7　代数閉体、分解体、代数閉包

7.1　代数閉体

命題 7.1. 体 K について次は同値。

(AC1) $^\forall f \in K[X] - K$ は $K[X]$ において一次の積に分解できる。

(AC2) $^\forall f \in K[X] - K$ は K において少なくとも一つの根を持つ。

(AC3) 任意の $K[X]$ の既約多項式は一次。

(AC4) K の代数拡大は K のみ。

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2)

一次の積に分解できればそれが根になるので明らか。

(2) $\Rightarrow$ (1)

f のある根を $k \in K$ とすると $f(X) = (X - k)g(X)$ となる $g \in K[X]$ がある。この g に対しても同様なことをして繰り返せば $f = (X - k_1)(X - k_2)\cdots(X - k_n)$ と一次の積に分解できる。

(1) $\Leftrightarrow$ (3)

K 上の既約多項式はそれ以上 $K[X]$ 上で分解できない多項式なので全ての $f \in K[X] - K$ が一次に分解できるので既約多項式は一次。また、分解は既約多項式まで分解できるので一次の積に分解できる。

(3) $\Rightarrow$ (4)

任意の代数拡大 L/K をとると $^\forall x \in L$ に対し最小多項式 $f \in K[X]$ がある。これは既約多項式なので (3) より $f(x) = x - k, k \in K$ となっているから $x = k \in K$ より $L = K$ なので代数拡大は K のみ。

(4) $\Rightarrow$ (1)

任意の $f \in K[X] - K$ における任意の既約成分を g とする。g のある一つの根を x とするとこの元は K 上代数的であるから $[K(x) : K] = \deg_K g$ で有限次拡大なので $K(x) \cong K[X]/(g)$ は K 上の代数拡大。(4) よりこれは K なので $\deg_K g = \dim_K(K[X]/(g)) = \dim_K K = 1$ だから $\deg_K g = 1$ より一次式になる。よって任意の既約成分が一次式になるので $f = $(一次の積) となる。 □

定義 7.2. 体 K が上記の命題 (7.1) の (AC1) $\sim$ (AC4) を成り立たせる、つまり全てを満たすとき K を代数閉体 (algebraically closed)という。

相対的代数閉包とはことなり K を含む上の体が無い。

例 7.3. 代数学の基本定理は $\mathbb{C}$ が代数閉体であることを述べている。

命題 7.4. Ω/K : 拡大、 Ω : 代数閉体とする。このとき K の Ω の中での相対的代数閉包 $\overline{K}$ は代数閉体。

Proof. $\overline{K}$ が (AC2) を満たすことを示す。

$^\forall f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \overline{K}[X] - \overline{K} \subset \Omega[X] - \Omega$ は Ω が代数閉体よりある根 $x \in \Omega$ が存在する。$a_i \in \overline{K}$ より K 上代数的だからそれぞれの最小多項式の次数を考えれば $K' = K(a_0, \ldots, a_n)$ は K 上有限次拡大。x は K' 上代数的より $K'(x)$ は K' 上有限次拡大。この有限次拡大を合わせれば $K(a_0, \ldots, a_n)(x)/K$ は有限次拡大なので代数拡大。よって x は K 上代数的なので $x \in \overline{K}$ より $\overline{K}$ に少なくとも一つの根を持っている。 □