14 Galois cohomology

14.1 群の cohomology

定義 14.1. G : 群、 M : 加法 (Abel) 群で G は M に加群としての作用をしているとする。ここで以下のように G^n から M への写像全体の集合を $C^n (n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ として定める。

$$C^n = C^n(G, M) := \{f : G^n \longrightarrow M\} = \mathrm{Map}(G^n, M)$$

ただし $G^0 = \{e\}$ と考えることで $C^0 := M$ と定める。この C^n の各元を n コチェイン (cochain)という。C^n 上へは $f, g \in C^n$ に対して $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ と演算を定めることで C^n は加法群となる。

定義 14.2. C^n から C^{n+1} への以下のように定まる写像 ∂ を考える。

$$\begin{aligned} \partial = \partial^n : C^n &\longrightarrow C^{n+1} \\ f &\longmapsto \partial f \end{aligned}$$

ここで $\partial f : G^{n+1} \longrightarrow M$ は G が M へ作用していることに注意して

$$\begin{aligned} \partial f(g_1, \ldots, g_{n+1}) = &\, g_1 f(g_2, \ldots, g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1, \ldots, g_n) \end{aligned}$$

と定める。このときこの $\partial (= \partial^n) : C^n(G, M) \longrightarrow C^{n+1}(G, M)$ は加法群の準同型になり、これを n 次のコバウンダリー (双対境界) 作用素 (coboundary operator)とよぶ。

命題 14.3. コバウンダリー作用素 ∂ に対して $\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$ が成り立つ。

Proof. $4 \leq n$ でまず考える。

$(\partial^{n+1} \circ \partial^n)(f)(g_1, \ldots, g_{n+2}) = \partial^{n+1}(\partial^n f)(g_1, \ldots, g_{n+2})$ なので $f' := \partial^n f$ として $\partial^{n+1} f'(g_1, \ldots, g_{n+2})$ は

$$\begin{aligned} \partial^{n+1} f'(g_1, \ldots, g_{n+2}) = &\, g_1 f'(g_2, \ldots, g_{n+2}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f'(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+2}) \\ &+ (-1)^{n+1} f'(g_1, \ldots, g_{n+1}) \end{aligned}$$

である。$f'(g_1, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+2}) = \partial^n f(g_1, \ldots g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+2})$ を i の値によって計算する。

・ $i = 1$ のとき

$$\begin{aligned} \partial^n f(g_1 g_2, \ldots, g_{n+2}) = &\, g_1 g_2 f(g_3, \ldots, g_{n+2}) \\ &+ (-1)^1 f((g_1 g_2) g_3, g_4, \ldots, g_{n+2}) \\ &+ \sum_{k=3}^{n+1} (-1)^{k-1} f(g_1 g_2, g_3, \ldots, g_i g_{i+1}, \ldots, g_{n+2}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(g_1 g_2, g_3, \ldots, g_n) \end{aligned}$$

・ $i=2$ のとき

$$\begin{aligned}\partial^n f(g_1, g_2g_3, g_4, \dots, g_{n+2}) &= g_1 f(g_2g_3, g_4, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^1 f(g_1(g_2g_3), g_4, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^2 f(g_1, (g_2g_3)g_4, g_5, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + \sum_{k=4}^{n+1} (-1)^{k-1} f(g_1, g_2g_3, g_4, \dots, g_ig_{i+1}, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, g_2g_3, g_4, \dots, g_{n+1})\end{aligned}$$

・ $3 \leq i \leq n-1$ のとき

$$\begin{aligned}\partial^n f(g_1, \dots, g_ig_{i+1}, \dots, g_{n+2}) &= g_1 f(g_2, \dots, g_ig_{i+1}, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-2} (-1)^k f(g_1, \dots, g_kg_{k+1}, \dots, g_ig_{i+1}, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^{i-1} f(g_1, \dots, g_{i-2}, g_{i-1}(g_ig_{i+1}), g_{i+2}, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^i f(g_1, \dots, g_{i-1}, (g_ig_{i+1})g_{i+2}, g_{i+3}, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + \sum_{k=i+2}^{n+1} (-1)^{k-1} f(g_1, \dots, g_ig_{i+1}, \dots, g_kg_{k+1}, \dots, g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_ig_{i+1}, \dots, g_{n+1})\end{aligned}$$

・ $i=n$ のとき

$$\begin{aligned}\partial^n f(g_1, \dots, g_ng_{n+1}, g_{n+2}) &= g_1 f(g_2, \dots, g_ng_{n+1}, g_{n+2}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^k f(g_1, \dots, g_kg_{k+1}, \dots, g_ng_{n+1}, g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^{n-1} f(g_1, \dots, g_{n-1}(g_ng_{n+1}), g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}, (g_ng_{n+1})g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_{n-1}, g_ng_{n+1})\end{aligned}$$

・ $i=n+1$ のとき

$$\begin{aligned}\partial^n f(g_1, \dots, g_{n+1}g_{n+2}) &= g_1 f(g_2, \dots, g_{n+1}g_{n+2}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k f(g_1, \dots, g_kg_{k+1}, \dots, g_n, g_{n+1}g_{n+2}) \\ &\quad + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}, g_n(g_{n+1}g_{n+2})) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n)\end{aligned}$$

となる。

また、 $g_1 f'(g_2,\dots,g_{n+2})$ と $(-1)^{n+2} f'(g_1,\dots,g_{n+1})$ は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
g_1 \partial^n f(g_2,\dots,g_{n+2}) &= g_1(g_2 f(g_3,\dots,g_{n+2}) \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i-1} f(g_2,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_{n+2}) \\
&\quad + (-1)^{n+1} f(g_2,\dots,g_{n+1})) \\
(-1)^{n+2} \partial^n f(g_1,\dots,g_{n+1}) &= (-1)^{n+2}(g_1 f(g_2,\dots,g_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} f(g_1,\dots,g_i g_{i+1},\dots,g_{n+1}) \\
&\quad + (-1)^{n+1} f(g_1,\dots,g_n))
\end{aligned}
$$

これを $\partial^{n+1}(\partial^n f)(g_1,\ldots,g_{n+2})$ の式に代入すると

$$
\begin{aligned}
\partial^{n+1}(\partial^n f)(g_1,\ldots,g_{n+2} = \{&g_1g_2f(g_3,\ldots,g_{n+2}) \\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i-1}g_1f(g_2,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^{n+1}g_1f(g_2,\ldots,g_{n+1})\} \\
&+ (-1)^1\{g_1g_2f(g_3,\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^1f((g_1g_2)g_3,g_4,\ldots,g_{n+2}) \\
&+ \sum_{k=3}^{n+1}(-1)^{k-1}f(g_1g_2,g_3,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^{n+1}f(g_1g_2,g_3,\ldots,g_n)\} \\
&+ (-1)^2\{g_1f(g_2g_3,g_4,\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^1f(g_1(g_2g_3),g_4,\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^2f(g_1,(g_2g_3)g_4,g_5,\ldots,g_{n+2}) \\
&+ \sum_{k=4}^{n+1}(-1)^{k-1}f(g_1,g_2g_3,g_4,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^{n+1}f(g_1,g_2g_3,g_4,\ldots,g_{n+1})\} \\
&+ \sum_{i=3}^{n-1}(-1)^i\{g_1f(g_2,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+2}) \\
&+ \sum_{k=1}^{i-2}(-1)^kf(g_1,\ldots,g_kg_{k+1},\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^{i-1}f(g_1,\ldots,g_{i-2},g_{i-1}(g_ig_{i+1}),g_{i+2},\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^if(g_1,\ldots,g_{i-1},(g_ig_{i+1})g_{i+2},g_{i+3},\ldots,g_{n+2}) \\
&+ \sum_{k=i+2}^{n+1}(-1)^{k-1}f(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_kg_{k+1},\ldots,g_{n+2}) \\
&+ (-1)^{n+1}f(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+1})\} \\
&+ \{g_1f(g_2,\ldots,g_ng_{n+1},g_{n+2}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-2}(-1)^kf(g_1,\ldots,g_kg_{k+1},\ldots,g_ng_{n+1},g_{n+2}) \\
&+ (-1)^{n-1}f(g_1,\ldots,g_{n-1}(g_ng_{n+1}),g_{n+2}) \\
&+ (-1)^nf(g_1,\ldots,g_{n-1},(g_ng_{n+1})g_{n+2}) \\
&+ (-1)^{n+1}f(g_1,\ldots,g_{n-1},g_ng_{n+1})\} \\
&+ \{g_1f(g_2,\ldots,g_{n+1}g_{n+2}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^kf(g_1,\ldots,g_kg_{k+1},\ldots,g_n,g_{n+1}g_{n+2}) \\
&+ (-1)^nf(g_1,\ldots,g_{n-1},g_n(g_{n+1}g_{n+2})) \\
&+ (-1)^{n+1}f(g_1,\ldots,g_n)\} \\
&+ \{(-1)^{n+2}(g_1f(g_2,\ldots,g_{n+1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^if(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+1}) \\
&+ (-1)^{n+1}f(g_1,\ldots,g_n))\}
\end{aligned}
$$

$\square$

定義 14.4. 以下のように $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して定める Z^n をn-th コサイクル (双対輪体)といい、B^n をn-th コバウンダリー (境界輪体)という。

$$Z^n = Z^n(G, M) := \ker(\partial^n)$$
$$B^n = B^n(G, M) := \mathrm{Im}(\partial^{n-1})$$

ただし $B^0 := 0$ とする。このとき命題 (14.3) から $\partial^n \circ \partial^{n-1} = 0$ なので $\partial^n(\mathrm{Im}(\partial^{n-1})) = 0$ より $B^n \subset Z^n$ が成り立っている。よって剰余群 Z^n/B^n が定義できて

$$H^n = H^n(G, M) := Z^n(G, M)/B^n(G, M)$$

を G の M 係数のn-th コホモロジー群 (cohomology)という。

例 14.5. $n = 0$ のときのコホモロジー群を考える。$Z^0 = \ker(\partial^0)$ であり、定義から $\partial^0 : C^0(= M) \longrightarrow C^1, x \longmapsto \partial^0 x$ と、$\partial^0 x(g) = gx - x$ なので $Z^0 = \{gx - x = 0 \Leftrightarrow gx = x | x \in M, {}^\forall g \in G\}$ となる。gx は M の元への G の作用でありそれがどんな $g \in G$ でも x になるから M の中で G によって固定されるので $Z^0 = M^G$ である。$B^0 := 0$ だったのでコホモロジー群 H^0 は $H^0 = Z^0/B^0 = M^G$ である。

例 14.6. $n = 1$ のときのコホモロジー群を考える。$Z^1 = \ker(\partial^1)$ で $\partial^1 : C^1 \longrightarrow C^2, f \longmapsto \partial^1 f$ となって $\partial^1 f(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$ となるから $Z^1 = \{f \in C^1 | g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1) = 0 \Leftrightarrow f(g_1 g_2) = g_1 f(g_2) + f(g_1), {}^\forall g_1, g_2 \in G\}$ となる。$B^1 = \mathrm{Im}(\partial^0) = \{\partial^0 x | x \in M, \partial^0 x(g) = gx - x\}$ となっている。いま作用が $G \times M \longrightarrow M, (g, x) \longmapsto gx = x$ として自明なものであるときを考えると $Z^1 = \{f \in C^1 | f(g_1 g_2) = f(g_1) + f(g_2), {}^\forall g_1, g_2 \in G\}$ でこれは G から M への群準同型なので $Z^1 = \mathrm{Hom}_{群}(G, M)$ となる。$B^1 = \{\partial^0 x | x \in M, \partial^0 x(g) = gx - x = x - x = 0\} = 0$ となるから $n = 1$ のときのコホモロジー群 H^1 は $H^1 = \mathrm{Hom}_{群}(G, M)$ となる。