Adic space

https://ryo1203.github.io

概要

Adic 空間論についてのゼミを行っているので、発表したところを随時 PDF 化していく。大筋は Adic 空間についての原論文である [Hu93] と [Hu94] に沿っているつもりである。証明が省かれているところについては [So] や [Wed] を一部参考にしている。

目次

1 Huber ring

記法 1.1. A を環、B, C を A の部分集合とするとき、$B \cdot C$ によって、B と C の元の一つづつの積の有限和からなる集合を表す。すなわち、

$$B \cdot C \coloneqq \{\sum_{i=1}^{n} b_i c_i \mid n \in \mathbb{Z}^+, b_i \in B, c_i \in C\} \tag{1.1}$$

である。

> **定義 1.2 (非アルキメデス的位相環).** 位相環 A が**非アルキメデス的** (non-Archimedean) であるとは、A の加法部分群からなる $0 \in A$ の基本近傍系が存在することである。

注意 1.3. 位相環 A の開であるような加法部分群 B は閉でもあることがわかる。実際、加法群としての分割を考えると $A = \sqcup_{i \in I}(a_i + B)$ をなる。平行移動であることから $a_i + B$ も A で開集合になる。とくにある $i_0 \in I$ で $a_{i_0} = 0$ となるように取れるから、$B = A \setminus \bigsqcup_{i \neq i_0}(a_i + B)$ であり、右辺は開集合の和集合なのでその補集合である B は A で閉集合になる。

> **定義 1.4 (有界・冪有界・位相的冪零元・adic).** A を位相環とする。
>
> 1. A の部分集合 B が**有界** (bounded) であるとは、$0 \in A$ の任意の開近傍 U に対して、ある開近傍 $0 \in V \subset A$ が存在して、任意の $b \in B$ と任意の $v \in V$ の積 bv が U に含まれることである。
> 2. A の元 a が**冪有界** (power-bounded) であるとは、A の部分集合 $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が有界であることである。
> 3. A の元 a が**位相的冪零元** (topologically nilpotent) であるとは、A の点列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が $0 \in A$ への収束列になることである。

4. A が adic であるとは、ある A のイデアル I が存在して、$\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が $0 \in A$ の基本近傍系を為すことである。このイデアルのことを A の**定義イデアル** (ideal of definition) と呼ぶ。

注意 1.5. 位相環 A が非アルキメデス的であるとする。このとき $B \subset A$ が有界であることは、和で閉じているものからなる基本近傍系が取れることから、$0 \in A$ の任意の開近傍 U に対してある開近傍 $0 \in V \subset A$ が存在して、$B \cdot V \subset U$ となることと同値である。

記法 1.6. 位相環 A の冪有界元全体を A° と表し、位相的冪零元全体を $A^{\circ\circ}$ と表すこととする。

定義 1.7 (Huber ring・Tate ring). A を位相環とする。

1. A が Huber ring あるいは f-adic ring であるとは、ある部分集合 U と有限集合 $T \subset U$ であって、$\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が $0 \in A$ の基本近傍系を為し、$T \cdot U = U^2 \subset U$ を満たすものが存在することである。
2. 位相的冪零な単元のことを pseudo-uniformizer と呼ぶ。A が Tate であるとは、A が Huber ring であり、pserudo-uniformizer を持つことである。

[Hu93] では f-adic ring と名付けており、[SW] では Huber ring と名付けている。以下では Huber ring と呼ぶこととする。ちなみに、[Ran] には f-adic ring の f は命題 1.9 にあるように、以下で定義される定義イデアルというものが有限生成で取れることに依ると述べられている。

定義 1.8 (定義環・定義イデアル). A を位相環とし、その部分環 A_0 について、A_0 が A の**定義環** (ring of definition) であるとは、A_0 が A で開であり、その相対位相によって A_0 が adic ring となることである。A の**定義イデアル** (ideal of definition) とは、ある定義環の定義イデアル (定義 1.4) のことである。

定義環と定義イデアルについて次の性質が成り立っている。

命題 1.9. A を Huber ring とし、A_0 をその部分環とする。

1. A は定義環を持つ。
2. A_0 が A の定義環 $\iff$ A_0 が A で開かつ有界。
3. A のすべての定義環は有限生成な定義イデアルを持つ。

証明. A が Huber ring より取ることのできる部分集合 U とその有限部分集合 T を一つ固定する。

(1) W を U によって加法的に生成される A の部分加法群とする。このとき $A_0 := \mathbb{Z} \cdot 1 + W$ とすると A_0 は $U^2 \subset U$ より $W^2 \subset W$ から A の部分環になり、$U \subset A_0$ であるから A の中で開である。さらに、$T \subset U \subset A_0$ より T で生成されるイデアル $I := TA_0$ を考える。このイデアルによって A_0 が adic になることを示す。まず $T \cdot U = U^2 \subset U$ より、$U^2 = T \cdot U \subset TA_0 = I$ から I は開である。$T \subset U$ から $T^2 \subset T \cdot U$ と $T \cdot W \subset U^2$ から

$$I^2 = T^2 A_0 = T^2 + T^2 \cdot W \subset T \cdot U + T \cdot U^2 \subset T \cdot U = U^2 \tag{1.2}$$

であるので $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が基本近傍系になっていることから、$\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ も A_0 の基本近傍系になる。故に A_0 は adic な開部分環になるから A の定義環になる。

(2) ($\Rightarrow$) A_0 が定義環のとき、まず定義から A_0 は開であり、基本近傍系 $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ について $I^n \cdot A_0 = I^n$ より A_0 は有界。

($\Leftarrow$) 任意の正整数 n について $T(n) := \{t_1 \dots t_n \mid t_1, \dots, t_n \in T\}$ とする。A_0 が開なので、ある $k \in \mathbb{Z}^+$ が存在して $U^k \subset A_0$ である。$T \subset U$ より $T^k \subset U^k \subset A_0$ から $T(k) \subset A_0$ である。T が有限集合だから $T(k)$ も有限集合なのでとくに有限生成イデアル $I := T(k)A_0 \subset A_0$ を取ることができる。$\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が A_0 の基本近傍系になることを示す。$U^l \subset A_0$ となる $l \in \mathbb{Z}^+$ が取れるから $T \cdot U = U^2$ より $I^n = (T(k)A_0)^n = T(nk)A_0 \supset T(nk)U^l = U^{l+nk}$ となるので任意の正整数 n について I^n は開になる。任意の $0 \in A$ の開近傍 V について A_0 が有界よりとくに、ある正整数 m で $U^m \cdot A_0 \subset V$ となる。$T \subset U$ から、$I^m = T(mk)A_0 \subset U^{mk} \cdot A_0 \subset U^m \cdot A_0 \subset V$ より $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ は基本近傍系を為す。ゆえに A_0 はこの有限生成イデアル I を定義イデアルとする adic な開部分環になるので A の定義環になる。

(3) A_0 が定義環なら (2) を経由して有限生成イデアルを取り直せる。 □

以上を踏まえて、[SW] や [Hu94] など多くの文献では Huber ring を以下の同値な条件で定義している。

命題 1.10. 位相環 A について Huber ring であることと有限生成イデアルを定義イデアルとする定義環を持つことは同値。

証明. まず命題 1.9 から Huber ring は有限生成イデアルを定義イデアルとする定義環を持つ。逆に有限生成イデアル I を定義イデアルとする定義環 A_0 が取れるとき、$U := I$ とし、その有限部分集合 $T \subset U$ を I の有限個からなる生成系として取ればよい。 □

この同値条件は扱いやすいが、定義イデアルを取るときに定義環という枠組みが必要になっている。そこで、定義イデアルをイデアルとしてではなく、非単位的有限生成環だと思うことで定義環という枠組みは必要なくなる。実際、命題 1.9 の証明のように $\mathbb{Z} \cdot 1 + W$ のようなものを考えてしまえば非単位的有限生成環からそれを定義イデアルとして持つような定義環は構成できる。それ故、最低限必要な条件を考えると最初の定義 1.7 の方に妥当性があると考えることもできる。

以下では命題 1.9 と命題 1.10 の同値性をとくに言及せずに用いる。次のような Huber ring の例がある。とくに adic ring ではない Huber ring はたしかに存在する。

例 1.11.

1. 有限生成イデアルによって定まっている adic ring は Huber ring である。
2. 環 A とその有限生成イデアル I について、$A[X]$ に
$$U_n := \{\sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in A[X] \mid a_k \in I^{n+k}, m \in \mathbb{Z}^+\} \tag{1.3}$$
を $0 \in A$ の基本近傍系とする位相を入れる。このとき、$A[X]$ は Huber ring になるが、任意の正整数 m で $I^m \neq I^{m+1}$ ならば adic ring ではない。
3. $(k, |\cdot|)$ を非自明な非アルキメデス的付値体とする。(例えば $\mathbb{Q}_p$ など) $(A, \|\cdot\|)$ をノルム付き k 代数とし、A にこのノルムからなる位相を入れると A は Tate ring になる。
4. 環 B とその元 s について、局所化 $\varphi\colon B \to B_s$ をとり、B_s に $\{\varphi(s^n B) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ を $0 \in B_s$ の基本近傍系とする位相を入れれば、B_s は $s \in B_s$ を pseudo-uniformizer とする Tate ring になる。

証明. (2)　$I=(f_1,\dots,f_r)$ としたとき $U \coloneqq U_1$ は $A[X]$ で開であり、$T \coloneqq \{f_1,\dots,f_r\}$ とすると $T \subset U_1$ より $T\cdot U \subset U^2$ である。逆の包含を示す。任意の U の元 $f(X)=\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ と $g(X)=\sum_{k=0}^{m'} b_k X^k$ についてその積 $f(X)g(X)=\sum_{k=0}^{m+m'}(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i})X^k$ について、$a_i \in I^{i+1}$ かつ $b_{k-i} \in I^{k-i+1}$ より $a_i b_{k-i} \in I^{k+2}$ より $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \in I^{k+2} = T\cdot I^{k+1}$ となる。ゆえに $f(X)g(X) \in T\cdot U_1 = T\cdot U$ より $T\dot{U}=U^2$ となる。また、このことよりとくに $U^2 \subset U_2 \subset U_1 = U$ より $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ も $A[X]$ の基本近傍系になるので $A[X]$ は Huber ring になる。

一方、任意の正整数 m について $I^m \neq I^{m+1}$ のとき $A[X]$ が adic にならないことを示す。もしイデアル $J \subset A[X]$ で adic になったとすると任意の正整数 k について $U_n \subset J^k \subset U_m$ となる正整数 $n \geq m$ が存在する。$I^n \neq I^{n+1}$ と $I^{n+1} \subset I^n$ よりある $\alpha \in I^n \setminus I^{n+1}$ が取れる。$U_n \subset J^k$ から $\alpha \in J^k$ であり、J^k がイデアルだからとくに任意の 0 以上の整数 i について $\alpha X^i \in J^k \subset U_m$ である。ゆえにこの任意の i について $\alpha \in I^{m+i}$ となる。しかし、十分大きい i を取ると $\alpha \in I^{m+i} \subset I^{n+1}$ となり、$\alpha \in I^n \setminus I^{n+1}$ に矛盾する。よって $A[X]$ は adic ではない。

(3)　$A_0 \coloneqq \{a \in A \mid \|a\| \leq 1\}$ とし、非自明なノルムであることからある $r \in k$ で $0<|r|<1$ となるものが取れる。このとき $\{r^n A_0 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が基本近傍系を為し、$U \coloneqq A_0$ かつ $\left\{{T \coloneqq \atop r}\right\}$ とすれば A は Huber ring になり、pseudo-uniformizer として $r \in A$ が取れる。 □

また、とくに Huber ring において十分多くの定義環が存在する。

命題 1.12. A を Huber ring とする。

1. A_0 と A_1 を A の定義環とするとき $A_0 \cap A_1$ と $A_0 \cdot A_1$ も定義環になる。
2. A の有界な部分環 B と A の開部分環 C であって $B \subset C$ となるものについてある A の定義環 A_0 で $B \subset A_0 \subset C$ となるものが存在する。
3. A の冪有界元全体 A° は A の部分環で A の定義環すべての和集合と一致する。

証明. (1)　A_0 と A_1 は開かつ有界よりその共通部分 $A_0 \cap A_1$ は開であり、有界な集合の部分集合は有界なので $A_0 \cap A_1$ は有界でもあるから $A_0 \cap A_1$ は定義環になる。

$A_0 \cdot A_1$ について $A_0 \subset A_0 \cdot A_1$ より開である。有界であることを示す。とくに十分小さい $0 \in A$ の開近傍 U を取って和で閉じているとして良い。A_0 が有界より十分小さくとって、ある $0 \in A$ の開近傍 V_0 であって和で閉じていて $V_0 \cdot A_0 \subset U$ となるものが取れる。この V_0 について A_1 が有界より、ある $0 \in A$ の開近傍 V_1 が存在して $V_1 \cdot A_1 \subset V_0$ となる。ここで $A_0 \cdot A_1$ の元 $\sum x_i y_i (x_i \in A_0, y_i \in A_1)$ について、$y_i \cdot V_1 \subset A_1 \cdot V_1 \subset V_0$ と $x_i \cdot V_0 \subset A_0 \cdot V_0 \subset U$ より

$$(\sum x_i y_i)\cdot V_1 \subset \sum (x_i y_i \cdot V_1) \subset \sum (x_i \cdot V_0) \subset \sum U \subset U \tag{1.4}$$

より $(A_0 \cdot A_1)\cdot V_1 \subset U$ なので $A_0 \cdot A_1$ は有界だから $A_0 \cdot A_1$ は定義環になる。

(2)　C について、$C_0 \coloneqq A_0 \cap C$ とすると、A_0 と C は A で開なので C_0 は A で開である。さらに A_0 が A で有界で $C \subset A_0$ よりとくに C も A で有界であるから C_0 も A の定義環になる。とくに $C_0 \subset C$ で C の定義環にもなるのでこれによって C も Huber ring になる。ゆえに $B \subset C$ と有界性から (1) の証明を用いて $B \cdot C_0$ も C で有界かつ $B \subset B \cdot C_0$ から C で開になる。これによって $B \cdot C_0$ は C の定義環になって B を含む。C が A で開であることと合わせて $B \cdot C_0$ は A で開かつ有界であり、$B \subset B \cdot C_0 \subset C$ より、A_0 として この $B \cdot C_0$ と取ればよい。

(3)　A° が定義環の和集合になっていることを示す。まず、A の定義環は有界よりその任意の元は冪有界になるから定義環の和集合は A° に含まれる。A の定義環 A_0 を一つ固定する。任意の A° の元 x について $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が有界であることから (1) の証明と同様にして $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \cdot A_0 = A_0[x]$ は有界であり、A_0 を含むので開集合でもあるから A の定義環になる。ゆえに定義環の和集合の中に $A_0[x]$ が含まれるのでとくに x も含まれるので互いの包含関係が示された。

A° が部分環であることは、任意の A° の元 x と y についてある定義環 A_0 と A_1 で $x \in A_0$ と $y \in A_1$ となるものが存在し、(1) から $x + y \in A_0 \cdot A_1 \subset A^\circ$ かつ $xy \in A_0 \cdot A_1 \subset A^\circ$ なので A° は部分環になる。 □

Huber ring A について、A° は有界とは限らない。$A^\circ = \cup A_0$ であり、これは有界集合 A_0 の和集合が必ずしも有界ではないという形になっている。すなわち、$0 \in A$ を原点と見るとき、A_0 の中では距離が有限であるが、ちょうど A° を境界その外側に距離無限大の地点が存在している。これを踏まえて特に次の Huber ring のクラスを定義する。

> **定義 1.13 (一様).** A を Huber ring とするとき、A が**一様** (uniform) であるとは、A° が有界であることである。A° が定義環になることと言ってもよい。

後に定める整元環 A^+ によって、空間の点として取る付値に制限をつけるが、これは A° とは異なる距離無限大との境界として A^+ を取ることに対応している。

命題 1.9 から次が従う。

> **系 1.14.** A を位相環とする。
>
> 1. A が adic ring のとき、A が Huber ring $\iff$ A が有限生成定義イデアルを持つ。
> 2. A が Huber ring のとき、A が adic ring $\iff$ A が有界になる。
> 3. B を A の開部分環とするとき、A が Huber ring。$\iff$ B が Huber ring。

とくに Tate ring のときは次のようにわかりやすい形になる。

> **命題 1.15.** A を Tate ring とし、B を A の定義環とするとき次が成り立つ。
>
> 1. B は A のある pseudo-uniformizer を持つ。
> 2. $s \in B$ を A の pseudo-uniformizer とすると $A = B_s$ であり、sB が B の定義イデアルになる。

証明. (1)　$t \in A$ を pseudo-uniformizer とするとき、B が $0 \in A$ の開近傍より、$t^n \to 0$ より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ によって $t^k \in B$ となる。t^k も pseudo-uniformizer よりこれを取れば良い。

(2)　任意の $a \in A$ について $s^n \to 0$ より $s^n a \to 0$ であるから B が $0 \in A$ の開近傍より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ で $s^k a \in B$ になるので $a \in B_s$ から $s \in A^\times$ と合わせて $A = B_s$ となる。

また、任意の正整数 n について $s^n \in A^\times$ より $A \to A; a \mapsto s^n a$ は同相であるから、B が A で開なので $s^n B$ は開である。また、B の定義イデアル I が $0 \in A$ の開近傍より $s^n \to 0$ より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ で $s^k \in I$ となるものが取れる。よって $s^n B \subset I$ より B の I から定まる位相は sB によって定まる位相と一致するので B

は sB を定義イデアルとして持つ。 □

以下、完備 (化) と言ったら Hausdorff 完備 (化) のことを指すこととする。

定義 1.16 (完備化). A を Huber ring とし、定義環 A_0 とその定義イデアルを I を取る。このとき A の**完備化** (completion) とは $\varprojlim A/I^n$ のことであり、それを $\hat{A}$ と表す。ここで $I^n \subset A$ は A_0 のイデアルとしての冪であり、剰余環とその逆極限は加法群として考えて取っている。とくにこれは定義環とその定義イデアルのとり方によらないことが、定義イデアルが基本近傍系を為していることからわかる。

補題 1.17. A を Huber ring とし、B を A の定義環とし、その定義イデアルを I とする。$\hat{A}$ と $\hat{B}$ を A と B の完備化とする。とくに完備化の左完全性から $\hat{B} \subset \hat{A}$ とみなせる。このとき次が成り立つ。

1. $\hat{A}$ は Huber ring であり、$\hat{B}$ は $\hat{A}$ の定義環であり、$I\hat{B} = \hat{I}$ は $\hat{B}$ の定義環になる。
2. 次の図式

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} & A \arrow[l] \\
\hat{B} \arrow[u] & B \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

は可換で (環の圏において) 押し出しになっている。である。とくに $\hat{A} \cong \hat{B} \otimes_B A$ が成り立つ。

証明. (1)　B が adic より I 進位相の一般論より $\hat{B}$ は $I\hat{B} = \hat{I}$ を定義イデアルとする adic ring になる。さらに、A も $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ による完備化だから $\hat{A}$ は $\{\hat{I}^n \mid n \in \mathbb{Z}^n\}$ を基本近傍系に持つ。ゆえに $\hat{B}$ は開かつ $\hat{I}$ を定義イデアルに持つ adic ring より $\hat{A}$ はこれを定義環と定義イデアルとして持つ Huber ring になる。

(2)　次の図式

$$\begin{tikzcd}
\hat{A} & & \\
& \hat{B} \otimes_B A \arrow[ul, "j"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[ull, bend right, "i"'] \\
& \hat{B} \arrow[u, "g"] \arrow[uul, bend left, "l"] & B \arrow[l, "k"] \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

を考える。とくに i, ι, k, l はすべて単射であるので $\hat{A}$ の部分環と考えることができる。ここで、$\hat{B} \otimes_B A$ にある位相を入れることで、$j\colon \hat{B} \otimes_B A \to \hat{A}$ が位相環としての同型射になることを示す。そのために逆射 $h\colon \hat{A} \to \hat{B} \otimes_B A$ を構成する。まず、とくに $\hat{B}$ が $\hat{A}$ の部分加法群であるので注意 1.3 と同様に分割 $\hat{A} = \sqcup_{i \in I}(\hat{a}_i + \hat{B})$ を考えることができる。ここで $\hat{B}$ が開集合であり、$\hat{A}$ において A が稠密なので各 $\hat{a}_i + \hat{B}$ についてある $a_i \in A \cap (\hat{a}_i + \hat{B})$ が取れるから、これらですべて取り替えて $A = \sqcup_{i \in I}(a_i + \hat{B})$ とできる。したがって、とくに $\hat{A} = A + \hat{B}$ と書ける。ゆえに任意の $\hat{A}$ の元 $\hat{a}$ についてある $a \in A$ と $\hat{b} \in \hat{B}$ によって $\hat{a} = a + \hat{b}$ と書ける。ここで h を

$$\begin{aligned}
h\colon \hat{A} &\longrightarrow \hat{B} \otimes_B A \\
\hat{a} = a + \hat{b} &\longmapsto h(\hat{a}) \coloneqq f(a) + g(\hat{b}) (= 1 \otimes a + \hat{b} \otimes 1)
\end{aligned}$$

と定める。h が j の逆の位相環の準同型になっていることを示す。

h が写像であることを示す。$a, a' \in A$ と $\hat{b}, \hat{b}' \in B$ によって $\hat{a} = a + \hat{b} = a' + \hat{b}'$ となったとする。$A \ni a - a' = \hat{b}' - \hat{b} \in \hat{B}$ である。ここで、$\hat{A}$ の部分環とみなすことで $A \cap \hat{B} = B$ が成り立つ。実際、$\hat{B}$ は $\hat{A}$ における B の閉包に等しく、相対位相を持つので位相空間論の一般論 ([MSE1]) を $A \cap B \subset A \subset \hat{A}$ に適用することで $A \cap \hat{B} = A \cap \overline{B}^{\hat{A}} = \overline{A \cap B}^{A}$ となる。B は A の開部分環だったので注意 1.3 と合わせて $\overline{A \cap B}^{A} = \overline{B}^{A} = B$ となるので $A \cap \hat{B} = B$ が成り立つ。これを用いて、$a - a' = \hat{b}' - \hat{b} \in A \cap \hat{B} = B$ となるから、図式の可換性より $f(a - a') = f(\iota(a - a')) = g(k(a - a')) = g(k(\hat{b}' - \hat{b})) = g(\hat{b}' - \hat{b})$ である。したがって、$f(a') + g(\hat{b}') = f(a' - a) + f(a) + g(\hat{b}') = g(\hat{b}' - \hat{b}) + f(a) + g(\hat{b}) = f(a) + g(\hat{b})$ より、$h(\hat{a})$ は $\hat{a} = a + \hat{b}$ の表示のとり方によらないで定まるので h は写像になる。

表示によらないことと定義から h について (a) 加法的、(b)$f = h|_A$、(c)$g = h|_{\hat{B}}$ (d)$h(1) = 1$ が成り立つ。h が環準同型であることを示すためには、積を保つことを示せば良い。任意の $\hat{a} = \hat{A}$ について $\hat{A}$ で A が稠密より、ある A の点列 (a_n) が存在して $a_n \to \hat{a}$ となるものが取れる。上述の (b) より $f(a_n) = h(a_n) \in \hat{B} \otimes_B A$ である。ここで、$\hat{B} \otimes_B A$ が $f \colon A \to \hat{B} \otimes_B A$ と $h \colon \hat{A} \to \hat{B} \otimes_B A$ が連続とするような完備位相環の構造を持つことが示されれば十分である。実際、(a_n) が収束列だったので f と h の連続性から $\hat{B} \otimes_B A$ 内の点列 $(f(a_n)) = (h(a_n))$ はとくにコーシー列になる。さらに $\hat{B} \otimes_B A$ の完備性からこの点列は収束するので $h(\hat{a}) = \lim_{n\to\infty} h(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ となる。よって、$\hat{A}$ の元 $\hat{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$ と $\hat{a}' = \lim_{n\to\infty} a'_n$ について、$\hat{a}\hat{a}' = \lim_{n\to\infty} a_n a'_n$ となることから、$\hat{B} \otimes_B A$ が位相環、とくに積の連続性から $\lim$ と積を交換でき、f はもともと環準同型なので $h(\hat{a}\hat{a}') = \lim_{n\to\infty} h(a_n a'_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n a'_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \lim_{n\to\infty} f(a'_n) = h(\hat{a})h(\hat{a}')$ となるので h が積を保つことがわかる。

そのような構造が $\hat{B} \otimes_B A$ に入ることを示す。まず、上の図式で $j \circ g = l$ は単射なので $g \colon \hat{B} \to \hat{B} \otimes_B A$ も単射になる。$\hat{B} \otimes_B A$ の位相を $g \colon \hat{B} \to \hat{B} \otimes_B A$ が開埋め込みになる位相を入れる。g が連続になり、(c) より h も $\hat{B}$ において連続だから、とくに $0 \in \hat{B} \subset \hat{A}$ で連続である。よって (b) から f も $0 \in A \subset \hat{A}$ で連続である。f はもともと環準同型であり、h は (a) から加法的なので 0 での連続性からそれぞれの定義域全体で連続になる。

また、$\hat{B}$ の完備性から $g(\hat{B})$ も完備になるので $\hat{B} \otimes_B A$ も完備になる。実際、$\hat{B} \otimes_B A$ のコーシー列 (x_n) を取ると、$g(\hat{B})$ が開集合として埋め込まれていたから、ある $N \in \mathbb{Z}^+$ が存在して、任意の N 以上の整数 n と m について $x_n - x_m \in g(\hat{B})$ となる。とくに任意の $n \geq N$ について $x_n - x_N \in g(\hat{B})$ より、ある $\hat{b}_n \in \hat{B}$ によって $x_n = x_N + g(\hat{b}_n)$ となる。任意の 0 の開近傍 $U \subset \hat{B}$ について g が開埋め込みより $g(U)$ は $0 \in \hat{b} \otimes_B A$ の開近傍だから N 以上の $M \in \mathbb{Z}^+$ が存在して、M 以上の整数 n と m について $x_n - x_m \in g(U)$ となる。N 以上なので、$x_n - x_m = (x_N + g(\hat{b}_n)) - (x_N + g(\hat{b}_m)) = g(\hat{b}_n) - g(\hat{b}_m) \in g(U)$ であり、g は単射だったから $\hat{b}_n - \hat{b}_m \in U$ となるので、$(\hat{b}_n)$ も $\hat{B}$ のコーシー列になる。$\hat{B}$ の完備性から $(\hat{b}_n)$ は、ある $\hat{b} \in \hat{B}$ に収束する。十分大きい n において $x_n - (x_N + g(\hat{b})) = g(\hat{b}_n) - g(\hat{b}) \in g(U)$ であるので、g が開埋め込みより $g(U)$ の形のもので $0 \in \hat{B} \otimes_B A$ の開近傍は全てだから、$x_n \to x_N + g(\hat{b})$ となるから、$\hat{B} \otimes_B A$ は完備である。

$\hat{B} \otimes_B A$ がこの位相で位相環になることを示す。$\hat{B}$ が位相群だから、$\hat{B} \otimes_B A$ はすでに位相群になっているので、積の連続性を示せば良い。まず、$\hat{b} \otimes a \in \hat{B} \otimes_B A$ と任意の 0 の開近傍 $U \subset \hat{B} \otimes_B A$ について $(\hat{b} \otimes a) \cdot V \subset U$ となる 0 の開近傍 $V \subset \hat{B} \otimes_B A$ が存在することを示す。$g^{-1}(U)$ が $\hat{B}$ で開なので、ある $\hat{B}$ の開イデアル S が存在して $S \subset g^{-1}(U) \subset \hat{B}$ となる。$\hat{B}$ は $\hat{A}$ で開集合だったので S は $\hat{A}$ においても開である。上で示した $A \cap \hat{B} = B$ より $S \cap A \subset \hat{B} \cap A = B \subset A$ となり、$S \cap A$ は A で開かつ B に含まれる。ここで、$\{a\} \subset A$ は有界であるから A の開集合 $S \cap A$ に対して、ある 0 の開近傍 $T \subset B$ が存在して、

$a \cdot T \subset S \cap A \subset B \subset A$ となっている。B において T が開なので、$T \cdot \hat{B}$ は $\hat{B}$ において開になっているから、その g による像 $g(T \cdot \hat{B})$ は $\hat{B} \otimes_B A$ における開集合になる。$V \coloneqq g(T \cdot \hat{B})$ として、これが求める開集合であることを示す。すなわち、$(\hat{b} \otimes a) \cdot V \subset U$ を示す。$T \subset B$ より $g(T) = g(k(T)) = f(\iota(T)) = f(T)$ に注意すると、$V = g(T \cdot \hat{B}) = g(T) \cdot g(\hat{B}) = f(T) \cdot g(\hat{B})$ である。任意の $t \in T$ について、$f(t) = 1 \otimes t \in \hat{B} \otimes_B A$ より $(\hat{b} \otimes a) \cdot f(t) = \hat{b} \otimes at$ となる。まず、$at \in a \cdot T \subset B$ だったので B 上のテンソルを取っていることから $\hat{b} \otimes at = at(\hat{b} \otimes 1) = \hat{b}at \otimes 1 = (\hat{b} \otimes 1) \cdot (at \otimes 1)$ となる。さらに $at \in S \cap A \subset S \subset g^{-1}(U)$ から $at \otimes 1 = g(at) \subset g(S) \subset U$ となるので $(\hat{b} \otimes a) \cdot f(t) = (at \otimes 1) \cdot (\hat{b} \otimes 1) \subset g(S) \cdot g(\hat{B})$ となる。ゆえに記法 1.1 の定義と S が $\hat{B}$ のイデアルであることに注意すると $(\hat{b} \otimes a) \cdot V = (\hat{b} \otimes a) \cdot f(T) \cdot g(\hat{B}) = \{\hat{b} \otimes at \mid t \in T\} \cdot g(\hat{B}) \subset g(S) \cdot g(\hat{B}) = g(S) \subset U$ となる。よって、この V が求める条件を満たすことが示された。

積の連続性を示す。任意の 0 開近傍 $U \subset \hat{B} \otimes_B A$ を取る。十分小さくして和で閉じているようにできる。任意の $x \in \hat{B} \otimes_B A$ について $\hat{B} \otimes_B A$ の元 $y \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \hat{b}_i \otimes a_i$ と $z \coloneqq \sum_{j=1}^{m} \hat{b}'_j \otimes a'_j$ であって、$yz = x$ となるものを取る。ここで、U について、各 $\hat{b}_i \otimes a_i$ と $\hat{b}'_j \otimes a'_j$ に対して上で示したように開集合 V が取れる。$i = 1, \ldots, n$ と $j = 1, \ldots, m$ それぞれの添字について共通部分を取りそれを V_y と V_z とする。とくに $g(\hat{B})$ が $\hat{B} \otimes_B A$ で開集合かつ adic なので V_y と V_z を十分小さくすることで $V_y \cdot V_z \subset U$ となるようにできる。このとき $y + V_z$ と $z + V_y$ の積は $yz + z \cdot V_z + y \cdot V_y + V_z \cdot V_y$ に含まれる。これは $yz = x$ と $z \cdot V_z \subset U$ かつ $y \cdot V_y \subset U$ と合わせて $x + U$ に含まれる。よって $yz = x$ となるような元についてその開近傍 $(y + V_z) \times (z + V_y) \subset \hat{B} \otimes_B A \times \hat{B} \otimes_B A$ の積 $x + U$ に含まれるから $\hat{B} \otimes_B A$ の積は連続である。

以上より確かに $\hat{B} \otimes_B A$ は f と h を連続とするような完備位相環の構造が入るので h は環準同型になる。定義から $j \circ h = \mathrm{id}_{\hat{A}}$ である。さらに任意の $x \in f(A) \cup g(\hat{B})$ については h の定義より $(h \circ j)(x) = x$ となる。$h \circ j$ が環準同型より、$(h \circ j)(\hat{b} \otimes a) = (h \circ j)(g(\hat{b})f(a)) = (h \circ j)(g(\hat{b})) \cdot (h \circ j)(f(a)) = g(\hat{b})f(a) = \hat{b} \otimes a$ より $h \circ j = \mathrm{id}_{\hat{B} \otimes_B A}$ となる。さらに、$j \circ g$ について開集合 $U \subset \hat{A}$ の j による逆像を g で引き戻したものは図式の可換性から $U \cap \hat{B}$ となるから $\hat{B}$ で開集合になる。よって、$j^{-1}(U) \supset g(U \cap \hat{B})$ であり、g が開埋め込みであることから $j^{-1}(U)$ は開集合を含むのでこれ自身も開集合になる。よって j は連続。以上より、j は連続であり、h も連続であったから h と j は互いに逆な位相環の準同型になる。したがって位相環としての同型 $\hat{A} \cong \hat{B} \otimes_B A$ を得る。 □

注意 1.18. $\hat{A}$ が押し出しの普遍性を満たすことを直接示すことは難しいと思われる。まず $A \cdot \hat{B} = \hat{A}$ と $A \cap \hat{B} = B$ から $j \colon \hat{B} \otimes_B A \to \hat{A}$ が同型であることを証明するのは難しい。一般に環 A とその部分環 B と C について $D \coloneqq B \cap C$ 上のテンソル積に関して $B \otimes_D C \to B \cdot C = A; b \otimes c \mapsto bc$ が写像であることを確かめるのは難しく、また、写像であったとしても単射であるとは限らない。実際、B と C と D が体のときこれが単射になることは B と C が D 上線型無関連であるという定義がなされている。例えばこれが写像だが同型にならない反例として [SE1] がある。実際、[SE1] の記号のもとで、$1 \otimes 1 + \omega\alpha \otimes \alpha^2/2 + \omega^2\alpha^2 \otimes \alpha/2 \in E \otimes_{\mathbb{Q}} F$ を取るとこれは $E \cdot F$ に移すと 0 になる。一方、$\mathbb{Q}$ 加群としての同型 $E \cong \mathbb{Q}^3$ と $F \cong \mathbb{Q}^3$ を考えると、この元に対応する $\mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^3 \cong \mathbb{Q}^9$ の元は 0 にならないことが計算によってわかり、単射ではない。

注意 1.19. ここで述べた補題 1.17 の証明は元を取って h を構成することによって示されていた。これは [Hu93] に沿って示したためであるが、そうではない証明が [GR] の Proposition8.3.28(3) に記載されている。

系 1.20. A を Huber ring として $\hat{A}$ をその完備化とするとき次が成り立つ。

1. A がネーターである定義環を持つとき $A \to \hat{A}$ は平坦射になる。

2. A がネーターである定義環上有限生成代数のとき A と $\hat{A}$ はネーター環になる。

証明. A のネーターな定義環を B とする。(1)　補題 1.17 より $A \to \hat{A}$ は自然な射 $A \to \hat{B} \otimes_B A$ である。B がネーターかつ adic なので $B \to \hat{B}$ が平坦になる。$B \to A$ による底変換によって平坦性は保たれるから、$A \cong B \otimes_B A \to \hat{B} \otimes_B A$ も平坦になるから示された。

(2)　有限生成 B 代数よりある $x_1, \ldots, x_n \in A$ によって $A = B[x_1, \ldots, x_n]$ と表すことができる。B がネーターより A はネーターになる。また、$\hat{A} \cong \hat{B} \otimes_B A = \hat{B} \otimes_B B[x_1, \ldots, x_n] \cong \hat{B}[x_1, \ldots, x_n]$ になり、B がネーターかつ adic なので $\hat{B}$ はネーターだから $\hat{A}$ はネーターになる。 □

参考文献

[BV] K. Buzzard and A. Verberkmoes, "Stably uniform affinoids are sheafy," arXiv:1404.7020 [math], Sep. 2015, Accessed: Aug. 02, 2021. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1404.7020

[So] M. Sophie, "Adic spaces", [Online]. Available: http://perso.ens-lyon.fr/sophie.morel/adic_notes.pdf

[Wed] T. Wedhorn, "Adic Spaces," arXiv:1910.05934 [math], Oct. 2019, Accessed: Jul. 11, 2021. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1910.05934

[Hu94] R. Huber, "A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties," Math Z, vol. 217, no. 1, pp. 513 – 551, Sep. 1994, doi: 10.1007/BF02571959.

[Hu93] R. Huber, "Continuous valuations," Math Z, vol. 212, no. 1, pp. 455 – 477, Jan. 1993, doi: 10.1007/BF02571668.

[SW] P. Scholze and J. Weinstein, Berkeley lectures on p-adic geometry. Princeton; Oxford: Princeton University Press, 2020.

[Ran] D. Rankeya, "HUBER RINGS", [Online]. Available: https://rankeya.people.uic.edu/Huber_rings.pdf

[GR] O. Gabber and L. Ramero, "Foundations for almost ring theory – Release 7.5," arXiv:math/0409584, Sep. 2018, Accessed: Dec. 22, 2020. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/math/0409584

[MSE1] "general topology - Relative closure theorem," Mathematics Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/questions/2649922/relative-closure-theorem (accessed Aug. 30, 2021).

[SE1] "abstract algebra - Linearly disjoint fields - Mathematics Stack Exchange." https://math.stackexchange.com/questions/2786433/linearly-disjoint-fields (accessed Aug. 30, 2021).