6　差集合, 空集合

[sthm-basis]
定理 6.1. a, b, c を集合とするとき,

$$c \in a - b \leftrightarrow c \in a \wedge c \notin b \tag{6.5}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $c \in a - b$ ならば, $c \in a$ と $c \notin b$ が共に成り立つ.
2) $c \in a$ と $c \notin b$ が共に成り立てば, $c \in a - b$.

[sthm-notin]
定理 6.2. a, b, c を集合とするとき,

$$c \notin a - b \leftrightarrow c \notin a \vee c \in b \tag{6.6}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $c \notin a - b$ ならば, $c \notin a \vee c \in b$.
2) $c \notin a$ ならば, $c \notin a - b$. また $c \in b$ ならば, $c \notin a - b$.

[sthma-bsubseta]
定理 6.3. a と b を集合とするとき,

$$a - b \subset a$$

が成り立つ.

[sthma-bsubsetc]
定理 6.4. a, b, c を集合とするとき,

$$a \subset c \to a - b \subset c, \quad c \subset a - b \to c \subset a$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a \subset c$ ならば, $a - b \subset c$.
2) $c \subset a - b$ ならば, $c \subset a$.

[sthma-bsubsetb]
定理 6.5. a と b を集合とするとき,

$$a - b \subset b \leftrightarrow a \subset b \tag{6.9}$$

が成り立つ. またこのことから特に, 次の (6.10) が成り立つ.

(6.10) $$a - b \subset b \text{ ならば, } a \subset b.$$

[sthmasubsetbta-bsubsetc]
定理 6.6. a, b, c を集合とするとき,

(6.14) $$a \subset b \to a - b \subset c$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.15) が成り立つ.

(6.15) $$a \subset b \text{ ならば, } a - b \subset c.$$

[sthma-bsubsetb-ceq]
定理 6.7. a, b, c を集合とするとき,

(6.19) $$a - b \subset b - c \leftrightarrow a \subset b,$$

(6.20) $$a - b \subset c - a \leftrightarrow a \subset b,$$

(6.21) $$a - b \subset b - c \leftrightarrow a - b \subset c - a$$

がすべて成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a - b \subset b - c$ ならば, $a \subset b$ と $a - b \subset c - a$ が共に成り立つ.
2) $a - b \subset c - a$ ならば, $a \subset b$ と $a - b \subset b - c$ が共に成り立つ.

[sthma-bsubsetceq]
定理 6.8. a, b, c を集合とするとき,

(6.34) $$a - b \subset c \leftrightarrow a - c \subset b,$$

(6.35) $$a - c \subset b - c \leftrightarrow a - c \subset b,$$

(6.36) $$a - c \subset b - c \leftrightarrow a - b \subset c,$$

(6.37) $$a - c \subset b - c \leftrightarrow a - b \subset c - b$$

がすべて成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a - b \subset c$ ならば, $a - c \subset b$, $a - c \subset b - c$, $a - b \subset c - b$ がすべて成り立つ.
2) $a - c \subset b - c$ ならば, $a - c \subset b$, $a - b \subset c$, $a - b \subset c - b$ がすべて成り立つ.

[sthmc-asubsetc-beq]

定理 6.9. a, b, c を集合とするとき,

$$c - a \subset c - b \leftrightarrow b - a \subset b - c \tag{6.47}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.48) が成り立つ.

$$c - a \subset c - b \text{ ならば, } b - a \subset b - c. \tag{6.48}$$

[sthm-subset]
定理 6.10.
1) a, b, c を集合とするとき,

$$a \subset b \to a - c \subset b - c, \tag{6.56}$$

$$a \subset b \to c - b \subset c - a \tag{6.57}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の (6.58) が成り立つ.

$$a \subset b \text{ ならば, } a - c \subset b - c \text{ と } c - b \subset c - a \text{ が共に成り立つ.} \tag{6.58}$$

2) a, b, c, d を集合とするとき,

$$a \subset b \wedge c \subset d \to a - d \subset b - c \tag{6.59}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.60) が成り立つ.

$$a \subset b \text{ と } c \subset d \text{ が共に成り立てば, } a - d \subset b - c. \tag{6.60}$$

[sthm-subseteq]
定理 6.11. a, b, c を集合とするとき,

$$c \subset b \to (a \subset b \leftrightarrow a - c \subset b - c), \tag{6.65}$$

$$a \subset c \to (a \subset b \leftrightarrow c - b \subset c - a) \tag{6.66}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.
1) $c \subset b$ ならば, $a \subset b \leftrightarrow a - c \subset b - c$.
2) $c \subset b$ と $a - c \subset b - c$ が共に成り立てば, $a \subset b$.
3) $a \subset c$ ならば, $a \subset b \leftrightarrow c - b \subset c - a$.
4) $a \subset c$ と $c - b \subset c - a$ が共に成り立てば, $a \subset b$.

[sthm-subsetlast]

定理 6.12. a, b, c を集合とするとき,

$$a \subset b \leftrightarrow a - c \subset b - c \wedge c - b \subset c - a \tag{6.80}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.81) が成り立つ.

(6.81) $a - c \subset b - c$ と $c - b \subset c - a$ が共に成り立てば, $a \subset b$.

[sthma-b=b-ceq]
定理 6.13. a, b, c を集合とするとき,

$$a - b = b - c \leftrightarrow a \subset b \wedge b \subset c, \tag{6.90}$$

$$a - b = c - a \leftrightarrow a \subset b \wedge c \subset a \tag{6.91}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.
1) $a - b = b - c$ ならば, $a \subset b$ と $b \subset c$ が共に成り立つ.
2) $a \subset b$ と $b \subset c$ が共に成り立てば, $a - b = b - c$.
3) $a - b = c - a$ ならば, $a \subset b$ と $c \subset a$ が共に成り立つ.
4) $a \subset b$ と $c \subset a$ が共に成り立てば, $a - b = c - a$.

[sthma-b=b-aeq]
定理 6.14. a と b を集合とするとき,

$$a - b = b - a \leftrightarrow a = b \tag{6.96}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a - b = b - a$ ならば, $a = b$.
2) $a = b$ ならば, $a - b = b - a$.

[sthma-b=aeqb-a=b]
定理 6.15. a と b を集合とするとき,

$$a - b = a \leftrightarrow b - a = b \tag{6.99}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.100) が成り立つ.

(6.100) $a - b = a$ ならば, $b - a = b$.

[sthm-=]
定理 6.16.
1) a, b, c を集合とするとき,

(6.106) $$a = b \to a - c = b - c,$$

(6.107) $$a = b \to c - a = c - b$$

が共に成り立つ．またこれらから，次の (6.108) が成り立つ．

(6.108) $a = b$ ならば，$a - c = b - c$ と $c - a = c - b$ が共に成り立つ．

2) a, b, c, d を集合とするとき，

(6.109) $$a = b \wedge c = d \to a - c = b - d$$

が成り立つ．またこのことから，次の (6.110) が成り立つ．

(6.110) $a = b$ と $c = d$ が共に成り立てば，$a - c = b - d$.

[sthm-=eq]
定理 6.17. a, b, c を集合とするとき，

(6.113) $$c \subset a \wedge c \subset b \to (a = b \leftrightarrow a - c = b - c),$$

(6.114) $$a \subset c \wedge b \subset c \to (a = b \leftrightarrow c - a = c - b)$$

が共に成り立つ．またこれらから，次の 1)—4) が成り立つ．

1) $c \subset a$ と $c \subset b$ が共に成り立てば，$a = b \leftrightarrow a - c = b - c$.
2) $c \subset a$, $c \subset b$, $a - c = b - c$ がすべて成り立てば，$a = b$.
3) $a \subset c$ と $b \subset c$ が共に成り立てば，$a = b \leftrightarrow c - a = c - b$.
4) $a \subset c$, $b \subset c$, $c - a = c - b$ がすべて成り立てば，$a = b$.

[sthm-=last]
定理 6.18. a, b, c を集合とするとき，

(6.127) $$a = b \leftrightarrow a - c = b - c \wedge c - a = c - b$$

が成り立つ．またこのことから，次の (6.128) が成り立つ．

(6.128) $a - c = b - c$ と $c - a = c - b$ が共に成り立てば，$a = b$.

[sthmspin-]
定理 6.19. a と b を集合，R を関係式とし，x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

(6.137) $$(\exists x \in a - b)(R) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} \not\subset b,$$

(6.138) $$(\forall x \in a - b)(R) \leftrightarrow \{x \in a \mid \neg R\} \subset b$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $(\exists x \in a-b)(R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} \not\subset b$. また $\{x \in a \mid R\} \not\subset b$ ならば, $(\exists x \in a-b)(R)$.

2) $(\forall x \in a-b)(R)$ ならば, $\{x \in a \mid \neg R\} \subset b$. また $\{x \in a \mid \neg R\} \subset b$ ならば, $(\forall x \in a-b)(R)$.

[sthmab–]

定理 6.20. a と b を集合とするとき,

$$(a-b)-b = a-b, \tag{6.143}$$

$$a-(b-a) = a \tag{6.144}$$

が共に成り立つ.

[sthmab–eqsubset]

定理 6.21. a と b を集合とするとき,

$$a-(a-b) = a \leftrightarrow a \subset b, \tag{6.145}$$

$$a-(a-b) = b \leftrightarrow b \subset a \tag{6.146}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $a-(a-b) = a$ ならば, $a \subset b$.

2) $a \subset b$ ならば, $a-(a-b) = a$.

3) $a-(a-b) = b$ ならば, $b \subset a$.

4) $b \subset a$ ならば, $a-(a-b) = b$.

[sthm-ch]

定理 6.22. a, b, c を集合とするとき,

$$(a-b)-c = (a-c)-b \tag{6.162}$$

が成り立つ.

[sthma-iset]

定理 6.23. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \to a - \{x \mid R\} = \{x \in a \mid \neg R\} \tag{6.163}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.164) が成り立つ.

(6.164) R が x について集合を作り得るならば, $a-\{x \mid R\} = \{x \in a \mid \neg R\}$.

[sthmiset-]
定理 6.24. R と S を関係式とし, x を文字とする. このとき

(6.167) $$\mathrm{Set}_x(R) \wedge \mathrm{Set}_x(S) \to \{x \mid R\} - \{x \mid S\} = \{x \mid R \wedge \neg S\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.168) が成り立つ.

(6.168) R と S が共に x について集合を作り得るならば, $\{x \mid R\} - \{x \mid S\} = \{x \mid R \wedge \neg S\}$.

[sthma-sset]
定理 6.25. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.174) $$a - \{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid \neg R\}$$

が成り立つ.

[sthma-iset=a-sset]
定理 6.26. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.181) $$\mathrm{Set}_x(R) \to a - \{x \mid R\} = a - \{x \in a \mid R\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.182) が成り立つ.

(6.182) R が x について集合を作り得るならば, $a - \{x \mid R\} = a - \{x \in a \mid R\}$.

[sthmiset-sset]
定理 6.27. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.185) $$\mathrm{Set}_x(R) \to \{x \mid R\} - \{x \in a \mid R\} = \{x \mid R\} - a$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.186) が成り立つ.

(6.186) R が x について集合を作り得るならば, $\{x \mid R\} - \{x \in a \mid R\} = \{x \mid R\} - a$.

[sthmsset-iset]
定理 6.28. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.194) $$\mathrm{Set}_x(S) \to \{x \in a \mid R\} - \{x \mid S\} = \{x \in a \mid R \wedge \neg S\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.195) が成り立つ.

(6.195) S が x について集合を作り得るならば, $\{x \in a \mid R\} - \{x \mid S\} = \{x \in a \mid R \wedge \neg S\}$.

[sthmsset-]

定理 6.29. a と b を集合, R を関係式とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\{x \in a \mid R\} - b = \{x \in a - b \mid R\}, \tag{6.198}$$

$$\{x \in a \mid R\} - \{x \in b \mid R\} = \{x \in a - b \mid R\}, \tag{6.199}$$

$$\{x \in a \mid R\} - b = \{x \in a \mid R\} - \{x \in b \mid R\} \tag{6.200}$$

がすべて成り立つ.

[sthmsset-rs]

定理 6.30. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\{x \in a \mid R\} - \{x \in a \mid S\} = \{x \in a \mid R \wedge \neg S\} \tag{6.209}$$

が成り立つ.

[sthmsset-iset=sset-sset]

定理 6.31. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(S) \to \{x \in a \mid R\} - \{x \mid S\} = \{x \in a \mid R\} - \{x \in a \mid S\} \tag{6.214}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (6.215) が成り立つ.

(6.215)　S が x について集合を作り得るならば, $\{x \in a \mid R\} - \{x \mid S\} = \{x \in a \mid R\} - \{x \in a \mid S\}$.

[sthma-bsubsetsset]

定理 6.32. a と b を集合, R を関係式とし, x を b の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$a - b \subset \{x \in b \mid R\} \leftrightarrow a \subset b \tag{6.218}$$

が成り立つ．またこのことから特に, 次の (6.219) が成り立つ.

(6.219)　$a - b \subset \{x \in b \mid R\}$ ならば, $a \subset b$.

[sthma-uopair]

定理 6.33. a, b, c を集合とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$a - \{b, c\} = \{x \in a \mid x \neq b \wedge x \neq c\} \tag{6.222}$$

が成り立つ.

[sthma-singleton]
定理 6.34. a と b を集合とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a - \{b\} = \{x \in a \mid x \neq b\} \tag{6.225}$$

が成り立つ.

[sthma–singleton=a-uopair]
定理 6.35. a, b, c を集合とするとき,

$$(a - \{b\}) - \{c\} = a - \{b, c\} \tag{6.226}$$

が成り立つ.

[sthmu-s=s-s]
定理 6.36. a と b を集合とするとき,

$$\{a, b\} - \{a\} = \{b\} - \{a\}, \tag{6.231}$$

$$\{a, b\} - \{b\} = \{a\} - \{b\} \tag{6.232}$$

が共に成り立つ.

[sthmuopair-c]
定理 6.37. a, b, c を集合とするとき,

$$\{a, b\} - c = \{a, b\} \leftrightarrow a \notin c \wedge b \notin c, \tag{6.241}$$

$$c - \{a, b\} = c \leftrightarrow a \notin c \wedge b \notin c \tag{6.242}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.

1) $\{a, b\} - c = \{a, b\}$ ならば, $a \notin c$ と $b \notin c$ が共に成り立つ.
2) $c - \{a, b\} = c$ ならば, $a \notin c$ と $b \notin c$ が共に成り立つ.
3) $a \notin c$ と $b \notin c$ が共に成り立てば, $\{a, b\} - c = \{a, b\}$ と $c - \{a, b\} = c$ が共に成り立つ.

[sthmsingleton-b]
定理 6.38. a と b を集合とするとき,

$$\{a\} - b = \{a\} \leftrightarrow a \notin b, \tag{6.245}$$

$$b - \{a\} = b \leftrightarrow a \notin b \tag{6.246}$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ．

1) $\{a\} - b = \{a\}$ ならば, $a \notin b$. また $b - \{a\} = b$ ならば, $a \notin b$.

2) $a \notin b$ ならば, $\{a\} - b = \{a\}$ と $b - \{a\} = b$ が共に成り立つ．

[sthmuopairsingleton-]

定理 6.39. a, b, c を集合とするとき,

$$\{a, b\} - \{c\} = \{a, b\} \leftrightarrow a \neq c \wedge b \neq c, \tag{6.249}$$

$$\{c\} - \{a, b\} = \{c\} \leftrightarrow a \neq c \wedge b \neq c \tag{6.250}$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ．

1) $\{a, b\} - \{c\} = \{a, b\}$ ならば, $a \neq c$ と $b \neq c$ が共に成り立つ．

2) $\{c\} - \{a, b\} = \{c\}$ ならば, $a \neq c$ と $b \neq c$ が共に成り立つ．

3) $a \neq c$ と $b \neq c$ が共に成り立てば, $\{a, b\} - \{c\} = \{a, b\}$ と $\{c\} - \{a, b\} = \{c\}$ が共に成り立つ．

[sthmsingleton-]

定理 6.40. a と b を集合とするとき,

$$\{a\} - \{b\} = \{a\} \leftrightarrow a \neq b \tag{6.253}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ．

1) $\{a\} - \{b\} = \{a\}$ ならば, $a \neq b$.

2) $a \neq b$ ならば, $\{a\} - \{b\} = \{a\}$.

[sthmu-s=seq]

定理 6.41. a と b を集合とするとき,

$$\{a, b\} - \{a\} = \{b\} \leftrightarrow a \neq b, \tag{6.256}$$

$$\{a, b\} - \{b\} = \{a\} \leftrightarrow a \neq b \tag{6.257}$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ．

1) $\{a, b\} - \{a\} = \{b\}$ ならば, $a \neq b$.

2) $\{a, b\} - \{b\} = \{a\}$ ならば, $a \neq b$.

3) $a \neq b$ ならば, $\{a, b\} - \{a\} = \{b\}$ と $\{a, b\} - \{b\} = \{a\}$ が共に成り立つ．

[sthmoset-]

定理 6.42. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\{T\}_{x \in a} - \{T\}_{x \in b} \subset \{T\}_{x \in a - b} \tag{6.263}$$

が成り立つ.

[sthmallnotineqallsubset]
定理 6.43. a を集合とし, x と y を共に a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\forall x(x \notin a) \leftrightarrow \forall y(a \subset y) \tag{6.267}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1)—4) が成り立つ.
1) $\forall x(x \notin a)$ ならば, $\forall y(a \subset y)$.
2) x が定数でなく, $x \notin a$ が成り立てば, $\forall y(a \subset y)$.
3) $\forall y(a \subset y)$ ならば, $\forall x(x \notin a)$.
4) y が定数でなく, $a \subset y$ が成り立てば, $\forall x(x \notin a)$.

[sthmallnotintsubset]
定理 6.44. a と b を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\forall x(x \notin a) \to a \subset b \tag{6.274}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $\forall x(x \notin a)$ ならば, $a \subset b$.
2) x が定数でなく, $x \notin a$ が成り立てば, $a \subset b$.

[sthmallsubsettnotin]
定理 6.45. a と b を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\forall x(a \subset x) \to b \notin a \tag{6.277}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $\forall x(a \subset x)$ ならば, $b \notin a$.
2) x が定数でなく, $a \subset x$ が成り立てば, $b \notin a$.

[sthmemptyex!]
定理 6.46. x と y を異なる文字とするとき,

$$\exists! y(\forall x(x \notin y)) \tag{6.280}$$

が成り立つ.

[sthmemptyeqallnotin]
定理 6.47. a を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a = \phi \leftrightarrow \forall x(x \notin a) \tag{6.290}$$

が成り立つ．またこのことから，次の 1), 2), 3) が成り立つ．

1) a が空ならば，$\forall x(x \notin a)$.

2) $\forall x(x \notin a)$ ならば，a は空である．

3) x が定数でなく，$x \notin a$ が成り立てば，a は空である．

[sthmallnotinempty]

定理 6.48. x を文字とするとき，

$$\forall x(x \notin \phi)$$

が成り立つ．

[sthmemptytnotin]

定理 6.49. a と b を集合とするとき，

$$a = \phi \to b \notin a \tag{6.291}$$

が成り立つ．またこのことから，次の (6.292) が成り立つ．

(6.292) a が空ならば，$b \notin a$.

[sthmnotinempty]

定理 6.50. a を集合とするとき，

$$a \notin \phi$$

が成り立つ．

[sthmemptyeqallsubset]

定理 6.51. a を集合とし，x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$a = \phi \leftrightarrow \forall x(a \subset x) \tag{6.295}$$

が成り立つ．またこのことから，次の 1), 2), 3) が成り立つ．

1) a が空ならば，$\forall x(a \subset x)$.

2) $\forall x(a \subset x)$ ならば，a は空である．

3) x が定数でなく，$a \subset x$ が成り立てば，a は空である．

[sthmallemptysubset]

定理 6.52. x を文字とするとき，

$$\forall x(\phi \subset x)$$

が成り立つ．

[sthmemptytsubset]
定理 6.53. a と b を集合とするとき,

(6.298) $$a = \phi \to a \subset b$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.299) が成り立つ.

(6.299) a が空ならば, $a \subset b$.

[sthmemptysubset]
定理 6.54. a を集合とするとき,

$$\phi \subset a$$

が成り立つ.

[sthmemptysubset=eq]
定理 6.55. a を集合とするとき,

(6.302) $$a \subset \phi \leftrightarrow a = \phi$$

が成り立つ. またこのことから特に, 次の (6.303) が成り立つ.

(6.303) $a \subset \phi$ ならば, a は空である.

[sthmnotemptyeqexin]
定理 6.56. a を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.306) $$a \neq \phi \leftrightarrow \exists x(x \in a)$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) a が空でなければ, $\exists x(x \in a)$.
2) $\exists x(x \in a)$ ならば, a は空でない.

[sthmintnotempty]
定理 6.57. a と b を集合とするとき,

(6.309) $$b \in a \to a \neq \phi$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (6.310) が成り立つ.

(6.310) $b \in a$ ならば, a は空でない.

[sthmnotemptyeqpsubset]
定理 6.58. a を集合とするとき,

$$a \neq \phi \leftrightarrow \phi \subsetneqq a \tag{6.311}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) a が空でなければ, $\phi \subsetneqq a$.
2) $\phi \subsetneqq a$ ならば, a は空でない.

[sthmpsubsettnotempty]
定理 6.59. a と b を集合とするとき,

$$a \subsetneqq b \to b \neq \phi \tag{6.314}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (6.315) が成り立つ.

(6.315) $a \subsetneqq b$ ならば, b は空でない.

[sthmnotemptyeqexpsubset]
定理 6.60. a を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$a \neq \phi \leftrightarrow \exists x(x \subsetneqq a) \tag{6.319}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) a が空でなければ, $\exists x(x \subsetneqq a)$.
2) $\exists x(x \subsetneqq a)$ ならば, a は空でない.

[sthmelm&empty]
定理 6.61. a を集合とするとき,

$$a = \phi \leftrightarrow \mathrm{elm}(a) \notin a, \tag{6.324}$$

$$a \neq \phi \leftrightarrow \mathrm{elm}(a) \in a \tag{6.325}$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $\mathrm{elm}(a) \notin a$ ならば, a は空である.
2) a が空でなければ, $\mathrm{elm}(a) \in a$.

[sthmemptytspin]
定理 6.62. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$a = \phi \to \neg(\exists x \in a)(R), \tag{6.326}$$

$$a = \phi \to (\forall x \in a)(R) \tag{6.327}$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の (6.328) が成り立つ．

(6.328)　　a が空ならば, $\neg(\exists x \in a)(R)$ と $(\forall x \in a)(R)$ が共に成り立つ．

[sthmspinempty]
定理 6.63. R を関係式とし, x を文字とするとき,

$$\neg(\exists x \in \phi)(R), \quad (\forall x \in \phi)(R)$$

が共に成り立つ．

[sthmisetempty]
定理 6.64. R を関係式とし, x を文字とするとき,

$$\neg\exists x(R) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} = \phi, \tag{6.332}$$

$$\forall x(\neg R) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} = \phi \tag{6.333}$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ．

1) $\neg\exists x(R)$ ならば, R は x について集合を作り得る．またこのとき $\{x \mid R\}$ は空である．

2) $\forall x(\neg R)$ ならば, R は x について集合を作り得る．またこのとき $\{x \mid R\}$ は空である．

3) x が定数でなく, $\neg R$ が成り立てば, R は x について集合を作り得る．またこのとき $\{x \mid R\}$ は空である．

4) R が x について集合を作り得るとする．このとき $\{x \mid R\}$ が空ならば, $\neg\exists x(R)$ と $\forall x(\neg R)$ が共に成り立つ．

[sthmisetfree]
定理 6.65. R を関係式とし, x を R の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\neg R \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} = \phi \tag{6.338}$$

が成り立つ．またこのことから特に, 次の (6.339) が成り立つ．

(6.339)　　$\neg R$ ならば, R は x について集合を作り得る．またこのとき $\{x \mid R\}$ は空である．

[sthmsunotempty]
定理 6.66.

1) a を集合とするとき, $\{a\}$ は空でない．

2) a と b を集合とするとき, $\{a, b\}$ は空でない．

[sthmexxxn=y]
定理 6.67. x と y を異なる文字とするとき,

$$\exists x(\exists y(x \neq y))$$

が成り立つ.

[sthmsubsetofsingleton]
定理 6.68. a と b を集合とするとき,

$$b \subset \{a\} \leftrightarrow b = \phi \vee b = \{a\} \tag{6.340}$$

が成り立つ. またこのことから特に, 次の (6.341) が成り立つ.

$$b \subset \{a\} \text{ ならば, } b = \phi \vee b = \{a\}. \tag{6.341}$$

[sthmsubsetofuopair]
定理 6.69. a, b, c を集合とするとき,

$$c \subset \{a, b\} \leftrightarrow c = \phi \vee c = \{a\} \vee c = \{b\} \vee c = \{a, b\} \tag{6.353}$$

が成り立つ. またこのことから特に, 次の (6.354) が成り立つ.

$$c \subset \{a, b\} \text{ ならば, } c = \phi \vee c = \{a\} \vee c = \{b\} \vee c = \{a, b\}. \tag{6.354}$$

[sthmssetempty]
定理 6.70. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\neg(\exists x \in a)(R) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} = \phi, \tag{6.390}$$

$$(\forall x \in a)(\neg R) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} = \phi \tag{6.391}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $\neg(\exists x \in a)(R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\}$ は空である.
2) $(\forall x \in a)(\neg R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\}$ は空である.
3) x が定数でなく, $x \in a \to \neg R$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\}$ は空である.
4) $\{x \in a \mid R\}$ が空ならば, $\neg(\exists x \in a)(R)$ と $(\forall x \in a)(\neg R)$ が共に成り立つ.

[sthmssetemptyt]
定理 6.71. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.394) $$\neg\exists x(R) \to \{x \in a \mid R\} = \phi,$$

(6.395) $$\forall x(\neg R) \to \{x \in a \mid R\} = \phi$$

が共に成り立つ．またこれらから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ．
1) $\neg\exists x(R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\}$ は空である．
2) $\forall x(\neg R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\}$ は空である．
3) x が定数でなく, $\neg R$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\}$ は空である．

[sthmaemptytssetempty]
定理 6.72. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

(6.399) $$a = \phi \to \{x \in a \mid R\} = \phi$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (6.400) が成り立つ．

(6.400) a が空ならば, $\{x \in a \mid R\}$ は空である．

[sthmemptyssetempty]
定理 6.73. R を関係式とし, x を文字とするとき, $\{x \in \phi \mid R\}$ は空である．

[sthmsset=arfreeeq]
定理 6.74. a を集合, R を関係式とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする．このとき

(6.403) $$a = \phi \vee R \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} = a$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ．
1) $a = \phi \vee R$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = a$.
2) $\{x \in a \mid R\} = a$ ならば, $a = \phi \vee R$.

[sthmssetemptyrfree]
定理 6.75. a を集合, R を関係式とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする．このとき

(6.407) $$a = \phi \vee \neg R \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} = \phi$$

が成り立つ．特に,

(6.408) $$\neg R \to \{x \in a \mid R\} = \phi$$

が成り立つ．またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ．
1) $\neg R$ ならば, $\{x \in a \mid R\}$ は空である．
2) $\{x \in a \mid R\}$ が空ならば, $a = \phi \vee \neg R$.

[sthmosetempty]
定理 6.76. a と T を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.412) $$\{T\}_{x \in a} = \phi \leftrightarrow a = \phi$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $\{T\}_{x \in a}$ が空ならば, a は空である.
2) a が空ならば, $\{T\}_{x \in a}$ は空である.

[sthmemptyosetempty]
定理 6.77. T を集合とし, x を文字とするとき, $\{T\}_{x \in \phi}$ は空である.

[sthmoset=singleton]
定理 6.78. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.418) $$a \neq \phi \wedge (\forall x \in a)(T = b) \leftrightarrow \{T\}_{x \in a} = \{b\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.
1) a が空でなく, $(\forall x \in a)(T = b)$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} = \{b\}$.
2) a は空でないとする. また x が定数でなく, $x \in a \to T = b$ が成り立つとする. このとき $\{T\}_{x \in a} = \{b\}$.
3) $\{T\}_{x \in a} = \{b\}$ ならば, a は空でなく, $(\forall x \in a)(T = b)$ が成り立つ.

[sthmoset=singletont]
定理 6.79. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.433) $$a \neq \phi \wedge \forall x(T = b) \to \{T\}_{x \in a} = \{b\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) a が空でなく, $\forall x(T = b)$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} = \{b\}$.
2) a は空でないとする. また x が定数でなく, $T = b$ が成り立つとする. このとき $\{T\}_{x \in a} = \{b\}$.

[sthmoset=singletontfree]
定理 6.80. a と T を集合とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする. このとき

(6.436) $$a \neq \phi \leftrightarrow \{T\}_{x \in a} = \{T\}$$

が成り立つ. またこのことから特に, 次の (6.437) が成り立つ.

(6.437) a が空でなければ, $\{T\}_{x \in a} = \{T\}$.

[sthm-empty]

定理 6.81. a と b を集合とするとき,

$$a - b = \phi \leftrightarrow a \subset b \tag{6.440}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a - b$ が空ならば, $a \subset b$.
2) $a \subset b$ ならば, $a - b$ は空である.

[sthma-empty]
定理 6.82. a を集合とするとき,

$$a - a = \phi, \tag{6.443}$$

$$a - \phi = a, \tag{6.444}$$

$$\phi - a = \phi \tag{6.445}$$

がすべて成り立つ.

[sthmbsubseta-b]
定理 6.83. a と b を集合とするとき,

$$b \subset a - b \leftrightarrow b = \phi \tag{6.446}$$

が成り立つ. またこのことから特に, 次の (6.447) が成り立つ.

(6.447) $b \subset a - b$ ならば, b は空である.

[sthma-b=b]
定理 6.84. a と b を集合とするとき,

$$a - b = b \leftrightarrow a = \phi \wedge b = \phi \tag{6.451}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $a - b = b$ ならば, a と b は共に空である.
2) a と b が共に空ならば, $a - b = b$.

[sthma-bpsubsetb]
定理 6.85. a と b を集合とするとき,

$$a - b \subsetneqq b \leftrightarrow a \subset b \wedge b \neq \phi \tag{6.458}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $a - b \subsetneqq b$ ならば, b は空でなく, $a \subset b$ が成り立つ.
2) b が空でなく, $a \subset b$ が成り立てば, $a - b \subsetneqq b$.

[sthmbpsubseta-b]
定理 6.86. a と b を集合とするとき,

(6.463) $$b \subsetneqq a - b \leftrightarrow a \neq \phi \wedge b = \phi$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $b \subsetneqq a - b$ ならば, a は空でなく, b は空である.
2) a が空でなく, b が空ならば, $b \subsetneqq a - b$.

[sthmsingleton-empty]
定理 6.87. a と b を集合とするとき,

(6.472) $$\{a\} - \{b\} = \phi \leftrightarrow a = b$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $\{a\} - \{b\}$ が空ならば, $a = b$.
2) $a = b$ ならば, $\{a\} - \{b\}$ は空である.