

13 Galois 理論の基本定理の別の定式化

K : 体、 K^{sep} : K の分離閉包、 A : etale K -alg に対して $\mathcal{S}(A) := \text{Hom}_{K\text{-alg}}(A, K^{\text{sep}})$ とおく。このとき K の絶対 Galois 群 $G_K := \text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ は $\mathcal{S}(A)$ に以下のように作用する。

$$\begin{aligned} G_K \times \mathcal{S}(A) &\longrightarrow \mathcal{S}(A) \\ (f, \sigma) &\longmapsto \sigma f \end{aligned}$$

ただし σf は

$$\begin{aligned} \sigma f : A &\longrightarrow K^{\text{sep}} \\ x &\longmapsto (\sigma f)(x) := \sigma(f(x)) \end{aligned}$$

である。 G_K は定義 (??) から位相群であり、この位相についてこの作用は連続になり、これは各 $f \in \mathcal{S}(A)$ の固定化群が開であることと同値になっている。

$A = K[X]/(f)$ のとき f のある根 α_i に対して $\alpha_i = X + (f)$ とすることで $\mathcal{S}(A)$ の写像が一つ定まるので $\mathcal{S}(A) \cong \{f \text{ の根 } \}$ が成り立ち、 $\mathcal{S}(A)$ を多項式の根のように見ることができる。

逆に S を G_K が連続に作用する有限集合 (G_K -集合) とすると $\mathcal{A}(S) := \text{Map}_G(S, K^{\text{sep}}) := \{f : S \longrightarrow K^{\text{sep}} \mid f(\sigma(x)) = \sigma(f(x)), \forall \sigma \in G_K\}$ とおいたとき $\mathcal{A}(S)$ は K -alg でさらに有限次 etale でもある。