9 分離的代数拡大

9.1 多項式の分離性

命題 9.1. 代数拡大 L/K について次は同値。

(1) L/K : 分離的。

(2) L/K の $^\forall$ 部分拡大 M/K は分離的。

Proof. 定義 (**??**) から明らか。 □

命題 9.2. $f \in K[X] - K$ について以下は同値。

(1) $(f, f') = 1$ ($\Leftrightarrow f$ とその形式微分 f'が互いに素)

(2) f の判別式 $\mathrm{disc}(f) \neq 0$ ($f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ のとき $\mathrm{dics}(f) := \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$と定義する)

(3) K のある拡大 L 上で f は相異なる一次式の積になる。

(4) f の任意の根は単根 (重解でない)

(5) $K[X]/(f)$ は etale$/K$ ($\Leftrightarrow K$ 上分離的)

Proof. (5) $\Leftrightarrow$ (1)

系 (**??**) で示した。

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4)

明らか。

(1) $\Rightarrow$ (2) ($\deg f > 1$ のときを考える) 対偶 $\mathrm{disc}(f) = 0 \Rightarrow (f, f') \neq 1$ を示す。

$\mathrm{dics}(f) = 0$ よりある $0 \leq i < j \leq n$ があり $\alpha_i = \alpha_j$ となる。$i = 1, j = 2$ としても一般性を失わない。これは f の根なので $f = (X - \alpha_1)^2 Q(X)$ となる $Q(X) \in K[X]$ が存在する。よって $f' = 2(X - \alpha_1)Q(X) + (X - \alpha_1)^2 Q'(X) = (X - \alpha_1)(2Q(X) + (X - \alpha_1)^2 Q'(X))$ となるから f, f' は共通の α_1 という根を持つので互いに素でないから $(f, f') \neq 1$ となる。

(2) $\Rightarrow$ (1) ($\deg f > 1$ のときを考える) 対偶 $(f, f') \neq 1 \Rightarrow \mathrm{disc}(f) = 0$ を示す。

$(f, f') \neq 1$ よりある α があってそれを $f = (X - \alpha)Q_1(X), f' = (X - \alpha)Q_2(X)$ として共通根として持つ。この二つから $f' = Q_1(X) + (X - \alpha)Q_1'(X) = (X - \alpha)Q_2(X)$ より $(X - \alpha)(Q_1'(X) - Q_2(X)) = Q_1(X)$ となるから $f = (X - \alpha)^2(Q_1'(X) - Q_2(X))$ より重根をもつ。したがって根の差の積である $\mathrm{disc}(f) = 0$ である。

$\deg f = 1$ のときは f の根は 0 より常に $\mathrm{disc}(f) = 0$ となるからこの命題には不適。 □

定義 9.3. これらが成り立つとき f を<u>分離的</u>という。

命題 9.4. 既約多項式 $f \in K[X]$ について次は同値。

(1) f は分離的。

(2) f は ($^\exists L$ に) 少なくとも一つの単根をもつ。

(3) $f' \neq 0$

(4) $\mathrm{char}(K) = 0$ か、または $\mathrm{char}(K) = p > 0$ で $f \notin K[X^p]$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) は命題 (9.2) で示した。

$(2) \Rightarrow (3)$

α を f の単根とする。$f'(\alpha)=0$ とすると命題 (9.2) の $(2) \Rightarrow (1)$ の証明より $f=(X-\alpha)^2Q(X)$ となるから α が単根に矛盾するので $f'(\alpha) \neq 0$ である。よって $f' \neq 0$

$(3) \Rightarrow (1)$

体上の多項式より f を monic としてよい。α を f の任意の根とする。f が既約多項式で monic より f は最小多項式であるからその次数の最小性と $f' \neq 0$ より f' は多項式で $f'(\alpha) \neq 0$ であるから α は単根。これが任意の f の根について成り立つから f は分離的。 $\square$