

領域 $D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ において重積分

$$\iiint_D \frac{dx dy dz}{(x + y + z + 1)^3}$$

の値を求める。

z を固定すると $-a \leq z \leq a, -\sqrt{a^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - z^2}, -\sqrt{a^2 - z^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{a^2 - z^2 - y^2}$
より

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a dz \int_{-\sqrt{a^2 - z^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2 - z^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2 - y^2}} \frac{dx}{(x + y + z + 1)^3} \\ = \int_{-a}^a dz \int_{-\sqrt{a^2 - z^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2}} \left[-\frac{1}{2(x + y + z + 1)^2} \right]_{-\sqrt{a^2 - z^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - z^2 - y^2}} dy \end{aligned}$$