étale 射のゼミ

https://ryo1203.github.io

目次

1 étale 射の定義

定義 1.1. 局所環の間の局所準同型 $f\colon (A,\mathfrak{m}) \to (B,\mathfrak{n})$ について次のように定義する。

(1) f が**不分岐** (unramified) とは次が成り立つこと。
  (a) f は有限表示。
  (b) $f(\mathfrak{m})B = \mathfrak{n}$。
  (c) f から得られる剰余体の間の射 $\kappa(\mathfrak{m}) \to \kappa(\mathfrak{n})$ は (有限次)[*1]分離拡大。

(2) f が étale であるとは f が unramified かつ flat であることである。

定義 1.2. $f\colon A \to B$ を (局所環とは限らない環の間の) 環準同型とする。f が**不分岐** (unramified)(もしくは étale) とは、任意の $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$ に対して、$\mathfrak{p} \coloneqq f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec}(A)$ を取り、そこから得られる局所環の間の局所準同型 $f_{\mathfrak{q}}\colon A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ が定義 1.1 の意味で unramified(もしくは étale) になることである。

定義 1.3. $f\colon X \to Y$ を scheme の間の射とする。f が**不分岐** (unramified)(もしくは étale) とは、任意の $x \in X$ について、局所環の間の局所準同型 $f_x^\flat\colon \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ が定義 1.1 の意味で unramified(もしくは étale) になることである。

他にもいくつかの unramified や étale の種類がある。まずはそれについて定義する。

定義 1.4. 環準同型 $f\colon A \to B$ が weakly unramified であるとは、

$$\mu \coloneqq \mu_{B/A}\colon B \otimes_A B \longrightarrow B \tag{1.1}$$
$$b \otimes b' \longmapsto bb' \tag{1.2}$$

[*1] 有限表示性から零点定理より有限次拡大であることが従う。

が flat になることである。

f が weakly étale であるとは、f が weakly unramified かつ flat であることである。すなわち、$\mu\colon B\otimes_A B\to A$ と $f\colon A\to B$ が両方とも flat になることである。

Kahler 微分加群を使った weakly unramified に関する特徴づけを考える。そのためにまずここでは Kahler 微分を次のように定義する。

定義 1.5. 環準同型 $f\colon A\to B$ の Kahler **微分加群**とは、(1.2) の核で定まる $I\coloneqq \mathrm{Ker}(\mu_{B/A})$ という $B\otimes_A B$ のイデアルによって構成される

$$\Omega_{B/A}\coloneqq I/I^2 \tag{1.3}$$

のことである。

この形の Kahler 微分について次の命題が成り立つ。

命題 1.6 ([MO1]). (有限型とは限らない) 環準同型 $f\colon A\to B$ に対し、B の A 上の (有限個とは限らない) 生成系 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる。すると、$\mu\colon C\coloneqq B\otimes_A B\to B$ の核 $I\coloneqq\mathrm{Ker}(\mu)$ は

$$I=\sum_{\lambda\in\Lambda}C(x_\lambda\otimes 1-1\otimes x_\lambda) \tag{1.4}$$

と表示される。とくに Λ が有限集合のとき、すなわち $f\colon A\to B$ が有限型のときは $I=\ker(\mu)$ は有限生成イデアルになる。

証明. $I'\coloneqq\sum_{\lambda\in\Lambda}C(x_\lambda\otimes 1-1\otimes x_\lambda)$ と定めておく。$I=I'$ を示す。$I'\subset I$ は明らか。まず、B の部分集合 R を

$$R\coloneqq\{b\in B\mid b\otimes 1-1\otimes b\in I'\} \tag{1.5}$$

と定義する。I' の構成から明らかに $x_\lambda\in R$ である。また、R は B の中の部分 A 代数になる。実際、I' が C のイデアルであることに注意すれば、任意の $b,c\in R$ について

$$bc\otimes 1-1\otimes bc=(c\otimes 1)(b\otimes 1-1\otimes b)+c\otimes b+(1\otimes b)(c\otimes 1-1\otimes c)-c\otimes b\in I' \tag{1.6}$$

より R は積について閉じている。和で閉じていることと A の元によるスカラー倍で閉じていることは明らかである。ゆえに R は B の A 上の生成系 $\{x_\lambda\}_\Lambda$ を全て含む B の部分 A 代数だから $R=B$ となる。ここで、任意の $b,c\in B$ についてとくに $c\in B=R$ から $1\otimes c-c\otimes 1\in I'$ ゆえ

$$b\otimes c-bc\otimes 1=(b\otimes 1)(1\otimes c-c\otimes 1)\in I' \tag{1.7}$$

となる。任意の $z=\sum_{j=1}^m b_j\otimes c_j\in C$ について、

$$z-\mu(z)\otimes 1=\sum_{j=1}^m(b_j\otimes c_j-(b_jc_j)\otimes 1)\in I' \tag{1.8}$$

となるから、もし $\mu(z)=0$ なら $z\in I'$ ゆえ $I\subset I'$ なので $I=I'$ となる。 □

補題 1.7. 環 A の有限生成イデアル I について、$I^2 = I$ なら、ある冪等元 $e \in A$ によって $I = (e)$ となる。

証明. I は有限生成だから [AM] Corollary 2.5 より、ある $e' \in A$ で $e'I = 0$ かつ $1 - e' \in I$ となるものが取れる。$e'(1-e') = 0$ から $e'^2 = e'$ である。ここで $e \coloneqq 1 - e' \in I$ とおくとこれも冪等元である。$(1-e)I = e'I = 0$ から $I = eI \subset (e) \subset I$ より $I = (e)$ となる。 □

weakly unramified について次の同値性がある。

命題 1.8. $f\colon A \to B$ を有限型環準同型とする。$\mu\colon B \otimes_A B \to B$ について $I \coloneqq \mathrm{Ker}(\mu)$ とする。このとき以下は同値。

(1) f は weakly unramified である。
(2) $\Omega_{B/A} = 0$ となる。
(3) 冪等元 $e \in B \otimes_A B$ であって、$\mu(e) = 1$ かつ μ によって得られる射

$$
\begin{aligned}
(B \otimes_A B)_e &\longrightarrow B && (1.9)\\
(b \otimes b')/e^k &\longmapsto bb' && (1.10)
\end{aligned}
$$

を同型にするものが存在する。
(4) 冪等元 $e \in B \otimes_A B$ であって、$\mu(e) = 1$ かつ $eI = 0$ となるものが存在する。

ただし、f が有限型であることは (2) $\Longrightarrow$ (3) にのみ使う。

証明. 次のようにして示す。

$$
\begin{tikzcd}
 & (2) \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{ft}"] & \\
(1) \arrow[ur, Rightarrow] & (3) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (4) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) μ が同型 $(B \otimes_A B)_e \to B$ を誘導しているから、とくに $\mu\colon B \otimes_A B \to B$ は $\mu\colon B \otimes_A B \to (B \otimes_A B)_e$ という局所化の射になっているから flat である。よって f は weakly unramified である。

(1) $\Longrightarrow$ (2) 補題 1.9 を μ に適用すると $I = I^2$ より $\Omega_{B/A} = 0$ である。

(3) $\Longrightarrow$ (4) 仮定からとれる冪等元 e について $\mu(e) = 1$ である。ここで任意の $x \in I = \mathrm{Ker}(\mu)$ を取ると $\mu(x/1) = 0$ より同型であることから $x/1 = 0 \in (B \otimes_A B)_e$ から、局所化の定義より $xe = 0$ となる。したがって $eI = 0$ である。

(4) $\Longrightarrow$ (2) 仮定から冪等元 $e \in B \otimes_A B$ であって、$\mu(e) = 1$ かつ $eI = 0$ となるものが取れる。$\mu(1-e) = 1 - \mu(e) = 0$ ゆえ $1 - e \in I$ である。したがって $(1-e)I = I - eI = I$ より $I \subset (1-e)I \subset I^2 \subset I$ から、$I = I^2$ より $\Omega_{B/A} = 0$ となる。

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\Omega_{B/A} = 0$ より $I = I^2$ ゆえ、命題 1.6 補題 1.7 から、ある冪等元 $e' \in B \otimes_A B$ が存在して $I = (e')$ となる。

$$B \otimes_A B \longrightarrow (B \otimes_A B)e' \times (B \otimes_A B)e \tag{1.11}$$
$$\beta \longmapsto (\beta e', \beta e) \tag{1.12}$$

という同型が得られる。(1.12) の同型で $I = (e') \subset B \otimes_A B$ を移すと、$e'^2 = e'$ と $ee' = 0$ より $(B \otimes_A B)e' \subset (B \otimes_A B)e' \times (B \otimes_A B)e$ になる。すると

$$(B \otimes_A B)/(e') = (B \otimes_A B)/I \cong ((B \otimes_A B)e' \times (B \otimes_A B)e)/(B \otimes_A B)e' \cong (B \otimes_A B)e \tag{1.13}$$

が得られる。また、(1.12) の同型で $(B \otimes_A B)_e$ を考える。e が $(0, e)$ に移るから $e/e = e^2/e = e/1 \in ((B \otimes_A B)e)_e$ に注意すると

$$(B \otimes_A B)_e \cong ((B \otimes_A B)e' \times (B \otimes_A B)e)_{(0,e)} \cong (B \otimes_A B)e \tag{1.14}$$

という同型が得られる。したがって (1.12) による同型と $\mu\colon B \otimes_A B \to B$ に対して $\mathrm{Ker}(\mu) = I$ だから μ から

$$(B \otimes_A B)_e \cong (B \otimes_A B)e \cong (B \otimes_A B)/I \cong B \tag{1.15}$$

という同型が求める形になっている。さらに e は冪等元で $e' \in I = \mathrm{Ker}(\mu)$ から、$\mu(e) = \mu(1 - e') = 1$ となるので、この e を取れば良い。 □

補題 1.9. 全射環準同型 $f\colon A \to B$ について $J := \mathrm{Ker}(f)$ とする。f が flat のとき、$J = J^2$ となる。

証明. 短完全列 $0 \to J \to A \to B \to 0$ について、$A \to B$ が flat であるから、テンソルすると、短完全列 $0 \to J \otimes_A B \to B \to B \otimes_A B \to 0$ が取れる。ここで全射性から $B = A/J$ ゆえ $J \otimes_A B = J/J^2$ である。一方、$B \to B \otimes_A B \cong A/J \otimes_A A/J \cong (A/J)/J(A/J) = A/J = B$ より同型になるから $J/J^2 = 0$ となるので $J = J^2$ となる。 □

次に、unramified の定義の極大イデアルに関する条件を他の形に書き換える。とくにファイバーについての性質と考えることができる。命題 1.10 のように unramified は各点のファイバーが有限次分離拡大体の有限直積になるという著しい性質を持っている。幾何学的には、ファイバーが有限個の点の disjoint になっていることを表している。環準同型 $f\colon A \to B$ と素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して、$f^\flat\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ が考えられる。$\mathfrak{p}$ のファイバー $(f^\flat)^{-1}(\mathfrak{p})$ は集合として $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ と一致していることに注意する。

命題 1.10. $f\colon A \to B$ を有限表示な環準同型とする。以下は同値。

(1) f は unramified である。
(2) 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ は $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体の有限個の直積と同型になる。
(3) 任意の素イデアル $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ に対して以下が成り立つ。
  (a) $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ は有限集合になる。
  (b) $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ は被約である。
  (c) 任意の $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ について定まる体拡大 $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$ は (有限次) 分離拡大。

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ とそのファイバーの元 $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ を取る。とくに $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ となっているから、$f\colon A \to B$ は unramified より $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ は unramified になる。ゆえに $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{q})$ は有限次分離拡大になる。極大イデアルに関しては $\mathfrak{p}B_\mathfrak{q} = \mathfrak{q} \subset B_\mathfrak{q}$ となる。ここで、$B_\mathfrak{p}$ の定義から、局所化を計算すると

$$(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})_\mathfrak{q} = B_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{q} = B_\mathfrak{q}/\mathfrak{q}B_\mathfrak{q} = \kappa(\mathfrak{q}) \tag{1.16}$$

である。したがって $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ の任意の局所化は $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体になる。とくに $\dim(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) = 0$ となる。また、そもそも $f\colon A \to B$ が有限表示より、とくに B が A 上有限型であるので、局所化と剰余をとった $\kappa(\mathfrak{p}) \to B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ は有限型なので $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ は Noether 環になる。以上より $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ は Artin 環になる。よって $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_n\}$ と有限集合になる。すると Artin 環の構造定理と上で示した同型 (1.16) より

$$B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \cong \prod_{i=1}^{n} (B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})_{\mathfrak{q}_i} = \prod_{i=1}^{n} \kappa(\mathfrak{q}_i) \tag{1.17}$$

となり、それぞれの $\kappa(\mathfrak{q}_i)$ は上で述べたとおり $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体なので示された。

(2) $\Longrightarrow$ (3) 各 $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ について $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体 $L_1, \dots, L_n$ によって $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \cong L_1 \times \cdots \times L_n$ となっているのでとくに被約。$B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ の素イデアルによる局所化は L_1 のどれかに同型である。$\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) = \coprod_{i=1}^{n} \mathrm{Spec}(L_i)$ より有限集合になっているから全ての条件を満たす。

(3) $\Longrightarrow$ (1) 有限表示であることはすでに仮定されている。unramified の定義における剰余体の間の射が有限次分離拡大であることは (c) そのものである。ゆえに $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ について $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ による極大イデアルの拡大についての条件 $\mathfrak{p}B_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ を示せば良い。まず $f\colon A \to B$ の有限表示性から $\kappa(\mathfrak{p}) \to B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ は有限型であるからとくに Noether かつ Jacobson である。すると $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ で極大イデアルからなる部分集合 $\mathrm{Spm}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ は稠密になる。[*2]条件 (a) から、極大イデアルの集合も有限集合なので $\mathrm{Spm}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ は $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ における閉集合になる。閉集合かつ稠密なので $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) = \mathrm{Spm}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ より、$\dim(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}) = 0$ となる。Noether 環でもあったから $B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ は Artin 環になる。すると、$\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ について局所化を取ると

$$(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})_\mathfrak{q} \cong B_\mathfrak{q}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{q} \tag{1.18}$$

は Artin 局所環になる。条件 (b) からこの局所化も被約である。Artin 局所被約環は体なので $\mathfrak{p}B_\mathfrak{q}$ は $B_\mathfrak{q}$ の極大イデアルになるので $\mathfrak{p}B_\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ となる。以上より $f\colon A \to B$ は unramified である。 □

参考文献

[AM] M. F. Atiyah and G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1994.

[MO1] "ag.algebraic geometry - commutative algebra, diagonal morphism," MathOverflow. https://mathoverflow.net/questions/176636/commutative-algebra-diagonal-morphism (accessed Dec. 12, 2021).

[*2] とくに非常に稠密になることまで言えるが今はそこまで使わない。