

5 分出と合併の schema

[sthms7]

定理 5.1. R を関係式とし, x と y を異なる文字とする. また u と v を共に x 及び y と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする. このとき次の 1), 2) が成り立つ.

- 1) $\forall y(\exists u(\forall x(R \rightarrow x \in u)))$ ならば, $\forall v(\text{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.
- 2) y が定数でなく, $\exists u(\forall x(R \rightarrow x \in u))$ が成り立てば, $\forall v(\text{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.

[sthms7a]

定理 5.2. a を集合とし, R を関係式とする. また x と y を異なる文字とし, x は a の中に自由変数として現れないとする. また v を x, y と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.36) \quad \forall y(\forall x(R \rightarrow x \in a)) \rightarrow \forall v(\text{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $\forall y(\forall x(R \rightarrow x \in a))$ ならば, $\forall v(\text{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.
- 2) y が定数でなく, $\forall x(R \rightarrow x \in a)$ が成り立てば, $\forall v(\text{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.
- 3) x が定数でなく, $\forall y(R \rightarrow x \in a)$ が成り立てば, $\forall v(\text{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.
- 4) x と y が共に定数でなく, $R \rightarrow x \in a$ が成り立てば, $\forall v(\text{Set}_x(\exists y(y \in v \wedge R)))$.

[sthms7b]

定理 5.3. b を集合とし, R を関係式とする. また x と y を互いに異なり, 共に b の中に自由変数として現れない文字とする. また u を x, y と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.39) \quad \forall y(\exists u(\forall x(R \rightarrow x \in u))) \rightarrow \text{Set}_x(\exists y(y \in b \wedge R))$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

- 1) $\forall y(\exists u(\forall x(R \rightarrow x \in u)))$ ならば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る.
- 2) y が定数でなく, $\exists u(\forall x(R \rightarrow x \in u))$ が成り立てば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る.

[sthms7ab]

定理 5.4. a と b を集合とし, R を関係式とする. また x と y を異なる文字とし, x は a 及び b の中に自由変数として現れず, y は b の中に自由変数として現れないとする. このとき

$$(5.42) \quad \forall y(\forall x(R \rightarrow x \in a)) \rightarrow \text{Set}_x(\exists y(y \in b \wedge R))$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $\forall y(\forall x(R \rightarrow x \in a))$ ならば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る.
- 2) y が定数でなく, $\forall x(R \rightarrow x \in a)$ が成り立てば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る.

- 3) x が定数でなく, $\forall y(R \rightarrow x \in a)$ が成り立てば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る.
 4) x と y が共に定数でなく, $R \rightarrow x \in a$ が成り立てば, $\exists y(y \in b \wedge R)$ は x について集合を作り得る.

[sthmssetsm]

定理 5.5. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき関係式 $x \in a \wedge R$ は x について集合を作り得る.

[sthmssetbasis]

定理 5.6. a と b を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.60) \quad b \in \{x \in a \mid R\} \leftrightarrow b \in a \wedge (b|x)(R)$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

- 1) $b \in \{x \in a \mid R\}$ ならば, $b \in a$ と $(b|x)(R)$ が共に成り立つ.
- 2) $b \in a$ と $(b|x)(R)$ が共に成り立てば, $b \in \{x \in a \mid R\}$.

[sthmssetsubsetsa]

定理 5.7. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.61) \quad \{x \in a \mid R\} \subset a$$

が成り立つ.

[sthmssetsubsetb]

定理 5.8. a と b を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a \subset b \rightarrow \{x \in a \mid R\} \subset b, \quad b \subset \{x \in a \mid R\} \rightarrow b \subset a$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ.

- 1) $a \subset b$ ならば, $\{x \in a \mid R\} \subset b$.
- 2) $b \subset \{x \in a \mid R\}$ ならば, $b \subset a$.

[sthmbsubsetssset]

定理 5.9. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.66) \quad b \subset \{x \in a \mid R\} \leftrightarrow b \subset a \wedge (\forall x \in b)(R)$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.

- 1) $b \subset \{x \in a \mid R\}$ ならば, $b \subset a$ と $(\forall x \in b)(R)$ が共に成り立つ.
- 2) $b \subset a$ と $(\forall x \in b)(R)$ が共に成り立てば, $b \subset \{x \in a \mid R\}$.
- 3) x が定数でなく, $b \subset a$ と $x \in b \rightarrow R$ が共に成り立てば, $b \subset \{x \in a \mid R\}$.

[sthmsset=a]

定理 5.10. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.72) \quad (\forall x \in a)(R) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} = a$$

が成り立つ. 特に

$$(5.73) \quad \forall x(R) \rightarrow \{x \in a \mid R\} = a$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $(\forall x \in a)(R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = a$. また $\{x \in a \mid R\} = a$ ならば, $(\forall x \in a)(R)$.
- 2) x が定数でなく, $x \in a \rightarrow R$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} = a$.
- 3) $\forall x(R)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = a$.
- 4) x が定数でなく, R が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} = a$.

[sthmsset=arfree]

定理 5.11. a を集合, R を関係式とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.80) \quad R \rightarrow \{x \in a \mid R\} = a$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.81) が成り立つ.

$$(5.81) \quad R \text{ ならば, } \{x \in a \mid R\} = a.$$

[sthmssetsubsetset]

定理 5.12. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.84) \quad \text{Set}_x(R) \rightarrow \{x \in a \mid R\} \subset \{x \mid R\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.85) が成り立つ.

$$(5.85) \quad R \text{ が } x \text{ について集合を作り得るならば, } \{x \in a \mid R\} \subset \{x \mid R\}.$$

[sthmalltiset=sset]

定理 5.13. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.88) \quad \forall x(R \rightarrow x \in a) \leftrightarrow \text{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} = \{x \in a \mid R\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.

- 1) $\forall x(R \rightarrow x \in a)$ ならば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} = \{x \in a \mid R\}$ が成り立つ.
- 2) x が定数でなく, $R \rightarrow x \in a$ が成り立てば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} = \{x \in a \mid R\}$ が成り立つ.
- 3) R が x について集合を作り得るとき, $\{x \mid R\} = \{x \in a \mid R\}$ ならば, $\forall x(R \rightarrow x \in a)$.

[sthmalltisetsubseta]

定理 5.14. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.93) \quad \forall x(R \rightarrow x \in a) \leftrightarrow \text{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} \subset a$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.

- 1) $\forall x(R \rightarrow x \in a)$ ならば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} \subset a$ が成り立つ.
- 2) x が定数でなく, $R \rightarrow x \in a$ が成り立てば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} \subset a$ が成り立つ.
- 3) R が x について集合を作り得るとき, $\{x \mid R\} \subset a$ ならば, $\forall x(R \rightarrow x \in a)$.

[sthmssetsubset]

定理 5.15. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.96) \quad a \subset b \rightarrow \{x \in a \mid R\} \subset \{x \in b \mid R\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.97) が成り立つ.

$$(5.97) \quad a \subset b \text{ ならば, } \{x \in a \mid R\} \subset \{x \in b \mid R\}.$$

[sthmsset=]

定理 5.16. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.102) \quad a = b \rightarrow \{x \in a \mid R\} = \{x \in b \mid R\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.103) が成り立つ.

$$(5.103) \quad a = b \text{ ならば, } \{x \in a \mid R\} = \{x \in b \mid R\}.$$

[sthmalltssetsubset]

定理 5.17. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.104) \quad (\forall x \in a)(R \rightarrow S) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$$

が成り立つ. 特に

$$(5.105) \quad \forall x(R \rightarrow S) \rightarrow \{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $(\forall x \in a)(R \rightarrow S)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$. また $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$ ならば, $(\forall x \in a)(R \rightarrow S)$.
- 2) x が定数でなく, $x \in a \rightarrow (R \rightarrow S)$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$.
- 3) $\forall x(R \rightarrow S)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$.
- 4) x が定数でなく, $R \rightarrow S$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} \subset \{x \in a \mid S\}$.

[sthmalleqsset=]

定理 5.18. a を集合, R と S を関係式とし, x を文字とする. このとき

$$(5.111) \quad (\forall x \in a)(R \leftrightarrow S) \rightarrow \{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$$

が成り立つ. 特に

$$(5.112) \quad \forall x(R \leftrightarrow S) \rightarrow \{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $(\forall x \in a)(R \leftrightarrow S)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$.
- 2) x が定数でなく, $x \in a \rightarrow (R \leftrightarrow S)$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$.
- 3) $\forall x(R \leftrightarrow S)$ ならば, $\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$.
- 4) x が定数でなく, $R \leftrightarrow S$ が成り立てば, $\{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$.

[sthmalleqsset=eq]

定理 5.19. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.116) \quad (\forall x \in a)(R \leftrightarrow S) \leftrightarrow \{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.117) が成り立つ.

$$(5.117) \quad \{x \in a \mid R\} = \{x \in a \mid S\} \text{ ならば, } (\forall x \in a)(R \leftrightarrow S).$$

[sthm spinsset]

定理 5.20. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.121) \quad (\exists x \in \{x \in a \mid R\})(S) \leftrightarrow (\exists x \in a)(R \wedge S),$$

$$(5.122) \quad (\forall x \in \{x \in a \mid R\})(S) \leftrightarrow (\forall x \in a)(R \rightarrow S),$$

$$(5.123) \quad (!x \in \{x \in a \mid R\})(S) \leftrightarrow (!x \in a)(R \wedge S),$$

$$(5.124) \quad (\exists !x \in \{x \in a \mid R\})(S) \leftrightarrow (\exists !x \in a)(R \wedge S)$$

がすべて成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $(\exists x \in \{x \in a \mid R\})(S)$ ならば, $(\exists x \in a)(R \wedge S)$. また $(\exists x \in a)(R \wedge S)$ ならば, $(\exists x \in \{x \in a \mid R\})(S)$.
- 2) $(\forall x \in \{x \in a \mid R\})(S)$ ならば, $(\forall x \in a)(R \rightarrow S)$. また $(\forall x \in a)(R \rightarrow S)$ ならば, $(\forall x \in \{x \in a \mid R\})(S)$.
- 3) $(!x \in \{x \in a \mid R\})(S)$ ならば, $(!x \in a)(R \wedge S)$. また $(!x \in a)(R \wedge S)$ ならば, $(!x \in \{x \in a \mid R\})(S)$.
- 4) $(\exists !x \in \{x \in a \mid R\})(S)$ ならば, $(\exists !x \in a)(R \wedge S)$. また $(\exists !x \in a)(R \wedge S)$ ならば, $(\exists !x \in \{x \in a \mid R\})(S)$.

[sthmisetsset]

定理 5.21. R と S を関係式とし, x を文字とする. このとき

$$(5.136) \quad \text{Set}_x(R) \rightarrow \{x \in \{x \mid R\} \mid S\} = \{x \mid R \wedge S\},$$

$$(5.137) \quad \text{Set}_x(R) \rightarrow \{x \in \{x \mid R\} \mid S\} = \{x \mid S \wedge R\}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の (5.138) が成り立つ.

$$(5.138) \quad R \text{ が } x \text{ について集合を作り得るならば, } \{x \in \{x \mid R\} \mid S\} = \{x \mid R \wedge S\} \text{ と } \{x \in \{x \mid R\} \mid S\} = \{x \mid S \wedge R\} \text{ が共に成り立つ.}$$

[sthmssetsset]

定理 5.22. a を集合, R と S を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.152) \quad \{x \in \{x \in a \mid R\} \mid S\} = \{x \in a \mid R \wedge S\},$$

$$(5.153) \quad \{x \in \{x \in a \mid R\} \mid S\} = \{x \in a \mid S \wedge R\}$$

が共に成り立つ.

[sthm!sm]

定理 5.23. R を関係式とし, x を文字とすると,

$$(5.157) \quad !x(R) \leftrightarrow \text{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} \subset \{\tau_x(R)\}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

- 1) $!x(R)$ ならば, R は x について集合を作り得る. 更に $\{x \mid R\} \subset \{\tau_x(R)\}$ が成り立つ.
- 2) R が x について集合を作り得るとする. このとき $\{x \mid R\} \subset \{\tau_x(R)\}$ ならば, $!x(R)$.

[sthmsmimp]

定理 5.24. R を関係式とし, x を文字とする. また y を x と異なり, R の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.161) \quad \text{Set}_x(R) \leftrightarrow \exists y(\forall x(R \rightarrow x \in y))$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

- 1) R が x について集合を作り得るならば, $\exists y(\forall x(R \rightarrow x \in y))$.
- 2) $\exists y(\forall x(R \rightarrow x \in y))$ ならば, R は x について集合を作り得る.

[sthmsmfree]

定理 5.25. R を関係式とし, x を R の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.166) \quad \text{Set}_x(R) \leftrightarrow \neg R$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

- 1) R が x について集合を作り得るならば, $\neg R$.
- 2) $\neg R$ ならば, R は x について集合を作り得る.

[sthmall&sm]

定理 5.26. R を関係式とし, x を文字とするとき,

$$(5.172) \quad \forall x(R) \rightarrow \neg \text{Set}_x(R),$$

$$(5.173) \quad \forall x(\neg R) \rightarrow \text{Set}_x(R)$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1)–4) が成り立つ.

- 1) $\forall x(R)$ ならば, R は x について集合を作り得ない.
- 2) x が定数でなく, R が成り立てば, R は x について集合を作り得ない.
- 3) $\forall x(\neg R)$ ならば, R は x について集合を作り得る.
- 4) x が定数でなく, $\neg R$ が成り立てば, R は x について集合を作り得る.

[sthmalltsm]

定理 5.27. R と S を関係式とし, x を文字とする. このとき

$$(5.181) \quad \forall x(R \rightarrow S) \rightarrow (\text{Set}_x(S) \rightarrow \text{Set}_x(R))$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1)–4) が成り立つ.

- 1) $\forall x(R \rightarrow S)$ ならば, $\text{Set}_x(S) \rightarrow \text{Set}_x(R)$.
- 2) x が定数でなく, $R \rightarrow S$ が成り立てば, $\text{Set}_x(S) \rightarrow \text{Set}_x(R)$.
- 3) $\forall x(R \rightarrow S)$ であり, かつ S が x について集合を作り得るならば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}$ が成り立つ.
- 4) x が定数でなく, $R \rightarrow S$ が成り立ち, かつ S が x について集合を作り得るならば, R は x について集合を作り得る. またこのとき $\{x \mid R\} \subset \{x \mid S\}$ が成り立つ.

[sthmosetsm]

定理 5.28. a と T を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. また y を x と異なり, a 及び T の中に自由変数として現れない文字とする. このとき関係式 $\exists x(x \in a \wedge y = T)$ は y について集合を作り得る.

[sthmosetbasis]

定理 5.29. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.198) \quad b \in \{T\}_{x \in a} \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge b = T)$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

- 1) $b \in \{T\}_{x \in a}$ ならば, $\exists x(x \in a \wedge b = T)$.
- 2) $\exists x(x \in a \wedge b = T)$ ならば, $b \in \{T\}_{x \in a}$.

[sthmosetfund]

定理 5.30. a, T, U を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.204) \quad U \in a \rightarrow (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in a}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.205) が成り立つ.

$$(5.205) \quad U \in a \text{ ならば, } (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in a}.$$

[sthmosetsubsetb]

定理 5.31. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.210) \quad (\forall x \in a)(T \in b) \leftrightarrow \{T\}_{x \in a} \subset b$$

が成り立つ. 特に

$$(5.211) \quad \forall x(T \in b) \rightarrow \{T\}_{x \in a} \subset b$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $(\forall x \in a)(T \in b)$ ならば, $\{T\}_{x \in a} \subset b$. また $\{T\}_{x \in a} \subset b$ ならば, $(\forall x \in a)(T \in b)$.
- 2) x が定数でなく, $x \in a \rightarrow T \in b$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} \subset b$.
- 3) $\forall x(T \in b)$ ならば, $\{T\}_{x \in a} \subset b$.
- 4) x が定数でなく, $T \in b$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} \subset b$.

[sthmosetsubset]

定理 5.32. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.224) \quad a \subset b \rightarrow \{T\}_{x \in a} \subset \{T\}_{x \in b}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.225) が成り立つ.

$$(5.225) \quad a \subset b \text{ ならば, } \{T\}_{x \in a} \subset \{T\}_{x \in b}.$$

[sthmoset=]

定理 5.33. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.229) \quad a = b \rightarrow \{T\}_{x \in a} = \{T\}_{x \in b}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.230) が成り立つ.

$$(5.230) \quad a = b \text{ ならば, } \{T\}_{x \in a} = \{T\}_{x \in b}.$$

[sthmt=uoset=]

定理 5.34. a, T, U を集合とし, x を文字とする. このとき

$$(5.231) \quad (\forall x \in a)(T = U) \rightarrow \{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$$

が成り立つ. 特に

$$(5.232) \quad \forall x(T = U) \rightarrow \{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$$

が成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $(\forall x \in a)(T = U)$ ならば, $\{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$.
- 2) x が定数でなく, $x \in a \rightarrow T = U$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$.
- 3) $\forall x(T = U)$ ならば, $\{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$.
- 4) x が定数でなく, $T = U$ が成り立てば, $\{T\}_{x \in a} = \{U\}_{x \in a}$.

[sthmspinoset]

定理 5.35. a と T を集合, R を関係式とし, x を a 及び R の中に自由変数として現れない文字とする. また y を x と異なり, a 及び T の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.238) \quad (\exists y \in \{T\}_{x \in a})(R) \leftrightarrow (\exists x \in a)((T|y)(R)),$$

$$(5.239) \quad (\forall y \in \{T\}_{x \in a})(R) \leftrightarrow (\forall x \in a)((T|y)(R)),$$

$$(5.240) \quad (!x \in a)((T|y)(R)) \rightarrow (!y \in \{T\}_{x \in a})(R),$$

$$(5.241) \quad (\exists !x \in a)((T|y)(R)) \rightarrow (\exists !y \in \{T\}_{x \in a})(R)$$

がすべて成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

- 1) $(\exists y \in \{T\}_{x \in a})(R)$ ならば, $(\exists x \in a)((T|y)(R))$. また $(\exists x \in a)((T|y)(R))$ ならば, $(\exists y \in \{T\}_{x \in a})(R)$.
- 2) $(\forall y \in \{T\}_{x \in a})(R)$ ならば, $(\forall x \in a)((T|y)(R))$. また $(\forall x \in a)((T|y)(R))$ ならば, $(\forall y \in \{T\}_{x \in a})(R)$.
- 3) $(!x \in a)((T|y)(R))$ ならば, $(!y \in \{T\}_{x \in a})(R)$.
- 4) $(\exists !x \in a)((T|y)(R))$ ならば, $(\exists !y \in \{T\}_{x \in a})(R)$.

[sthmisetoset]

定理 5.36. a と T を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.257) \quad \text{Set}_x(R) \rightarrow (a \in \{T\}_{x \in \{x|R\}} \leftrightarrow \exists x(R \wedge a = T))$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) R が x について集合を作り得るならば, $a \in \{T\}_{x \in \{x|R\}} \leftrightarrow \exists x(R \wedge a = T)$.

2) R が x について集合を作り得るとする. このとき $a \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}$ ならば, $\exists x(R \wedge a = T)$. またこのとき $\exists x(R \wedge a = T)$ ならば, $a \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}$.

[sthmisetofund]

定理 5.37. T と U を集合, R を関係式とし, x を文字とする. このとき

$$(5.260) \quad \text{Set}_x(R) \rightarrow ((U|x)(R) \rightarrow (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x|R\}})$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) R が x について集合を作り得るならば, $(U|x)(R) \rightarrow (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}$.

2) R が x について集合を作り得るとする. このとき $(U|x)(R)$ ならば, $(U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x|R\}}$.

[sthmuopairoset]

定理 5.38. a, b, T を集合とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.264) \quad \{T\}_{x \in \{a,b\}} = \{(a|x)(T), (b|x)(T)\}$$

が成り立つ.

[sthmsingletonset]

定理 5.39. a と T を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.268) \quad \{T\}_{x \in \{a\}} = \{(a|x)(T)\}$$

が成り立つ.

[sthmssetofset]

定理 5.40. a, b, T を集合, R を関係式とし, x を a 及び b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.272) \quad b \in \{T\}_{x \in \{x \in a | R\}} \leftrightarrow (\exists x \in a)(R \wedge b = T)$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $b \in \{T\}_{x \in \{x \in a | R\}}$ ならば, $(\exists x \in a)(R \wedge b = T)$.

2) $(\exists x \in a)(R \wedge b = T)$ ならば, $b \in \{T\}_{x \in \{x \in a | R\}}$.

[sthmssetosetfund]

定理 5.41. a, T, U を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.275) \quad U \in a \wedge (U|x)(R) \rightarrow (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x \in a | R\}}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (5.276) が成り立つ.

$$(5.276) \quad U \in a \text{ と } (U|x)(R) \text{ が共に成り立てば, } (U|x)(T) \in \{T\}_{x \in \{x \in a | R\}}.$$

[sthmsset&oset]

定理 5.42. a と T を集合, R を関係式とし, x を a 及び R の中に自由変数として現れない文字とする. また y を x と異なり, a 及び T の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.277) \quad \{y \in \{T\}_{x \in a} \mid R\} = \{T\}_{x \in \{x \in a | (T|y)(R)\}}$$

が成り立つ.

[sthmosetoset]

定理 5.43. a, T, U を集合とし, x を a 及び U の中に自由変数として現れない文字とする. また y を x と異なり, a 及び T の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(5.288) \quad \{U\}_{y \in \{T\}_{x \in a}} = \{(T|y)(U)\}_{x \in a}$$

が成り立つ.