13 Galois 理論の基本定理の別の定式化

K : 体、 K^{sep} : K の分離閉包、 A :etale $K-alg$ に対して $\mathscr{S}(A) := \mathrm{Hom}_{K-alg}(A, K^{\mathrm{sep}})$ とおく。このとき K の絶対 Galois 群 $G_K := \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ は $\mathscr{S}(A)$ に以下のように作用する。

$$\begin{aligned} G_K \times \mathscr{S}(A) &\longrightarrow \mathscr{S}(A) \\ (\sigma, f) &\longmapsto \sigma f \end{aligned}$$

ただし σf は

$$\begin{aligned} \sigma f : A &\longrightarrow K^{\mathrm{sep}} \\ x &\longmapsto (\sigma f)(x) := \sigma(f(x)) \end{aligned}$$

である。G_K は定義 (**??**) から位相群であり、この位相についてこの作用は連続になり、これは各 $f \in \mathscr{S}(A)$ の固定化群が開であることと同値になっている。

$A = K[X]/(f)$ のとき f のある根 α_i に対して $\alpha_i = X + (f)$ とすることで $\mathscr{S}(A)$ の写像が一つ定まるので $\mathscr{S}(A) \cong \{f$ の根 $\}$ が成り立ち、$\mathscr{S}(A)$ を多項式の根のように見ることができる。

逆に S を G_K が連続に作用する有限集合 (G_K- 集合) とすると $\mathscr{A}(S) := \mathrm{Map}_G(S, K^{\mathrm{sep}}) := \{f : S \longrightarrow K^{\mathrm{sep}} | f(\sigma(x)) = \sigma(f(x)), {}^\forall\sigma \in G_K\}$ とおいたとき $\mathscr{A}(S)$ は $K-alg$ でさらに有限次 etale でもある。

以上のことから以下の定理が成り立つ。

定理 13.1. 次の反圏同値がある。

$$\begin{aligned} (\mathrm{etale}K-alg\text{ の圏}) &\ \cong\ (\text{有限 } G_K-\text{集合の圏}) \\ A &\longmapsto \mathscr{S}(A) \\ \mathscr{A}(S) &\longleftarrow S \\ K-alg \text{ hom} : A_1 \to A_2 &\longleftrightarrow G_K - \text{集合の射} : S_1 \leftarrow S_2 \\ \text{単射 hom} : A_1 \hookrightarrow A_2 &\longleftrightarrow \text{全射} : S_1 \twoheadleftarrow S_2 \\ \text{全射 hom} : A_1 \twoheadrightarrow A_2 &\longleftrightarrow \text{単射} : S_1 \hookleftarrow S_2 \\ A : \text{体} &\longleftrightarrow S \text{ は一つの orbit からなる} \\ A : K \text{ の Galois 拡大} &\longleftrightarrow \mathrm{Stab}_S := S \text{ の固定化群が } G_K \text{で正規} \\ A : K \text{ の Galois 拡大のとき } A/K \text{ の中間体} &\longleftrightarrow \text{全射} : (\text{一点}) \twoheadleftarrow S \text{ の中間集合} \end{aligned}$$