8 etale 代数

8.1 対角化

以下ではとくに述べない限り K を可換体とする。

定理 8.1. $A : K-alg$ と L/K : 拡大としたときに集合 $\mathscr{H} := \mathrm{Hom}_{K-alg}(A, L)$ は $L-$ ベクトル空間 $\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A, L)$ の中で L 上一次独立。

Proof. A を $K-vect.sp$ として見ればこれは加法群であるので Dedekind の補題から従う。 □

補題 8.2. $\dim_L(\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A, L)) = [\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A, L) : L] = [A : K]$ が成り立つ。

Proof. $A_{(L)} := L \otimes_K A$ としてその双対空間を $(A_{(L)})^* := \mathrm{Hom}_L(A_{(L)}, L)$ とする。以下簡単のため $\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A, L)$ を $\mathrm{Hom}(A, L)$ と書く。$\overline{\cdot} : (A_{(L)})^* \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, L), u \longmapsto \overline{u}$ で $\overline{u} : A \longrightarrow L, x \longmapsto \overline{u}(x) = u(1 \otimes x)$ とすればこの $\overline{\cdot}$ は同型であり双対空間であることから $\dim_L A_{(L)} = \dim_L (A_{(L)})^* = \dim_L \mathrm{Hom}(A, L)$ である。$\dim_L A_{(L)} = \dim_K A$ より従う。 □

系 8.3. 上の状況において $h(L)(= h_A(L)) := |\mathrm{Hom}_{K-alg}(A, L)| \leq [A : K]$ が成り立つ。

Proof. $\mathrm{Hom}_{K-alg}(A, L)$ は $\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A, L)$ で一次独立より $h(L) \leq \dim_L(\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A, L))$ である。補題 (8.2) の $\dim_L(\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A, L)) = [A : K]$ より従う。 □

定義 8.4. $K-alg$ の A が<u>対角化可能 (diagonalizable)</u>とは $^\exists n \geq 1, A \cong K^n$ であること。とくに $n = [A : K]$ である。K^n は成分ごとの演算を行う直積代数である。

Proof. $n = [A : K]$ であることは A を $K-$ ベクトル空間と見ることからわかる。 □

定義 8.5. A が拡大 L/K により<u>対角化される (diagonaled by L)</u>とは $L-alg$ の $L \otimes_K A$ が対角化可能であること。

定義 8.6. A が K 上<u>etale</u>とは $^\exists$拡大 L/K により対角化されること。

Rem 8.7. $(e_1, \ldots, e_n)$ が $K^n(\cong A)$ の標準基底とすると成分ごとの演算を行うから $e_i^2 = e_i, e_ie_j = 0 (i \neq j), e_1 + \cdots + e_n = 1_A$ となる。

命題 8.8. 有限次 $K-alg$ A について次は同値 ($n = [A : K]$ とする)
(1) A は対角化可能。
(2) A の K 上の基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ で $e_i^2 = e_i, e_ie_j = 0 (i \neq j)$ を満たすものが存在する。
(3) $\mathrm{Hom}_{K-alg}(A, K)$ は $\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A, K)$ を生成する。

Proof. (1) ⇒ (2) は Rem (8.7) より成立。
(2) ⇒ (1)
$A_i = Ke_i$ とすると $A_i \cong K$ で $A = \{k_1e_1 + \cdots + k_ne_n | k_i \in K\} = A_1 \times \cdots \times A_n \cong K^n$ より対角化可能。
(3) ⇒ (1)
有限次 $K-alg$ なので $\mathrm{Hom}_{K-alg}(A, K) = \{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ とする。これは定理 (8.1) より一次独立で

仮定から全体を張るので $\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A,K)$ の基底になる。そしてそれを並べた $K-$ 代数の準同型 $\pi:=(\pi_1,\dots,\pi_n):A\longrightarrow K^n, a\longmapsto(\pi_1(a),\dots,\pi_n(a))$ とする。 □

系 8.9. 系 (8.3) における $|\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,L)|\leq[A:K]$ について

$$|\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,L)|=[A:K]\Leftrightarrow A \text{ は } L \text{ で対角化される。}$$

Proof. $\pi:\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A,L)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{L-vect.sp}(L\otimes_K A,L), u\longmapsto\pi u$ とし、$L-$ 線形写像で $\pi u:A_{(L)}\longrightarrow L,(1\otimes x)\longmapsto(\pi u)(1\otimes x):=u(x)$ とする。π は準同型で $\pi u=0\Rightarrow{}^\forall x\in A,u(x)=0\Leftrightarrow u=0$ で単射。${}^\forall v\in\mathrm{Hom}_{L-vect.sp}(A_{(L)},L),u(x):=v(1\otimes x)$ とおけば $\pi u=v$ となるので全射より π は同型なので $\dim_L\mathrm{Hom}_{K-vect.sp}(A,L)=\dim_L\mathrm{Hom}_{L-vect.sp}(L\otimes_K A,L)$ が成立する。

また、始域と終域を制限して $\pi:\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,L)\longrightarrow\mathrm{Hom}_{L-alg}(L\otimes_K A,L)$ でも同様に全単射になるから $|\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,L)|=|\mathrm{Hom}_{L-alg}(L\otimes_K A,L)|$ である。

命題 (8.8) の (1) $\Leftrightarrow$ (3) で A を $L\otimes_K A$ で置き換えて、補題 (8.2) も用いれば

$$\begin{aligned}
A \text{ は } L \text{ で対角化される} &\Leftrightarrow L\otimes_K A \text{ は対角化可能}\\
&\Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{L-alg}(A_{(L)},L) \text{ は } \mathrm{Hom}_{L-vect.sp}(A_{(L)},K) \text{ を生成する。(基底になる)}\\
&\Leftrightarrow |\mathrm{Hom}_{L-alg}(A_{(L)},L)|=\dim_L\mathrm{Hom}_{L-vect.sp}(A_{(L)},K)\\
&\Leftrightarrow |\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,L)|=|\mathrm{Hom}_{L-alg}(A_{(L)},L)|\\
&\qquad=\dim_L\mathrm{Hom}_{L-v.s}(A,L)=\dim_L\mathrm{Hom}_{K-v.s}(A,L)=[A:K]\\
&\Leftrightarrow |\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,L)|=[A:K]
\end{aligned}$$

□

命題 8.10. $K-alg\ A$ について次は同値。

(1) A は K 上 etale である。(:$\Leftrightarrow$ ${}^\exists$拡大により対角化される)

(2) A は K の ${}^\exists$有限次拡大により対角化される。

(3) A は K の ${}^\forall$代数閉な拡大により対角化される。

(4) A は K の ${}^\exists$代数閉な拡大により対角化される。

Proof. (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) は明らか。

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) を示す。

(1) $\Rightarrow$ (2)

(1) :$\Leftrightarrow$ ${}^\exists L/K$ により対角化される。系 (8.9) から $|\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,L)|=[A:K]=n$ となる。$\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,L)=\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ とすると $\phi_i(A)$ は L の部分体で対角化可能だから $\phi_i(A)\otimes_K A\subset L\otimes_K A\cong K^n$ より $\phi_i(A)$ は K 上 n 次以下。よって $M:=(\phi_i(A)$ たちの合成$)(\subset L)$ も K の有限次拡大となり、$\mathrm{Im}(\phi_i)\subset M$ より終域を制限することができるから $\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,M)=\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ である。系 (8.9) より $|\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,M)|=[A:K]$ だから A は K 上有限次拡大の M で対角化されるから (2) が示された。

(2) $\Rightarrow$ (3)

A はある有限次拡大 M で対角化されるとする。有限次拡大より Rem (**??**) から M は代数拡大でもある。また、K の任意の代数閉体 Ω をとると定理 (**??**)(Steinitz の定理) から M は Ω に埋め込める。よって $\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,M)\subset\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,\Omega)$ である。ここで対角化されるので系 (8.9) から $|\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,M)|=[A:K]$ になることと系 (8.3) から $|\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,\Omega)|\leq[A:K]$ より

$|\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,M)| = |\mathrm{Hom}_{K-alg}(A,\Omega)| = [A:K]$ となる。よって A は任意の代数閉体 Ω で対角化される。 □

8.2 etale 代数の部分代数

以下では etale 代数 $A = K^n$ とし、その標準基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とする。

命題 8.11. $[n] := \{1, \ldots, n\}$ でこれを共通部分が無いように $[n] = I_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup I_r$ $(I_j \neq \emptyset)$ と分割する。$I \subset [n]$ に対して $e_I := \sum_{i \in I} e_i$ とする。$[n] = I_1 \bigsqcup \cdots \bigsqcup I_r$ に対し、$A_{(I_1, \ldots, I_r)} := Ke_{I_1} + \cdots + Ke_{I_r}$ は A の部分 $K-alg$ である。

そして A の部分 $K-alg$ は $A_{(I_1, \ldots, I_r)}$ のもので尽き、とくに有限個である。

Proof. e_{I_j} が $A_{(I_1, \ldots, I_r)}$ の標準基底になること。

$A_{(I_1, \ldots, I_r)}$ の定義より全体を張り、一次独立性も保つ。e_i は標準基底より打ち消し合って冪等元より $I_k \neq I_l$ とするとき

$$\begin{aligned} e_{I_k}^2 &= \left(\sum_{i \in I_k} e_i\right)^2 = \sum_{i \in I_k} e_i^2 = e_{I_k} \\ e_{I_k} e_{I_l} &= \left(\sum_{i \in I_k} e_i\right)\left(\sum_{i \in I_l} e_i\right) = 0 \\ e_{I_1} + \cdots + e_{I_r} &= \sum_{i \in [n]} e_i = 1 \end{aligned}$$

より標準基底になるのでそれで K 上張られている $A_{(I_1, \ldots, I_r)}$ は A の部分 $K-alg$ であり、命題 (8.8) の (2) から対角化可能である。 □