4　非順序対

[sthmaxiom2]
定理 4.1. a と b を集合とし, x をこれらの中に自由変数として現れない文字とする. このとき関係式 $x = a \vee x = b$ は x について集合を作り得る.

[sthmuopairbasis]
定理 4.2. a, b, c を集合とするとき,

$$c \in \{a, b\} \leftrightarrow c = a \vee c = b \tag{4.17}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $c \in \{a, b\}$ ならば, $c = a \vee c = b$.
2) $c = a$ ならば, $c \in \{a, b\}$. また $c = b$ ならば, $c \in \{a, b\}$.

[sthmuopairfund]
定理 4.3. a と b を集合とするとき,

$$a \in \{a, b\}, \quad b \in \{a, b\}$$

が成り立つ.

[sthmuopairnotin]
定理 4.4. a, b, c を集合とするとき,

$$c \notin \{a, b\} \leftrightarrow c \neq a \wedge c \neq b \tag{4.18}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $c \notin \{a, b\}$ ならば, $c \neq a$ と $c \neq b$ が共に成り立つ.
2) $c \neq a$ と $c \neq b$ が共に成り立てば, $c \notin \{a, b\}$.

[sthmuopairch]
定理 4.5. a と b を集合とするとき,

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

が成り立つ.

[sthmuopairsubset]

定理 4.6. a, b, c を集合とするとき,

$$\{a, b\} \subset c \leftrightarrow a \in c \wedge b \in c \tag{4.21}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $\{a, b\} \subset c$ ならば, $a \in c$ と $b \in c$ が共に成り立つ.
2) $a \in c$ と $b \in c$ が共に成り立てば, $\{a, b\} \subset c$.

[sthmuopairnotsubset]
定理 4.7. a, b, c を集合とするとき,

$$\{a, b\} \not\subset c \leftrightarrow a \notin c \vee b \notin c \tag{4.32}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.
1) $\{a, b\} \not\subset c$ ならば, $a \notin c \vee b \notin c$.
2) $a \notin c$ ならば, $\{a, b\} \not\subset c$. また $b \notin c$ ならば, $\{a, b\} \not\subset c$.

[sthmuopair=]
定理 4.8.
1) a, b, c を集合とするとき,

$$a = b \leftrightarrow \{a, c\} = \{b, c\}, \quad a = b \leftrightarrow \{c, a\} = \{c, b\} \tag{4.35}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.36), (4.37) が成り立つ.

(4.36) $a = b$ ならば, $\{a, c\} = \{b, c\}$ と $\{c, a\} = \{c, b\}$ が共に成り立つ.

(4.37) $\{a, c\} = \{b, c\}$ ならば, $a = b$. また $\{c, a\} = \{c, b\}$ ならば, $a = b$.

2) a, b, c, d を集合とするとき,

$$a = c \wedge b = d \to \{a, b\} = \{c, d\} \tag{4.38}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.39) が成り立つ.

(4.39) $a = c$ と $b = d$ が共に成り立てば, $\{a, b\} = \{c, d\}$.

[sthmspinuopair]
定理 4.9. a と b を集合, R を関係式とし, x を a と b の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(\exists x \in \{a, b\})(R) \leftrightarrow (a|x)(R) \vee (b|x)(R), \tag{4.56}$$

$$(\forall x \in \{a, b\})(R) \leftrightarrow (a|x)(R) \wedge (b|x)(R) \tag{4.57}$$

が共に成り立つ．またこれらから，次の 1)—4) が成り立つ．

1) $(\exists x \in \{a, b\})(R)$ ならば，$(a|x)(R) \vee (b|x)(R)$．

2) $(a|x)(R)$ ならば，$(\exists x \in \{a, b\})(R)$．また $(b|x)(R)$ ならば，$(\exists x \in \{a, b\})(R)$．

3) $(\forall x \in \{a, b\})(R)$ ならば，$(a|x)(R)$ と $(b|x)(R)$ が共に成り立つ．

4) $(a|x)(R)$ と $(b|x)(R)$ が共に成り立てば，$(\forall x \in \{a, b\})(R)$．

[sthmsingletonsm]

定理 4.10. a を集合とし，x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき関係式 $x = a$ は x について集合を作り得る．

[sthmaa=a]

定理 4.11. a を集合とするとき，

$$\{a, a\} = \{a\}$$

が成り立つ．

[sthmsingletonbasis]

定理 4.12. a と b を集合とするとき，

$$b \in \{a\} \leftrightarrow b = a \tag{4.65}$$

が成り立つ．またこのことから，次の (4.66) が成り立つ．

(4.66) $b \in \{a\}$ ならば，$b = a$．また $b = a$ ならば，$b \in \{a\}$．

[sthmsingletonfund]

定理 4.13. a を集合とするとき，

$$a \in \{a\}$$

が成り立つ．

[sthmsingletonsubset]

定理 4.14. a と b を集合とするとき，

$$\{a\} \subset b \leftrightarrow a \in b \tag{4.67}$$

が成り立つ．またこのことから，次の (4.68) が成り立つ．

(4.68) $\{a\} \subset b$ ならば，$a \in b$．また $a \in b$ ならば，$\{a\} \subset b$．

[sthmsingletonsubsetuopair]

定理 4.15. a と b を集合とするとき,

$$\{a\} \subset \{a, b\}, \quad \{b\} \subset \{a, b\}$$

が成り立つ.

[sthmsingleton=]

定理 4.16. a と b を集合とするとき,

$$a = b \leftrightarrow \{a\} = \{b\} \tag{4.72}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.73) が成り立つ.

(4.73) $a = b$ ならば, $\{a\} = \{b\}$. また $\{a\} = \{b\}$ ならば, $a = b$.

[sthmsingleton=subset]

定理 4.17. a と b を集合とするとき,

$$a = b \leftrightarrow \{a\} \subset \{b\} \tag{4.79}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.80) が成り立つ.

(4.80) $a = b$ ならば, $\{a\} \subset \{b\}$. また $\{a\} \subset \{b\}$ ならば, $a = b$.

[sthmsingletonuopairsubset]

定理 4.18. a, b, c を集合とするとき,

$$\{a\} \subset \{b, c\} \leftrightarrow a = b \lor a = c, \tag{4.88}$$

$$\{b, c\} \subset \{a\} \leftrightarrow a = b \land a = c \tag{4.89}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1)—4) が成り立つ.

1) $\{a\} \subset \{b, c\}$ ならば, $a = b \lor a = c$.
2) $a = b$ ならば, $\{a\} \subset \{b, c\}$. また $a = c$ ならば, $\{a\} \subset \{b, c\}$.
3) $\{b, c\} \subset \{a\}$ ならば, $a = b$ と $a = c$ が共に成り立つ.
4) $a = b$ と $a = c$ が共に成り立てば, $\{b, c\} \subset \{a\}$.

[sthmsingleton=uopair]

定理 4.19. a, b, c を集合とするとき,

$$\{a\} = \{b, c\} \leftrightarrow a = b \land a = c \tag{4.95}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $\{a\} = \{b, c\}$ ならば, $a = b$ と $a = c$ が共に成り立つ.
2) $a = b$ と $a = c$ が共に成り立てば, $\{a\} = \{b, c\}$.

[sthmsingleton=uopairab]
定理 4.20. a と b を集合とするとき,

$$\{a\} = \{a, b\} \leftrightarrow a = b, \tag{4.101}$$

$$\{b\} = \{a, b\} \leftrightarrow a = b \tag{4.102}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.
1) $\{a\} = \{a, b\}$ ならば, $a = b$.
2) $\{b\} = \{a, b\}$ ならば, $a = b$.
3) $a = b$ ならば, $\{a\} = \{a, b\}$ と $\{b\} = \{a, b\}$ が共に成り立つ.

[sthmsingletonpsubsetuopair]
定理 4.21. a と b を集合とするとき,

$$\{a\} \subsetneqq \{a, b\} \leftrightarrow a \neq b, \tag{4.108}$$

$$\{b\} \subsetneqq \{a, b\} \leftrightarrow a \neq b \tag{4.109}$$

が共に成り立つ. またこれらから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ.
1) $\{a\} \subsetneqq \{a, b\}$ ならば, $a \neq b$.
2) $\{b\} \subsetneqq \{a, b\}$ ならば, $a \neq b$.
3) $a \neq b$ ならば, $\{a\} \subsetneqq \{a, b\}$ と $\{b\} \subsetneqq \{a, b\}$ が共に成り立つ.

[sthmsubsetsingleton!]
定理 4.22. a と b を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a \subset \{b\} \to !x(x \in a) \tag{4.114}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.115) が成り立つ.

$$a \subset \{b\} \text{ ならば, } !x(x \in a). \tag{4.115}$$

[sthm=singletonex!]
定理 4.23. a と b を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$a = \{b\} \to \exists!x(x \in a) \tag{4.121}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.122) が成り立つ.

$$a = \{b\} \text{ ならば, } \exists!x(x \in a). \tag{4.122}$$

[sthmex!singleton]

定理 4.24. a を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\exists!x(x \in \{a\}) \tag{4.130}$$

が成り立つ.

[sthmsma!]

定理 4.25. a を集合, R を関係式とし, x を文字とする. このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} \subset \{a\} \to !x(R) \tag{4.131}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.132) が成り立つ.

(4.132) R が x について集合を作り得るとする. このとき $\{x \mid R\} \subset \{a\}$ ならば, $!x(R)$.

[sthmsmaex!]

定理 4.26. a を集合, R を関係式とし, x を文字とする. このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} = \{a\} \to \exists!x(R) \tag{4.136}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.137) が成り立つ.

(4.137) R が x について集合を作り得るとする. このとき $\{x \mid R\} = \{a\}$ ならば, $\exists!x(R)$.

[sthmex!sm]

定理 4.27. R を関係式とし, x を文字とするとき,

$$\exists!x(R) \leftrightarrow \mathrm{Set}_x(R) \wedge \{x \mid R\} = \{\tau_x(R)\} \tag{4.140}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ.

1) $\exists!x(R)$ ならば, R は x について集合を作り得る. 更に $\{x \mid R\} = \{\tau_x(R)\}$ が成り立つ.
2) R が x について集合を作り得るとする. このとき $\{x \mid R\} = \{\tau_x(R)\}$ ならば, $\exists!x(R)$.

[sthmspinsingleton]

定理 4.28. a を集合, R を関係式とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$(\exists x \in \{a\})(R) \leftrightarrow (a|x)(R), \tag{4.145}$$

$$(\forall x \in \{a\})(R) \leftrightarrow (a|x)(R), \tag{4.146}$$

$$(!x \in \{a\})(R), \tag{4.147}$$

$$(\exists!x \in \{a\})(R) \leftrightarrow (a|x)(R) \tag{4.148}$$

がすべて成り立つ．またこれらから, 次の 1), 2) が成り立つ．

1) $(\exists x \in \{a\})(R)$, $(\forall x \in \{a\})(R)$, $(\exists! x \in \{a\})(R)$ のいずれかが成り立てば, $(a|x)(R)$.

2) $(a|x)(R)$ ならば, $(\exists x \in \{a\})(R)$, $(\forall x \in \{a\})(R)$, $(\exists! x \in \{a\})(R)$ がすべて成り立つ．

[sthmelmbasis]

定理 4.29. a と b を集合とするとき,

$$b \in a \to \mathrm{elm}(a) \in a, \quad \mathrm{elm}(a) \notin a \to b \notin a \tag{4.160}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2) が成り立つ．

1) $b \in a$ ならば, $\mathrm{elm}(a) \in a$.

2) $\mathrm{elm}(a) \notin a$ ならば, $b \notin a$.

[sthmelmnotin]

定理 4.30. a を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする．このとき

$$\mathrm{elm}(a) \notin a \leftrightarrow \forall x (x \notin a) \tag{4.161}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の 1), 2), 3) が成り立つ．

1) $\mathrm{elm}(a) \notin a$ ならば, $\forall x (x \notin a)$.

2) $\forall x (x \notin a)$ ならば, $\mathrm{elm}(a) \notin a$.

3) x が定数でなく, $x \notin a$ が成り立てば, $\mathrm{elm}(a) \notin a$.

[sthmelm=]

定理 4.31. a と b を集合とするとき,

$$a = b \to \mathrm{elm}(a) = \mathrm{elm}(b) \tag{4.162}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (4.163) が成り立つ．

$$a = b \text{ ならば, } \mathrm{elm}(a) = \mathrm{elm}(b). \tag{4.163}$$

[sthmisetelm]

定理 4.32. R を関係式とし, x を文字とする．このとき

$$\mathrm{Set}_x(R) \to \mathrm{elm}(\{x \mid R\}) = \tau_x(R) \tag{4.164}$$

が成り立つ．またこのことから, 次の (4.165) が成り立つ．

$$R \text{ が } x \text{ について集合を作り得るならば, } \mathrm{elm}(\{x \mid R\}) = \tau_x(R). \tag{4.165}$$

[sthmuopairelm]

定理 4.33. a と b を集合とするとき,

$$\mathrm{elm}(\{a,b\}) = a \vee \mathrm{elm}(\{a,b\}) = b \tag{4.166}$$

が成り立つ.

[sthmsingletonelm]
定理 4.34. a を集合とするとき,

$$\mathrm{elm}(\{a\}) = a \tag{4.167}$$

が成り立つ.

[sthm!elm]
定理 4.35. a を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$!x(x \in a) \leftrightarrow a \subset \{\mathrm{elm}(a)\} \tag{4.168}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.169) が成り立つ.

(4.169) $!x(x \in a)$ ならば, $a \subset \{\mathrm{elm}(a)\}$. また $a \subset \{\mathrm{elm}(a)\}$ ならば, $!x(x \in a)$.

[sthmex!elm]
定理 4.36. a を集合とし, x を a の中に自由変数として現れない文字とする. このとき

$$\exists! x(x \in a) \leftrightarrow a = \{\mathrm{elm}(a)\} \tag{4.173}$$

が成り立つ. またこのことから, 次の (4.174) が成り立つ.

(4.174) $\exists! x(x \in a)$ ならば, $a = \{\mathrm{elm}(a)\}$. また $a = \{\mathrm{elm}(a)\}$ ならば, $\exists! x(x \in a)$.