圏の練習1

石塚　伶

0.1 Definition of category

圏 (category) $\mathscr{C}$ とは、以下のようなものをいう。(1)$\mathscr{C}$ の **対象** (obfect) と呼ばれるもの全体 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ が与えられている。

X が圏 $\mathscr{C}$ の対象であるとき、$X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ のように表す。紛れのないときは、$X \in \mathscr{C}$ のように略記する。

(2) $\mathscr{C}$ の任意の二つの対象 X, Y の間に、X から Y への**射** (morphism) または**矢** (arrow) の集合 $\mathscr{C}(X, Y)$ が与えられている。[*1]射 $f \in \mathscr{C}(X, Y)$ を、

$$X \xrightarrow{f} Y \text{ あるいは } f\colon X \longrightarrow Y$$

のように表記する。射は次の二つの性質を満たす。

(i) 二つの射が次のように続いている場合、

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

これらの**合成** (composition) $g \circ f \in \mathscr{C}(X, Z)$、つまり

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z$$

が与えられ、結合則を満たす。すなわち、三つの射

$$W \xrightarrow{e} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

に対して、$(g \circ f) \circ e = g \circ (f \circ e)$ が成立する。すなわち、

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend right, "f \circ e"'] & X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "f \circ g"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

のように書ける。こうして得られる等しい射を $g \circ f \circ e$ と表す。四つ以上の射の合成についても同様に表記する。

(ii) $\mathscr{C}$ の任意の対象 X に対して、**恒等射** (identity) と呼ばれる射 $\mathrm{id}_X \in \mathscr{C}(X, Y)$ がひとつずつ与えられており、合成に関し単位元的にふるまう。すなわち、X からの任意の射

$$f\colon X \longrightarrow Y$$

に対して $f \circ \mathrm{id}_X = f$ が成立し、X への任意の射

$$e\colon W \longrightarrow X$$

に対して $\mathrm{id}_X \circ e = e$ が成立する。id_X をしばしば単に id と書く。あるいは、1_X または単に 1 と書くこともある。射 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して X を f の**始域** (domain) または**始点** (source) といい、$\mathrm{dom} f$ や $s(f)$ で表す。また、Y を f の**終域** (codomain) または**終点** (target) といい、$\mathrm{cod} f$ や $t(f)$ で表す。

[*1] $\mathrm{Mor}(X, Y)$ や $\mathrm{Hom}(X, Y)$ のように書くこともある。$\mathscr{C}$ を明記するときには $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ や $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ とも書く。