étale 射のゼミ

https://ryo1203.github.io

目次

1 étale 射の定義

定義 1.1. 局所環の間の局所準同型 $f\colon (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ について次のように定義する。

(1) f が**不分岐** (unramified) とは次が成り立つこと。
 (a) f は有限表示。
 (b) $f(\mathfrak{m})B = \mathfrak{n}$。
 (c) f から得られる剰余体の間の射 $\kappa(\mathfrak{m}) \to \kappa(\mathfrak{n})$ は (有限次)[*1]分離拡大。

(2) f が étale であるとは f が unramified かつ flat であることである。

定義 1.2. $f\colon A \to B$ を (局所環とは限らない環の間の) 環準同型とする。f が**不分岐** (unramified)(もしくは étale) とは、任意の $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ に対して、$\mathfrak{p} \coloneqq f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A)$ を取り、そこから得られる局所環の間の局所準同型 $f_{\mathfrak{q}}\colon A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ が定義 1.1 の意味で unramified(もしくは étale) になることである。

定義 1.3. $f\colon X \to Y$ を scheme の間の射とする。f が**不分岐** (unramified)(もしくは étale) とは、任意の $x \in X$ について、局所環の間の局所準同型 $f_x^\flat\colon \mathscr{O}_{Y,f(x)} \to \mathscr{O}_{X,x}$ が定義 1.1 の意味で unramified(もしくは étale) になることである。

他にもいくつかの unramified や étale の種類がある。まずはそれについて定義する。

定義 1.4. 環準同型 $f\colon A \to B$ が weakly unramified であるとは、

$$\mu \coloneqq \mu_{B/A}\colon B \otimes_A B \longrightarrow B \tag{1.1}$$
$$b \otimes b' \longmapsto bb' \tag{1.2}$$

[*1] 有限表示性から零点定理より有限次拡大であることが従う。

が flat になることである。

f が weakly étale であるとは、f が weakly unramified かつ flat であることである。すなわち、$\mu\colon B\otimes_A B \to A$ と $f\colon A\to B$ が両方とも flat になることである。

Kahler 微分加群を使った weakly unramified に関する特徴づけを考える。そのためにまずここでは Kahler 微分を次のように定義する。

定義 1.5. 環準同型 $f\colon A\to B$ の Kahler **微分加群**とは、(1.2) の核で定まる $I := \mathrm{Ker}(\mu_{B/A})$ という $B\otimes_A B$ のイデアルによって構成される

$$\Omega_{B/A} := I/I^2 \tag{1.3}$$

のことである。

この形の Kahler 微分について次の命題が成り立つ。

命題 1.6 ([MO1]). (有限型とは限らない) 環準同型 $f\colon A\to B$ に対し、B の A 上の (有限個とは限らない) 生成系 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる。すると、$\mu\colon C := B\otimes_A B\to B$ の核 $I := \mathrm{Ker}(\mu)$ は

$$I = \sum_{\lambda\in\Lambda} C(x_\lambda\otimes 1 - 1\otimes x_\lambda) \tag{1.4}$$

と表示される。とくに Λ が有限集合のとき、すなわち $f\colon A\to B$ が有限型のときは $I=\ker(\mu)$ は有限生成イデアルになる。

証明. $I' := \sum_{\lambda\in\Lambda} C(x_\lambda\otimes 1 - 1\otimes x_\lambda)$ と定めておく。$I=I'$ を示す。$I'\subset I$ は明らか。まず、B の部分集合 R を

$$R := \{b\in B \mid b\otimes 1 - 1\otimes b\in I'\} \tag{1.5}$$

と定義する。I' の構成から明らかに $x_\lambda\in R$ である。また、R は B の中の部分 A 代数になる。実際、I' が C のイデアルであることに注意すれば、任意の $b,c\in R$ について

$$bc\otimes 1 - 1\otimes bc = (c\otimes 1)(b\otimes 1 - 1\otimes b) + c\otimes b + (1\otimes b)(c\otimes 1 - 1\otimes c) - c\otimes b \in I' \tag{1.6}$$

より R は積について閉じている。和で閉じていることと A の元によるスカラー倍で閉じていることは明らかである。ゆえに R は B の A 上の生成系 $\{x_\lambda\}_\Lambda$ を全て含む B の部分 A 代数だから $R=B$ となる。ここで、任意の $b,c\in B$ についてとくに $c\in B=R$ から $1\otimes c - c\otimes 1\in I'$ ゆえ

$$b\otimes c - bc\otimes 1 = (b\otimes 1)(1\otimes c - c\otimes 1)\in I' \tag{1.7}$$

となる。任意の $z=\sum_{j=1}^m b_j\otimes c_j\in C$ について、

$$z-\mu(z)\otimes 1 = \sum_{j=1}^m (b_j\otimes c_j - (b_jc_j)\otimes 1)\in I' \tag{1.8}$$

となるから、もし $\mu(z)=0$ なら $z\in I'$ ゆえ $I\subset I'$ なので $I=I'$ となる。 □

補題 1.7. 環 A の有限生成イデアル I について、$I^2 = I$ なら、ある冪等元 $e \in A$ によって $I = (e)$ となる。

証明. I は有限生成だから [AM] Corollary 2.5 より、ある $e' \in A$ で $e'I = 0$ かつ $1 - e' \in I$ となるものが取れる。$e'(1 - e') = 0$ から $e'^2 = e'$ である。ここで $e \coloneqq 1 - e' \in I$ とおくとこれも冪等元である。$(1 - e)I = e'I = 0$ から $I = eI \subset (e) \subset I$ より $I = (e)$ となる。 □

weakly unramified について次の同値性がある。

命題 1.8. $f\colon A \to B$ を有限型環準同型とする。$\mu\colon B \otimes_A B \to B$ について $I \coloneqq \mathrm{Ker}(\mu)$ とする。このとき以下は同値。

(1) $\Omega_{B/A} = 0$ となる。

(2) 冪等元 $e \in B \otimes_A B$ であって、$\mu(e) = 1$ かつ μ によって得られる射

$$(B \otimes_A B)_e \longrightarrow B \tag{1.9}$$

$$(b \otimes b')/e^k \longmapsto bb' \tag{1.10}$$

を同型にするものが存在する。

(3) 冪等元 $e \in B \otimes_A B$ であって、$\mu(e) = 1$ かつ $eI = 0$ となるものが存在する。

(4) f は weakly unramified である。

ただし、f が有限型であることは (1) $\Longrightarrow$ (2) にのみ使う。

証明. 次のようにして示す。

$$\begin{tikzcd}
& (1) \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{ft}"] & \\
(4) \arrow[ur, Rightarrow] & (2) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

(2) $\Longrightarrow$ (4)　μ が同型 $(B \otimes_A B)_e \to B$ を誘導しているから、とくに $\mu\colon B \otimes_A B \to B$ は $\mu\colon B \otimes_A B \to (B \otimes_A B)_e$ という局所化の射になっているから flat である。よって f は weakly unramified である。

(4) $\Longrightarrow$ (1)　補題 1.9 を μ に適用すると $I = I^2$ より $\Omega_{B/A} = 0$ である。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　仮定からとれる冪等元 e について $\mu(e) = 1$ である。ここで任意の $x \in I = \mathrm{Ker}(\mu)$ を取ると $\mu(x/1) = 0$ より同型であることから $x/1 = 0 \in (B \otimes_A B)_e$ から、局所化の定義より $xe = 0$ となる。したがって $eI = 0$ である。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　仮定から冪等元 $e \in B \otimes_A B$ であって、$\mu(e) = 1$ かつ $eI = 0$ となるものが取れる。$\mu(1 - e) = 1 - \mu(e) = 0$ ゆえ $1 - e \in I$ である。したがって $(1 - e)I = I - eI = I$ より $I \subset (1 - e)I \subset I^2 \subset I$ から、$I = I^2$ より $\Omega_{B/A} = 0$ となる。

(1) $\Longrightarrow$ (2)　$\Omega_{B/A} = 0$ より $I = I^2$ ゆえ、命題 1.6 補題 1.7 から、ある冪等元 $e' \in B \otimes_A B$ が存在して $I = (e')$ となる。

$$B \otimes_A B \longrightarrow (B \otimes_A B)e' \times (B \otimes_A B)e \tag{1.11}$$
$$\beta \longmapsto (\beta e', \beta e) \tag{1.12}$$

という同型が得られる。(1.12) の同型で $I = (e') \subset B \otimes_A B$ を移すと、$e'^2 = e'$ と $ee' = 0$ より $(B \otimes_A B)e' \subset (B \otimes_A B)e' \times (B \otimes_A B)e$ になる。すると

$$(B \otimes_A B)/(e') = (B \otimes_A B)/I \cong ((B \otimes_A B)e' \times (B \otimes_A B)e)/(B \otimes_A B)e' \cong (B \otimes_A B)e \tag{1.13}$$

が得られる。また、(1.12) の同型で $(B \otimes_A B)_e$ を考える。e が $(0, e)$ に移るから $e/e = e^2/e = e/1 \in ((B \otimes_A B)e)_e$ に注意すると

$$(B \otimes_A B)_e \cong ((B \otimes_A B)e' \times (B \otimes_A B)e)_{(0,e)} \cong (B \otimes_A B)e \tag{1.14}$$

という同型が得られる。したがって (1.12) による同型と $\mu\colon B \otimes_A B \to B$ に対して $\mathrm{Ker}(\mu) = I$ だから μ から

$$(B \otimes_A B)_e \cong (B \otimes_A B)e \cong (B \otimes_A B)/I \cong B \tag{1.15}$$

という同型が求める形になっている。さらに e は冪等元で $e' \in I = \mathrm{Ker}(\mu)$ から、$\mu(e) = \mu(1 - e') = 1$ となるので、この e を取れば良い。 □

> **補題 1.9.** 全射環準同型 $f\colon A \to B$ について $J := \mathrm{Ker}(f)$ とする。f が flat のとき、$J = J^2$ となる。

証明. 短完全列 $0 \to J \to A \to B \to 0$ について、$A \to B$ が flat であるから、テンソルすると、短完全列 $0 \to J \otimes_A B \to B \to B \otimes_A B \to 0$ が取れる。ここで全射性から $B = A/J$ ゆえ $J \otimes_A B = J/J^2$ である。一方、$B \to B \otimes_A B \cong A/J \otimes_A A/J \cong (A/J)/J(A/J) = A/J = B$ より同型になるから $J/J^2 = 0$ となるので $J = J^2$ となる。 □

参考文献

[AM] M. F. Atiyah and G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1994.

[MO1] "ag.algebraic geometry - commutative algebra, diagonal morphism," MathOverflow. https://mathoverflow.net/questions/176636/commutative-algebra-diagonal-morphism (accessed Dec. 12, 2021).