge R)) \tag{5.39}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ．

1) $\forall y(\exists u(\forall x(R \to x \in u)))$ ならば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る．

2) y が定数でなく, $\exists u(\forall x(R \to x \in u))$ が成り立てば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る．

[sthms7ab]

定理 5.4. a と b を集合とし, R を関係式とする．また x と y を異なる文字とし, x は a 及び b の中に自由変数として現れず, y は b の中に自由変数として現れないとする．このとき

$$\forall y(\forall x(R \to x \in a)) \to \mathrm{Set}_x(\exists y(y \in b \wedge R)) \tag{5.42}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1)—4) が成り立つ．

1) $\forall y(\forall x(R \to x \in a))$ ならば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る．

2) y が定数でなく, $\forall x(R \to x \in a)$ が成り立てば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る．

3) x が定数でなく, $\forall y(R \to x \in a)$ が成り立てば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る.

4) x と y が共に定数でなく, $R \to x \in a$ が成り立てば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る.

[sthmssetsm]

定理 5.5. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき関係式 $x \in a \wedge R$ は x について集合を作り得る.

[sthmssetbasis]

定理 5.6. a と b を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$b \in \{x \in a \mid R\} \leftrightarrow b \in a \wedge (b|x)(R) \tag{5.60}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $b \in \{x \in a \mid R\}$ ならば, $b \in a$ と $(b|x)(R)$ が共に成り立つ.

2) $b \in a$ と $(b|x)(R)$ が共に成り立てば, $b \in \{x \in a \mid R\}$.

[sthmssetsubseta]

定理 5.7. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\{x \in a \mid R\} \subset a \tag{5.61}$$

が成り立つ.

[sthmssetsubsetb]

定理 5.8. a と b を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a \subset b \to \{x \in a \mid R\} \subset b, \quad b \subset \{x \in a \mid R\} \to b \subset a$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $a \subset b$ ならば, $\{x \in a \mid R\} \subset b$.

2) $b \subset \{x \in a \mid R\}$ ならば, $b \subset a$.

[sthmbsubsetsset]

定理 5.9. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$b \subset \{x \in a \mid R\} \leftrightarrow b \subset a \wedge (\forall x \in b)(R) \tag{5.66}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.

1) $b \subset \{x \in a \mid R\}$ ならば, $b \subset a$ と $(\forall x \in b)(R)$ が共に成り立つ.

2) $b \subset a$ と $(\forall x \in b)(R)$ が共に成り立てば, $b \subset \{x \in a \mid R\}$.

3) x が定数でなく, $b \subset a$ と $x \in b \to R$ が共に成り立てば, $b \subset \{x \in a \mid R\}$.

[sthmsset=a]

定理 5.10. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(\forall x \in a)(R) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} = a \tag{5.72}$$

が成り立つ. 特に

$$\forall x(R) \to \{x \in a \mid R\} = a \tag{5.73}$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $(\forall x \in a)(R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = a$. また $\{x \in a \mid R\} = a$ ならば, $(\forall x \in a)(R)$.

2) x が定数でなく, $x \in a \to R$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} = a$.

3) $\forall x(R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = a$.

4) x が定数でなく, R が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} = a$.

[sthmsset=arfree]

定理 5.11. a を集合, R を関係式とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$R \to \{x \in a \mid R\} = a \tag{5.80}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.81) が成り立つ.

(5.81) R ならば, $\{x \in a \mid R\} = a$.

[sthmssetsubsetiset]

定理 5.12. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \to \{x \in a \mid R\} \subset \{x \mid R\} \tag{5.84}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.85) が成り立つ.

(5.85) R が x について集合を作り得るならば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \mid R\}$.

[sthmalltiset=sset]

定理 5.13. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\forall x(R \to x \in a) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} = \{x \in a \mid R\} \tag{5.88}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.

1) $\forall x(R \to x \in a)$ ならば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} = \{x \in a \mid R\}$ が成り立つ.

2) x が定数でなく, $R \to x \in a$ が成り立てば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} = \{x \in a \mid R\}$ が成り立つ.

3) R が x について集合を作り得るとき, $\{x \mid R\} = \{x \in a \mid R\}$ ならば, $\forall x(R \to x \in a)$.

[sthmalltisetsubseta]
定理 5.14. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\forall x(R \to x \in a) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} \subset a \tag{5.93}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ．

1) $\forall x(R \to x \in a)$ ならば, R は x について集合を作り得る．またこのとき $\{x \mid R\} \subset a$ が成り立つ．

2) x が定数でなく, $R \to x \in a$ が成り立てば, R は x について集合を作り得る．またこのとき $\{x \mid R\} \subset a$ が成り立つ．

3) R が x について集合を作り得るとき, $\{x \mid R\} \subset a$ ならば, $\forall x(R \to x \in a)$.

[sthmssetsubset]
定理 5.15. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$a \subset b \to \{x \in a \mid R\} \subset \{x \in b \mid R\} \tag{5.96}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (5.97) が成り立つ．

$$a \subset b \text{ ならば}, \{x \in a \mid R\} \subset \{x \in b \mid R\}. \tag{5.97}$$

[sthmsset=]
定理 5.16. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$a = b \to \{x \in a \mid R\} = \{x \in b \mid R\} \tag{5.102}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (5.103) が成り立つ．

$$a = b \text{ ならば}, \{x \in a \mid R\} = \{x \in b \mid R\}. \tag{5.103}$$

[sthmalltssetsubset]
定理 5.17. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$(\forall x \in a)(R \to S) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\} \tag{5.104}$$

が成り立つ．特に

$$\forall x(R \to S) \to \{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\} \tag{5.105}$$

が成り立つ．またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ．

1) $(\forall x \in a)(R \to S)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$. また $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$ ならば, $(\forall x \in a)(R \to S)$.

2) x が定数でなく, $x \in a \to (R \to S)$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$.

3) $\forall x(R \to S)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$.

4) x が定数でなく, $R \to S$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$.

[sthmalleqsset=]

定理 5.18. a を集合, R と S を関係式とし, x を文字とする. このとき

$$(\forall x \in a)(R \leftrightarrow S) \to \{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\} \tag{5.111}$$

が成り立つ. 特に

$$\forall x(R \leftrightarrow S) \to \{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\} \tag{5.112}$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $(\forall x \in a)(R \leftrightarrow S)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$.

2) x が定数でなく, $x \in a \to (R \leftrightarrow S)$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$.

3) $\forall x(R \leftrightarrow S)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$.

4) x が定数でなく, $R \leftrightarrow S$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$.

[sthmalleqsset=eq]

定理 5.19. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(\forall x \in a)(R \leftrightarrow S) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\} \tag{5.116}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.117) が成り立つ.

$$\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\} \text{ ならば, } (\forall x \in a)(R \leftrightarrow S). \tag{5.117}$$

[sthmspinsset]

定理 5.20. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(\exists x \in \{x \in a \mid R\})(S) \leftrightarrow (\exists x \in a)(R \wedge S), \tag{5.121}$$

$$(\forall x \in \{x \in a \mid R\})(S) \leftrightarrow (\forall x \in a)(R \to S), \tag{5.122}$$

$$(!x \in \{x \in a \mid R\})(S) \leftrightarrow (!x \in a)(R \wedge S), \tag{5.123}$$

$$(\exists! x \in \{x \in a \mid R\})(S) \leftrightarrow (\exists! x \in a)(R \wedge S) \tag{5.124}$$

がすべて成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $(\exists x \in \{x \in a \mid R\})(S)$ ならば, $(\exists x \in a)(R \wedge S)$. また $(\exists x \in a)(R \wedge S)$ ならば, $(\exists x \in \{x \in a \mid R\})(S)$.

2) $(\forall x \in \{x \in a \mid R\})(S)$ ならば, $(\forall x \in a)(R \to S)$. また $(\forall x \in a)(R \to S)$ ならば, $(\forall x \in \{x \in a \mid R\})(S)$.

3) $(!x \in \{x \in a \mid R\})(S)$ ならば, $(!x \in a)(R \wedge S)$. また $(!x \in a)(R \wedge S)$ ならば, $(!x \in \{x \in a \mid R\})(S)$.

4) $(\exists! x \in \{x \in a \mid R\})(S)$ ならば, $(\exists! x \in a)(R \wedge S)$. また $(\exists! x \in a)(R \wedge S)$ ならば, $(\exists! x \in \{x \in a \mid R\})(S)$.

[sthmisetsset]

定理 5.21. R と S を関係式とし, x を文字とする．このとき

(5.136) $$\mathrm{Set}_x(R) \to \{x \in \{x \mid R\} \mid S\} = \{x \mid R \wedge S\},$$

(5.137) $$\mathrm{Set}_x(R) \to \{x \in \{x \mid R\} \mid S\} = \{x \mid S \wedge R\}$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の (5.138) が成り立つ.

(5.138) R が x について集合を作り得るならば, $\{x \in \{x \mid R\} \mid S\} = \{x \mid R \wedge S\}$ と $\{x \in \{x \mid R\} \mid S\} = \{x \mid S \wedge R\}$ が共に成り立つ.

[sthmssetsset]

定理 5.22. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

(5.152) $$\{x \in \{x \in a \mid R\} \mid S\} = \{x \in a \mid R \wedge S\},$$

(5.153) $$\{x \in \{x \in a \mid R\} \mid S\} = \{x \in a \mid S \wedge R\}$$

が共に成り立つ.

[sthm!sm]

定理 5.23. R を関係式とし, x を文字とするとき,

(5.157) $$!x(R) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} \subset \{\tau_x(R)\}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $!x(R)$ ならば, R は x について集合を作り得る．更に $\{x \mid R\} \subset \{\tau_x(R)\}$ が成り立つ.

2) R が x について集合を作り得るとする．このとき $\{x \mid R\} \subset \{\tau_x(R)\}$ ならば, $!x(R)$.

[sthmsmimp]

定理 5.24. R を関係式とし, x を文字とする．また y を x と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

(5.161) $$\mathrm{Set}_x(R) \leftrightarrow \exists y(\forall x(R \to x \in y))$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) R が x について集合を作り得るならば, $\exists y(\forall x(R \to x \in y))$.

2) $\exists y(\forall x(R \to x \in y))$ ならば, R は x について集合を作り得る.

[sthmsmfree]

定理 5.25. R を関係式とし, x を R の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \leftrightarrow \neg R \tag{5.166}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) R が x について集合を作り得るならば, $\neg R$.

2) $\neg R$ ならば, R は x について集合を作り得る.

[sthmall&sm]

定理 5.26. R を関係式とし, x を文字とするとき,

$$\forall x(R) \to \neg \mathrm{Set}_x(R), \tag{5.172}$$

$$\forall x(\neg R) \to \mathrm{Set}_x(R) \tag{5.173}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $\forall x(R)$ ならば, R は x について集合を作り得ない.

2) x が定数でなく, R が成り立てば, R は x について集合を作り得ない.

3) $\forall x(\neg R)$ ならば, R は x について集合を作り得る.

4) x が定数でなく, $\neg R$ が成り立てば, R は x について集合を作り得る.

[sthmalltsm]

定理 5.27. R と S を関係式とし, x を文字とする. このとき

$$\forall x(R \to S) \to (\mathrm{Set}_x(S) \to \mathrm{Set}_x(R)) \tag{5.181}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $\forall x(R \to S)$ ならば, $\mathrm{Set}_x(S) \to \mathrm{Set}_x(R)$.

2) x が定数でなく, $R \to S$ が成り立てば, $\mathrm{Set}_x(S) \to \mathrm{Set}_x(R)$.

3) $\forall x(R \to S)$ であり, かつ S が x について集合を作り得るならば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}$ が成り立つ.

4) x が定数でなく, $R \to S$ が成り立ち, かつ S が x について集合を作り得るならば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}$ が成り立つ.

[sthmosetsm]

定理 5.28. a と T を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. また y を x と異なり, a 及び T の中に自由変数として現れない文字とする. このとき関係式 $\exists x(x \in a \wedge y = T)$ は y について集合を作り得る.

[sthmosetbasis]

定理 5.29. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$b \in \{T\}_{x \in a} \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge b = T) \tag{5.198}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $b \in \{T\}_{x \in a}$ ならば, $\exists x(x \in a \wedge b = T)$.
2) $\exists x(x \in a \wedge b = T)$ ならば, $b \in \{T\}_{x \in a}$.

[sthmosetfund]

定理 5.30. a, T, U を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$U \in a \to (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in a} \tag{5.204}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.205) が成り立つ.

$$U \in a \text{ ならば}, (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in a}. \tag{5.205}$$

[sthmosetsubsetb]

定理 5.31. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(\forall x \in a)(T \in b) \leftrightarrow \{T\}_{x \in a} \subset b \tag{5.210}$$

が成り立つ. 特に

$$\forall x(T \in b) \to \{T\}_{x \in a} \subset b \tag{5.211}$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $(\forall x \in a)(T \in b)$ ならば, $\{T\}_{x \in a} \subset b$. また $\{T\}_{x \in a} \subset b$ ならば, $(\forall x \in a)(T \in b)$.
2) x が定数でなく, $x \in a \to T \in b$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} \subset b$.
3) $\forall x(T \in b)$ ならば, $\{T\}_{x \in a} \subset b$.
4) x が定数でなく, $T \in b$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} \subset b$.

[sthmosetsubset]

定理 5.32. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a \subset b \to \{T\}_{x \in a} \subset \{T\}_{x \in b} \tag{5.224}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.225) が成り立つ.

$$a \subset b \text{ ならば}, \{T\}_{x \in a} \subset \{T\}_{x \in b}. \tag{5.225}$$

[sthmoset=]

定理 5.33. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(5.229) $$a = b \to \{T\}_{x \in a} = \{T\}_{x \in b}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.230) が成り立つ.

(5.230) $$a = b \text{ ならば, } \{T\}_{x \in a} = \{T\}_{x \in b}.$$

[sthmt=uoset=]

定理 5.34. a, T, U を集合とし, x を文字とする. このとき

(5.231) $$(\forall x \in a)(T = U) \to \{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$$

が成り立つ. 特に

(5.232) $$\forall x(T = U) \to \{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $(\forall x \in a)(T = U)$ ならば, $\{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$.
2) x が定数でなく, $x \in a \to T = U$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$.
3) $\forall x(T = U)$ ならば, $\{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$.
4) x が定数でなく, $T = U$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$.

[sthmspinoset]

定理 5.35. a と T を集合, R を関係式とし, x を a 及び R の中に自由変数として現れない文字とする. また y を x と異なり, a 及び T の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(5.238) $$(\exists y \in \{T\}_{x \in a})(R) \leftrightarrow (\exists x \in a)((T|y)(R)),$$

(5.239) $$(\forall y \in \{T\}_{x \in a})(R) \leftrightarrow (\forall x \in a)((T|y)(R)),$$

(5.240) $$(!x \in a)((T|y)(R)) \to (!y \in \{T\}_{x \in a})(R),$$

(5.241) $$(\exists! x \in a)((T|y)(R)) \to (\exists! y \in \{T\}_{x \in a})(R)$$

がすべて成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $(\exists y \in \{T\}_{x \in a})(R)$ ならば, $(\exists x \in a)((T|y)(R))$. また $(\exists x \in a)((T|y)(R))$ ならば, $(\exists y \in \{T\}_{x \in a})(R)$.
2) $(\forall y \in \{T\}_{x \in a})(R)$ ならば, $(\forall x \in a)((T|y)(R))$. また $(\forall x \in a)((T|y)(R))$ ならば, $(\forall y \in \{T\}_{x \in a})(R)$.
3) $(!x \in a)((T|y)(R))$ ならば, $(!y \in \{T\}_{x \in a})(R)$.
4) $(\exists! x \in a)((T|y)(R))$ ならば, $(\exists! y \in \{T\}_{x \in a})(R)$.

[sthmisetoset]

定理 5.36. a と T を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \to (a \in \{T\}_{x \in \{x|R\}} \leftrightarrow \exists x(R \wedge a = T)) \tag{5.257}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) R が x について集合を作り得るならば, $a \in \{T\}_{x \in \{x|R\}} \leftrightarrow \exists x(R \wedge a = T)$.

2) R が x について集合を作り得るとする．このとき $a \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}$ ならば, $\exists x(R \wedge a = T)$. またこのとき $\exists x(R \wedge a = T)$ ならば, $a \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}$.

[sthmisetosetfund]

定理 5.37. T と U を集合, R を関係式とし, x を文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \to ((U|x)(R) \to (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}) \tag{5.260}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) R が x について集合を作り得るならば, $(U|x)(R) \to (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}$.

2) R が x について集合を作り得るとする．このとき $(U|x)(R)$ ならば, $(U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}$.

[sthmuopairoset]

定理 5.38. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\{T\}_{x \in \{a,b\}} = \{(a|x)(T), (b|x)(T)\} \tag{5.264}$$

が成り立つ.

[sthmsingletonoset]

定理 5.39. a と T を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\{T\}_{x \in \{a\}} = \{(a|x)(T)\} \tag{5.268}$$

が成り立つ.

[sthmssetoset]

定理 5.40. a, b, T を集合, R を関係式とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$b \in \{T\}_{x \in \{x \in a|R\}} \leftrightarrow (\exists x \in a)(R \wedge b = T) \tag{5.272}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $b \in \{T\}_{x \in \{x \in a|R\}}$ ならば, $(\exists x \in a)(R \wedge b = T)$.

2) $(\exists x \in a)(R \wedge b = T)$ ならば, $b \in \{T\}_{x \in \{x \in a|R\}}$.

[sthmssetosetfund]

定理 5.41. a, T, U を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$U \in a \wedge (U|x)(R) \to (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x \in a | R\}} \tag{5.275}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.276) が成り立つ.

(5.276) $U \in a$ と $(U|x)(R)$ が共に成り立てば, $(U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x \in a | R\}}$.

[sthmsset&oset]

定理 5.42. a と T を集合, R を関係式とし, x を a 及び R の中に自由変数として現れない文字とする. また y を x と異なり, a 及び T の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\{y \in \{T\}_{x \in a} \mid R\} = \{T\}_{x \in \{x \in a | (T|y)(R)\}} \tag{5.277}$$

が成り立つ.

[sthmosetoset]

定理 5.43. a, T, U を集合とし, x を a 及び U の中に自由変数として現れない文字とする. また y を x と異なり, a 及び T の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\{U\}_{y \in \{T\}_{x \in a}} = \{(T|y)(U)\}_{x \in a} \tag{5.288}$$

が成り立つ.