10 ノルムとトレース

定義 10.1. A : 有限次 $K-alg$ とする。$x \in A$ に対して x 倍写像

$$
\begin{aligned}
T_x : A &\longrightarrow A \\
a &\longmapsto xa
\end{aligned}
$$

は A が $K-alg$ より $K-$ 線形写像になる。よってある A の基底によって $\dim_K(A) = n$ のとき行列 $T_x : K^n \longrightarrow K^n$ にできる。

この行列 T_x について x の<u>トレース (trace)</u> $\mathrm{Tr}_{A/K}(x)$ と x の<u>ノルム (norm)</u> $\mathrm{N}_{A/K}(x)$ を

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{A/K}(x) &:= \mathrm{Tr}(T_x) \\
\mathrm{N}_{A/K}(x) &:= \det(T_x)
\end{aligned}
$$

とするとこの値は K の元であるから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{A/K} &: A \longrightarrow K \\
\mathrm{N}_{A/K} &: A \longrightarrow K
\end{aligned}
$$

という写像になっていて $\mathrm{Tr}_{A/K}$ は $K-$ 線形写像、 $\mathrm{N}_{A/K}$ は乗法的 $(\mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\mathrm{N}(y))$ である。とくに、定義域を乗法群 $A^\times$ に制限すれば

$$
\mathrm{N}_{A/K}|_{A^\times} : A^\times \longrightarrow K
$$

は群準同型になる。

例 10.2. $x \in K$ のとき $n := [A : K]$ として、A の基底を $\{e_1, \ldots, e_n\}$ とする。$T_x = (t_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ とおいたとき行列表示は

$$
T_x(e_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} e_i
$$

とできて $T_x(e_j) = xe_j$ で基底の一次独立性から $t_{jj} = x, t_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ となるので

$$
T_x = \begin{pmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{pmatrix}
$$

と書ける。したがって $\mathrm{Tr}_{A/K}(x) = nx, \mathrm{N}_{A/K}(x) = x^n$ となる。