代数学続論
体と Galois 理論

目次

1.1　体の拡大

以降の議論では特に述べない限り体は可換体とする。可換体は以下のように言い換えられる。

$\Leftrightarrow$ 可換整域で (0) と (1) 以外のイデアルがない。

$\Leftrightarrow$ クルル次元が 0 の可換整域。

$\Leftrightarrow$ 可換整域で 0 以外の元は可逆。

ただし Krull 次元とは環の素イデアルの包含関係による順序の鎖の長さの上限のことである。

K:体とするとき $K^\times$:可逆元の集合とし、上の同値からこれは $K^\times = K - \{0\}$ としたものと等しい。

例 1.1. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,(p:$ 素数$), \mathbb{Q}_p\,(p$ 進体$)$

例 1.2. *K;* 体としたとき

$K(x)$:有理関数体 $= \{$ 多項式/多項式 $(\neq 0)|$ 多項式 $\in K[x]$

$K[[x]]$:形式的冪級数体 $\{\sum_{i\in\mathbb{Z}, i\leq n} c_i x^i | c_i \in K, \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Q}$ に α を添加した体 $\Leftrightarrow$ $\mathbb{Q}(\alpha)\,(\alpha \in \mathbb{C}) = (\alpha$ を含む最小の体 $\subset \mathbb{C}) = \{f(\alpha)|f \in \mathbb{Q}(x), (f$ の分母 $)(\alpha) \neq 0\} = \{\alpha$と有理数からできる元全体$\}$

Fact 1.1. R:可換環 $\supset I$: イデアル のとき、R/I:体 $\Leftrightarrow$ I:極大イデアル

例 1.3. $R = K[x], I = (f)$ とするとき *Fact* から

I が極大 $\Leftrightarrow$ I:素イデアル $\Leftrightarrow$ f:既約

よって $K[x]/(f)$ が体 $\Leftrightarrow$ f が既約

Rem 1.1. $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$ は零環で体ではない。$\mathbb{F}_1$:一元体 $\subset \mathbb{Z}$ は実際にはない。

定義 1.1. K, L:体 $K \subset L$ とする。

(K の体構造) = (L の体構造を K に制限したもの) であるとき K は L の 部分体 (subfield)、L は K の 拡大体 (extension field) といい、体の拡大 (field extension) L/K とも言う。つまり、以下の図が可換であるということ。

$$\begin{array}{ccc} L \times L & \longrightarrow & L \\ \uparrow & & \uparrow \\ K \times K & \longrightarrow & K \end{array}$$

定義 1.2. 体の準同型とは環としての準同型のこと。

Note 1.1. 体の準同型は全て単射。

Proof. K, L:体 , $\phi : K \longleftarrow L$:準同型とするとき $\ker(\phi)$ は K のイデアルであるから体であることより $\ker(\phi) = (0)$ または $(1) = K$ となる。$\ker(\phi) = K$ のとき $\phi(K) = 0$ から準同型であるための $\phi(1) = 1$ を満たしていないからこれは不適。したがって $\ker(\phi) = (0)$ より ϕ は単射。 □