étale 射のゼミ

https://ryo1203.github.io

目次

1 étale 射の定義

定義 1.0.1. 局所環の間の局所準同型 $f\colon (A,\mathfrak{m}) \to (B,\mathfrak{n})$ について次のように定義する。

(1) f が**不分岐** (unramified) とは次が成り立つこと。
  (a) f は有限表示。
  (b) $f(\mathfrak{m})B = \mathfrak{n}$。
  (c) f から得られる剰余体の間の射 $\kappa(\mathfrak{m}) \to \kappa(\mathfrak{n})$ は (有限次)[*1]分離拡大。

(2) f が étale であるとは f が unramified かつ flat であることである。

定義 1.0.2. $f\colon A \to B$ を (局所環とは限らない環の間の) 環準同型とする。f が**不分岐** (unramified)(もしくは étale) とは、任意の $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ に対して、$\mathfrak{p} := f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A)$ を取り、そこから得られる局所環の間の局所準同型 $f_{\mathfrak{q}}\colon A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ が定義 1.0.1 の意味で unramified(もしくは étale) になることである。

[*1] 有限表示性から零点定理より有限次拡大であることが従う。

定義 1.0.3. $f\colon X\to Y$ を scheme の間の射とする。f が**不分岐** (unramified)(もしくは étale) とは、任意の $x\in X$ について、局所環の間の局所準同型 $f_x^\flat\colon \mathscr{O}_{Y,f(x)}\to\mathscr{O}_{X,x}$ が定義 1.0.1 の意味で unramified(もしくは étale) になることである。

他にもいくつかの unramified や étale の種類がある。まずはそれについて定義する。

定義 1.0.4. 環準同型 $f\colon A\to B$ が weakly unramified であるとは、

$$\mu\coloneqq\mu_{B/A}\colon B\otimes_A B\longrightarrow B \tag{1.1}$$
$$b\otimes b'\longmapsto bb' \tag{1.2}$$

が flat になることである。

f が weakly étale であるとは、f が weakly unramified かつ flat であることである。すなわち、$\mu\colon B\otimes_A B\to A$ と $f\colon A\to B$ が両方とも flat になることである。

Kahler 微分加群を使った weakly unramified に関する特徴づけを考える。そのためにまずここでは Kahler 微分を次のように定義する。

定義 1.0.5. 環準同型 $f\colon A\to B$ の**微分加群**とは、(1.2) の核で定まる $I\coloneqq\mathrm{Ker}(\mu_{B/A})$ という $B\otimes_A B$ のイデアルによって構成される

$$\Omega_{B/A}\coloneqq I/I^2 \tag{1.3}$$

のことである。

この形の Kahler 微分について次の命題が成り立つ。

命題 1.0.6 ([MO1]). (有限型とは限らない) 環準同型 $f\colon A\to B$ に対し、B の A 上の (有限個とは限らない) 生成系 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる。すると、$\mu\colon C\coloneqq B\otimes_A B\to B$ の核 $I\coloneqq\mathrm{Ker}(\mu)$ は

$$I=\sum_{\lambda\in\Lambda}C(x_\lambda\otimes 1-1\otimes x_\lambda) \tag{1.4}$$

と表示される。とくに Λ が有限集合のとき、すなわち $f\colon A\to B$ が有限型のときは $I=\ker(\mu)$ は有限生成イデアルになる。

証明. $I'\coloneqq\sum_{\lambda\in\Lambda}C(x_\lambda\otimes 1-1\otimes x_\lambda)$ と定めておく。$I=I'$ を示す。$I'\subset I$ は明らか。まず、B の部分集合 R を

$$R\coloneqq\{b\in B\mid b\otimes 1-1\otimes b\in I'\} \tag{1.5}$$

と定義する。I' の構成から明らかに $x_\lambda\in R$ である。また、R は B の中の部分 A 代数になる。実際、I' が C

のイデアルであることに注意すれば、任意の $b,c\in R$ について

$$bc\otimes 1-1\otimes bc=(c\otimes 1)(b\otimes 1-1\otimes b)+c\otimes b+(1\otimes b)(c\otimes 1-1\otimes c)-c\otimes b\in I' \tag{1.6}$$

より R は積について閉じている。和で閉じていることと A の元によるスカラー倍で閉じていることは明らかである。ゆえに R は B の A 上の生成系 $\{x_\lambda\}_\Lambda$ を全て含む B の部分 A 代数だから $R=B$ となる。ここで、任意の $b,c\in B$ についてとくに $c\in B=R$ から $1\otimes c-c\otimes 1\in I'$ ゆえ

$$b\otimes c-bc\otimes 1=(b\otimes 1)(1\otimes c-c\otimes 1)\in I' \tag{1.7}$$

となる。任意の $z=\sum_{j=1}^m b_j\otimes c_j\in C$ について、

$$z-\mu(z)\otimes 1=\sum_{j=1}^m (b_j\otimes c_j-(b_jc_j)\otimes 1)\in I' \tag{1.8}$$

となるから、もし $\mu(z)=0$ なら $z\in I'$ ゆえ $I\subset I'$ なので $I=I'$ となる。 □

補題 1.0.7. 環 A の有限生成イデアル I について、$I^2=I$ なら、ある冪等元 $e\in A$ によって $I=(e)$ となる。

証明. I は有限生成だから [AM] Corollary 2.5 より、ある $e'\in A$ で $e'I=0$ かつ $1-e'\in I$ となるものが取れる。$e'(1-e')=0$ から $e'^2=e'$ である。ここで $e\coloneqq 1-e'\in I$ とおくとこれも冪等元である。$(1-e)I=e'I=0$ から $I=eI\subset(e)\subset I$ より $I=(e)$ となる。 □

weakly unramified について次の同値性がある。

命題 1.0.8. $f\colon A\to B$ を有限型環準同型とする。$\mu\colon B\otimes_A B\to B$ について $I\coloneqq\mathrm{Ker}(\mu)$ とする。このとき以下は同値。

(1) f は weakly unramified である。
(2) $\Omega_{B/A}=0$ となる。
(3) 冪等元 $e\in B\otimes_A B$ であって、$\mu(e)=1$ かつ μ によって得られる射

$$(B\otimes_A B)_e\longrightarrow B \tag{1.9}$$
$$(b\otimes b')/e^k\longmapsto bb' \tag{1.10}$$

を同型にするものが存在する。
(4) 冪等元 $e\in B\otimes_A B$ であって、$\mu(e)=1$ かつ $eI=0$ となるものが存在する。

ただし、f が有限型であることは (2) $\Longrightarrow$ (3) にのみ使う。

証明. 次のようにして示す。

$$\begin{tikzcd} & (2) \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{ft}"] & \\ (1) \arrow[ur, Rightarrow] & (3) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (4) \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

(3) $\Longrightarrow$ (1)　μ が同型 $(B\otimes_A B)_e \to B$ を誘導しているから、とくに $\mu\colon B\otimes_A B\to B$ は $\mu\colon B\otimes_A B\to (B\otimes_A B)_e$ という局所化の射になっているから flat である。よって f は weakly unramified である。

(1) $\Longrightarrow$ (2)　補題 1.0.9 を μ に適用すると $I=I^2$ より $\Omega_{B/A}=0$ である。

(3) $\Longrightarrow$ (4)　仮定からとれる冪等元 e について $\mu(e)=1$ である。ここで任意の $x\in I=\mathrm{Ker}(\mu)$ を取ると $\mu(x/1)=0$ より同型であることから $x/1=0\in(B\otimes_A B)_e$ から、局所化の定義より $xe=0$ となる。したがって $eI=0$ である。

(4) $\Longrightarrow$ (2)　仮定から冪等元 $e\in B\otimes_A B$ であって、$\mu(e)=1$ かつ $eI=0$ となるものが取れる。$\mu(1-e)=1-\mu(e)=0$ ゆえ $1-e\in I$ である。したがって $(1-e)I=I-eI=I$ より $I\subset(1-e)I\subset I^2\subset I$ から、$I=I^2$ より $\Omega_{B/A}=0$ となる。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　$\Omega_{B/A}=0$ より $I=I^2$ ゆえ、命題 1.0.6 補題 1.0.7 から、ある冪等元 $e'\in B\otimes_A B$ が存在して $I=(e')$ となる。

$$B\otimes_A B\longrightarrow(B\otimes_A B)e'\times(B\otimes_A B)e \tag{1.11}$$
$$\beta\longmapsto(\beta e',\beta e) \tag{1.12}$$

という同型が得られる。(1.12) の同型で $I=(e')\subset B\otimes_A B$ を移すと、$e'^2=e'$ と $ee'=0$ より $(B\otimes_A B)e'\subset(B\otimes_A B)e'\times(B\otimes_A B)e$ になる。すると

$$(B\otimes_A B)/(e')=(B\otimes_A B)/I\cong((B\otimes_A B)e'\times(B\otimes_A B)e)/(B\otimes_A B)e'\cong(B\otimes_A B)e \tag{1.13}$$

が得られる。また、(1.12) の同型で $(B\otimes_A B)_e$ を考える。e が $(0,e)$ に移るから $e/e=e^2/e=e/1\in((B\otimes_A B)e)_e$ に注意すると

$$(B\otimes_A B)_e\cong((B\otimes_A B)e'\times(B\otimes_A B)e)_{(0,e)}\cong(B\otimes_A B)e \tag{1.14}$$

という同型が得られる。したがって (1.12) による同型と $\mu\colon B\otimes_A B\to B$ に対して $\mathrm{Ker}(\mu)=I$ だから μ から

$$(B\otimes_A B)_e\cong(B\otimes_A B)e\cong(B\otimes_A B)/I\cong B \tag{1.15}$$

という同型が求める形になっている。さらに e は冪等元で $e'\in I=\mathrm{Ker}(\mu)$ から、$\mu(e)=\mu(1-e')=1$ となるので、この e を取れば良い。 □

補題 1.0.9. 全射環準同型 $f\colon A\to B$ について $J:=\mathrm{Ker}(f)$ とする。f が flat のとき、$J=J^2$ となる。

証明. 短完全列 $0\to J\to A\to B\to 0$ について、$A\to B$ が flat であるから、テンソルすると、短完全列 $0\to J\otimes_A B\to B\to B\otimes_A B\to 0$ が取れる。ここで全射性から $B=A/J$ ゆえ $J\otimes_A B=J/J^2$ である。一方、$B\to B\otimes_A B\cong A/J\otimes_A A/J\cong(A/J)/J(A/J)=A/J=B$ より同型になるから $J/J^2=0$ となるので $J=J^2$ となる。 □

次に、unramified の定義の極大イデアルに関する条件を他の形に書き換える。とくにファイバーについての性質と考えることができる。命題 1.0.10 のように unramified は各点のファイバーが有限次分離拡大体の有限直積になるという著しい性質を持っている。幾何学的には、ファイバーが有限個の点の disjoint になっていることを表している。環準同型 $f\colon A\to B$ と素イデアル $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)$ に対して、$f^\flat\colon\mathrm{Spec}(B)\to\mathrm{Spec}(A)$ が考えられる。$\mathfrak{p}$ のファイバー $(f^\flat)^{-1}(\mathfrak{p})$ は集合として $\mathrm{Spec}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$ と一致していることに注意する。

命題 1.0.10. $f\colon A\to B$ を有限表示な環準同型とする。以下は同値。

(1) f は unramified である。

(2) 任意の素イデアル $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$ に対して $\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ は $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体の有限個の直積と同型になる。

(3) 任意の素イデアル $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$ に対して以下が成り立つ。
   (a) $\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ は有限集合になる。
   (b) $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ は被約である。
   (c) 任意の $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ について定まる体拡大 $\kappa(\mathfrak{p})\to\kappa(\mathfrak{q})$ は (有限次) 分離拡大。

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2)　任意の $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(A)$ とそのファイバーの元 $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ を取る。とくに $\mathfrak{p}=f^{-1}(\mathfrak{q})$ となっているから、$f\colon A\to B$ は unramified より $A_{\mathfrak{p}}\to B_{\mathfrak{q}}$ は unramified になる。ゆえに $\kappa(\mathfrak{p})\to\kappa(\mathfrak{q})$ は有限次分離拡大になる。極大イデアルに関しては $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}=\mathfrak{q}\subset B_{\mathfrak{q}}$ となる。ここで、$B_{\mathfrak{p}}$ の定義から、局所化を計算すると

$$(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}}=B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}=B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}=\kappa(\mathfrak{q}) \tag{1.16}$$

である。したがって $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ の任意の局所化は $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体になる。とくに $\dim(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})=0$ となる。また、そもそも $f\colon A\to B$ が有限表示より、とくに B が A 上有限型であるので、局所化と剰余をとった $\kappa(\mathfrak{p})\to B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ は有限型なので $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ は Noether 環になる。以上より $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ は Artin 環になる。よって $\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})=\{\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_n\}$ と有限集合になる。すると Artin 環の構造定理と上で示した同型 (1.16) より

$$B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}\cong\prod_{i=1}^{n}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}_i}=\prod_{i=1}^{n}\kappa(\mathfrak{q}_i) \tag{1.17}$$

となり、それぞれの $\kappa(\mathfrak{q}_i)$ は上で述べたとおり $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体なので示された。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　各 $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ について $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体 $L_1,\ldots,L_n$ によって $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}\cong L_1\times\cdots\times L_n$ となっているのでとくに被約。$B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ の素イデアルによる局所化は L_1 のどれかに同型である。$\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})=\coprod_{i=1}^{n}\operatorname{Spec}(L_i)$ より有限集合になっているから全ての条件を満たす。

(3) $\Longrightarrow$ (1)　有限表示であることはすでに仮定されている。unramified の定義における剰余体の間の射が有限次分離拡大であることは (c) そのものである。ゆえに $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ について $A_{\mathfrak{p}}\to B_{\mathfrak{q}}$ による極大イデアルの拡大についての条件 $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}=\mathfrak{q}$ を示せば良い。まず $f\colon A\to B$ の有限表示性から $\kappa(\mathfrak{p})\to B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ は有限型であるからとくに Noether かつ Jacobson である。すると $\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ で極大イデアルからなる部分集合 $\operatorname{Spm}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ は稠密になる。[*2]条件 (a) から、極大イデアルの集合も有限集合なので $\operatorname{Spm}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ は $\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ における閉集合になる。閉集合かつ稠密なので $\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})=\operatorname{Spm}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ より、$\dim(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})=0$ となる。Noether 環でもあったから $B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ は Artin 環になる。すると、$\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ について局所化を取ると

$$(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}}\cong B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}} \tag{1.18}$$

は Artin 局所環になる。条件 (b) からこの局所化も被約である。Artin 局所被約環は体なので $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ は $B_{\mathfrak{q}}$ の極大イデアルになるので $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}=\mathfrak{q}$ となる。以上より $f\colon A\to B$ は unramified である。 □

[*2] とくに非常に稠密になることまで言えるが今はそこまで使わない。

平坦性の判定に例えば次を用いることが出来る。

> **定理 1.0.11 ([Mat] Theorem 23.1).** $f\colon (A,\mathfrak{m}) \to (B,\mathfrak{n})$ を局所準同型とする。このとき A と B が regular であって、ファイバー環 $F := B/\mathfrak{m}B$ が体であれば、f は flat になる。

étale 射のうち次の特殊な場合を考える。とくに étale 射は局所的にこの standard étale になり (事実 3.2.2)、また、étale 位相に関する stalk が strict henselian ring になることの証明でも用いる。

> **定義 1.0.12.** 環 A について A 代数 $R \to S$ が standard étale であるとは、多項式 $f,g \in A[t]$ で f が monic であって、$A[t]_g$ は零環にならず、f の微分が $f' \in (A[t]_g)^\times$ となるものによって $A \to (A[t]/(f))_g$ と同型になることである。

> **命題 1.0.13.** standard étale な A 代数 S は A 上 étale になる。

証明. 定義 1.0.12 の定義から取れる $f,g \in A[t]$ を取り、$S = (A[t]/(f))_g$ としてよい。$S \cong A[t,u]/(f, gu-1)$ ゆえ、$R \to S$ は有限表示である。

flat になることを示す。　$n := \deg(f)$ とすると、$A[t]/(f) = A \oplus At \oplus \cdots \oplus At^{n-1}$ として A 上の自由加群になる。したがって局所化は flat になることも合わせて

$$A \to A[t]/(f) \to (A[t]/(f))_g = S \tag{1.19}$$

は flat になる。

unramified になることを示す。　命題 1.0.10 より、任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ について、そのファイバー環 $S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$ が $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体の有限個の直積と同型になることを示す。まず、

$$S_\mathfrak{p} = ((A[t]/(f))_g)_\mathfrak{p} \cong (A_\mathfrak{p}[t]/(f))_g \tag{1.20}$$

から、$f,g \in A[t]$ の $\kappa(\mathfrak{p})[t]$ への像を $\overline{f}, \overline{g}$ と表すと、

$$S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p} \cong ((A_\mathfrak{p}[t]/(f))/\mathfrak{p}(A_\mathfrak{p}[t]/(f)))_g \cong (\kappa(\mathfrak{p})[t]/(\overline{f}))_{\overline{g}} \tag{1.21}$$

となる。$\kappa(\mathfrak{p})[t]$ は体上の多項式環なので UFD だから、$\overline{f} = f_1^{e_1} \dots f_r^{e_r}$ という互いに素な monic な既約多項式 $f_i \in \kappa(\mathfrak{p})[t]$ と正整数 e_i が存在する。互いに素であることから、その冪乗も互いに素になっている。([AM] Proposition 1.16) したがって、中国剰余定理より剰余を取る準同型

$$\kappa(\mathfrak{p})[t]/(\overline{f}) \to \prod_{i=1}^{r} (\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i^{e_i}))_{\overline{g}} \tag{1.22}$$

は同型である。したがって、各 $(\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i^{e_i}))_{\overline{g}}$ が $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体になれば良い。ここで、$\overline{f} = f_1^{e_1} \dots f_r e_r \in \kappa(\mathfrak{p})[t]$ の微分を計算すると

$$\overline{f'} = (\overline{f})' = e_i f_1^{e_i-1}(f_1)' \prod_{k \neq i} f_k^{e_k} + \sum_{j \neq i} \left(e_j f_j^{e_j-1}(f_j)' \prod_{k \neq j} f_k^{e_k} \right) \tag{1.23}$$

である。$f' \in (A[t]_g)^\times$ から、その剰余を取った $\overline{f'} = (\overline{f})'$ も $\kappa(\mathfrak{p})[t]_{\overline{g}}$ で可逆である。したがって、さらに $(\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f))_{\overline{g}}$ への像を考えれば、

$$((\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i^{e_i}))_{\overline{g}})^\otimes \ni (\overline{f})' = e_i f_i^{e_i-1}(f_i)' \prod_{k \neq i} f_k^{e_k} \tag{1.24}$$

ゆえ $f_i^{e_i-1} \in (\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i^{e_i}))_{\overline{g}})^\times$ となる。もし $e_i \geq 2$ であるとすると、さらに $f_i \in (\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i^{e_i}))_{\overline{g}})^\times$ となるが、これは f_i が $\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f)_{\overline{g}}$ で冪零であることに矛盾する。したがってすべての i で $e_i = 1$ となる。すると f_i は $\kappa(\mathfrak{p})[t]$ の monic な既約多項式ゆえ $\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i)$ は体になるから $\overline{g} \in \kappa(\mathfrak{p})[t](f_i)$ はすでに可逆元になっている。ゆえに (1.22) を再度考えて

$$\kappa(\mathfrak{p}) \to (\kappa(\mathfrak{p})[t]/(\overline{f}))_{\overline{g}} \cong \prod_{i=1}^{r} (\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i))_{\overline{g}} \cong \prod_{i=1}^{r} \kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i) \tag{1.25}$$

となる。ここで (1.24) を考え直すと、

$$(f_i)' \cdot \left(e_i f_i^{e_i-1} \prod_{k \neq i} f_k^{e_k} \right) = (\overline{f})' \in (\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i))^\otimes \tag{1.26}$$

から $(f_i)' \in (\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i))^\otimes$ ゆえ、$f_i \in \kappa(\mathfrak{p})[t]$ は分離多項式になる。したがって $\kappa(\mathfrak{p})[t]/(f_i)$ は $\kappa(\mathfrak{p})$ 上の有限次分離拡大体であるから、unramified であることが示された。 □

2 étale 射の性質

まず étale 射の基本的な性質について示しておく。

命題 2.0.1. (1) étale と unramified は合成で閉じている。

(2) étale と unramified は base change で保たれる。

証明. (1) 二つの局所準同型 $f\colon (A, \mathfrak{m}_A) \to (B, \mathfrak{m}_B)$ と $g\colon (B, \mathfrak{m}_B) \to (C, \mathfrak{m}_C)$ について示す。flat と有限表示は合成で閉じていることは認めるので unramified についてのみ示す。しかし、極大イデアルについて $\mathfrak{m}_B = f(\mathfrak{m}_A)B$ と $\mathfrak{m}_C = g(\mathfrak{m}_B)C$ が成り立っているから $\mathfrak{m}_C = f(\mathfrak{m}_A)C$ は明らか。また、分離拡大性は合成で閉じているから unramified は合成で閉じている。

(2) scheme の場合について示す。flat と有限表示については認めるので unramified についてのみ示す。$X \to S$ を unramified とする。任意の射 $Y \to S$ について $X \times_S Y \to Y$ が unramified になることを示す。局所的に見れば良いので命題 1.0.10 から、任意の $y \in Y$ のファイバー $(X \times_S Y)_y = X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ が $\kappa(y)$ 上の有限次分離拡大の有限個直積のスペクトラムになっていればよい。したがって、最初から $Y = \mathrm{Spec}(k)$ という体 k のスペクトラムであるとしてよい。このときこの $(X \times_S Y)_y$ を X_k と書くことが出来る。$Y \to S$ の像を考えて、ある $s \in S$ で $Y = \mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to S$ と分解できる。このとき左右の四角がファイバー積になっている次の図式

$$\begin{tikzcd}
(X_s)_k \arrow[r] \arrow[d] & X_s \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
Y = \mathrm{Spec}(k) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(\kappa(s)) \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

を考える。ここで $(X_s)_k$ は $X_s \to \mathrm{Spec}(\kappa(s))$ による $\mathrm{Spec}(k) \to \mathrm{Spec}(\kappa(s))$ のファイバーである。すると、ファイバー積の性質から $(X_s)_k = X_k$ となっている。いま、$X \to S$ は unramified であるから $s \in S$ について

$$X_s = \coprod_{i=1}^{r} \mathrm{Spec}(\kappa(x_i)) = \mathrm{Spec}\left(\prod_{i=1}^{r} \kappa(x_i)\right) \tag{2.1}$$

となる。ここで $x_i \in X$ は $X \to S$ で s に移る X の元すべてであり、$\kappa(x_i)$ は $\kappa(s)$ 上有限次分離拡大体になる。これを使って $X_k = (X_s)_k$ を計算すると、

$$X_k = (X_s)_k = \mathrm{Spec}\left(k \otimes_{\kappa(s)} \prod_{i=1}^{r} \kappa(x_i)\right) \cong \mathrm{Spec}\left(\prod_{i=1}^{r} (\kappa(x_i) \otimes_{\kappa(s)} k)\right) \tag{2.2}$$

となる。$\kappa(x_i)$ は $\kappa(s)$ 上の有限次分離拡大体より、単拡大定理から、ある分離多項式 $f \in \kappa(s)[t]$ によって $\kappa(x_i) \cong \kappa(s)[t]/(f_i)$ となる。とくに $\kappa(s) \hookrightarrow k$ から、f_i は $k[t]$ においても重根を持たないので $f_i = g_1 \dots g_{r_i}$ という互いに素な $k[t]$ の既約多項式 g_j による分解を持つ。中国剰余定理より

$$\kappa(x_i) \otimes_{\kappa(s)} k \cong (\kappa(s)[t]/(f_i)) \otimes_{\kappa(s)} k \cong k[t]/(f_i) \cong \prod_{j=1}^{r_i} k[t]/(g_j) \tag{2.3}$$

となる。すると、g_j は $k[t]$ の分離多項式だから、$k[t]/(g_j)$ は k 上の有限次分離拡大体になる。以上より

$$X_k = \coprod_{i=1}^{r} \coprod_{j=1}^{r_i} \mathrm{Spec}(k[t]/(g_j)) \tag{2.4}$$

より、求める形になっているので $X \times_S Y \to Y$ は unramified になる。 □

定義 2.0.2. scheme の射の族 $\{\varphi_i \colon U_i \to U\}_{i\in I}$ が **étale 被覆** (étale cover) であるとは、次の二条件を満たすことである。

(1) $\cup_{i\in I}\varphi(U_i) = U$ となる。[*3]

(2) すべての $\varphi_i \colon U_i \to U$ は étale である。

この étale 被覆によって Grothendieck pretopology を得ることが出来る。以下では Grothendieck pretopology については既知とし、また簡単のため Grothendieck topology を Grothendieck pretopology を同じものとして扱う。

命題 2.0.3. étale 被覆は Grothendieck topology の公理を満たす。

証明. 同型射が étale であることは明らか。合成と base change で保たれることは étale 性については命題 2.0.1 からわかる。合成で jointly surjective が保たれることは明らかなので base change について保たれることを示す。

étale 被覆 $\{T_i \to U\}_{i\in I}$ と $S \to U$ について $\{T_i \times_U S \to S\}_{i\in I}$ が jointly surjective になることを示す。任意の $s \in S$ の U への像を $u \in U$ とする。$\{T_i \to U\}_{i\in I}$ が jointly surjective より、ある $i \in I$ で $t \in T_i$ が

*3 これを jointly surjective であるという。

存在して $T_i \to U$ で $u \in U$ に移る。ここで $\mathrm{Spec}(\kappa(s)) \to \mathrm{Spec}(\kappa(u))$ と $\mathrm{Spec}(\kappa(t)) \to \mathrm{Spec}(\kappa(u))$ を考えると、

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\kappa(t) \otimes_{\kappa(u)} \kappa(s)) \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd] & & \mathrm{Spec}(\kappa(s))) \arrow[d] \arrow[dddr] & \\
& T_i \times_U S \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] & \\
\mathrm{Spec}(\kappa(t)) \arrow[r] \arrow[drrr] & T_i \arrow[r] & U & \\
& & & \mathrm{Spec}(\kappa(u)) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

によって、$\mathrm{Spec}(\kappa(t) \otimes_{\kappa(u)} \kappa(s)) \to T_i \times_U S$ の像は $T_i \times_U S \to S$ で $s \in S$ に移る。したがって $\{T_i \times_U S \to S\}_{i \in I}$ は jointly surjective になる。 $\square$

3 Henselian ring

3.1 Henselization

定義 3.1.1. 局所環 $(R, \mathfrak{m}, k)$ が henselian であるとは、任意の monic 多項式 $f(X) \in R[X]$ について、$k[X]$ への像 $\overline{f}$ が、$a_0 \in k$ で $\overline{f}(a_0) = 0$ かつ $\overline{f'}(a_0) \neq 0$ となっているとする。このとき、ある $a \in R$ が存在して $\overline{a} = a_0 \in k$ かつ $f(a) = 0 \in R$ となることである。

$(R, \mathfrak{m}, k)$ が strict henselian であるとは、R が henselian かつ k が分離閉であることである。

注意 3.1.2. 定義 3.1.1 において $a_0 \in k$ に対して取れる $a \in R$ は一意的である。

証明. まず、$f(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in R[X]$ について、ある $g(X, Y) \in R[X, Y]$ が存在して

$$f(X+Y) - f(X) = f'(X)Y + g(X,Y)Y^2 \tag{3.1}$$

となる。実際、

$$\begin{aligned}
f(X+Y) - f(X) &= \sum_{k=0}^n a_k((X+Y)^k - X^k) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\sum_{r=0}^{k-1} {}_k C_r X^r Y^{k-r} \right) && (3.2)\\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{k=0}^n a_k {}_k C_r X^r Y^{k-r} = \left(\sum_{k=0}^n a_k k X^{k-1} \right) Y + \left(\sum_{r=0}^{k-2} \sum_{k=0}^n a_k {}_k C_r X^r Y^{k-r-2} \right) Y^2 && (3.3)\\
&= f'(X)Y + g(X,Y)Y^2 && (3.4)
\end{aligned}$$

となるので良い。もし $a, b \in R$ が $a_0 \in k$ に移り、$f(a) = f(b) = 0$ となったとする。(3.1) より、

$$0 = f(b) - f(a) = f(a + (b-a)) - f(a) = f'(a)(b-a) + g(a, b-a)(b-a)^2 \tag{3.5}$$

となる。$\overline{f'}(a_0)\neq 0\in k$ より、$\overline{f'}(a)\notin\mathfrak{m}$ から $f'(a)\in R^\times$ なので $(b-a)(1+(f'(a))^{-1}g(a,b-a)(b-a))=0$ となる。ここで、$\bar{a}=\bar{b}=a_0\in k$ より、$a-b\in\mathfrak{m}$ であり、R は $\mathfrak{m}$ を極大イデアルとする局所環なので $1+(f'(a))^{-1}g(a,b-a)(b-a)\in R^\times$ となるから $a=b\in R$ となる。 □

> **補題 3.1.3.** $f\colon R\to S$ と $g\colon R\to S'$ を étale 射とする。このとき任意の R 代数の射 $\varphi\colon S\to S'$ は étale になる。

証明. φ が有限表示であることを示す。 $S=R[X_1,\dots,X_n]/(f_1,\dots,f_r)$ と $S'=R[Y_1,\dots,Y_m]/(g_1,\dots,g_k)$ となったとする。それぞれ X_i と Y_i の像を $x_i\in S$ や $y_i\in S'$ と書くことにする。$\varphi(x_i)\in S'$ のある代表元 $h_i\in R[Y_1,\dots,T_m]$ を取る。このとき $S'\cong S[Y_1,\dots,Y_m]/(g_1,\dots,g_k,h_1-x_1,\dots,h_n-x_n)$ となることを示す。

$$\psi\colon S[Y_1,\dots,Y_m]\longrightarrow S' \tag{3.6}$$
$$\sum a_\nu Y^\nu\longmapsto\sum\varphi(a_\nu)y^\nu \tag{3.7}$$

と定義する。特に $\psi(Y_i)=y_i$ から ψ は全射。また、$\psi(g_i(Y))=\varphi(g_i(y))$ は $g_i=0\in S'$ より $g_i(Y)\in\mathrm{Ker}(\psi)$ である。また、$\psi(h_i(Y)-x_i)=h_i(y)-\varphi(x_i)=\varphi(x_i)-\varphi(x_i)=0\in S'$ より、$h_i-x_i\in\mathrm{Ker}(\psi)$ ゆえ ψ から、$S[Y_1,\dots,Y_m]/(g_1,\dots,g_k,h_1-x_1,\dots,h_n-x_n)\to S'$ を得る。逆に

$$\psi'\colon S'=R[Y_1,\dots,Y_m]/(g_1,\dots,g_k)\longrightarrow S[Y_1,\dots,Y_m]/(g_1,\dots,g_k,h_1-x_1,\dots,h_n-x_n) \tag{3.8}$$
$$y_i\longmapsto\overline{Y_i} \tag{3.9}$$

とすると、とくに $\varphi(x_i)=\overline{h_i}\in S'$ はこれで移すと h_i に移り、したがって x_i に移る。よってこれは全射になる。ψ と ψ' は互いに逆になっているから同型になるため、S' は S 上有限表示になる。

flat と unramified について示す。 $\mathfrak{q}'\in\mathrm{Spec}(S')$ について、$\mathfrak{q}:=\varphi^{-1}(\mathfrak{q}')\in\mathrm{Spec}(S)$ と $\mathfrak{p}:=f^{-1}(\mathfrak{q})=g^{-1}(\mathfrak{q}')\in\mathrm{Spec}(R)$ とおく。$R\to S$ と $R\to S'$ が unramified より $\mathfrak{q}'S'_{\mathfrak{q}'}=\mathfrak{p}S'_{\mathfrak{q}'}$ かつ $\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}}=\mathfrak{p}S_{\mathfrak{q}}$ である。$R_{\mathfrak{p}}\xrightarrow{f}S_{\mathfrak{q}}\xrightarrow{\varphi}S'_{\mathfrak{q}'}$ に対して、$\kappa(\mathfrak{q})=S_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}}=S_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}S_{\mathfrak{q}}\to S'_{\mathfrak{q}'}/\mathfrak{p}S'_{\mathfrak{q}'}=S_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}}=\kappa(\mathfrak{q}')$ であり、とくに体の間の射なので flat だから [SP] Lemma 10.128.8 より、$S_{\mathfrak{q}}\to S'_{\mathfrak{q}'}$ は flat になる。よって $S\to S'$ は flat になる。

また、$\mathfrak{q}'S_{\mathfrak{q}'}=\mathfrak{p}S_{\mathfrak{q}'}$ と $\mathfrak{q}S_{\mathfrak{q}}=\mathfrak{p}S_m frakq$ より、$\mathfrak{q}'S'_{\mathfrak{q}'}=\mathfrak{q}S'_{\mathfrak{q}'}$ となる。$\kappa(\mathfrak{p})\to\kappa(\mathfrak{q})\to\kappa(\mathfrak{q}')$ で $\kappa(\mathfrak{p})\to\kappa(\mathfrak{q}')$ が有限次分離拡大なので $\kappa(\mathfrak{q})\to\kappa(\mathfrak{q}')$ も有限次分離拡大になる。よって $S\to S'$ は unramified になる。 □

> **命題 3.1.4.** 局所環 $(R,\mathfrak{m},k)$ を一つ固定する。圏 I を
>
> $$Ob(I):=\{(\varphi,\mathfrak{q})=(\varphi\colon R\to S,\mathfrak{q})\mid\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(S),\ \varphi\colon k\xrightarrow{\cong}\kappa(\mathfrak{q}),\ \varphi\text{ は étale。}\} \tag{3.10}$$
> $$\mathrm{Mor}_I((\varphi,\mathfrak{q}),(\varphi',\mathfrak{q}')):=\{\eta\colon S\to S'\in\mathrm{Hom}_R(S,S')\mid\eta^{-1}(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}\} \tag{3.11}$$
>
> と定める。このとき I は filtered である。すなわち次を満たす。
>
> (1) $I\neq\emptyset$ である。
> (2) $(\varphi,\mathfrak{q}),(\varphi',\mathfrak{q}')\in I$ について、ある $(\varphi,\mathfrak{q})\to(\varphi'',\mathfrak{q}'')\in I$ と $(\varphi',\mathfrak{q}')\to(\varphi'',\mathfrak{q}'')\in I$ が存在する。
> (3) 二つの I の射 $f,g\colon(\varphi,\mathfrak{q})\to(\varphi',\mathfrak{q}')$ について、ある $h\colon(\varphi',\mathfrak{q}')\to(\varphi'',\mathfrak{q}'')$ が存在して $h\circ f=h\circ g$ となる。

証明. まず、$(\varphi\colon R\to S,\mathfrak{q})$ について φ によって得られる $k\to S/\mathfrak{q}\to\kappa(\mathfrak{q})$ が同型になるから、$\varphi(\mathfrak{m})\subset\mathfrak{q}$ であり、とくに $S/\mathfrak{q}$ も体なので $\mathfrak{q}$ は S の極大イデアルになる。

(1) 恒等写像が étale なので $(R\xrightarrow{\mathrm{id}}R,\mathfrak{m})\in I$ より $I\neq\emptyset$ となる。

(2) $(\varphi\colon R\to S,\mathfrak{q})$ と $(\varphi'\colon R\to S')$ について、次の図式

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\text{étale}"] & S \arrow[r] & S\otimes_R S' \\ & R \arrow[u] \arrow[r, "\text{étale}"] & S' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

を考えると命題 2.0.1 の (2) と (1) から $R\to S\otimes_R S' =: S''$ も étale になる。$\mathfrak{q}'':=\mathfrak{p}\otimes_R S'+S\otimes_R\mathfrak{q}$ とする。ここで、$R\to S'/\mathfrak{q}''$ は $R\to k\to S/\mathfrak{q}\otimes_R R'/\mathfrak{q}'\to S''/\mathfrak{q}''$ と分解する。ここで、極大イデアルであることから $k=\kappa(\mathfrak{q})=S/\mathfrak{q}$ かつ $k=\kappa(\mathfrak{q}')=S'/\mathfrak{q}'$ と、$k\otimes_R k=k\otimes_R R/\mathfrak{m}\cong k/\mathfrak{m}k=k$ ゆえ、$k\cong S/\mathfrak{q}\otimes_R S'/\mathfrak{q}'\to S''/\mathfrak{q}''$ が取れる。一方、$S\to S/\mathfrak{q}$ と $S'\to S'/\mathfrak{q}'$ のテンソル積 $S''\to S/\mathfrak{q}\otimes_R S'/\mathfrak{q}'$ から、自然に $S''/\mathfrak{q}''\to S/\mathfrak{q}\otimes_R S'/\mathfrak{q}'\cong k$ が得られる。これらは互いに逆になっているから、$\kappa(\mathfrak{q}'')=S''/\mathfrak{q}''\cong k$ が $R\to S''$ から得られるので $(R\to S'',\mathfrak{q}'')\in I$ となるものが取れる。自然な射 $S\to S''$ と $S'\to S''$ それぞれによる $\mathfrak{q}''$ の逆像は □

補題 3.1.5. 命題 3.1.4 で定義した圏 I について、関手

$$M\colon I\longrightarrow \mathrm{Ring} \tag{3.12}$$
$$(\varphi\colon R\to S,\mathfrak{q})\longmapsto S \tag{3.13}$$

に関する順極限を取ると

$$R^h:=\varinjlim_I S \tag{3.14}$$

という R 代数が定まる。このとき R^h は次を満たす。

(1) $\mathfrak{m}R^h$ は R^h のただ一つの極大イデアルであり、$R^h/\mathfrak{m}R^h\cong k$ となる。

(2) 局所環 $(R^h,\mathfrak{m}R^h,k)$ は henselian になる。

注意 3.1.6. 補題 3.1.5 で構成できる $(R^h,\mathfrak{m}R^h,k)$ を $(R,\mathfrak{m},k)$ を**ヘンゼル化** (henselization) という。

命題 3.1.4 の圏 I は $k\xrightarrow{\cong}\kappa(\mathfrak{q})$ という条件であったが、k の分離閉包 k^{sep} を一つ固定して、$k\to\kappa(\mathfrak{q})\subset k^{sep}$ が有限次分離拡大体となる条件に書き換えて、同じことをすると $(R^{sh},\mathfrak{m}R^{sh},k^{sep})$ という strict henselian ring が得られる。これを $(R,\mathfrak{m},k)$ の**強ヘンゼル化** (strict henselization) という。

3.2 Henselian ring の特徴づけ

命題 3.2.1. $(R,\mathfrak{m},k)$ を局所環とするとき、R が henselian であることと次は同値。任意の étale 射 $\varphi\colon R\to S$ と、$\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(S)$ で $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})=\mathfrak{m}$ かつ φ から同型 $k\xrightarrow{\cong}\kappa(\mathfrak{q})$ を誘導する任意の $\mathfrak{q}$ に対して、φ の切断 $(\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_R)$ $\psi\colon S\to R$ で $\psi^{-1}(\mathfrak{m})=\mathfrak{q}$ となるものが唯一存在する。

この証明では次の事実を用いている。

事実 3.2.2 ([SP] 10.144.14). 任意の étale 射は局所的に standard étale になる。すなわち、étale 射 $R \to S$ は任意の $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(S)$ に対して、ある $g \in S \setminus \mathfrak{q}$ が存在し、$R \to S_g$ は standard étale になる。

次にヘンゼル化が関手的であることを示す。そのための補題を用意する。

補題 3.2.3. 環 R と A の間の étale 射 $\psi\colon R \to A$(ind-étale でもよい) と henselian ring $(S, \mathfrak{m}, k)$ で準同型 $\varphi\colon R \to S$ をとる。$\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ とする。このとき $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ で $\psi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ となるものが存在し、次の可換図式のように、

$$
\begin{tikzcd}
& R \arrow[d, "\varphi"] \arrow[ddl, "\psi"'] \arrow[ddrr] & & \\
& S \arrow[dr] & & \\
A \arrow[ur, dashed, "\exists!\rho"] \arrow[dr] & & k = S/\mathfrak{m} & \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[l] \arrow[dll] \\
& \kappa(\mathfrak{q}) \arrow[ur, "\tau=\overline{\rho}"] & &
\end{tikzcd}
$$

任意の $\kappa(\mathfrak{p})$ 代数の射 $\tau\colon \kappa(\mathfrak{q}) \to k$ に対して、R 代数の射 $\rho\colon A \to S$ で $\rho^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{q}$ かつ $\overline{\rho}\colon \kappa(\mathfrak{q}) \to k$ が τ と一致するものが唯一存在する。

命題 3.2.4. 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ と $(S, \mathfrak{n})$ と、その間の局所準同型 $\varphi\colon R \to S$ に対して、次の図式

$$
\begin{tikzcd}
R^h \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi^h"] & S^h \\
R \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & S \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

が可換になるような唯一つの $\varphi^h\colon R^h \to S^h$ が存在する。

命題 3.2.5. 局所環 $(R, \mathfrak{m}, K)$ と $(S, \mathfrak{n}, L)$ と、その間の局所準同型 $\varphi\colon R \to S$ に対して、$\overline{\varphi}\colon K \to L$ の分離閉包への延長 $\iota\colon K^{sep} \to L^{sep}$ を一つ固定する。このとき、次の図式

$$
\begin{tikzcd}
R^{sh} \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi^h"] & S^{sh} \\
R \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & S \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

が可換になるような唯一つの $\varphi^{sh}\colon R^{sh} \to S^{sh}$ が存在する。

次に、R^h や R^{sh} が R の性質を保つことを示す。R を Noether 環としておく。まず、$(R^h, \mathfrak{m}^h)$ と $(R^{sh}, \mathfrak{m}^{sh})$ について、補題 3.1.5 から $\mathfrak{m}^h = \mathfrak{m}R^h$ と $\mathfrak{m}^{sh} = \mathfrak{m}R^{sh}$ である。さらに $R/\mathfrak{m} \cong R^h/\mathfrak{m}^h$ と $(R/\mathfrak{m})^{sep} \cong$

$R^{sh}/\mathfrak{m}^{sh}$ が成り立っていた。完備化を考えるためにまずは次の補題を用意する。

補題 3.2.6. 局所環 $(R, \mathfrak{m})$ について $\mathfrak{m}$ が冪零イデアルになっているとする。このとき flat な R 加群 M と部分集合 $S \subset M$ について以下は同値。

(1) S は $M/\mathfrak{m}M$ の $R/\mathfrak{m}$ 上の基底になる。
(2) S が M の R 上の基底になる。

命題 3.2.7. $R/\mathfrak{m}^n \cong R^h/(\mathfrak{m}^h)^n$ となる。また、$R^{sh}/(\mathfrak{m}^{sh})^n$ は $R/\mathfrak{m}^n$ 上自由加群になり、とくにその基底として k^{sep}/k の基底の持ち上げ $S \subset R^{sh}$ が取れる。

このことから $\widehat{R^h} \cong \widehat{R}$ であり、R 加群としての同型 $\widehat{R^{sh}} \cong \widehat{R^{\oplus S}}$ が得られる。

次に射の flat 性のために次を準備する。

事実 3.2.8 ([SP] 15.27.2). Noether 環上の自由加群の完備化は flat になる。

補題 3.2.9. 環 R が colimit として $R = \varinjlim_{i \in I} R_i$ と書けていて、R 加群 M が任意の $i \in I$ で R_i 上 flat であるとする。このとき M は R 上 flat になる。

命題 3.2.10. Noether 局所環 R について $R \to \widehat{R}$ と $R \to \widehat{R^h}$ と $R \to \widehat{R^{sh}}$ は flat な射になる。さらに $R^h \to \widehat{R^h}$ と $R^{sh} \to \widehat{R^{sh}}$ も flat な射になる。

事実 3.2.11. 完備局所環の極大イデアルが有限生成であれば Noether になる。

命題 3.2.12. R が Noether 環ならば R^h と R^{sh} も Noether 環になる。

4 微分加群と smooth 射

4.1 微分加群

定義 1.0.5 で与えた微分加群について、より詳細にその性質と定義を与える。

定義 4.1.1. B を環とし、M を B 加群とする。写像 $D\colon B \to M$ が**導分** (derivation) であるとは、任意の $b, c \in B$ について次の条件を満たすことである。

(1) $D(b + c) = D(b) + D(c)$.

(2) $D(bc) = bD(c) + cD(b)$.

また、環準同型 $A \to B$ があるとき導分 $D\colon B \to M$ が A **上の導分**であるとは、D が A 線型写像であることである。とくに $a \in A$ と $b \in B$ に対して $D(ab) = aD(b)$ を満たす。

$\mathrm{Der}(B, M)$ で導分全体の集合を表し、$\mathrm{Der}_A(B, M)$ で A 上の導分全体の集合を表す。これらには自然に B 加群の構造が入るのでそれを入れておく。

注意 4.1.2. $D \in \mathrm{Der}(B, M)$ について

$$D(1) = D(1 \cdot 1) = 1 \cdot D(1) + 1 \cdot D(1) = D(1) + D(1) \tag{4.1}$$

より $D(1) = 0$ となる。とくに $D \in \mathrm{Der}_A(B, M)$ のときは A 線形性から $a \in A$ について $D(a) = aD(1) = 0$ である。

ここで環準同型 $A \to B$ に対して

$$\mathrm{Der}_A(B, -)\colon B\text{-Mod} \longrightarrow B\text{-Mod} \tag{4.2}$$
$$M \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \tag{4.3}$$

は関手になることがわかる。ただし B 加群の射 $f\colon M \to N$ に対しては

$$\mathrm{Der}_A(B, f)\colon \mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, N) \tag{4.4}$$
$$D \longmapsto f \circ D \tag{4.5}$$

が与えられる。この関手について次の重要な定理がある。

定理 4.1.3. 関手 $\mathrm{Der}_A(B, -)$ は表現可能である。すなわち、ある B 加群 $\Omega_{B/A}$ と導分 $\partial\colon B \to \Omega_{B/A}$ が存在して自然な写像

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \tag{4.6}$$
$$f \longmapsto f \circ D \tag{4.7}$$

は全単射になる。特にこのことから $(\Omega_{B/A}, \partial)$ は普遍性を満たしていることがわかる。

証明. B 加群 $\Omega_{B/A}$ は当に定義 1.0.5 により与えられたものである。導分 $\partial\colon B \to \Omega_{B/A}$ の構成について述べる。まず $B \to B \otimes_A B$ を $b \mapsto b \otimes 1$ と $b \mapsto 1 \otimes b$ によって与えて、それぞれ λ_1 と λ_2 とする ($B \otimes_A B$ の B 加群としての構造は第一成分への積なので λ_2 は一般には B 加群の射であるとは限らない)。このとき

$$\tilde{\partial} \coloneqq \lambda_2 - \lambda_1\colon B \longrightarrow B \otimes_A B \tag{4.8}$$
$$b \longrightarrow 1 \otimes b - b \otimes 1 \tag{4.9}$$

と定義すると $I = \mathrm{Ker}(\mu)$ より、$\mathrm{Im}(\tilde{\partial}) \subset I$ となる。自然な全射 $I \to I/I^2 = \Omega_{B/A}$ と $\tilde{\partial}$ の合成を ∂ とするとこれは求める性質を満たしていることが示される。 □

注意 4.1.4. $A \to B$ について B が A 上 $\{x_i\}_{i\in I}$ によって (代数として) 生成されているとき、命題 1.0.6 から、I は $B \otimes_A B$ 上で $\{1 \otimes x_i - x_i \otimes 1\}_{i\in I}$ で (加群として) 生成されている。ここで

$$(c\otimes d)(1\otimes b-b\otimes 1)-cd(1\otimes b-b\otimes 1) = (c\otimes d-cd\otimes 1)(1\otimes b-b\otimes 1) = (c\otimes 1)(1\otimes d-d\otimes 1)(1\otimes b-b\otimes 1) \in I^2 \tag{4.10}$$

であるから $I/I^2 = \Omega_{B/A}$ は B 上でも $\left\{\overline{1 \otimes x_i - x_i \otimes 1}\right\}_{i\in I}$ で (加群として) 生成されている。

例 4.1.5. A を環として、$B = A[X_1, \ldots, X_n]$ という多項式環を考えると、それらから普遍的に定まる $(\Omega_{B/A}, \partial)$ は

$$\Omega_{B/A} = B\partial X_1 \oplus \cdots \oplus B\partial X_n \tag{4.11}$$

となる。

4.2 smooth 射

まず A を環として、その上の代数 $A \to B$ と $A \to C$ を取る。さらに C のイデアル N で $N^2 = 0$ となるものを取る。ここで A 代数の射 $\varphi\colon B \to C/N$ が

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] & C/N \\ A \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

を可換にするように与えられたとする。このとき A 代数の射 $\psi\colon B \to C$ が

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "\psi"] & C/N \\ A \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

を可換にするように存在することについて考える。

定義 4.2.1. 上記の記号を用いる。もし $A \to B$ について任意の C と N と φ を取ったときそれぞれ ψ が少なくとも一つ/高々一つ/唯一つ存在するとき、$A \to B$ を 0-smooth/0-unramified/0-étale という。

一般に、B のイデアル I について、B に I 進位相、C/N に離散位相を入れるとき、上記の $\varphi\colon B \to C/N$ を連続準同型に限って ψ の存在が言えるとき、同様にそれぞれ I-smooth/I-unramified/I-étale という。

参考文献

[AM] M. F. Atiyah and G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1994.

[MO1] “ag.algebraic geometry - commutative algebra, diagonal morphism,” MathOverflow. https://mathoverflow.net/questions/176636/commutative-algebra-diagonal-morphism (accessed Dec. 12, 2021).

[Mat] 松村英之, 復刊 可換環論, 復刊版. Tokyo: 共立出版, 2000.

[SP] "The Stacks project." https://stacks.math.columbia.edu .