Le lemme d'Abhyankar perfectoide

https://ryo1203.github.io

概要

Le lemme d'Abhyankar perfectoide の何章かを日本語でメモする。和訳そのものではなくいくつか書き足したり省略したりしている。まだ理解できていない命題などには?をつけてある。章の番号などは原文に揃える。

目次

1 Preliminaires de presque-algebre 1
- 1.1 Cadre . . . 1
- 1.2 V^a-module . . . 2
- 1.3 Lemmes de Mittag-Leffler et de Nakayama . . . 2
- 1.4 V^a-algebra . . . 3
- 1.5 Recadrage . . . 4
- 1.6 Platitude . . . 4
- 1.7 A-Modules projectifs finis . . . 5
- 1.8 A-algebrés étales finies . . . 6
- 1.9 Extensions galoisiennes . . . 6

2 La categorie bicomplete des algebres de Banach uniformes 11
- 2.1 Algebres de Banach . . . 11
- 2.2 Normes spectrales . . . 14
- 2.3 Dictionnaire . . . 16

1 Preliminaires de presque-algebre

1.1 Cadre

cadre もしくは basic setup とは、環 V とその冪等イデアル $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ の組 $(V, \mathfrak{m})$ のことである。

[GR] と同様に $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m} \otimes_V \mathfrak{m}$ が V 上平坦であることを仮定する。この仮定は base change で不変である ([GR] Remark 2.1.4)。 [*1] $\mathfrak{m}$ が V 上平坦であるよりも弱い条件である。もし V 上平坦であれば $\mathfrak{m} \cong \tilde{\mathfrak{m}}$ となる。

---

*1 環準同型 $V \to W$ があるとき、$\mathfrak{m} \subset V$ を base change した $\mathfrak{m}_W := \mathfrak{m} \otimes_V W$ とイデアルの拡大 $\mathfrak{m}W$ について、$\tilde{\mathfrak{m}_W} \cong \tilde{\mathfrak{m}W}$ である。これによって $(W, \mathfrak{m}W)$ は cadre になる。

$\pi \in V$ を非零因子とし、(π^{1/p^i}) を整合的な p 乗根の列とするとき、単項イデアルの和集合

$$\pi^{1/p^\infty} V := \bigcup_{i \geq 1} \pi^{1/p^i} V \tag{1.1}$$

を上記の $\mathfrak{m}$ として取ることが出来る。本稿ではこの場合を考えれば十分である。

1.2 V^a-module

V^a **加群の圏** (V^a-Mod)(正確には $(V, \mathfrak{m})^a$ 加群の圏) とは V 加群の圏 (V-Mod) の $\mathfrak{m}$torsion なものからなる Serre 部分圏による圏の局所化のことである。ここで、V 加群が $\mathfrak{m}$torsion であるとは、$\mathfrak{m}$ によって消えることであり、これを almost zero であるという。

$\mathrm{Hom}_{V^a}(M, N) = \mathrm{Hom}_V(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M, N)$ となる ([GR] 2.2.2)。

V 加群の射が almost injective/almost surjective であるとは、その核/余核が almost zero であることである。これらは V^a 加群の圏における mono 射と epi 射に対応している。

V^a 加群の圏はアーベル圏である。とくに V 加群の射が almost injective かつ almost surjective であることは almost isomorphism であること (V^a-Mod で同型であること) に等しい。対象に関しては恒等的な局所化関手 $M \mapsto M^a$ は次の随伴を持つ。

(1) 右随伴:$N \mapsto N_* := \mathrm{Hom}_{V^a}(V^a, N)$(これを almost element という)。
(2) 左随伴:$N_! := \tilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_*$。

とくにこれらは順極限と逆極限について可換であり、

$$\mathrm{Hom}_{V^a\text{-Mod}}(M^a, N^a) \cong \mathrm{Hom}_V(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M, N) \tag{1.2}$$

が成り立っている ([GR] 2.2.2)。さらに $(N_*)^a \cong N$ と $(M^a)_* \cong \mathrm{Hom}_V(\tilde{\mathfrak{m}}, M)$ が成り立つ (この右辺も混同のない限りにおいて M_* と書くこともある)。関手 $(-)_*$ は右完全ではないが、射 $N \to N'$ が epi 射であることと $N_* \to N'_*$ が almost surjective であることは同値である。

1.3 Lemmes de Mittag-Leffler et de Nakayama

現在の文脈における Mittag-Leffler **の補題**は次のとおりである。(N^n) を V^a 加群の逆系とし、その間の射が epi 射であれば $\varprojlim N^n \to N^0$ は epi 射になる。これは V-Mod で同様に成り立つことと、二つの右完全関手 $(-)_!$ と $(-)^a$ を順番に作用させることによって示される ($(-)_!$ と $(-)^a$ の合成は V^a-Mod 上で恒等的である)。[*2]

以上よりアーベル圏 V^a-Mod は bicomplete である。(すなわち順極限と逆極限を持つ) また、V を generator として持ち、epi 射の積はまた epi 射になり、したがって $\lim^i$ はアーベル群の圏におけるものと同じ形になる。とくに可算な添字集合であるとき $i > 1$ は消える。局所化関手は $\lim^1$ と可換であるので通常の余核として計算できる。

現在の文脈における完備な加群に対する**中山の補題**は次のとおりである ([GR] Lem.5.3.3)。[*3] I を V のイデ

*2 $\tilde{m}$ が V 上平坦であるので $N_! = \tilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_* \cong \tilde{\mathfrak{m}} N_* \subset N_*$ となる。すると $N_! \cong \tilde{\mathfrak{m}} N_*$ と N_* が almost isomorphism であることから $(N_!)^a \cong (N_*)^a \cong N$ より従う。

*3 [AM] Lemma 10.23 の類似。

アルとし、$f\colon M \to N$ を I 進完備な V^a 加群[*4]の間の射とする。このとき $M/I \to N/I$ が epi 射ならば f も epi 射になる。

実際、水平方向の (各次数ごとに積をとる) 射が epi 射である可換図式 (テンソル積や gr は V-Mod で取っている)

$$\begin{CD}
(\mathrm{gr}_I V) \otimes_{V/I} M/IM @>>> \mathrm{gr}_I M \\
@V{1\otimes\overline{f}}VV @VV{\mathrm{gr}_I f}V \\
(\mathrm{gr}_I V) \otimes_{V/I} N/IN @>>> \mathrm{gr}_I N
\end{CD}$$

について、仮定から左の射が epi 射なので $\mathrm{gr}_I f$ も epi 射になっている。これより、$f_n\colon M/I^nM \to N/I^nN$ も epi 射になり、蛇の補題から $\mathrm{Ker}(f_{n+1}) \to \mathrm{Ker}(f_n)$ も epi 射になる。逆極限を取ることによって Mittag-Lefller より $\lim^1 \mathrm{Ker}(f_n) = 0$ になるので f は epi 射になる。

1.4 V^a-algebra

V^a **代数** (本稿では常に可換なもの) とは V^a-Mod における (可換) モノイド対象である。V^a 代数からなる V^a-Mod のモノイダル部分圏を V^a-Alg と表す。関手 $(-)^a$ は V-Alg に V^a-Alg を対応付け、(部分圏への制限によって)$(-)_*$ を右随伴として持つ。また、左随伴として ($(-)_!$ ではなく)$(-)_{!!}$ を持つ ([GR] 2.2.25)。

圏 V^a-Alg はテンソル積を持ち、$(A \otimes_V B)^a \cong A^a \otimes_{V^a} B^a$ となる。

もし A が V^a 代数だったとすると、圏 A-Mod や A-Alg を定義できる ([GR] 2.2.12)。[*5]また、M と N を A 加群とするとき、$\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, N)$ は自然に A_* 加群の構造を持つので

$$\mathrm{alHom}_A(M, N) \coloneqq (\mathrm{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, N))^a \tag{1.3}$$

を定義できる。これを almost morphism という ([GR] 2.2.11)。関手 $(-)^a$ は A_*-Alg に A-Alg に対応付け、$(-)_*$ を右随伴として持つ。

$\mathcal{K}$ 代数 (結合的可換かつ単位的) の圏が (小さい) 逆極限と順極限を持ち、加群化関手 ($\mathcal{K}$-Mod への忘却関手) は逆極限と filtered な順極限を保つことがわかっている。$(-)^a$ を介して、almost algebra に対しても同じことが言える。有限直積への分解 $V = \prod V_i$ を与えることは冪等な完全正規直交系 $e_i \in V_i$ を与えることに等しい。

圏 A-Mod はテンソル積 $\otimes_V$ を持ち、これが A-Alg に余積を与える。

V^a-Alg の射 $\varphi\colon A \to B$ が mono 射であることと $\varphi_*\colon A_* \to B_*$ が almost injective であることは同値である。この場合を B が A の**拡大**という。

1.4.1 Example

almost algebra は次のような場合に自然に出てくる。$\mathcal{K}$ を非離散的な付値をもつ完備体とする。$V \coloneqq \mathcal{K}^\circ$ を付値環とし、$\mathfrak{m} \coloneqq \mathcal{K}^{\circ\circ}$ を付値イデアルとする。ϖ を $\mathfrak{m}$ のゼロではない元とし、A を ϖ-torsion が無い、もしくは infinite ϖ-divisible [*6]が無いような V 代数とする。$\mathcal{K}$ 代数 $A[1/\varpi]$ に対して ϖ から得られる自然なノルムを与える。このとき単位円板は $(A^a)_*$ に等しい (section 2.3.1(2b)) (一般には単位円板は A と異なる

[*4] V^a 加群が I 進完備であるとは、自然な射 $M \to \varprojlim M/I^n$ が V^a-Mod で同型になることである ([GR] Def 5.3.1(iv))。
[*5] 対象は通常の A 加群や A 代数で考えられ、射のみが異なる。一般の"モノイダル圏上の加群"という概念に等しい。
[*6] $x \in A$ が infinite ϖ-divisible であるとは、任意の正整数 n について $x \in \varpi^n A$ であるようなものである。

が almost isomorphism になることがわかっている)。

1.5 Recadrage

cadre の変換 $(V, \mathfrak{m}) \to (V', \mathfrak{m}')$ を考える (V から V' への環準同型であり、$\mathfrak{m}$ を $\mathfrak{m}'$ の中へ移すものである)。スカラーの制限による完全関手 V'-Mod $\to V$-Mod によって、完全関手

$$(V', \mathfrak{m}')^a\text{-Mod} \longrightarrow (V, \mathfrak{m})^a\text{-Mod} \tag{1.4}$$

を得る。もし $\mathfrak{m}' = V' = V$ だとすると、この関手は局所化関手 $(-)^a\colon V\text{-Mod} \to (V, \mathfrak{m})^a\text{-Mod}$ に等しい。[*7] 同様にして環構造を変えないスカラーの制限による関手 $(V', \mathfrak{m}')^a\text{-Alg} \to (V, \mathfrak{m})^a\text{-Alg}$ が定義できる。この関手で A' に A が対応されるとき、次の関手

$$A'\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}, \tag{1.5}$$

$$A'\text{-Alg} \longrightarrow A\text{-Alg} \tag{1.6}$$

を recadrage という。とくに対象の下部構造は変化していないが、cadre が変化している。もし $\mathfrak{m}' = V' = V$ だとすると、この関手は局所化関手 $(-)^a\colon A\text{-Mod/Alg} \to (V, \mathfrak{m})^a\text{-Mod/Alg}$ に等しい。もし $\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}'$ を生成するとすると、recadrage は同型になる。これは $A' \mapsto A$ と対応しているため、もともとその下部環構造は変化しておらず、その上の加群も変化せず、$\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}'$ を生成していることから almost zero module であることも変化しないからである。ここで、almost element をとる関手 $(-)_*(= ((-)^a)_*)\colon V'\text{-Mod} \to V\text{-Mod}$ と recadrage を一度挟む関手 $V'\text{-Mod} \to (V')^a\text{-Mod} \to V^a\text{-Mod} \to V\text{-Mod}$ の二つの関手の間の自然変換

$$\mathrm{Hom}_{V'}(\tilde{\mathfrak{m}}', N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_V(\tilde{\mathfrak{m}}, N) \tag{1.7}$$

を (自然に) 与えることが出来る。

感覚的には、$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$ であることから"almost"性 (almost zero など) は recadrage によってより緩い条件になる。[*8] しかし $\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}'$ を生成する場合は変化しない。

1.6 Platitude

A 加群 M が flat であるとは、A-Mod 上の自己関手 $- \otimes_A M$ が完全になることである。

射 $\varphi\colon A \to B$ が (faithfully)flat であるとは、$B \otimes_A -\colon A\text{-Mod} \to B\text{-Mod}$ が (faithful)exact になることである。射 φ が flat(faithfully flat) であることと、B が A 加群として flat(φ が mono 射かつ B/A が A 加群として flat) は同値 ([GR] 3.1.2(vi))。[*9] もし φ_* が flat(faithfully flat) であればこの条件は満たされる。さらに、$\varphi\colon A \to B$ が faithfully flat であることと $\varphi_{!!}\colon A_{!!} \to B_{!!}$ が faithfully flat であることは同値 ([GR] 3.1.3 ii)。[*10] (faithfully)flat なものたちの filtered な順極限は、また (faithfully)flat になる。base change や合成などについての通常のものと同様な性質も成り立っている ([GR] 3.1.2)。

[*7] (V, V) を cadre とするときの almost zero module は zero module に等しいので $(V, V)^a$-Mod は V-Mod そのものである。

[*8] $\mathfrak{m}$ や $\mathfrak{m}'$ を掛けて消えるものを無視するが、$\mathfrak{m}$ より大きい $\mathfrak{m}'$ を掛けても消えなければならない方が条件が厳しい。

[*9] faithfully flat の方については、$0 \to A \to B \to B/A \to 0$ に関する Tor sequence を考えれば良い。

[*10] 一般に $(-)_{!!}$ で flat 性は保たれない。

1.7 A-Modules projectifs finis

今までのものと異なり、通常の加群とは微妙に異なる状況であるような性質について見ていく。

1.7.1

A を V^a 代数とする。A 加群 P が finite projective であるとは、任意の $\eta \in \mathfrak{m}$ に対して、ある正整数 n と A 加群の射 $P \to A^n \to P$ であって、この合成が $\eta \mathrm{id}_P$ になっていることである (この性質は A-Mod での P の同型類によらない)。

finite projective であることは以下の二つの条件を満たすことと等しい ([GR] 2.3.10(i), 2.4.15)。

(a) P が almost projective である。すなわち、任意の A 加群 N と任意の $i > 0$ で $\mathfrak{m}\,\mathrm{Ext}^i_A(P, N) = 0$ となる。

(b) P は almost finite type である。すなわち、任意の $\eta \in \mathfrak{m}$ について、射 $A^{n(\eta)} \to P$ が存在して、その余核が η によって消える。

1.7.2 Remark

(1) finite projective な加群 P は flat である ([GR] 2.4.18)。加えて、P が A 加群として faithful(すなわち、$A \to (\mathrm{End}(P))^a$ が mono 射) になるならば faithfully flat である。

(2) P を finite projective であるとき、その外積 $\bigwedge^r P$ も finite projective になる。また、trace morphism と呼ばれる射 $tr_{P/A}\colon (\mathrm{End}(P))^a \to A$ を得る ([GR] 4.1.1)。

(3) A' を faithfully flat な A 代数とする。このとき P が finite projective な A 加群であることと、$P \otimes_A A'$ が finite projective な A' 加群であることは同値 ([GR] 3.2.26 (ii)(iii))。

補題 1.7.1. I を A のイデアルとし、A は (V^a 代数として)I 進完備であるとする。このとき任意の finite projective な A 加群 P は (A 加群として)I 進完備である。

証明. ([GR] 5.3.5 参照) 自然な射 $P \to \widehat{P} := \varprojlim P/I^n$ が (A-Mod での) 同型になることを示せば良い。任意の $\eta \in \mathfrak{m}$ について、ある正整数 n が存在して可換図式

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \widehat{P} & \longrightarrow & \widehat{A}^n & \longrightarrow & \widehat{P} \end{array}$$

を得る。水平方向の合成はともに $\eta\mathrm{id}$ であり、真ん中の垂直方向の射は A の I 進完備性から同型になる。図式を追うことで $P \to \widehat{P}$ の核と余核は η で打ち消されることがわかる。よって $P \to \widehat{P}$ は A-Mod で同型になる。 □

finite projective な A 加群 P が of (constant) rank r であるとは、$\bigwedge^{r+1} P = 0$ かつ、$\bigwedge^r P$ が可逆 A 加群[*11]になることである ([GR] Def 4.3.9 (iv))。[GR] 4.4.24 によれば、このような加群は fpqc topology に関

[*11] A 加群 M が**可逆**であるとは、$M \otimes_A M^* \cong A$ となることである。ただし、$M^* := \mathrm{alHom}_A(M, A)$ である。

して階数 r の局所自由加群になっている (この結果は以降では使わない)。

1.8 A-algebrés étales finies

A 代数 B が finite étale/finite étale of rank r とは次の二条件を満たすことである。

(a) B は finite projective/finite projective of rank r な A 加群である。

(b) B は unramified である。すなわち、A 代数としての分解 $B \otimes_A B \cong B \times C$ であって、この同型と第一成分の射影の合成 $B \otimes_A B \to B \times C \to B$ は積を取る準同型 $\mu_B \colon B \otimes_A B \to B$ と一致するものがある。

(a) のもとで、(b) の条件と μ_B が flat であることは同値 ([GR] 3.1.2 (vii), 3.1.9)。

1.8.1 Remark

(1) finite étale 拡大 $A \hookrightarrow B$ は faithfully flat である。

(2) B を A 上 finite étale とするとき A 加群の射である trace 写像として $\mathrm{Tr}_{B/A} \colon B \to A$ が、$b \in B$ の積による B 上の自己準同型のトレースを取ることによって得られる。これは base change と可換であり ([GR] 4.1.8(ii))、B の元の積との合成によって B とその A 双対が同型になる ([GR] 4.1.14)。B_* はその A_* 双対と同型になる。B がとくに finite étale 拡大のときは $\mathrm{Tr}_{B/A}$ は epi 射になる (上記 (1) と [GR] 4.1.11)。

(3) A' と B を A 代数とし、$A \hookrightarrow A'$ が faithfully flat であるとする。このとき B が A 上 finite étale (of rank r) であることと $B \otimes_A A'$ が A' 上 finite étale (of rank r) であることは同値 ([GR] 2.4.18, 3.2.26(ii))。

1.8.2

Grothendieck の"remarkable equivalence"は現在の文脈においても、$\mathfrak{m} = \pi^{1/p^\infty}V$ か、A が π 進完備であれば成り立つ。すなわち、π による剰余によって finite étale A 代数と finite étale A/π 代数は圏同値になる ([GR] Theo 5.3.27)。

1.9 Extensions galoisiennes

1.9.1

$A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$ を V^a 代数の拡大とする。$X \subset \mathrm{Hom}_A(B, C)$ として A 上の環準同型からなる集合とする。このとき標準的な C 代数の射

$$B \otimes_A C \longrightarrow \prod_{\chi \in X} C \tag{1.8}$$

$$b \otimes c \longmapsto (\chi(b)c)_{\chi \in X} \tag{1.9}$$

が取れる。

また、G を B の A 自己同型からなる有限群とすると、$B \to B \otimes_A B, b \mapsto 1 \otimes b$ によって $B \otimes_A B$ に B 加群の構造を入れると、標準的な B 代数の射

$$B \otimes_A B \longrightarrow \prod_{\gamma \in G} B \tag{1.10}$$
$$b \otimes b' \longmapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G} \tag{1.11}$$

が得られる。n を G の位数とし、G^n の元 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ に、その添字の入れ替えによって S_n を作用させる。このとき輪積 (produit en couronne) によって群 $S_n \wr G$ が定義できる。[*12]ここで $\prod_{\gamma \in G} B$ に $(\sigma, (\gamma_1, \ldots, \gamma_n))(b_1, \ldots, b_n) = (\gamma_{\sigma^{-1}(1)}(b_{\sigma^{-1}(1)}), \ldots, \gamma_{\sigma^{-1}(n)}(b_{\sigma^{-1}(n)}))$ によって $S_n \wr G$ を A 自己同型に作用させる ($G \subset \mathrm{Aut}_A(B)$ であることから A 自己同型であることがわかる)。

B^G によって B の中の G-不変なものからなる A 代数を表す (B^G は A 加群としては $B \xrightarrow{(\ldots, \gamma - 1, \ldots)} \prod_{\gamma \in G} B$ の核と一致する)。

1.9.2

V^a 代数の拡大 $A \hookrightarrow B$ が群 G に関して Galois[*13]であるとは、A 加群としての同型 $B^G \cong A$ がありかつ、(1.10) の標準的な射 $B \otimes_A B \to \prod_{\gamma \in G} B$ が B 加群として同型になることである。$(-)_*$ が順極限と可換なので、Galois であることは $(B_*)^G = A_*$ かつ $(B \otimes_A B)_* \to \prod_{\gamma \in G} B_*$ が (通常の意味で) 同型になっていることである。[*14]自然に $G \times G$ は $B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$ 上の A 自己準同型を得るが、次の対応

$$G \times G \longrightarrow S_n \wr G \tag{1.12}$$
$$(\gamma, 1) \longmapsto (r_{\gamma^{-1}}, (1, \ldots, 1)) \tag{1.13}$$
$$(1, \gamma) \longmapsto (l_\gamma, (\gamma, \ldots, \gamma)) \tag{1.14}$$

によって $G \times G$ は $S_n \wr G$ の部分群になる。ただし、$g \in G$ について l_g と r_g はそれぞれ $G = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ と添字付けるとき、

$$\gamma_{r_g(i)} = \gamma_i \circ g \tag{1.15}$$
$$\gamma_{l_g(i)} = g \circ \gamma_i \tag{1.16}$$

によって $l_g, r_g \in S_n$ とみなす。とくに $S_n \wr G$ の部分群になることで $G \times G$ は $B \otimes_A B$ の A 自己同型からなる群である。

命題 1.9.1. (1) $A \hookrightarrow B$ が G に関する Galois 拡大であるとすると、これは階数が G の位数であるような finite étale 射になる (とくに (1) から faithfully flat になる)。また、trace 写像 $\mathrm{Tr}_{B/A}$ が G 共役元の和 $b \mapsto \sum_{\gamma \in G} \gamma(b)$ によって与えられる。

(2) A' を A 代数とする。$A \hookrightarrow B$ が G に関する Galois 拡大であるならば $A' \hookrightarrow B \otimes_A A'$ も G に関する Galois 拡大になる。A' が A 上 faithfully flat のときはこの逆も成り立つ。

(3) C が G に関する Galoi 拡大 $A \hookrightarrow B$ の中間にある拡大で、$B \hookrightarrow C$ が $H \triangleleft G$ に関する Galois 拡大であるとする。このとき $B^H \cong C$ から自然に、G/H は C から B への A 上の環準同型からなる集

[*12] $S_n \wr G$ は上記の S_n の G^n への作用による半直積とする。すなわち、集合としては $S_n \times G^n$ であり、積は $(\sigma, (\gamma_1, \ldots, \gamma_n))(\sigma', (\gamma'_1, \ldots, \gamma'_n)) = (\sigma\sigma', (\gamma_{\sigma'(1)}\gamma'_1, \ldots, \gamma_{\sigma'(n)}\gamma'_n))$ として定義される。

[*13] almost Galois ということもある。

[*14] $(-)_*$ が一般にテンソル積と可換ではないので、B が A 上 Galois だとしても B_* が A_* 上 Galois であるか否かはわからない。さらに $(-)_{!!}$ が一般に有限積と可換ではないので、$B_{!!}$ が $A_{!!}$ 上 Galois であるか否かもわからない。

合になり、(1.8) の標準的な射 $B \otimes_A C \to \prod_{\overline{\gamma} \in G/H} B$ を考えることが出来るが、これは同型になる。さらに $A \hookrightarrow C$ は階数 $|G/H|$ の finite étale 射となる。

証明. (1) 重要な点は B が A 上 finite étale であって、とくに section 1.8 の定義から、B が finite projective な A 加群になっていることである (古典的な環の Galois 理論の議論をもとに考えていく)。B は A 上 G に関して Galois ゆえ $(B_*)^G = A_*$ となっている。B_* の A_* 上の共役元の和を与える写像

$$t_{B/A} \colon B_* \longrightarrow (B_*)^G = A_* \tag{1.17}$$

$$b \longmapsto \sum_{\gamma \in G} \gamma(b) \tag{1.18}$$

をとる。ここで B を $B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$ の第一成分の射影[*15]によって $B \otimes_A B$ 加群とみなすことにする (これは $\mu_B \colon B \otimes_A B \to B$ によって $B \otimes_A B$ の構造を入れていることに等しい)。$B = (B_*)^a$ であることに注意すると、V^a-Alg のテンソル積の定義から

$$B \otimes_A B = (B_*)^a \otimes_{(A_*)^a} (B_*)^a = (B_* \otimes_{A_*} B_*)^a \tag{1.19}$$

ゆえに、$(B \otimes_A B)_* = (B_* \otimes_{A_*} B_*)_*$ となることから得られる自然な射 $B_* \otimes_{A_*} B_* \to (B \otimes_A B)_*$ は almost isomorphism になる。

任意の $\eta \in \mathfrak{m}$ を一つ固定する。仮定から $(B \otimes_A B)_* \cong \prod_{\gamma \in G} B_*$ より、$(1, 0, \ldots, 0) \in \prod_{\gamma \in G} B_*$ に対応する冪等元 $e'_\eta \in (B \otimes_A B)_*$ が取れる。almost isomorphism であることから、余核が η で打ち消されるので、とくに $e_\eta \coloneqq \eta e'_\eta \in B_* \otimes_{A_*} B_*$ となる。すると

$$e_\eta^2 = (\eta e'_\eta)^2 = \eta^2 e'^2_\eta = \eta^2 e'_\eta = \eta e_\eta \tag{1.20}$$

より $e_\eta^2 = \eta e_\eta \in B_* \otimes_{A_*} B_*$ となる。さらに積を取る写像 $\mu_{B_*} \colon B_* \otimes_{A_*} B_* \to B_*$ の核 $\mathrm{Ker}(\mu_{B_*}) \subset B_* \otimes_{A_*} B_*$ はそれぞれ $(B \otimes_A B)_*$ と $\prod_{\gamma \in G} B_*$ のイデアル I, J に almost isomorphism である。まず、J は射の構成 (1.10) から $\{0\} \times \prod_{\gamma \in G \setminus \{\mathrm{id}_{B_*}\}} B_*$ に含まれる。ゆえに $(1, 0, \ldots, 0)$ によって打ち消される。元の対応を考えれば $(B \otimes_A B)_*$ において $e'_\eta I = 0$ となる。$\mathrm{Ker}(\mu_{B_*})$ と I が almost isomorphism から $\eta I \cong \mathrm{Ker}(\mu_{B_*})$ である。ゆえに

$$e_\eta \mathrm{Ker}(\mu_{B_*}) = \eta e'_\eta \mathrm{Ker}(\mu_{B_*}) \cong \eta^2 e'_\eta I = 0 \tag{1.21}$$

より、$e_\eta \in B_* \otimes_{A_*} B_*$ は $\mathrm{Ker}(\mu_{B_*})$ を打ち消す。また、e'_η と $(1, 0, \ldots, 0)$ の対応と (1.10) の構成から

$$\mu_{B_*}(e_\eta) = \mu_{B_*}(\eta e'_\eta) = \eta 1_{B_*} \tag{1.22}$$

より $\mu_{B_*}(e_\eta) = \eta 1_{B_*} \in B_*$ となる。

$e_\eta \in B_* \otimes_{A_*} B_*$ より、ある正整数 $n(\eta)$ によって

$$e_\eta \coloneqq \sum_{i=1}^{n(\eta)} b_i \otimes b'_i \tag{1.23}$$

[*15] $b \otimes b' \mapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G}$ で第一成分で取る $\gamma \in G$ は $\gamma = 1 = \mathrm{id}_B \in G$ としている。

と表せる。$e_\eta = \eta e'_\eta$ であり e'_η が $(1,0,\dots,0)$ に対応していることから、(1.10) によって e_η を移せば、$G \ni \gamma \neq \mathrm{id}_{B_*}$ ならば $\sum_{i=1}^{n(\eta)} \gamma(b_i)b'_i = 0$ かつ、$\sum_{i=1}^{n(\eta)} b_i b'_i = \eta 1_{B_*}$ となる。したがって、$b \in B_*$ について、

$$\eta b = \sum_{i=1}^{n(\eta)} bb_i b'_i = \left(\sum_{i=1}^{n(\eta)} bb_i b'_i\right) + \sum_{\gamma \in G \setminus \{\mathrm{id}_{B_*}\}} \left(\sum_{i=1}^{n(\eta)} \gamma(bb_i) b'_i\right) = \sum_{\gamma \in G}\sum_{i=1}^{n(\eta)} \gamma(bb_i)b'_i = \sum_{i=1}^{n(\eta)} t_{B/A}(bb_i)b'_i \tag{1.24}$$

である。このとき次の A_* 加群の射の合成

$$B_* \xrightarrow{b \mapsto (t_{B/A}(bb_i))_{i=1}^{n(\eta)}} A_*^{n(\eta)} \xrightarrow{(a_i)_{i=1}^{n(\eta)} \mapsto \sum_{i=1}^{n(\eta)} a_i b'_i} B_*$$

は $\eta \mathrm{id}_{B_*}$ になる。したがって ($(-)^a$ で A-Mod に移して考えれば) B は A 上 finite projective であることがわかる。B が G に関して A 上 Galois であることからとれる同型 $B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$ より、B は A 上 unramified であるので B は A 上 finite étale になる。

$A \to B$ が faithfully flat であることからその base change である $B \to B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$ も faithfully flat になるので faithfully descent から B は階数 $|G|$ になる。?また、$\mathrm{Tr}_{B/A} = (t_{B/A})^a$ となる。

(2)　B が G に関して A 上の Galois 拡大より、上で示した (1) から $A \hookrightarrow B$ は (faithfully)flat になる。よって $A' \to B' := A' \otimes_A B$ は環の拡大になる。$B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$ より、B' 加群として

$$B' \otimes_{A'} B' = (B \otimes_A A') \otimes_{A'} (B \otimes_A A') \cong (B \otimes_A B) \otimes_A A' \cong \left(\prod_{\gamma \in G} B\right) \otimes_A A' \cong \prod_{\gamma \in G} B' \tag{1.25}$$

となる。また、G を $B' = B \otimes_A A'$ の第一成分に作用させることで section 1.9.2 のように $G \times G \subset S_n \wr G$ の部分群として作用させられる。$(B' \otimes_{A'} B')^{G \times 1}$ を計算する。(1.12) によって $G \times 1$ の任意の元 $(\gamma, 1)$ に対応する $(r_{\gamma^{-1}}, (1,\dots,1)) \in S_n \wr G$ をとる。$\prod_{\gamma \in G} B$ の元 $(b_1,\dots,b_n)$ が任意の $\gamma \in G$ で

$$(r_{\gamma^{-1}}, (1,\dots,1))(b_1,\dots,b_n) = (b_1,\dots,b_n) = (b_{(r_{\gamma^{-1}})^{-1}(1)},\dots,b_{(r_{\gamma^{-1}})^{-1}(n)}) = (b_1,\dots,b_n) \tag{1.26}$$

となるとする。$G = \{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}$ と添字付けられていて、(1.15) の定義から $\gamma_{(r_{\gamma^{-1}})^{-1}(i)} = \gamma_i \circ \gamma$ ゆえ、とくに $\gamma := \gamma_i^{-1} \circ \gamma_j$ と取れば $\gamma_{(r_{\gamma^{-1}})^{-1}(i)} = \gamma_j$ となる。このことから任意の二つの添字を入れ替えるような作用を $G \times 1$ は含むので、$b_1 = \dots = b_n$ となる。対角成分を考えることで、B' 加群の同型

$$A' \otimes_{A'} B' \cong B' \cong \left(\prod_{\gamma \in G} B'\right)^{G \times 1} \cong (B' \otimes_{A'} B')^{G \times 1} \tag{1.27}$$

となる。また、$A \to B$ が flat より、その base change $A' \to B'$ も flat になる。ここで、G-不変な部分は

$$(B' \otimes_{A'} B')^{G \times 1} = \mathrm{Ker}\left(B' \otimes_{A'} B' \xrightarrow{(\dots,(\gamma,1)-1,\dots)} \prod_{\gamma \in G}(B' \otimes_{A'} B')\right) \tag{1.28}$$

$$B'^G = \mathrm{Ker}\left(B' \xrightarrow{(\dots,\gamma-1,\dots)} \prod_{\gamma \in G} B'\right) \tag{1.29}$$

と、核として得ることが出来る。完全列 $0 \to B'^G \to B' \to \prod_{\gamma \in G} B'$ に flat な射 $A' \to B'$ によって $- \otimes'_A B'$ を作用させれば、完全列

$$0 \longrightarrow B'^G \otimes_{A'} B' \longrightarrow B' \otimes_{A'} B' \longrightarrow \prod_{\gamma \in G}(B' \otimes_{A'} B') \tag{1.30}$$

が得られる。核を比較すれば

$$(B' \otimes_{A'} B')^{G\times 1} \cong B'^G \otimes_{A'} B' \tag{1.31}$$

であることがわかる。(1.27) と (1.31) から自然な射によって同型

$$A' \otimes_{A'} B' \cong B'^G \otimes_{A'} B' \tag{1.32}$$

を得る。$A' \to B'$ の faithfully flat 性[*16]から $A' \cong B'^G$ となる。これと (1.25) から $A' \hookrightarrow B'$ は G に関する Galois 拡大になる。

$A \to A'$ が faithfully flat ならここまでの同型について faithfully flat descent より $A \to B$ に関する同型に降下するので逆も成り立つ。

(3)　(1.8) で $X = G/H$ として与えられる標準的な B 代数の射 $C \otimes_A B \to \prod_{\overline{\gamma}\in G/H} B$ に $B \otimes_C -$ を作用させた $B \otimes_C (C \otimes_A B) \to B \otimes_C (\prod_{\overline{\gamma}\in G/H} B)$ は次のように同型な射の合成によって得られる。

$$B \otimes_C (C \otimes_A B) \cong B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma\in G} B \cong \prod_{\overline{\gamma}\in G/H}\left(\prod_{h\in H} B\right) \cong \prod_{\overline{\gamma}\in G/H}(B \otimes_C B) \cong B \otimes_C \left(\prod_{\overline{\gamma}\in G/H} B\right). \tag{1.33}$$

ここで、二つ目の同型は $A \hookrightarrow B$ が G に関する Galois 拡大であることから、四つ目の同型は $C \hookrightarrow B$ が H に関する Galois 拡大であることから従う。$A \hookrightarrow B$ が (1) より、とくに faithfully flat であることから descent を考えれば $C \otimes_A B \to \prod_{\overline{\gamma}\in G/H} B$ は B 代数の同型になる。

また、$A \to C$ の base change $B \to C \otimes_A B \cong \prod_{\overline{\gamma}\in G/H} B$ は自明に階数 $|G/H|$ の finite étale 射になっている。$A \hookrightarrow B$ の faithfully flat 性と section 1.8.1 の (3) から $A \hookrightarrow C$ も階数 $|G/H|$ の finite étale 射になる。 □

1.9.3

1 章の最後に almost algebra から離れて、次の便利な Galois 理論に関する二つの補題を与える。1 つ目の方はここでは標準的なものを与えているが、より一般に成り立つ。

> **補題 1.9.2.** ? $R \hookrightarrow S$ を (通常の) 階数 r の finite étale 拡大になっているとする。このとき $\mathfrak{S}_r$ に関する Galois 拡大 $R \hookrightarrow T$ であって、S を経由し、$S \hookrightarrow T$ が $\mathfrak{S}_{r-1}$ に関する Galois 拡大になるものが存在する。

証明. $X = \mathrm{Spec}(R)$、$Y = \mathrm{Spec}(S)$ とし、Z を r 個の積 $Y \times_X Y \times_X \cdots \times_X Y$ の partial diagonal の補集合であるとする。Y が X 上 finite étale であることから、partial diagonal は開かつ閉であり、結果として Z も開かつ閉になり、このことから X 上 finite étale になる (さらに第一成分の射影によって Y 上 finite étale にもなる)。閉であることからとくに Z も affine scheme になる。一方、$\mathfrak{S}_r$ を各成分の入れ替えによって作用させることで、ファイバー積において étale 被覆 $\mathfrak{S}_r \times Z \to Z \times_X Z (\mathfrak{S}_{r-1} \times Z \to Z \times_Y Z)$ は同型になることがわかる。 □

[*16] A'-Alg において”almost”に通常の場合と同じことが成り立つ。

補題 1.9.3. ? G を S の自己同型からなる有限群とし、$R := S^G$ という G 不変な S の部分環をとる。ここで $R \subset S' \subset S$ という部分拡大であって G の作用で閉じている S' が G に関して R 上 Galois ならば $S' = S$ となる。

証明. S' が R 上 G に関して Galois より得られる同型 $S' \otimes_R S' \cong \prod_{\gamma \in G} S'$ から得られる、各 $\gamma \in G$ に対する冪等元 e_γ をとる。その $S \otimes_R S'$ への像も冪等元であるから、冪等元による分解

$$S \otimes_R S' \cong \prod_{\gamma \in G} e_\gamma (S \otimes_R S') \cong \prod_{\gamma \in G} S'' \tag{1.34}$$

を与える (e_γ は G の元を並び替える)。命題 1.9.1 と section 1.8.1 (1) によって S' は R 上 faithfully flat になる。すると $S'' \cong (S \otimes_R S')^{G \times 1} = S^G \otimes_R S' = S'$ がわかるので $S' \otimes_R S' \cong S \otimes_R S'$ ゆえ、$S' \hookrightarrow S$ と S' の R 上の faithfully flat 性から $S = S'$ となる。 □

2 La categorie bicomplete des algebres de Banach uniformes

本稿での中心的な役割を果たすのは完備非アルキメデス的付値体上の、冪乗法的なノルムに関して完備な可換代数である。この章では (現在の文脈における) 函数解析と可換代数の間の言語に関する一般的な性質などについて述べる。

2.1 Algebres de Banach

全体を通して [BGR] を参考にしている。

2.1.1

$\mathcal{K}$ を完備な非自明な非アルキメデス的 (乗法) 付値を持つ体で剰余体が k であるとする。$\mathcal{K}^\circ$ を付値環とし、$\mathcal{K}^{\circ\circ}$ を付値イデアルとすると $k = \mathcal{K}^\circ / \mathcal{K}^{\circ\circ}$ となっている。

本稿では $\mathcal{K}$ 代数は結合的可換かつ単位的であるとする (ただし零代数は除かない)。$\mathcal{A}$ を $\mathcal{K}$ 代数とする。$\mathcal{K}$ 代数の**半ノルム** (semi-norm) とは、$|-|\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ であって $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$ と、$|ab| \leq |a||b|$ であって $a \in \mathcal{K}$ のときこれが等号になり、$\mathcal{A} \neq 0$ なら $|1_\mathcal{A}| = 1$ になるものである。これが**ノルム** (norm) であるとは、さらに $\mathcal{A} \setminus \{0\}$ で 0 を値に取らないときのことをいう。$\mathcal{A}_{||\leq r}$ や、簡単に $\mathcal{A}_{\leq r}$ によって、$a \in \mathcal{A}$ で $|a| \leq r$ となるものからなる $\mathcal{A}$ の部分加法群を表すことにする。同様に $\mathcal{A}_{<r} := \{a \in \mathcal{A} \mid |a| < r\}$ という $\mathcal{A}$ の部分加法群を定義する。とくに単位円板 $\mathcal{A}_{\leq 1}$ は $\mathcal{A}$ の開部分 $\mathcal{K}^\circ$ 代数である。

乗法的ノルム (multiplicative norm) とは、ノルムであって、任意の $a, b \in \mathcal{A}$ で $|a||b| = |ab|$ となることである。とくに乗法的ノルムを持つ $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ は整域である。

ノルム $\mathcal{K}$ 代数 (normed $\mathcal{K}$ algebra) **の圏**を対象をノルムを持った $\mathcal{K}$ 代数であって、射を連続な $\mathcal{K}$ 代数の射からなるものとして定める。つまりその射 $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は $\mathcal{A}_{\leq 1}$ 上有界になる。すなわち、作用素ノルム $\|\varphi\| := \sup_{a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}} |\varphi(a)|/|a| < \infty$ になる ([DM] Lemma 2.11 より、通常の連続性などとの同値性がわかる)。φ が isometric であるとは、$\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ の**ノルム $\mathcal{K}$ 部分代数**になることである。すなわち、任意の $a \in \mathcal{A}$ に対して $|\varphi(a)| = |a|$ となることである。

この圏は push-out を持つ。明示的には $\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ と、その上の $\mathcal{B}$ と $\mathcal{C}$ のノルムのテンソル積

$$|x| := \inf\left\{\max_{i=1}^{n}\{|b_i||c_i|\}\;\middle|\; x=\sum_{i=1}^{n} b_i\otimes c_i\in\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}\right\} \tag{2.1}$$

を半ノルムとして持つ。

Banach $\mathcal{K}$ **代数の圏** ($\mathcal{K}$-Ban) とは完備ノルム $\mathcal{K}$ 代数からなる、ノルム $\mathcal{K}$ 代数の充満部分圏のことである。Banach$\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ を一つ固定するとき、Banach$\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{B}$ と $\varphi\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ の組を Banach$\mathcal{A}$ **代数**という。自明な構成によって圏 $\mathcal{A}$-Ban を得る。すなわち、対象は Banach$\mathcal{A}$ 代数であって、射は $\mathcal{A}$ 上の代数の射 $\mathcal{B}\to\mathcal{B}'$ であって連続なものである。

2.1.2

圏 $\mathcal{K}$-Ban は始対象 $\mathcal{K}$ を持ち、終対象 0 を持つ。また**完備テンソル積** (complete tensor product)([BGR] 3.1.1 Prop.2) によって得られる $\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ を push-out として持ち、有限順極限も持つ。関手 $-\widehat{\otimes}_{\mathcal{K}}\mathcal{A}$ は忘却関手 $\mathcal{A}$-Ban $\to\mathcal{K}$-Ban の左随伴である。

また、$\mathcal{K}$-Ban は fiber 積 $\mathcal{B}\times_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ を持ち、有限逆極限も持つ。

I を $\mathcal{B}$ の閉イデアル、J を $\mathcal{C}$ の閉イデアルとし、K を $I\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}+\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}J\subset\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ の $\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ への像の閉包とする。すると標準的な射

$$(\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})/K\to(\mathcal{B}/I)\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}/J) \tag{2.2}$$

が定義できるが、これは isometric になる ([BGR] 2.1.8 Prop.6 とその証明)。

さらに、$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$ 上 (通常の意味で)finite projective であって、$\mathcal{C}$ のノルムから定まる位相が finite projective $\mathcal{A}$ 加群の canonical topology であるとき、$\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ は完備になる ([KL] Lemma 2.2.12 (c))。

2.1.3 Remark

(1) $\mathcal{C}'$ がノルム $\mathcal{A}$ 代数 $\mathcal{C}$ のノルム $\mathcal{A}$ 部分代数であったとしても、$\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}'$ が $\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ のノルム部分代数になるとは限らない。

(2) $\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$ 上の直交基底 $c_1,\dots,c_n,\dots$ を持つとする。このとき $d\in\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}$ は一意的に $d=\sum_{j\geq1}b_j\otimes c_j$ と書けて、さらに $|d|=\max_{j\geq1}\{|b_j||c_j|\}$ となる (ただし有限個を除いて $b_j=0$ である)。実際、$d=\sum_{i=1}^{m'}b'_i\otimes c'_i$ と書けたとする。まず $c'_i=\sum_{j\geq1}a_{ij}c_j$ となる $a_{ij}\in\mathcal{A}$ が取れる。ただし有限個を除いて $a_{ij}=0$ である。?すると $|c'_i|=\max_{j\geq1}\{|a_{ij}||c_j|\}$ となり､$b_j=\sum_{i=1}^{m'}a_{ij}b'_i$ で $\max_{j\geq1}\{|b_j||c_j|\}\leq\max_{j\geq1,i=1}^{i=m'}\{|a_{ij}||c_j||b'_i|\}\leq\max_{i=1}^{m'}\{|c'_i||b'_i|\}$ となる。

2.1.4

$\mathcal{A}$ をノルム $\mathcal{K}$ 代数とするとき、$\mathcal{A}^\circ$ によって**冪有界元** (power bounded element) 全体の集合を表す。これは $\mathcal{A}$ の開部分 $\mathcal{K}^\circ$ 代数となり、$\mathcal{A}_{\leq1}$ を含み、同値なノルムのとり方によらずに一意的に定まる。この $(-)^\circ$ は射の連続性から関手的であり、完備化と可換である。さらに $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ に sup ノルム $|(a,b)|:=\max\{|a|,|b|\}$ を与えることで、$\mathcal{A}\times\mathcal{B}^\circ=\mathcal{A}^\circ\times\mathcal{B}^\circ$ を得る。

$\mathcal{A}^{\circ\circ}$ によって**位相的冪零元** (topologically nilpotent) 全体の集合を表す。これは $\mathcal{A}^\circ$ の開イデアルになり、$\mathcal{A}^{\circ\circ}=\sqrt{\mathcal{A}^{\circ\circ}}$ となる。もし $\mathcal{A}$ が完備であれば、$\mathcal{A}^{\circ\circ}$ は $\mathcal{A}^\circ$ の Jacobson 根基に含まれる。実際、任意の $(a,b)\in\mathcal{A}^{\circ\circ}\times\mathcal{A}^\circ$ に対して $1-ab\in\mathcal{A}^\circ$ は $ab\in\mathcal{A}^{\circ\circ}$ と $\mathcal{A}$ の完備性から逆元として $\sum_{n\geq0}a^nb^n\in\mathcal{A}$ を持つ

からである。とくに $\mathcal{A}$ の完備性のもとで、$\mathcal{A}^\circ$ の元が可逆であることと、$\mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$ への像が可逆であることは同値である。とくにこのとき $\mathcal{A}$ の任意の極大イデアルは閉である ([BGR] 1.2.4 Cor. 5)。

対応 $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$ はノルム $\mathcal{K}$ 代数の圏から被約 k 代数の圏への関手を定める。

2.1.5

任意の Banach$\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ を一つ固定する。多項式環 $\mathcal{A}[T]$ の係数の sup ノルムを

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i T^i\right| := \sup_{i=1}^{n} \{|a_i|\} \tag{2.3}$$

と定め、これを Gauss **ノルム** (Gauss norm) という ($\mathcal{A}$ のノルムが乗法的なら Gauss ノルムも乗法的になる)。このノルムによる完備化を $\mathcal{A}\langle T\rangle$ で表す。冪級数の非アルキメデス的付値に関する収束に関する同値性から、Gauss ノルムによって収束する形式的冪級数を考えれば

$$\mathcal{A}\langle T\rangle = \left\{ \sum_{i\geq 0} a_i T^i \in \mathcal{A}[[T]] \;\middle|\; \lim_{i\to\infty} |a_i| = 0 \right\} \tag{2.4}$$

となり、その上のノルムは

$$\left|\sum_{i\geq 0} a_i T^i\right| = \sup_{i\geq 0} \{|a_i|\} \tag{2.5}$$

となっている。この中の冪有界元全体は $(\mathcal{A}\langle T\rangle)^\circ = \mathcal{A}^\circ\langle T\rangle$ となる ([BGR] 1.4.2 Prop.1)。組 $(\mathcal{A}\langle T\rangle, T)$ は Banach$\mathcal{A}$ 代数 $\mathcal{B}$ とその冪有界元の組 $b \in \mathcal{B}^\circ$ の組 $(\mathcal{B}, b)$ に対してある種の普遍性を与える ([BGR] 1.4.3 Cor.2)。すなわち、ただ一つの $\mathcal{A}$ 代数の間の連続同型 $\mathcal{A}\langle T\rangle \to \mathcal{B}$ であって、T を b に移すものが存在する。

2.1.6 Remark

isometric に関する疑問を扱うときには、対象はそのままで、射をその作用素ノルムが 1 以下であるようなものに制限した $\mathcal{K}$-Ban の充満では無い部分圏について考えるとよい。この圏においても $\widehat{\otimes}$ は余積になり、組 $(\mathcal{A}\langle T\rangle)$ は $(\mathcal{B}, b \in \mathcal{B}_{\leq 1})$ に対して上記と同様の普遍性を持つ。

もし $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ がその部分圏の射であるとすると、$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T\rangle \to \mathcal{B}\langle T\rangle$ から得られる標準的な射 $\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\langle T\rangle \to \mathcal{B}\langle T\rangle$ は isometric な同型射になる。その逆射は $\mathcal{B}\langle T\rangle$ の持つ普遍性から得られる。ここで、(2.2) のようにして閉イデアル $I = (0) \subset \mathcal{B}$ と $\mathcal{A}\langle T\rangle$ の任意の閉イデアル J について K を $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} J \subset \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T\rangle$ の $\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\langle T\rangle$ への像の閉包とする。このとき可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T\rangle \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\langle T\rangle \arrow[d, "\cong"] \\
& \mathcal{B}\langle T\rangle
\end{tikzcd}$$

から、$K \subset \mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\langle T\rangle$ に対応するのは $\overline{J\mathcal{B}\langle T\rangle} \subset \mathcal{B}\langle T\rangle$ であることがわかる。ゆえに (2.2) から

$$\mathcal{B}\langle T\rangle/\overline{J\mathcal{B}\langle T\rangle} \cong (\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\langle T\rangle)/K \to \mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\langle T\rangle/J) \tag{2.6}$$

は isometric になる。

2.2 Normes spectrales

2.2.1

ノルム $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ 上のノルム $|-|$ から誘導される**スペクトラル半ノルム** (spectral semi-norm) [*17]とは、

$$|a|_{sp} := \lim_{m\to\infty} |a^m|^{1/m} \tag{2.7}$$

によって与えられるものである (この極限は確かに存在する)。とくに $|-|_{sp}$ は冪乗法的であるが、これは一般にノルムになるとは限らない (a が 0 でなくても $|a|_{sp}=0$ になりうる)。一般に $|-|_{sp} \leq |-|$ である。$|-|_{sp} = |-|$ のとき、すなわち $|-|$ が冪乗法的であるとき、$|-|$ を**スペクトラルノルム** (spectral norm) であるといい、このとき $\mathcal{A}$ を**スペクトラルノルム $\mathcal{K}$ 代数** (spectral norm $\mathcal{K}$ algebra) という。この場合には $\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A}_{\leq 1}$ かつ $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \mathcal{A}_{<1}$ となる。

?ノルム $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ が乗法的であることと、$\mathcal{A}$ がスペクトラルかつ $\mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$ が整域であることは同値である ([BGR] 1.5.3 Prop.1)。[*18]

2.2.2

ノルム $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ について $\mathcal{A}^\circ$ が有界[*19]であるとき、**一様** (uniform) であるという。これは $\mathcal{A}$ のノルムがそれから誘導されるスペクトラル半ノルムと同値であることと等しい ([Ari] Ex 1.5.13)。実際、まず同値であったとすると冪有界性は保たれていて、一般に $\mathcal{A}^\circ \subset \mathcal{A}_{||_{sp}\leq 1}$ が成り立つ[*20]ことから $\mathcal{A}$ は一様になる。?逆は $a \in \mathcal{A}$ に対して、$|a| \leq |a|_{sp} \sup\{|b| \mid b \in \mathcal{A}^\circ\}$ が成り立つことからわかる。

任意の一様ノルム $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ は被約である。もし $|\mathcal{K}|$ が $\mathbb{R}_+$ で稠密だったら $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \mathcal{K}^{\circ\circ}\mathcal{A}^\circ = (\mathcal{A}^{\circ\circ})^2$ となる。

2.2.3 Examples

(1) 任意の被約アフィノイド $\mathcal{K}$ 代数 (すなわち、$\mathcal{K}\langle T_1,\ldots,T_n\rangle$ の剰余環) はスペクトラル半ノルムをノルムとして持ち、とくに一様である ([BGR] 6.2.1 Prop.4(iii))。さらにこのとき、代数構造が位相を決定し、スペクトラルノルムも決定する ([BGR] 6.1.3 Prop.2)。

(2) $\mathcal{A}$ が一様/スペクトラルであるとき、$\mathcal{A}\langle T\rangle$ も同じ性質を持つ。すなわち、$\mathcal{A}\langle T\rangle^\circ = \mathcal{A}^\circ\langle T\rangle$ は有界/単位円板になる。

2.2.4

一様ノルム $\mathcal{K}$ 代数の間の $\mathcal{K}$ 準同型 $\varphi\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ について、連続であることと $\varphi(\mathcal{A}^\circ) \subset \mathcal{B}^\circ$ であることは同値 ([DM] Lemma 2.11)。さらにノルムがスペクトラルノルムであるとき、連続性は $\|\varphi\| \leq 1$ と同値 (冪有界元全体と単位円板が同じ集合になるため)。このことから、一様ノルム $\mathcal{K}$ 代数のスペクトラルノルムは位相構造と適合する唯一つのスペクトラルノルムである。

[*17] アルキメデス的な場合と同様にしてこの半ノルムは"spectral"であることがわかる。実際、これは乗法的有界半ノルムの上限であるので Berkovich スペクトラム $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ に含まれているからである。

[*18] $|\mathcal{K}| \neq |\mathcal{A}|$ のとき、$\mathcal{A}$ は付値体ではないが $\mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$ が体になるものが存在する。

[*19] $|\mathcal{A}^\circ|$ が $\mathbb{R}$ の中で有界集合であること。

[*20] $a \in \mathcal{A}^\circ$ を取ると、ある定数 $C \in \mathbb{R}$ が存在して任意の正整数 m で $|a^m|_{sp} = |a|_{sp}^m \leq C$ となる。ゆえに $|a|_{sp} \leq C^{1/m}$ が任意の正整数 m で成り立つので $m\to\infty$ として $|a|_{sp} \leq 1$ となる。

?$\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ は完備であるスペクトラルノルムを高々一つしか持たないことがわかる。実際、二つの完備なスペクトラルノルム $|-|_1$ と $|-|_2$ について、とくに $|-|_1$ を $|-|_2$ の sup に置き換えることで恒等写像 $(\mathcal{A}, |-|_1) \to (\mathcal{A}, |-|_2)$ は連続になる。Banach の開写像定理から $|-|_1$ と $|-|_2$ は同値になる。よって同相であることから $|-|_1 = |-|_2$ となる。

一様ノルム代数の完備化は一様 Banach 代数になる。これは Banach の開写像定理から、Banach 代数が一様であることとスペクトラル半ノルムで完備であること (したがって半ノルムからノルムになる) が同値[*21]であることからわかる。[*22]

2.2.5

$\mathcal{K}$-Ban/$\mathcal{A}$-Ban の中の一様 Banach 代数からなる充満部分圏をそれぞれ $\mathcal{K}$-uBan/$\mathcal{A}$-uBan と表す。[*23]包含関手 $\mathcal{K}$-uBan $\to$ $\mathcal{K}$-Ban は左随伴として**一様化** (uniformization) 関手 $(-)^u \colon \mathcal{K}$-Ban $\to$ $\mathcal{K}$-uBan を持つ。これはスペクトラル半ノルムによる (分離的) 完備化によって与えられる (section 2.2.4 の最後にある同値性からわかる)。定義から、$\mathcal{A} \in \mathcal{K}$-Ban の一様化 $\mathcal{A}^u$ は (元々のノルムに関して完備なだけでなく) スペクトラル半ノルムに関して完備より、とくにスペクトラル半ノルムをノルムとして持つ。ゆえにスペクトラル $\mathcal{K}$ 代数になる。ここで単位随伴 $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^u$ が同型であることは $\mathcal{A}$ がスペクトラル半ノルムに関して完備であることと同値なので、$\mathcal{A}$ が一様であることと同値。

圏 $\mathcal{K}$-uBan は始対象 $\mathcal{K}$ と終対象 0 をもち、push-out として完備テンソル積の一様化 $\mathcal{B}\widehat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}\mathcal{C}(= (\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})^u)$ を持ち、有限順極限も持つ。一様化関手は包含関手を右随伴として持つので、push-out を保つ。すなわち、$\mathcal{B}\widehat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}\mathcal{C} = \mathcal{B}^u\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^u}\mathcal{C}^u$ となる。$\mathcal{A}$ を一様 Banach であるとすると、関手 $-\widehat{\otimes}^u_{\mathcal{K}}\mathcal{A} \colon \mathcal{K}$-uBan $\to$ $\mathcal{A}$-uBan は忘却関手 $\mathcal{A}$-uBan $\to$ $\mathcal{K}$-uBan の左随伴になる。[*24]

$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を $\mathcal{K}$-uBan における射とし、J を $\mathcal{A}\langle T\rangle$ の閉イデアルとする。このとき標準的な射

$$(\mathcal{B}\langle T\rangle / J\mathcal{B}\langle T\rangle)^u \to \mathcal{B}\widehat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}\langle T\rangle / J) \tag{2.8}$$

は isometric になる ($\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ がスペクトラルであるとしてよく、このとき (2.6) から従う)。

2.2.6

一様 Banach 代数の fiber(有限) 積は sup ノルムを与えることで一様になる。よって、一様 Banach$\mathcal{K}$ 代数の圏は有限逆極限を持つ。

一様 Banach 代数の直積成分は一様である。実際、ノルム代数 $\mathcal{A}$ に対して零でない冪等元 e のノルムは 1 以上[*25]であり、さらに $\mathcal{A}$ がスペクトラルだったらノルムは 1 になるからである。より正確には、任意の代数としての直積分解 $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ は一様ノルム代数の圏における直積分解を与える。

2.2.7 Remark

$\mathcal{C}$ が $\mathcal{A}$ 上の直交基底を持ち、$\mathcal{B}$ がスペクトラルであるとき、

[*21] 恒等写像 $f \colon (\mathcal{A}, |-|) \to (\mathcal{A}, |-|_{sp})$ について、「$(\mathcal{A}, |-|)$ が一様」⇔「ノルムが同値」⇔「f が同相」となる。よって、f の連続全単射性からこれは f が開写像であることと等しく、Banach の開写像定理からこれは値域 $(\mathcal{A}, |-|_{sp})$ の完備性と等しい。

[*22] 一様ノルム代数の完備化はそのスペクトラル半ノルムによる完備化に等しいからである。

[*23] $|a|_{sp} \leq |a|$ から、$|-|$ の位相より $|-|_{sp}$ の位相のほうが細かい。とくに $|-|_{sp}$ に関する Cauchy 列が $|-|$ の Cauchy 列になるかどうかわからないから、$|-|_{sp}$ で完備かどうかわからない。

[*24] $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ すべてが体であったとしても $\mathcal{B}\widehat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$ が被約であるとは限らない。

[*25] $|e| = |e^2| \leq |e|^2$ からわかる。

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\longrightarrow \mathcal{B}\widehat{\otimes}^u_{\mathcal{A}}\mathcal{C} && (2.9)\\ b &\longmapsto b\otimes 1 && (2.10)\end{aligned}$$

は isometric になる。これは、section 2.1.3 (2) に注意すると $|b\otimes 1|_{sp} = \lim_{m\to\infty}|b^m\otimes 1|^{1/m} = \lim_{m\to\infty}|b^m|^{1/m} = |b|$ であることからわかる。

2.2.8 Example

? $\mathcal{K}$ の (有限次)Galois 拡大体 $\mathcal{L}$ をとり、その Galois 群が G であるとする。$\mathcal{K}$ のノルムを一意的に $\mathcal{L}$ 上に延長できる (とくに G は isometric に作用する)。このとき $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{L}$ にノルムのテンソル積によって (半) ノルムを与えると、有限次元一様 Banach$\mathcal{K}$ 代数となる。(1.10) と同様にして得られる $\mathcal{K}$ 準同型 $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{L}\to\prod_{\gamma\in G}\mathcal{L}$ は連続全単射になり、(Banach の開写像定理から)Banach 代数としての同型を与え、?とくに $\mathcal{L}\widehat{\otimes}^u_{\mathcal{K}}\mathcal{L}\cong\prod_{\gamma\in G}\mathcal{L}$ と表せられる。ゆえに Banach 代数 $\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{L}$ がスペクトラルであることと、$\mathcal{L}\otimes_{\mathcal{K}}\mathcal{L}\to\prod_{\gamma\in G}\mathcal{L}$ が isometric であることは同値。さらにこれは cadre を $(\mathcal{K}^\circ,\mathcal{K}^{\circ\circ})$ としたとき、$(\mathcal{L}^\circ)^a$ が $(\mathcal{K}^\circ)^a$ 上 Galois であることと同値。離散付値である場合、このことは、付値体の拡大 $\mathcal{L}/\mathcal{K}$ が unramified であることと同値。無限次拡大のときはより注意深く扱わなければならない。

以下では $\mathcal{K}$ の剰余体 k は標数 $p>0$ であるとする。

2.3 Dictionnaire

2.3.1

まず最初にいくつかの閉包操作について扱う。(単位的可換) 環の拡大 $R\hookrightarrow S$ を取る。

$s\in S$ が R 上 integral であるとは、その冪からなる集合 $\{s^n\mid n\in\mathbb{Z}^+\}$ が S の中で有限生成 R 部分加群を生成することである。almost integral [*26]であるとは、その冪からなる集合 $\{s^n\mid n\in\mathbb{Z}^+\}$ が S の中で生成する R 部分加群が、ある有限生成 R 部分加群に含まれることである。integral/almost integral の元全体をそれぞれ、R^+_S、R^*_S と表す。これは S の部分環になり、それぞれ、R の S の中の integral closure/complete integral closure という。$R=R^+_S$ のとき R を S 上 integrally closed といい、$R=R^*_S$ のとき R を S 上 completely integrally closed という。とくに R^+_S は S 上 integrally closed であるが、**??**から R^*_S は一般に completely integrally closed ではない。また、明らかに $R^+_S\subset R^*_S$ となる (R が Noether ならこれは一致する)。

p を素数とする。$s\in S$ が R 上 p-root(p-radiciel) であるとは、ある正整数 n が存在して $s^{p^n}\in R$ となることである。R が S で p-root closed であるとは、任意の R 上 p-root な S の元がすべて R に入ることである。すなわち、「$s\in S$ かつ $s^p\in R\Longrightarrow s\in R$」となることである。$R$ の S における p-root closure とは、$R^\dagger_S$ と書き、R と S の間で p-root closed な部分環の中で最小のもののことである。S の部分環の増大列 $(R_i)_{i\geq 0}$ を帰納的に $R_0:=R$ で、R_{i+1} を R_i 上 p-root な S の元全体によって R_i 上 (代数として) 生成される S の部分環とする。このとき p-root closure はこの和集合によって構成できる。明らかに $R^\dagger_S\subset R^+_S$ となり、R が S で p-root closed であることと $R=R^\dagger_S$ は同値である。

R の標数が p であるか、$S=R[1/p]$ であるとき、R 上 p-root な S の元全体の集合は S の部分環になり、それは $R^\dagger_S$ に一致する。

可換図式

[*26] **??**で示すように、これは almost mathematics における integral 性と一致しない。

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
R' \arrow[r, hook] & S'
\end{tikzcd}
$$

に対して、以上の性質は準同型で保たれるため、自然な準同型 $R_S^\dagger \to R'^\dagger_{S'}$、$R_S^+ \to R'^+_{S'}$、$R_S^* \to R'^*_{S'}$ が得られる (一つ目の準同型は上記で構成した R_i について $R_i \to R'_i$ によって得られる)。とくに次の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[rrrr, hook, bend left] & R_S^\dagger \arrow[r, hook] \arrow[d] & R_S^+ \arrow[r, hook] \arrow[d] & R_S^* \arrow[r, hook] \arrow[d] & S \arrow[d] \\
R' \arrow[r, hook] \arrow[rrrr, hook, bend right] & R'^\dagger_{S'} \arrow[r, hook] & R'^+_{S'} \arrow[r, hook] & R^*_{S'} \arrow[r, hook] & S'
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ。

S の中の R の integral closure を取る操作は局所化と可換である ([AM] Prop. 5.12)。また、同様にして p-root closure を取る操作も局所化と可換である。しかし、completely integrally closure を取る操作は局所化と可換とは限らない。

2.3.2

函数解析と可換環論の間の概念を集めておく。

$\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus \{0\}$ 一つ固定する。$\Gamma \subset \mathbb{R}$ によって対応する値群とする。すなわち $|\varpi|^\Gamma = |\mathcal{K}^\times|$ を満たす。任意の $s \in \Gamma$ に対して、ある $\varpi_s \in \mathcal{K}^\times$ を $|\varpi_s| = |\varpi|^s$ となる元として取る (?以下の議論はこの元のとり方によらない)。

命題 2.3.1. (1) $\mathcal{A}$ をノルム $\mathcal{K}$ 代数であって $|\mathcal{K}|$ が $|\mathcal{A}|$ で稠密であるとする。任意の $a \in \mathcal{A}$ について

$$|a| = |\varpi|^r,\ r \coloneqq \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} a \in \mathcal{A}_{\le 1}\} \tag{2.11}$$

となる。とくに $\mathcal{A}_{\le 1}$ は ϖ 進位相を持ち、$\mathcal{A}$ が Banach であることと $\mathcal{A}_{\le 1}$ が ϖ 進完備であることは同値になる。

(2) 逆に、A を flat な $\mathcal{K}^\circ$ 代数とする (?とくに ϖ-torsion free であることと同値)。

$$\mathcal{A} \coloneqq A[1/\varpi] \tag{2.12}$$

と定める。任意の $a \in \mathcal{A}$ に対して

$${}^{A}|a| \coloneqq |\varpi|^r,\ r \coloneqq \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} a \in A\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \tag{2.13}$$

と定義する。

(a) 定義した (2.13) は $\mathcal{A}$ 上に半ノルムを与える。これがノルムであることと任意の $A \setminus \{0\}$ の元が infinite ϖ-divisible にならないことは同値。さらにこのとき $|\mathcal{K}|$ は ${}^{A}|\mathcal{A}|$ で稠密になる。
さらに $\widehat{A}$ も flat な $\mathcal{K}^\circ$ 代数であり、$\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{A}[1/\varpi]$ かつ、$\widehat{\mathcal{A}}_{\le 1} = \widehat{\mathcal{A}_{\le 1}}$ が成り立つ。

(b) 一般に $\mathcal{A}_{\le 1} = \mathcal{K}^{\circ\circ}A$ であり、Γ が離散的であれば $\mathcal{A}_{\le 1} = A$ となる。さらに一般的に $\mathcal{A}_{\le 1} = A_*$ が成り立つ。ここで、$A_* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ}, A) = \cap_{s\in\Gamma_{>0}}\varpi_{-s}A$ と定義している。[*27]

(c) 準同型 $\varphi\colon \mathcal{A} = A[1/\varpi] \to \mathcal{A}' = A'[1/\varpi]$ は、$\varphi(A) \subset A'$ ならば連続である。もし $\varphi^{-1}(A') = A$ ならば isometric である。さらに正確に、連続写像 φ が isometric であることと、$\varphi(\mathcal{A}_{\le 1}) \subset \mathcal{A}'_{\le 1}$ かつ φ の誘導する $\mathcal{A}_{\le 1}/\varpi \to \mathcal{A}'_{\le 1}/\varpi$ が単射であることは同値。

(d) A が A' の部分代数であって A'/A が ϖ-torsion free であるとき、${}^{A'}|{-}|$ の A への制限は ${}^{A}|{-}|$ になる。

J が A のイデアルであって A/J が ϖ-torsion free になるとき、${}^{A/J}|{-}|$ は ${}^{A}|{-}|$ の商半ノルムになる。逆に $\mathcal{A}$ の任意のイデアル $\mathcal{I}$ に対して $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\le 1} = (\mathcal{A}_{\le 1}/\mathcal{I}_{\le 1})_*$ が成り立つ。

(e) B と C を ϖ-torsion free な A 代数とする。このとき $(B \otimes_A C)/(\varpi^\infty\text{-torsion})$ 上に (2.13) で定義される半ノルムは B と C の半ノルムのテンソル積に一致する (ここで ϖ^∞-torsion は任意の正整数 n に対して ϖ^n で消えるような元のことである)。逆に $\mathcal{B}$ と $\mathcal{C}$ をノルム $\mathcal{A}$ 代数とするとき、Γ が離散的ならば

$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C})_{\le 1} = (\mathcal{B}_{\le 1} \otimes_{\mathcal{A}_{\le 1}} \mathcal{C}_{\le 1})/(\varpi^\infty\text{-torsion}) \tag{2.14}$$

となり、そうでないならば

$$(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C})_{\le 1} = ((\mathcal{B}_{\le 1} \otimes_{\mathcal{A}_{\le 1}} \mathcal{C}_{\le 1})/(\varpi^\infty\text{-torsion}))_* \tag{2.15}$$

となる。

上のテンソル積を完備テンソル積に変えても同様のことが成り立つ。

(3) ノルム $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ を一つ固定する。$\mathcal{A}^{\circ\circ}$ による剰余 (もしくは完備化) によって、$\mathcal{A}^\circ$ の中の開 [completely]integrally closed な $\mathcal{K}^\circ$ 部分代数と被約 k 代数 $\mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$ の中の [completely]integrally closed な k 部分代数 (もしくは $\widehat{\mathcal{A}}^\circ$ の中の開 integrally closed な $\mathcal{K}^\circ$ 部分代数) の間に全単射がある。

以下ではノルム $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ に対して、$|\mathcal{K}|$ が $|\mathcal{A}|$ で稠密であるとする。

(4) A を上のように取り、$\mathcal{A} := A[1/\varpi]$ とする。section 2.3.1 の記号を用いると $A^+_{\mathcal{A}}$ があり、また、

$$A^\dagger_{\mathcal{A}} := \{a \in \mathcal{A} \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+,\ a^{p^n} \in A\} \tag{2.16}$$

と定義されていた。さらに $\mathcal{A} = A[1/\varpi]$ であることに注意すると、

$$A^*_{\mathcal{A}} = \{a \in \mathcal{A} \mid \exists m \in \mathbb{Z}^+,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+,\ \varpi^m a^n \in A\} \tag{2.17}$$

となる。さらに

$$A^\dagger_{\mathcal{A}} \subset A^+_{\mathcal{A}} \subset A^*_{\mathcal{A}} = (A_*)^*_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^\circ \tag{2.18}$$

と $(A^\dagger_{\mathcal{A}})_* = (\mathcal{A}^\circ)_*$ が成り立ち、さらにこれは ${}^{A}|{-}|$ から誘導されるスペクトラル半ノルムによる単位円板と等しい。

とくに $\mathcal{A}_{\le 1}$ が Noether のとき、$\mathcal{A}$ における $\mathcal{A}_{\le 1}$ の $\mathcal{A}$ における integral closure は $\mathcal{A}^\circ$ に等しい。

(5) ノルム $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ について以下は同値。

(a) $|{-}|$ はスペクトラルである。

(b) $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}^{\circ}$ である。

(c) $\mathcal{A}_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1})^{*}_{\mathcal{A}}$ である (すなわち、$\mathcal{A}_{\leq 1}$ は $\mathcal{A}$ で completely integrally closed である)。

(d) $\mathcal{A}_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1})^{+}_{\mathcal{A}}$ である (すなわち、$\mathcal{A}_{\leq 1}$ は $\mathcal{A}$ で integrally closed である)。

(e) $\mathcal{A}_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1})^{\dagger}_{\mathcal{A}}$ となる (すなわち、$\mathcal{A}_{\leq 1}$ は $\mathcal{A}$ で p-root closed である)。

(f) (さらに、もし $|p| \leq |\varpi|$ かつ $1/p \in \Gamma$ ならば)Frobenius 射 $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi_{1/p} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi$ は単射である。

(6) ノルム $\mathcal{K}$ 代数 $\mathcal{A}$ が一様ならば、次の二つ

$$\mathcal{A}^{\circ} = (\mathcal{A}^{\circ})_{*} = (\mathcal{A}_{\leq 1})^{*}_{\mathcal{A}} \tag{2.19}$$

$$\widehat{\mathcal{A}^{\circ}} = (\widehat{\mathcal{A}})^{\circ} \tag{2.20}$$

が成り立つ。

(7) $\mathcal{A}$ が Banach$\mathcal{K}$ 代数であれば、$(\mathcal{A}^{u})^{\circ}$ はスペクトラル半ノルムによる $(\mathcal{A}^{\circ})_{*}$ の (分離的) 完備化になる。

証明. (1) もし $|a| \in |\mathcal{K}^{\times}|$ であれば、$|\mathcal{K}^{\times}| = |\varpi|^{\Gamma}$ より、ある $r \in \Gamma$ が存在して

$$|a| = |\varpi|^{r} = (|\varpi|^{-r})^{-1} = |\varpi_{-r}|^{-1} \tag{2.21}$$

となる。この r が $r' := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\}$ に等しくなることを示す。まず、$|-|$ は $\mathcal{K}$ 代数のノルムであるので $\mathcal{K}$ の元に関する乗法性から、$\varpi_{-s} \in \mathcal{K}^{\times}$ について、$|\varpi_{-r}a| = 1$ より $\varpi_{-r}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}$ なので $r \leq r'$ となる。逆に $\varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}$ となる任意の $s \in \Gamma$ を取る。すると、r のとり方から $|a| = |\varpi|^{r}$ であることに注意すると、

$$1 \geq |\varpi_{-s}a| = |\varpi_{-s}||a| = |\varpi|^{-s}|a| = |\varpi|^{-s+r} \tag{2.22}$$

となる。$\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus \{0\}$ であって、$\mathcal{K}$ 上ではノルムは乗法的なので $|\varpi| < 1$ ゆえ、この (2.22) から $-s+r \leq 0$ より $r \leq s$ となるので、$r' \leq r$ である。したがって $r = r'$ から、$|a| \in |\mathcal{K}^{\times}|$ のとき (2.11) が成り立つ。そうでない場合、まず任意の $|a| \in |\mathcal{A}|$ について、$|\varpi| < 1$ に注意すると、

$$\begin{aligned} |\varpi|^{\sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\}} &= \inf\{|\varpi|^{s} \in \mathbb{R} \mid s \in \Gamma,\ \varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\} && (2.23)\\ &= \inf\{|\varpi|^{s} \in \mathbb{R} \mid s \in \Gamma,\ |\varpi_{-s}a| \leq 1\} && (2.24)\\ &= \inf\{|\varpi|^{s} \in \mathbb{R} \mid s \in \Gamma,\ |a| \leq |\varpi|^{s} \in |\mathcal{K}|\} && (2.25) \end{aligned}$$

となっている[*28]ので、$|\mathcal{K}|$ の $|\mathcal{A}|$ における稠密性からわかる。

とくに $0 \in \mathcal{A}_{\leq 1}$ の基本近傍系として、任意の正整数 n に対して半径 $|\varpi|^{n}$ の単位円板 $B_n(0) := \{a \in \mathcal{A}_{\leq 1} \mid |a| \leq |\varpi|^{n}\}$ が取れるので、$\mathcal{A}_{\leq 1}$ は ϖ 進位相を持つ。$\mathcal{A}$ の完備性はその閉単位円板 $\mathcal{A}_{\leq 1}$ の完備性と同値[*29]なので、$\mathcal{A}$ が Banach であることと $\mathcal{A}_{\leq 1}$ が ϖ 進完備であることは同値。

[*27] 記号 A_{*} は Γ が $\mathbb{R}$ で稠密なとき、$\mathcal{K}^{\circ\circ}$ が $\mathcal{K}^{\circ}$ で冪等イデアルになり cadre を $(\mathcal{K}^{\circ}, \mathcal{K}^{\circ\circ})$ としたときに almost mathematics で定義したものと同様のものになる。稠密でないときは $A_{*} = A$ となる。

[*28] とくにこの表示から ϖ_s のとり方によらない。

[*29] $\mathcal{A}$ の任意の Cauchy 列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ に対して、ある正整数 N が存在して $n, m \geq N$ で $|a_n - a_m| \leq 1$ となる。このとき $(a'_n := a_n - a_N)_{n=N}^{\infty}$ を取れば、これは $\mathcal{A}_{\leq 1}$ の中の Cauchy 列になるので、$\mathcal{A}_{\leq 1}$ の完備性が使える。

(2) (a) ${}^A|{-}|$ が $\mathcal{A}$ 上の $\mathcal{K}$ 代数の半ノルムであることは A が $\mathcal{K}^\circ$ 代数であることから従う。A の ${}^A|{-}|$ による位相は ϖ 進位相に等しい。よって、${}^A|{-}|$ がノルムであることと A が ϖ 進分離的であることは同値。つまり $\cap_{n\geq 1}\varpi^n A = 0$ であるが、これは $A\setminus\{0\}$ が infinite ϖ-divisible を持たないことに等しい。また、${}^A|{-}|$ の構成から $|\mathcal{K}| = |\varpi|^\Gamma$ は ${}^A|\mathcal{A}|$ で稠密になる。

A は $\mathcal{K}^\circ$ 上 flat なので、任意の正整数 n で $A/\varpi^{n-1} \xrightarrow{\cdot\varpi} A/\varpi^n$ が単射。A は ϖ 進位相を持っているから、$\widehat{A} = \varprojlim A/\varpi^n$ となるので、単射性からこれは ϖ-torsion free であるから $\mathcal{K}^\circ$ 上 flat になる。

等号 $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{A}[1/\varpi]$ と $\widehat{\mathcal{A}}_{\leq 1} = \widehat{\mathcal{A}_{\leq 1}}$ や、(a)(b) や、(c) の最初の主張は半ノルム ${}^A|{-}|$ の定義から従う (Γ が離散的なら $\sup\{s\in\Gamma_{>0}\} > 0$ であり、そうでないなら $\sup\{s\in\Gamma_{>0}\} = 0$ となる)。

(b)

□

参考文献

[An1] Y. André, "Le lemme d'Abhyankar perfectoide," Publ.math.IHES, vol. 127, no. 1, pp. 1-70, Jun. 2018.

[GR] O. Gabber and L. Ramero, Almost Ring Theory. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.

[AM] M. F. Atiyah and G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1994.

[BGR] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, Non-Archimedean Analysis: A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry. Springer Berlin Heidelberg, 1984.

[DM] R. Datta and T. Murayama, "Tate algebras and Frobenius non-splitting of excellent regular rings," arXiv:2003.13714 [math], Oct. 2021, Accessed: Dec. 27, 2021. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2003.13714

[KL] K. S. Kedlaya and R. Liu, "Relative p-adic Hodge theory: Foundations," arXiv:1301.0792 [math], May 2015, Accessed: Aug. 08, 2021. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1301.0792

[Ari] B. Bhatt et al, Perfectoid spaces: lectures from the 2017 Arizona Winter School. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2019.