Adic space

https://ryo1203.github.io

概要

Adic 空間論についてのゼミを行っているので、発表したところを随時 PDF 化していく。大筋は Adic 空間についての原論文である [Hu93] と [Hu94] に沿っているつもりである。これらに記載のない命題などについては可能な限り出典を記載した。証明については [Mor] や [Wed] なども一部参考にしている。

目次

1 Huber ring

記法 1.1. A を環、B, C を A の部分集合とするとき、$B \cdot C$ によって、B と C の元の一つづつの積の有限和からなる集合を表す。すなわち、

$$B \cdot C := \{\sum_{i=1}^{n} b_i c_i \mid n \in \mathbb{Z}^+, b_i \in B, c_i \in C\} \tag{1.1}$$

である。

定義 1.2 (非アルキメデス的位相環). 位相環 A が**非アルキメデス的** (non-Archimedean) であるとは、A の加法部分群からなる $0 \in A$ の基本近傍系が存在することである。

注意 1.3. 位相環 A の開であるような加法部分群 B は閉でもあることがわかる。実際、加法群としての分割を考えると $A = \sqcup_{i \in I}(a_i + B)$ をなる。平行移動であることから $a_i + B$ も A で開集合になる。とくにある $i_0 \in I$ で $a_{i_0} = 0$ となるように取れるから、$B = A \setminus \bigsqcup_{i \neq i_0}(a_i + B)$ であり、右辺は開集合の和集合なのでその補集合である B は A で閉集合になる。

定義 1.4 (有界・冪有界・位相的冪零元・adic). A を位相環とする。

1. A の部分集合 B が**有界** (bounded) であるとは、$0 \in A$ の任意の開近傍 U に対して、ある開近傍 $0 \in V \subset A$ が存在して、任意の $b \in B$ と任意の $v \in V$ の積 bv が U に含まれることである。

2. A の元 a が**冪有界** (power-bounded) であるとは、A の部分集合 $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が有界であることである。
3. A の元 a が**位相的冪零元** (topologically nilpotent) であるとは、A の点列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が $0 \in A$ への収束列になることである。
4. A が adic であるとは、ある A のイデアル I が存在して、$\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が $0 \in A$ の基本近傍系を為すことである。このイデアルのことを A の**定義イデアル** (ideal of definition) と呼ぶ。

注意 1.5. 位相環 A が非アルキメデス的であるとする。このとき $B \subset A$ が有界であることは、和で閉じているものからなる基本近傍系が取れることから、$0 \in A$ の任意の開近傍 U に対してある開近傍 $0 \in V \subset A$ が存在して、$B \cdot V \subset U$ となることと同値である。

記法 1.6. 位相環 A の冪有界元全体を A° と表し、位相的冪零元全体を $A^{\circ\circ}$ と表すこととする。

定義 1.7 (Huber ring・Tate ring). A を位相環とする。

1. A が Huber ring あるいは f-adic ring であるとは、ある部分集合 U と有限集合 $T \subset U$ であって、$\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が $0 \in A$ の基本近傍系を為し、$T \cdot U = U^2 \subset U$ を満たすものが存在することである。
2. 位相的冪零な単元のことを pseudo-uniformizer と呼ぶ。A が Tate であるとは、A が Huber ring であり、pserudo-uniformizer を持つことである。

[Hu93] では f-adic ring と名付けており、[SW] では Huber ring と名付けている。以下では Huber ring と呼ぶこととする。ちなみに、[Ran] には f-adic ring の f は命題 1.9 にあるように、以下で定義される定義イデアルというものが有限生成で取れることに依ると述べられている。

定義 1.8 (定義環・定義イデアル). A を位相環とし、その部分環 A_0 について、A_0 が A の**定義環** (ring of definition) であるとは、A_0 が A で開であり、その相対位相によって A_0 が adic ring となることである。A の**定義イデアル** (ideal of definition) とは、ある定義環の定義イデアル (定義 1.4) のことである。

定義環と定義イデアルについて次の性質が成り立っている。

命題 1.9. A を Huber ring とし、A_0 をその部分環とする。

1. A は定義環を持つ。
2. A_0 が A の定義環 $\iff$ A_0 が A で開かつ有界。
3. A のすべての定義環は有限生成な定義イデアルを持つ。

証明. A が Huber ring より取ることのできる部分集合 U とその有限部分集合 T を一つ固定する。

(1) W を U によって加法的に生成される A の部分加法群とする。このとき $A_0 := \mathbb{Z} \cdot 1 + W$ とすると A_0 は $U^2 \subset U$ より $W^2 \subset W$ から A の部分環になり、$U \subset A_0$ であるから A の中で開である。さらに、

$T \subset U \subset A_0$ より T で生成されるイデアル $I \coloneqq TA_0$ を考える。このイデアルによって A_0 が adic になることを示す。まず $T \cdot U = U^2 \subset U$ より、$U^2 = T \cdot U \subset TA_0 = I$ から I は開である。$T \subset U$ から $T^2 \subset T \cdot U$ と $T \cdot W \subset U^2$ から

$$I^2 = T^2A_0 = T^2 + T^2 \cdot W \subset T \cdot U + T \cdot U^2 \subset T \cdot U = U^2 \tag{1.2}$$

であるので $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が基本近傍系になっていることから、$\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ も A_0 の基本近傍系になる。故に A_0 は adic な開部分環になるから A の定義環になる。

(2) ($\Rightarrow$) A_0 が定義環のとき、まず定義から A_0 は開であり、基本近傍系 $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ について $I^n \cdot A_0 = I^n$ より A_0 は有界。

($\Leftarrow$) 任意の正整数 n について $T(n) \coloneqq \{t_1 \dots t_n \mid t_1, \dots, t_n \in T\}$ とする。A_0 が開なので、ある $k \in \mathbb{Z}^+$ が存在して $U^k \subset A_0$ である。$T \subset U$ より $T^k \subset U^k \subset A_0$ から $T(k) \subset A_0$ である。T が有限集合だから $T(k)$ も有限集合なのでとくに有限生成イデアル $I \coloneqq T(k)A_0 \subset A_0$ を取ることができる。$\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が A_0 の基本近傍系になることを示す。$U^l \subset A_0$ となる $l \in \mathbb{Z}^+$ が取れるから $T \cdot U = U^2$ より $I^n = (T(k)A_0)^n = T(nk)A_0 \supset T(nk)U^l = U^{l+nk}$ となるので任意の正整数 n について I^n は開になる。任意の $0 \in A$ の開近傍 V について A_0 が有界よりとくに、ある正整数 m で $U^m \cdot A_0 \subset V$ となる。$T \subset U$ から、$I^m = T(mk)A_0 \subset U^{mk} \cdot A_0 \subset U^m \cdot A_0 \subset V$ より $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ は基本近傍系を為す。ゆえに A_0 はこの有限生成イデアル I を定義イデアルとする adic な開部分環になるので A の定義環になる。

(3) A_0 が定義環なら (2) を経由して有限生成イデアルを取り直せる。 □

以上を踏まえて、[SW] や [Hu94] など多くの文献では Huber ring を以下の同値な条件で定義している。

命題 1.10. 位相環 A について Huber ring であることと有限生成イデアルを定義イデアルとする定義環を持つことは同値。

証明. まず命題 1.9 から Huber ring は有限生成イデアルを定義イデアルとする定義環を持つ。逆に有限生成イデアル I を定義イデアルとする定義環 A_0 が取れるとき、$U \coloneqq I$ とし、その有限部分集合 $T \subset U$ を I の有限個からなる生成系として取ればよい。 □

この同値条件は扱いやすいが、定義イデアルを取るときに定義環という枠組みが必要になっている。そこで、定義イデアルをイデアルとしてではなく、非単位的有限生成環だと思うことで定義環という枠組みは必要なくなる。実際、命題 1.9 の証明のように $\mathbb{Z} \cdot 1 + W$ のようなものを考えてしまえば非単位的有限生成環からそれを定義イデアルとして持つような定義環は構成できる。それ故、最低限必要な条件を考えると最初の定義 1.7 の方に妥当性があると考えることもできる。

以下では命題 1.9 と命題 1.10 の同値性をとくに言及せずに用いる。次のような Huber ring の例がある。とくに adic ring ではない Huber ring はたしかに存在する。

例 1.11.
1. 有限生成イデアルによって定まっている adic ring は Huber ring である。
2. 環 A とその有限生成イデアル I について、$A[X]$ に

$$U_n \coloneqq \{\sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in A[X] \mid a_k \in I^{n+k}, m \in \mathbb{Z}^+\} \tag{1.3}$$

を $0 \in A$ の基本近傍系とする位相を入れる。このとき、$A[X]$ は Huber ring になるが、任意の正整数 m で $I^m \neq I^{m+1}$ ならば adic ring ではない。

3. $(k, |\cdot|)$ を非自明な非アルキメデス的付値体とする。(例えば $\mathbb{Q}_p$ など) $(A, \|\cdot\|)$ をノルム付き k 代数とし、A にこのノルムからなる位相を入れると A は Tate ring になる。
4. 環 B とその元 s について、局所化 $\varphi\colon B \to B_s$ をとり、B_s に $\{\varphi(s^n B) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ を $0 \in B_s$ の基本近傍系とする位相を入れれば、B_s は $s \in B_s$ を pseudo-uniformizer とする Tate ring になる。

証明. (2)　$I = (f_1, \ldots, f_r)$ としたとき $U \coloneqq U_1$ は $A[X]$ で開であり、$T \coloneqq \{f_1, \ldots, f_r\}$ とすると $T \subset U_1$ より $T \cdot U \subset U^2$ である。逆の包含を示す。任意の U の元 $f(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ と $g(X) = \sum_{k=0}^{m'} b_k X^k$ についてその積 $f(X)g(X) = \sum_{k=0}^{m+m'} (\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}) X^k$ について、$a_i \in I^{i+1}$ かつ $b_{k-i} \in I^{k-i+1}$ より $a_i b_{k-i} \in I^{k+2}$ より $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \in I^{k+2} = T \cdot I^{k+1}$ となる。ゆえに $f(X)g(X) \in T \cdot U_1 = T \cdot U$ より $T\dot{U} = U^2$ となる。また、このことよりとくに $U^2 \subset U_2 \subset U_1 = U$ より $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ も $A[X]$ の基本近傍系になるので $A[X]$ は Huber ring になる。

一方、任意の正整数 m について $I^m \neq I^{m+1}$ のとき $A[X]$ が adic にならないことを示す。もしイデアル $J \subset A[X]$ で adic になったとすると任意の正整数 k について $U_n \subset J^k \subset U_m$ となる正整数 $n \geq m$ が存在する。$I^n \neq I^{n+1}$ と $I^{n+1} \subset I^n$ よりある $\alpha \in I^n \setminus I^{n+1}$ が取れる。$U_n \subset J^k$ から $\alpha \in J^k$ であり、J^k がイデアルだからとくに任意の 0 以上の整数 i について $\alpha X^i \in J^k \subset U_m$ である。ゆえにこの任意の i について $\alpha \in I^{m+i}$ となる。しかし、十分大きい i を取ると $\alpha \in I^{m+i} \subset I^{n+1}$ となり、$\alpha \in I^n \setminus I^{n+1}$ に矛盾する。よって $A[X]$ は adic ではない。

(3)　$A_0 \coloneqq \{a \in A \mid \|a\| \leq 1\}$ とし、非自明なノルムであることからある $r \in k$ で $0 < |r| < 1$ となるものが取れる。このとき $\{r^n A_0 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が基本近傍系を為し、$U \coloneqq A_0$ かつ $\left\{ {T:= \atop r} \right\}$ とすれば A は Huber ring になり、pseudo-uniformizer として $r \in A$ が取れる。 □

また、とくに Huber ring において十分多くの定義環が存在する。

命題 1.12. A を Huber ring とする。

1. A_0 と A_1 を A の定義環とするとき $A_0 \cap A_1$ と $A_0 \cdot A_1$ も定義環になる。
2. A の有界な部分環 B と A の開部分環 C であって $B \subset C$ となるものについてある A の定義環 A_0 で $B \subset A_0 \subset C$ となるものが存在する。
3. A の冪有界元全体 A° は A の部分環で A の定義環すべての和集合と一致する。
4. A の任意の開部分環 A' について、それに含まれる A の定義環 A_0 が存在する。

証明. (1)　A_0 と A_1 は開かつ有界よりその共通部分 $A_0 \cap A_1$ は開であり、有界な集合の部分集合は有界なので $A_0 \cap A_1$ は有界でもあるから $A_0 \cap A_1$ は定義環になる。

$A_0 \cdot A_1$ について $A_0 \subset A_0 \cdot A_1$ より開である。有界であることを示す。とくに十分小さい $0 \in A$ の開近傍 U を取って和で閉じているとして良い。A_0 が有界より十分小さくとって、ある $0 \in A$ の開近傍 V_0 であって和で閉じていて $V_0 \cdot A_0 \subset U$ となるものが取れる。この V_0 について A_1 が有界より、ある $0 \in A$ の開近傍 V_1 が存在して $V_1 \cdot A_1 \subset V_0$ となる。ここで $A_0 \cdot A_1$ の元 $\sum x_i y_i (x_i \in A_0, y_i \in A_1)$ について、$y_i \cdot V_1 \subset A_1 \cdot V_1 \subset V_0$

と $x_i \cdot V_0 \subset A_0 \cdot V_0 \subset U$ より

$$(\sum x_i y_i) \cdot V_1 \subset \sum (x_i y_i \cdot V_1) \subset \sum (x_i \cdot V_0) \subset \sum U \subset U \tag{1.4}$$

より $(A_0 \cdot A_1) \cdot V_1 \subset U$ なので $A_0 \cdot A_1$ は有界だから $A_0 \cdot A_1$ は定義環になる。

(2) C について、$C_0 \coloneqq A_0 \cap C$ とすると、A_0 と C は A で開なので C_0 は A で開である。さらに A_0 が A で有界で $C \subset A_0$ よりとくに C も A で有界であるから C_0 も A の定義環になる。とくに $C_0 \subset C$ で C の定義環にもなるのでこれによって C も Huber ring になる。ゆえに $B \subset C$ と有界性から (1) の証明を用いて $B \cdot C_0$ も C で有界かつ $B \subset B \cdot C_0$ から C で開になる。これによって $B \cdot C_0$ は C の定義環になって B を含む。C が A で開であることと合わせて $B \cdot C_0$ は A で開かつ有界であり、$B \subset B \cdot C_0 \subset C$ より、A_0 としてこの $B \cdot C_0$ と取ればよい。

(3) A° が定義環の和集合になっていることを示す。まず、A の定義環は有界よりその任意の元は冪有界になるから定義環の和集合は A° に含まれる。A の定義環 A_0 を一つ固定する。任意の A° の元 x について $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が有界であることから (1) の証明と同様にして $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \cdot A_0 = A_0[x]$ は有界であり、A_0 を含むので開集合でもあるから A の定義環になる。ゆえに定義環の和集合の中に $A_0[x]$ が含まれるのでとくに x も含まれるので互いの包含関係が示された。

A° が部分環であることは、任意の A° の元 x と y についてある定義環 A_0 と A_1 で $x \in A_0$ と $y \in A_1$ となるものが存在し、(1) から $x + y \in A_0 \cdot A_1 \subset A^\circ$ かつ $xy \in A_0 \cdot A_1 \subset A^\circ$ なので A° は部分環になる。

(4) A はある定義環 B を持つ。このとき $B \cap A'$ は B に含まれている部分環で B の有界性から $B \cap A'$ も有界な部分環。A' は開だったので (2) を $B \cap A' \subset A'$ に適用すれば良い。 □

命題 1.9 から次が従う。

> **系 1.13.** A を位相環とする。
>
> 1. A が adic ring のとき、A が Huber ring $\iff$ A が有限生成定義イデアルを持つ。
> 2. A が Huber ring のとき、A が adic ring $\iff$ A が有界になる。
> 3. B を A の開部分環とするとき、A が Huber ring。$\iff$ B が Huber ring。

Huber ring A について、A° は有界とは限らない。$A^\circ = \cup A_0$ であり、これは有界集合 A_0 の和集合が必ずしも有界ではないという形になっている。すなわち、$0 \in A$ を原点と見るとき、A_0 の中では距離が有限であるが、ちょうど A° を境界その外側に距離無限大の地点が存在している。これを踏まえて特に次の Huber ring のクラスを定義する。

> **定義 1.14 (一様).** A を Huber ring とするとき、A が**一様** (uniform) であるとは、A° が有界であることである。A° が定義環になることと言ってもよい。

後に定める整元環 A^+ によって、空間の点として取る付値に制限をつけるが、これは A° とは異なる距離無限大との境界として A^+ を取ることに対応している。

冪有界元と位相的冪零元の集合に関する性質を見る。

命題 1.15. A を Huber ring とする。A° で冪有界元全体を、$A^{\circ\circ}$ で位相的冪零元全体を表す。(記法 1.6) このとき以下が成り立つ。

1. A° は A の中で開かつ整閉である。
2. $A^{\circ\circ}$ は A° の根基イデアルになる。

証明. (1) A の定義環は開集合であり、命題 1.12(3) から A° が定義環を含むことから A° は開集合になる。A° が整閉になることを示す。A° 上整な $x \in A$ を取る。ある $a_0, \dots, a_{n-1} \in A^\circ$ が存在して $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ となる。命題 1.12 から各 a_i についてそれを含むある定義環が取れ、有限個からなるその和集合も定義環になる。その定義環を A_0 とおく。すると $x \in A$ は A_0 上整になっているから $A_0[x] = A + Ax + \dots + Ax^{n-1} \subset A$ と書ける。すると $A[x]$ は有界集合になっている。実際、任意の $0 \in A$ の開近傍 U について A_0 は有界だから、ある $0 \in A$ の開近傍 V が存在して $A \cdot V \subset U$ となる。V が和で閉じているとしてよいのでそのようにする。各 $x, \dots, x^{n-1}$ に対して一点集合が有界だから、ある $0 \in A$ の開近傍 $V_1, \dots, V_{n-1}$ が存在して $x^i V_i \subset V$ となる。よって $W \coloneqq V_1 \cap \dots \cap V_{n-1}$ という $0 \in A$ の開近傍 W を取ると

$$(A_0[x]) \cdot W \subset (A_0 x) \cdot V_1 + \dots + (A_0 x^{n-1}) \cdot V_{n-1} \subset A_0 \cdot V + \dots + A_0 \cdot V \subset U + \dots + U \subset U \tag{1.5}$$

より $A_0[x]$ は有界である。よって $A_0[x]$ も A の定義環だから $A_0[x] \subset A^\circ$ となるのでとくに $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subset A_0[x]$ から x は A で冪有界になるので $x \in A^\circ$ より A° は A において整閉である。

(2) $A^{\circ\circ} \subset A^\circ$ を示す。A のある定義環の定義イデアルを I とする。任意の $a \in A^{\circ\circ}$ について任意の正整数 m についてある正整数 N が存在して $n \geq N$ で $a^n \in I^m$ となる。また、有限集合 $\left\{a, a^2, \dots, \quad a^{N-1}\right\}$ は有界集合より、ある正整数 m' が存在して $k = 1, \dots, N-1$ で $a^k I^{m'} \subset I^m$ となる。すると $n \geq N$ の a^n について $a^n I^{m'} \subset I^m I^{m'} \subset I^m$ から $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} I^{m'} \subset I^m$ より a は冪有界なので $A^{\circ\circ} \subset A^\circ$ となる。$A^{\circ\circ}$ が和で閉じていることを示す。$a, a' \in A^{\circ\circ}$ を取る。任意の $0 \in A$ の開近傍 U についてある正整数 N が存在して任意の $n \geq N$ で $a^n, (a')^n \in U$ となる。とくに U が和で閉じているとして良い。展開式を考えると任意の $n \geq 2N$ で $(a + a')^n \in U$ となる。したがって $a + a' \in A^{\circ\circ}$ なので和で閉じている。また、任意の $b \in A^\circ$ について $ab \in A^{\circ\circ}$ であることを示す。b が冪有界より、ある $0 \in A$ の開近傍 V が存在して任意の正整数 n で $b^n V \subset U$ となる。V について、ある正整数 N が存在して任意の $n \geq N$ で $a^n \in V$ となる。よって任意の $n \geq N$ で $(ab)^n = a^n b^n \in b^n V \subset U$ より $ab \in A^{\circ\circ}$ となるから $A^{\circ\circ}$ は A° のイデアルになる。

根基イデアルであることを示す。$a \in A^\circ$ が $a^m \in A^{\circ\circ}$ となったとする。任意の $0 \in A$ の開近傍 U を取ると有限集合 $\left\{a, \dots, a^{m-1}\right\}$ についてある $0 \in A$ の開近傍 V が存在して $k = 1, \dots, m-1$ で $a^k V \subset U$ となる。この V についてある正整数 N が存在して $n \geq N$ で $(a^m)^n \in V$ となる。すると、任意の $n \geq mN$ について $n = mk + r$ となる整数 $N \leq k$ と $0 \geq r \geq m-1$ が存在する。$k \geq N$ より

$$a^n = a^{mk+r} = (a^m)^k a^r \in a^r V \subset U \tag{1.6}$$

から a は位相的冪零元になるので $A^{\circ\circ}$ は A° の根基イデアルになる。 □

とくに Tate ring のときは次のようにわかりやすい形になる。

命題 1.16. A を Tate ring とし、B を A の定義環とするとき次が成り立つ。

1. B は A のある pseudo-uniformizer を持つ。
2. $s \in B$ を A の pseudo-uniformizer とすると $A = B_s$ であり、sB が B の定義イデアルになる。

証明. (1)　$t \in A$ を pseudo-uniformizer とするとき、B が $0 \in A$ の開近傍より、$t^n \to 0$ より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ によって $t^k \in B$ となる。t^k も pseudo-uniformizer よりこれを取れば良い。

(2)　任意の $a \in A$ について $s^n \to 0$ より $s^n a \to 0$ であるから B が $0 \in A$ の開近傍より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ で $s^k a \in B$ になるので $a \in B_s$ から $s \in A^\times$ と合わせて $A = B_s$ となる。

また、任意の正整数 n について $s^n \in A^\times$ より $A \to A; a \mapsto s^n a$ は同相であるから、B が A で開なので $s^n B$ は開である。また、B の定義イデアル I が $0 \in A$ の開近傍より $s^n \to 0$ より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ で $s^k \in I$ となるものが取れる。よって $s^n B \subset I$ より B の I から定まる位相は sB によって定まる位相と一致するので B は sB を定義イデアルとして持つ。 □

以下、完備 (化) と言ったら Hausdorff 完備 (化) のことを指すこととする。

定義 1.17 (完備化). A を Huber ring とし、定義環 A_0 とその定義イデアルを I を取る。このとき A の**完備化** (completion) とは $\varprojlim A/I^n$ のことであり、それを $\hat{A}$ と表す。ここで $I^n \subset A$ は A_0 のイデアルとしての冪であり、剰余環とその逆極限は加法群として考えて取っている。とくにこれは定義環とその定義イデアルのとり方によらないことが、定義イデアルが基本近傍系を為していることからわかる。

補題 1.18. A を Huber ring とし、B を A の定義環とし、その定義イデアルを I とする。$\hat{A}$ と $\hat{B}$ を A と B の完備化とする。とくに完備化の左完全性から $\hat{B} \subset \hat{A}$ とみなせる。このとき次が成り立つ。

1. $\hat{A}$ は Huber ring であり、$\hat{B}$ は $\hat{A}$ の定義環であり、$I\hat{B} = \hat{I}$ は $\hat{B}$ の定義環になる。
2. 次の図式

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \longleftarrow & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{B} & \longleftarrow & B \end{array}$$

は可換で (環の圏において) 押し出しになっている。である。とくに $\hat{A} \cong \hat{B} \otimes_B A$ が成り立つ。

証明. (1)　B が adic より I 進位相の一般論より $\hat{B}$ は $I\hat{B} = \hat{I}$ を定義イデアルとする adic ring になる。さらに、A も $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ による完備化だから $\hat{A}$ は $\{\hat{I}^n \mid n \in \mathbb{Z}^n\}$ を基本近傍系に持つ。ゆえに $\hat{B}$ は開かつ $\hat{I}$ を定義イデアルに持つ adic ring より $\hat{A}$ はこれを定義環と定義イデアルとして持つ Huber ring になる。

(2)　次の図式

$$
\begin{tikzcd}
\hat{A} & & \\
& \hat{B}\otimes_B A \arrow[ul, "j"'] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[ull, bend right, "i"'] \\
& \hat{B} \arrow[u, "g"] \arrow[uul, bend left, "l"] & B \arrow[l, "k"] \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}
$$

を考える。とくに i, ι, k, l はすべて単射であるので $\hat{A}$ の部分環と考えることができる。ここで、$\hat{B}\otimes_B A$ にある位相を入れることで、$j\colon \hat{B}\otimes_B A \to \hat{A}$ が位相環としての同型射になることを示す。そのために逆射 $h\colon \hat{A} \to \hat{B}\otimes_B A$ を構成する。まず、とくに $\hat{B}$ が $\hat{A}$ の部分加法群であるので注意 1.3 と同様に分割 $\hat{A} = \sqcup_{i\in I}(\hat{a}_i + \hat{B})$ を考えることができる。ここで $\hat{B}$ が開集合であり、$\hat{A}$ において A が稠密なので各 $\hat{a}_i + \hat{B}$ についてある $a_i \in A \cap (\hat{a}_i + \hat{B})$ が取れるから、これらですべて取り替えて $A = \sqcup_{i\in I}(a_i + \hat{B})$ とできる。したがって、とくに $\hat{A} = A + \hat{B}$ と書ける。ゆえに任意の $\hat{A}$ の元 $\hat{a}$ についてある $a \in A$ と $\hat{b} \in \hat{B}$ によって $\hat{a} = a + \hat{b}$ と書ける。ここで h を

$$
\begin{aligned}
h\colon \hat{A} &\longrightarrow \hat{B}\otimes_B A \\
\hat{a} = a + \hat{b} &\longmapsto h(\hat{a}) \coloneqq f(a) + g(\hat{b}) (= 1\otimes a + \hat{b}\otimes 1)
\end{aligned}
$$

と定める。h が j の逆の位相環の準同型になっていることを示す。

h が写像であることを示す。$a, a' \in A$ と $\hat{b}, \hat{b}' \in B$ によって $\hat{a} = a + \hat{b} = a' + \hat{b}'$ となったとする。$A \ni a - a' = \hat{b}' - \hat{b} \in \hat{B}$ である。ここで、$\hat{A}$ の部分環とみなすことで $A \cap \hat{B} = B$ が成り立つ。実際、$\hat{B}$ は $\hat{A}$ における B の閉包に等しく、相対位相を持つので位相空間論の一般論 ([MSE1]) を $A \cap B \subset A \subset \hat{A}$ に適用することで $A \cap \hat{B} = A \cap \overline{B}^{\hat{A}} = \overline{A\cap B}^{A}$ となる。B は A の開部分環だったので注意 1.3 と合わせて $\overline{A\cap B}^{A} = \overline{B}^{A} = B$ となるので $A \cap \hat{B} = B$ が成り立つ。これを用いて、$a - a' = \hat{b}' - \hat{b} \in A \cap \hat{B} = B$ となるから、図式の可換性より $f(a - a') = f(\iota(a - a')) = g(k(a - a')) = g(k(\hat{b}' - \hat{b})) = g(\hat{b}' - \hat{b})$ である。したがって、$f(a') + g(\hat{b}') = f(a' - a) + f(a) + g(\hat{b}') = g(\hat{b}' - \hat{b}) + f(a) + g(\hat{b}) = f(a) + g(\hat{b})$ より、$h(\hat{a})$ は $\hat{a} = a + \hat{b}$ の表示のとり方によらないで定まるので h は写像になる。

表示によらないことと定義から h について (a) 加法的、(b)$f = h|_A$、(c)$g = h|_{\hat{B}}$ (d)$h(1) = 1$ が成り立つ。h が環準同型であることを示すためには、積を保つことを示せば良い。任意の $\hat{a} = \hat{A}$ について $\hat{A}$ で A が稠密より、ある A の点列 (a_n) が存在して $a_n \to \hat{a}$ となるものが取れる。上述の (b) より $f(a_n) = h(a_n) \in \hat{B}\otimes_B A$ である。ここで、$\hat{B}\otimes_B A$ が $f\colon A \to \hat{B}\otimes_B A$ と $h\colon \hat{A} \to \hat{B}\otimes_B A$ が連続とするような完備位相環の構造を持つことが示されれば十分である。実際、(a_n) が収束列だったので f と h の連続性から $\hat{B}\otimes_B A$ 内の点列 $(f(a_n)) = (h(a_n))$ はとくにコーシー列になる。さらに $\hat{B}\otimes_B A$ の完備性からこの点列は収束するので $h(\hat{a}) = \lim_{n\to\infty} h(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ となる。よって、$\hat{A}$ の元 $\hat{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$ と $\hat{a}' = \lim_{n\to\infty} a'_n$ について、$\hat{a}\hat{a}' = \lim_{n\to\infty} a_n a'_n$ となることから、$\hat{B}\otimes_B A$ が位相環、とくに積の連続性から lim と積を交換でき、f はもともと環準同型なので $h(\hat{a}\hat{a}') = \lim_{n\to\infty} h(a_n a'_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n a'_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \lim_{n\to\infty} f(a'_n) = h(\hat{a})h(\hat{a}')$ となるので h が積を保つことがわかる。

そのような構造が $\hat{B}\otimes_B A$ に入ることを示す。まず、上の図式で $j \circ g = l$ は単射なので $g\colon \hat{B} \to \hat{B}\otimes_B A$ も単射になる。$\hat{B}\otimes_B A$ の位相を $g\colon \hat{B} \to \hat{B}\otimes_B A$ が開埋め込みになる位相を入れる。g が連続になり、(c) より h も $\hat{B}$ において連続だから、とくに $0 \in \hat{B} \subset \hat{A}$ で連続である。よって (b) から f も $0 \in A \subset \hat{A}$ で連続である。f はもともと環準同型であり、h は (a) から加法的なので 0 での連続性からそれぞれの定義域全体で連続になる。

また、$\hat{B}$ の完備性から $g(\hat{B})$ も完備になるので $\hat{B}\otimes_B A$ も完備になる。実際、$\hat{B}\otimes_B A$ のコーシー列 (x_n) を取ると、$g(\hat{B})$ が開集合として埋め込まれていたから、ある $N\in\mathbb{Z}^+$ が存在して、任意の N 以上の整数 n と m について $x_n-x_m\in g(\hat{B})$ となる。とくに任意の $n\geq N$ について $x_n-x_N\in g(\hat{B})$ より、ある $\hat{b}_n\in\hat{B}$ によって $x_n=x_N+g(\hat{b}_n)$ となる。任意の 0 の開近傍 $U\subset\hat{B}$ について g が開埋め込みより $g(U)$ は $0\in\hat{b}\otimes_B A$ の開近傍だから N 以上の $M\in\mathbb{Z}^+$ が存在して、M 以上の整数 n と m について $x_n-x_m\in g(U)$ となる。N 以上なので、$x_n-x_m=(x_N+g(\hat{b}_n))-(x_N+g(\hat{b}_m))=g(\hat{b}_n)-g(\hat{b}_m)\in g(U)$ であり、g は単射だったから $\hat{b}_n-\hat{b}_m\in U$ となるので、$(\hat{b}_n)$ も $\hat{B}$ のコーシー列になる。$\hat{B}$ の完備性から $(\hat{b}_n)$ は、ある $\hat{b}\in\hat{B}$ に収束する。十分大きい n において $x_n-(x_N+g(\hat{b}))=g(\hat{b}_n)-g(\hat{b})\in g(U)$ であるので、g が開埋め込みより $g(U)$ の形のもので $0\in\hat{B}\otimes_B A$ の開近傍は全てだから、$x_n\to x_N+g(\hat{b})$ となるから、$\hat{B}\otimes_B A$ は完備である。

$\hat{B}\otimes_B A$ がこの位相で位相環になることを示す。$\hat{B}$ が位相群だから、$\hat{B}\otimes_B A$ はすでに位相群になっているので、積の連続性を示せば良い。まず、$\hat{b}\otimes a\in\hat{B}\otimes_B A$ と任意の 0 の開近傍 $U\subset\hat{B}\otimes_B A$ について $(\hat{b}\otimes a)\cdot V\subset U$ となる 0 の開近傍 $V\subset\hat{B}\otimes_B A$ が存在することを示す。$g^{-1}(U)$ が $\hat{B}$ で開なので、ある $\hat{B}$ の開イデアル S が存在して $S\subset g^{-1}(U)\subset\hat{B}$ となる。$\hat{B}$ は $\hat{A}$ で開集合だったので S は $\hat{A}$ においても開である。上で示した $A\cap\hat{B}=B$ より $S\cap A\subset\hat{B}\cap A=B\subset A$ となり、$S\cap A$ は A で開かつ B に含まれる。ここで、$\{a\}\subset A$ は有界であるから A の開集合 $S\cap A$ に対して、ある 0 の開近傍 $T\subset B$ が存在して、$a\cdot T\subset S\cap A\subset B\subset A$ となっている。B において T が開なので、$T\cdot\hat{B}$ は $\hat{B}$ において開になっているから、その g による像 $g(T\cdot\hat{B})$ は $\hat{B}\otimes_B A$ における開集合になる。$V\coloneqq g(T\cdot\hat{B})$ として、これが求める開集合であることを示す。すなわち、$(\hat{b}\otimes a)\cdot V\subset U$ を示す。$T\subset B$ より $g(T)=g(k(T))=f(\iota(T))=f(T)$ に注意すると、$V=g(T\cdot\hat{B})=g(T)\cdot g(\hat{B})=f(T)\cdot g(\hat{B})$ である。任意の $t\in T$ について、$f(t)=1\otimes t\in\hat{B}\otimes_B A$ より $(\hat{b}\otimes a)\cdot f(t)=\hat{b}\otimes at$ となる。まず、$at\in a\cdot T\subset B$ だったので B 上のテンソルを取っていることから $\hat{b}\otimes at=at(\hat{b}\otimes 1)=\hat{b}at\otimes 1=(\hat{b}\otimes 1)\cdot(at\otimes 1)$ となる。さらに $at\in S\cap A\subset S\subset g^{-1}(U)$ から $at\otimes 1=g(at)\subset g(S)\subset U$ となるので $(\hat{b}\otimes a)\cdot f(t)=(at\otimes 1)\cdot(\hat{b}\otimes 1)\subset g(S)\cdot g(\hat{B})$ となる。ゆえに記法 1.1 の定義と S が $\hat{B}$ のイデアルであることに注意すると $(\hat{b}\otimes a)\cdot V=(\hat{b}\otimes a)\cdot f(T)\cdot g(\hat{B})=\{\hat{b}\otimes at\mid t\in T\}\cdot g(\hat{B})\subset g(S)\cdot g(\hat{B})=g(S)\subset U$ となる。よって、この V が求める条件を満たすことが示された。

積の連続性を示す。任意の 0 開近傍 $U\subset\hat{B}\otimes_B A$ を取る。十分小さくして和で閉じているようにできる。任意の $x\in\hat{B}\otimes_B A$ について $\hat{B}\otimes_B A$ の元 $y\coloneqq\sum_{i=1}^n\hat{b}_i\otimes a_i$ と $z\coloneqq\sum_{j=1}^m\hat{b}'_j\otimes a'_j$ であって、$yz=x$ となるものを取る。ここで、U について、各 $\hat{b}_i\otimes a_i$ と $\hat{b}'_j\otimes a'_j$ に対して上で示したように開集合 V が取れる。$i=1,\dots,n$ と $j=1,\dots,m$ それぞれの添字について共通部分を取りそれを V_y と V_z とする。とくに $g(\hat{B})$ が $\hat{B}\otimes_B A$ で開集合かつ adic なので V_y と V_z を十分小さくすることで $V_y\cdot V_z\subset U$ となるようにできる。このとき $y+V_z$ と $z+V_y$ の積は $yz+z\cdot V_z+y\cdot V_y+V_z\cdot V_y$ に含まれる。これは $yz=x$ と $z\cdot V_z\subset U$ かつ $y\cdot V_y\subset U$ と合わせて $x+U$ に含まれる。よって $yz=x$ となるような元についてその開近傍 $(y+V_z)\times(z+V_y)\subset\hat{B}\otimes_B A\times\hat{B}\otimes_B A$ の積 $x+U$ に含まれるから $\hat{B}\otimes_B A$ の積は連続である。

以上より確かに $\hat{B}\otimes_B A$ は f と h を連続とするような完備位相環の構造が入るので h は環準同型になる。定義から $j\circ h=\mathrm{id}_{\hat{A}}$ である。さらに任意の $x\in f(A)\cup g(\hat{B})$ については h の定義より $(h\circ j)(x)=x$ となる。$h\circ j$ が環準同型より、$(h\circ j)(\hat{b}\otimes a)=(h\circ j)(g(\hat{b})f(a))=(h\circ j)(g(\hat{b}))\cdot(h\circ j)(f(a))=g(\hat{b})f(a)=\hat{b}\otimes a$ より $h\circ j=\mathrm{id}_{\hat{B}\otimes_B A}$ となる。さらに、$j\circ g$ について開集合 $U\subset\hat{A}$ の j による逆像を g で引き戻したものは図式の可換性から $U\cap\hat{B}$ となるから $\hat{B}$ で開集合になる。よって、$j^{-1}(U)\supset g(U\cap\hat{B})$ であり、g が開埋め込みであることから $j^{-1}(U)$ は開集合を含むのでこれ自身も開集合になる。よって j は連続。以上より、j は連続であり、h も連続であったから h と j は互いに逆な位相環の準同型になる。したがって位相環としての同型 $\hat{A}\cong\hat{B}\otimes_B A$ を得る。 $\square$

注意 1.19. $\hat{A}$ が押し出しの普遍性を満たすことを直接示すことは難しいと思われる。まず $A \cdot \hat{B} = \hat{A}$ と $A \cap \hat{B} = B$ から $j\colon \hat{B} \otimes_B A \to \hat{A}$ が同型であることを証明するのは難しい。一般に環 A とその部分環 B と C について $D \coloneqq B \cap C$ 上のテンソル積に関して $B \otimes_D C \to B \cdot C = A; b \otimes c \mapsto bc$ が写像であることを確かめるのは難しく、また、写像であったとしても単射であるとは限らない。実際、B と C と D が体のときこれが単射になることは B と C が D 上線型無関連であるという定義がなされている。例えばこれが写像だが同型にならない反例として [SE1] がある。実際、[SE1] の記号のもとで、$1 \otimes 1 + \omega\alpha \otimes \alpha^2/2 + \omega^2\alpha^2 \otimes \alpha/2 \in E \otimes_{\mathbb{Q}} F$ を取るとこれは $E \cdot F$ に移すと 0 になる。一方、$\mathbb{Q}$ 加群としての同型 $E \cong \mathbb{Q}^3$ と $F \cong \mathbb{Q}^3$ を考えると、この元に対応する $\mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^3 \cong \mathbb{Q}^9$ の元は 0 にならないことが計算によってわかり、単射ではない。

注意 1.20. ここで述べた補題 1.18 の証明は元を取って h を構成することによって示されていた。これは [Hu93] に沿って示したためであるが、そうではない証明が [GR] の Proposition8.3.28(3) に記載されている。

系 1.21. A を Huber ring として $\hat{A}$ をその完備化とするとき次が成り立つ。

1. A がネーターである定義環を持つとき $A \to \hat{A}$ は平坦射になる。
2. A がネーターである定義環上有限生成代数のとき A と $\hat{A}$ はネーター環になる。

証明. A のネーターな定義環を B とする。(1)　補題 1.18 より $A \to \hat{A}$ は自然な射 $A \to \hat{B} \otimes_B A$ である。B がネーターかつ adic なので $B \to \hat{B}$ が平坦になる。$B \to A$ による底変換によって平坦性は保たれるから、$A \cong B \otimes_B A \to \hat{B} \otimes_B A$ も平坦になるから示された。

(2)　有限生成 B 代数よりある $x_1, \ldots, x_n \in A$ によって $A = B[x_1, \ldots, x_n]$ と表すことができる。B がネーターより A はネーターになる。また、$\hat{A} \cong \hat{B} \otimes_B A = \hat{B} \otimes_B B[x_1, \ldots, x_n] \cong \hat{B}[x_1, \ldots, x_n]$ になり、B がネーターかつ adic なので $\hat{B}$ はネーターだから $\hat{A}$ はネーターになる。 □

Huber ring の間の射で良い性質を持つものを定義する。

定義 1.22 (adic 射). A と B を Huber ring とする。その間の環準同型 $f\colon A \to B$ が adic であるとは、A の定義環 A_0 とその定義イデアル $I \subset A_0$ と B の定義環 B_0 であって、$f(A_0) \subset B_0$ かつ I の拡大イデアル $f(I)B_0 \subset B_0$ が B_0 の定義イデアルになるものが存在することである。

注意 1.23. $f\colon A \to B$ が adic であるとき、$I \subset f^{-1}(f(I)B_0)$ から f は連続写像になる。

定義イデアルの拡大については一般に次の主張が成り立っている。すなわち、大きいところで定義イデアルならその性質を下ろすことが出来る。

補題 1.24 ([Ran]Lemma4.2.2 Lemma 4.2.6). A を Huber ring とする。A の定義環 A_0 と A_1 が $A_0 \subset A_1$ となっているとする。A_0 の有限生成イデアル I について以下は同値。

1. I が A_0 の定義イデアルである。
2. A_1 への拡大イデアル IA_1 が A_1 の定義イデアルである。

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2)　A_2 は定義環より、ある定義イデアル $J \subset A_2$ を持つ。I は A_0 で開なので A_1 でも開になるからある正整数 n によって $J^n \subset I \subset A_0 \subset A_1$ となる。A_1 へ拡大すると J^n は A_1 のイデアルだからそのままで $J^n \subset IA_1 \subset A_1$ となる。よって IA_1 は A_1 で開である。また、$J \cap A_0 \subset A_0$ は開なので I が A_0 の定義イデアルよりある正整数 m で $I^m \subset J \cap A_0$ となる。A_1 へ拡大すると $(IA_1)^m \subset (J \cap A_0)A_1 \subset J$ である。以上より、IA_1 の定める位相と J の定める位相は一致するので I が有限生成であることと合わせて IA_1 は A_1 の定義イデアルになる。

(2) $\Longrightarrow$ (1)　A_0 が A_1 で開であり、IA_1 が A_1 の定義イデアルなのである正整数 n によって $(IA_1)^n = I^nA_1 \subset A_0$ となる。I が有限生成より $(IA_1)^n$ の A_1 のイデアルとしての有限個からなる任意の生成系 $\{x_1, \ldots, x_r\}$ を取ることが出来る。これらは A_0 に含まれているから A_0 上生成されるイデアル $J \coloneqq A_0x_1 + \ldots A_0x_r \subset A_0$ を構成できる。とくに $J \subset (IA_1)^n$ となる。このとき $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset A_0$ と $(IA_1)^n \subset A_0$ から

$$\begin{aligned}(IA_1)^{n+n} &= (IA_1)^n(IA_1)^n = (IA_1)^n(A_1x_1 + \cdots + A_1x_r) \\ &= (IA_1)^n x_1 + \cdots + (IA_1)^n x_r \subset A_0x_1 + \cdots + A_0x_r = J\end{aligned}$$

となるので $(IA_1)^{2n} \subset J \subset (IA_1)^n$ から $\{(IA_1)^k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ が A の基本近傍系を為していることと J が有限生成な A_0 のイデアルより J は A_0 の定義イデアルになる。ここで $(IA_1)^n$ の A_1 上の生成系 $\{x_1, \ldots, x_r\}$ は任意に取れていたので、とくに $I^n \subset A_0$ の A_0 上の有限個からなる生成系と取って J を構成することも出来る。よってこのとき $J = I^n$ であるから I^n は A_0 の定義イデアルになる。冪乗が定義イデアルなので直ちに I 自信が A_0 の定義イデアルであることが従う。 $\square$

補題 1.25. A と B を Huber ring としてその間の環準同型 $f \colon A \to B$ が adic であるとする。このとき以下が成り立つ。

1. f は有界である。すなわち、有界集合の f による像はまた有界集合になる。
2. A_1 と B_1 がそれぞれ A と B の定義環で $f(A_1) \subset B_1$ となっているとする。このとき A_1 の任意の定義イデアル J についてその拡大 $f(J)B_1$ は B_1 の定義イデアルになる。
3. A の定義環 A_1 と B の開部分環 B' が $f(A_1) \subset B'$ となっているとする。このときある B の定義環 B_1 で $f(A_1) \subset B_1 \subset B'$ となるものが存在する。

証明. $f \colon A \to B$ が adic であることから取れる定義環や定義イデアルに対して定義 1.22 と同じ記号を用いる。

(1)　A の有界集合 T を取る。任意の B の 0 の開近傍 U について、$f(I)B_0$ が B_0 の定義イデアルよりある正整数 n によって $(f(I)B_0)^n \subset U$ となる。よってとくに $I^n \subset f^{-1}((f(I)B_0)^n) \subset f^{-1}(U)$ となる。一方、T の有界性からある正整数 m によって $I^m \cdot T \subset I^n$ となる。これより、

$$f(I^m) \cdot f(T) \subset f(I)^n \subset (f(I)B_0)^n \subset f(f^{-1}(U)) \subset U \tag{1.7}$$

となり、$(f(I)B_0)^n$ が B_0 の元の積と和について閉じているので B_0 を掛けると $(f(I)B_0)^n \cdot f(T) \subset U$ となる。$f(I)B_0$ は B_0 の定義イデアルであったからこれより $f(T)$ は B で有界であることが示された。

(2)　$K \coloneqq f(I)B_0$ とおく。特にこれは f が adic より B_0 の定義イデアルになっていた。$f(J)B_1 \subset B_1$ が B_1 の定義イデアルになっていることを示せば良い。まず、$A_2 \coloneqq A_0 \cdot A_1$ と $B_2 \coloneqq B_0 \cdot B_1$ は命

題 1.12(1) よりそれぞれ A と B の定義環になっている。仮定より $f(A_0) \subset f(B_0)$ と $f(A_1) \subset f(B_1)$ が成り立っているので $f(A_2) \subset B_2$ が成り立っている。ここで、補題 1.24 を適用することで定義イデアルの拡大 $IA_2, JA_2 \subset A_2$ と $KB_2 \subset B_2$ はそれぞれの環の中の定義イデアルになる。$f(A_2) \subset B_2$ から $f(IA_2)B_2 = f(I)B_2 = f(I)B_0B_2 = KB_2$ から $f(IA_2)B_2$ は B_2 の定義イデアルになる。(すなわち $f\colon A_2 \to B_2$ においては adic の性質がなりたっていることが示された (注意 1.26)) ここで $JA_2 \subset A_2$ の B_2 への拡大イデアル $L \coloneqq f(JA_2)B_2 \subset B_2$ は B_2 の定義イデアルになる。実際、IA_2 と JA_2 がともに A_2 の定義イデアルなのである正整数 n と m によって $(IA_2)^n \subset (JA_2)^m \subset IA_2$ となる。これを拡大して $(f(IA_2)B_2)^m \subset L^n \subset f(IA_2)B_2$ より $f(IA_2)B_2$ が B_2 の定義イデアルなので L も B_2 の定義イデアルである。ここで再度、補題 1.24 を $L = f(JA_2)B_2 = (f(J)B_1)B_2$ と $B_1 \subset B_2$ に適用すると $f(J)B_1 \subset B_1$ は B_1 の定義イデアルになっている。

(3) (1) と A_1 の有界性から $f(A_1)$ は B で有界。$f(A_1) \subset B'$ に命題 1.12(2) を用いればよい。 □

注意 1.26. 補題 1.25(2) の証明では一度大きい定義環 A_2 と B_2 まで考えて adic の性質が成り立っていること (定義イデアルの拡大が定義イデアルになること) を示し、補題 1.24 によってその性質を下の定義環 A_1 と B_1 に下ろすことによって示した。

系 1.27. Huber ring の間の射 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ について以下が成り立つ。

1. f と g が adic ならばその合成 $g \circ f$ も adic になる。
2. f と g が連続であり、合成 $g \circ f$ が adic ならば g は adic になる。
3. A の開部分環 A' と B の開部分環 B' で $f(A') \subset B'$ となるとする。このとき $f' \coloneqq f|_{A'}\colon A' \to B'$ について、f が adic $\Longleftrightarrow$ f' が adic。

証明. (1) f の adic 性より A と B の定義環 A_0 と B_0 であって $f(A_0) \subset B_0$ かつ A_0 の定義イデアル I で $f(I)B_0$ が B_0 の定義イデアルになるものが存在する。ここで g の adic 性から補題 1.25(1) より $g(B_0)$ が有界であり、$g(B_0) \subset C$ について命題 1.12(2) よりある C の定義環 C_0 で $g(B_0) \subset C_0 \subset C$ となるものが取れる。さらに g が adic であり、この B_0 とその定義イデアル $f(I)B_0$ と C_0 について補題 1.25(2) より $g(f(I)B_0)C_0 = g(f(I))C_0$ は C_0 の定義イデアルになる。以上よりこの定義環 $A_0 \subset A$ と $C_0 \subset C$ と定義イデアル $I \subset A_0$ を取ると $(g \circ f)(A_0) \subset C_0$ かつ $(g \circ f)(I)C_0$ が C_0 の定義イデアルより $g \circ f$ は adic になる。

(2) $h \coloneqq g \circ f$ とおく。次の可換図式のように g が adic になるような定義環 B_0 と C_0 と B_0 の定義イデアル J を構成する。

$$
\begin{tikzcd}
C & C_0 \arrow[l, hook'] & K \arrow[l, hook'] & & & \\
B \arrow[u, "g"] & g^{-1}(C_0) \arrow[l, hook'] \arrow[u, "g"] & B_0 \arrow[l, hook'] \arrow[u, "g"] & J \coloneqq g^{-1}(K) \cap B_0 \arrow[l, hook'] \arrow[ul, "g"'] & & \\
A \arrow[u, "f"] & & f^{-1}(B_0) \arrow[ll, hook'] \arrow[u, "f"] & A_0 \arrow[l, hook'] \arrow[u, "f"] & f^{-1}(J) \cap A_0 \arrow[l, hook'] \arrow[ul, "f"'] & I \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}
$$

C の定義環 C_0 とその定義イデアル K を一つ固定する。g の連続性から $g^{-1}(C_0)$ は B の開部分環になる。命題 1.12(4) からある B の定義環 B_0 で $g^{-1}(C_0)$ に含まれるものが存在する。このとき g の連続性から $J \coloneqq g^{-1}(K) \cap B_0$ は B_0 の開イデアルである。さらに f の連続性から $f^{-1}(B_0)$ は A の開部分環であって、

$f^{-1}(J)$ は $f^{-1}(B_0)$ の中の開イデアルである。再度、命題 1.12(4) からある A の定義環 A_0 であって $f^{-1}(B_0)$ に含まれるものが存在し、$f^{-1}(J) \cap A_0$ は f の連続性から A_0 の開イデアルである。よって、ある A_0 の定義イデアル I であって $I \subset f^{-1}(J) \cap A_0$ となるものが取れる。以上の構成により、

$$h(A_0) = g(f(A_0)) \subset g(f(f^{-1}(B_0))) \subset g(B_0) \subset g(g^{-1}(C_0)) \subset C_0 \tag{1.8}$$

から $(g \circ f)(A_0) \subset C_0$ かつ $g(B_0) \subset C_0$ となる。A_0 と C_0 が定義環であって $(g \circ f)(A_0) \subset C_0$ より $g \circ f$ が adic より補題 1.25(2) から A_0 の定義イデアル I について $(g \circ f)(I))C_0 \subset C_0$ は C_0 の定義イデアルになる。ここで構成から

$$(g \circ f)(I)C_0 \subset (g \circ f)(f^{-1}(J))C_0 \subset g(J)C_0 = g(g^{-1}(K) \cap B_0) \subset K \tag{1.9}$$

から $(g \circ f)(I)C_0 \subset g(J)C_0 \subset K$ となり C_0 の定義イデアル $(g \circ f)(I)C_0$ と K に含まれているので $g(J)C_0$ も C_0 の定義イデアルになる。よってこの定義環 B_0 と C_0 と B_0 の定義イデアル J を取ることによって g が adic であることが分かった。

(3) $(\Rightarrow)$ f が adic であるから A と B の定義環 A_0 と B_0 と A_0 の定義イデアル I が存在して $f(A_0) \subset B_0$ かつ $f(I)B_0$ が B_0 の定義イデアルになる。A' と B' が開であることと A_0 と B_0 が開かつ有界であることから $A'_0 \coloneqq A_0 \cap A' \subset A'$ と $B'_0 \coloneqq B_0 \cap B' \subset B'$ はそれぞれ A' と B' の定義環になる。さらに $I \subset A_0$ について $I \cap A'_0 \subset A'_0$ は A'_0 の定義イデアルになる。ここでとくに A'_0 と B'_0 は A と B の定義環でもあり、$f(A'_0) \subset f(B'_0)$ から補題 1.25(2) より $f(I \cap A'_0)B'_0 \subset B'_0$ は B'_0 の定義イデアルになる。したがって $f' = f|_{A'}$ もこれらによって adic になることが分かった。

$(\Leftarrow)$ f' が adic であるから A' と B' の定義環 A'_0 と B'_0 と A'_0 の定義イデアル I' が存在して $f'(A'_0) = f(A'_0) \subset B'_0$ かつ $f'(I')B'_0 = f(I')B'_0$ が B'_0 の定義イデアルになる。ここで A' と B' が開なので A'_0 と B'_0 は A と B の定義環でもあり、$I' \subset A'_0$ は A の定義環 A'_0 としての定義イデアルにもなっているのでこれらを取ることによって f が adic になる。 □

命題 1.28. $f\colon A \to B$ を Huber ring の間の連続準同型とする。A が Tate であるとき、B も Tate であって、f は adic になる。

証明. まず、A の定義環 A_0 を一つ固定し、それに含まれる pseudo uniformizer$s \in A_0$ をとる。$\lim_{n\to\infty} s^n = 0$ と f の連続性から $\lim_{n\to\infty} f(s)^n = 0$ より $f(s) \in B^{\circ\circ}$ となる。命題 1.15 から $f(s) \in B^{\circ}$ であるから命題 1.12(3) からある定義環 B_1 が存在して $f(s) \in B_1$ となる。命題 1.16(2) から $f(s)B_1$ は B_1 の定義イデアルになる。同様に $s \in A_0$ より sA_0 は A_0 の定義イデアルになる。ここで f の連続性から $f^{-1}(B_1) \subset A$ は開集合よりある正整数 n で $s^n A_0 \subset f^{-1}(B_1)$ となるから $f(s^n A_0) \subset B_1$ となる。ここで $f(A_0)$ は B で有界になる。実際、B_0 は有界であることから任意の $0 \in B$ の開近傍 U についてある $0 \in B$ の開近傍 V が存在して $B_0 \cdot V \subset U$ となる。ここで $f(s)^{-n}$ 倍写像は同相なので $(f(s)^{-n}B_0) \cdot (f(s)^n V) \subset U$ であり、$f(s)^n V$ が $0 \in B$ の開近傍なので $f(s)^{-n}B_0$ も B で有界である。よって $f(A_0) \subset f(s)^{-n}B_0$ から $f(A_0)$ も B で有界である。ここで命題 1.12(2) から $f(A_0) \subset B_0 \subset B$ となる B の定義環 B_0 が存在する。$f(s) \in B_0$ で $f(s)$ は pseudo uniformizer より $f(s)B_0$ は B_0 の定義イデアルになる。したがってこの A_0 と B_0 と定義イデアル sA_0 をとることによって $f\colon A \to B$ は adic になる。 □

2 Valuation spectrum

Huber ring から空間を構成する。そのために取る点として以下で定める付値を取ることになる。付値に関する一般論を証明した後、定義 3.1 をわかりやすい形にするために定義 2.23 を定義する。

Γ を全順序 (乗法的) 可換群とする。0 を任意の $\alpha \in \Gamma$ について $0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0$ かつ $\alpha \geq 0$ として定義して全順序モノイド $\Gamma \cup \{0\}$ を定義する。

定義 2.1. 全順序可換群 Γ の部分群 H が**凸部分群** (convex subgroup) であるとは、任意の $a \leq b$ という H の元 a と b について $[a,b] \coloneqq \{x \in \Gamma \mid a \geq x \geq b\} \subset H$ となることである。

定義 2.2 (付値). 環 A と全順序モノイド $\Gamma \cup \{0\}$ を取る。環 A 上の $\Gamma \cup \{0\}$ に値を持つ**付値** (valuation) とは写像 $v \colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ であって

- $v(x+y) \leq \max\{v(x), v(y)\}$,
- $v(xy) = v(x)v(y)$,
- $v(0) = 0$,
- $v(1) = 1$

を満たすものである。(すなわち乗法的半ノルムのことである)

定義 2.3 (値群・特徴部分群・付値の台). 付値 $v \colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ を一つ固定する。$\operatorname{Im} v \setminus \{0\}$ で生成される Γ の部分群を v の**値群** (value group) といい Γ_v で表す。$\{v(a) \in \Gamma \cup \{0\} \mid a \in A, v(a) \geq 1\}$ によって Γ_v で生成される凸部分群を v の**特徴部分群**[*1](characteristic subgroup) といい $c\Gamma$ と表す。とくに $v \colon A \to \Gamma_v \cup \{0\}$ と制限して考えたときその特徴部分群を $c\Gamma_v$ と書ける。

付値 $v \colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ に対して $\operatorname{Supp}(v) \coloneqq \operatorname{Ker}(v) = v^{-1}(0)$ は A の素イデアルであり、これを v の**台** (support) という。

命題 2.4. 付値 $v \colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ について付値 $\overline{v} \colon \operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(v)) \to \Gamma \cup \{0\}$ であって以下の図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v"] \arrow[d] & \Gamma \cup \{0\} \\ \operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(v)) \arrow[ur, "\overline{v}"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするものが唯一つ存在する。

この $\overline{v}$ による $\operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(v))$ の付値環を $A(v)$ で表す。すなわち、$A(v) \coloneqq \{x \in \operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(v)) \mid \overline{v}(x) \leq 1\}$ となる。

*1 特性部分群という言葉がすでにあるのでここでは仮に特徴部分群と訳した。

証明. まず $A/\operatorname{Supp}(v)$ 上で $\overline{v}$ を構成する。$a \in A$ の $A/\operatorname{Supp}(v)$ への像を $\overline{a}$ と表すことにする。このとき $\overline{v}(\overline{a}) \coloneqq v(a)$ と定義する。v は付値だからこの定義が代表元のとり方によらないことを示せば良い。$\overline{a} = \overline{b}$ のとき $a - b \in \operatorname{Supp}(v)$ から $v(b-a) = v(a-b) = 0 \leq v(a), v(b)$ となる。したがって強三角不等式から

$$v(a) \leq \max\{v(a-b), v(b)\} = v(b) \tag{2.1}$$
$$v(b) \leq \max\{v(b-a), v(a)\} = v(a) \tag{2.2}$$

から $v(a) = v(b)$ となるので、代表元のとり方によらない。

$A/\operatorname{Supp}(v)$ が整域であるのでその上の付値 $\overline{v}$ はその商体 $\operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(v))$ 上へと拡張することが出来る。すなわち $\overline{v}(\overline{b}/\overline{a}) = v(b)/v(a)$ となっている。これは求める図式の可換性を持ち、その定義から一意的に定まる。 □

定義 2.5. 環 A 上の付値 v と w が**同値** (equivalent) であるとは、以下の互いに等しい条件を満たすことである。

1. 順序モノイドとしての同型射[*2] $f\colon \Gamma_v \cup \{0\} \to \Gamma_w \cup \{0\}$ で $w = f \circ v$ となるものが存在する。

$$\begin{tikzcd} & \Gamma_v \cup \{0\} \arrow[dd, "f"] \\ A \arrow[ur, "v"] \arrow[dr, "w"'] & \\ & \Gamma_w \cup \{0\}\,. \end{tikzcd}$$

2. $\operatorname{Supp}(v) = \operatorname{Supp}(w)$ かつ $A(v) = A(w)$ となる。
3. 任意の A の元 a と b について $v(a) \geq v(b) \iff w(a) \geq w(b)$ が成り立つ。

さらにこの関係は付値全体の中で同値関係になる。

証明. 同値関係になることは明らかなのでこれらの三条件が等しいことを示せば良い。

(1) $\Longrightarrow$ (2)　(1) から順序モノイドとしての同型射 f をとると $f(0) = 0$ と単射性に注意すれば

$$a \in \operatorname{Supp}(v) \Leftrightarrow v(a) = 0 \Leftrightarrow 0 = f(v(a)) = w(a) \Leftrightarrow a \in \operatorname{Supp}(w) \tag{2.3}$$

より $\operatorname{Supp}(v) = \operatorname{Supp}(w) \subset A$ となる。この等号からとくに $K \coloneqq \operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(v)) = \operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(w))$ であることに注意する。K の元 x は $x = \overline{b}/\overline{a}$ と表すことができる。$A(v), A(w) \subset K$ から集合として一致していることを示せば良い。命題 2.4 から $\overline{v}(x) = v(b)/v(a)$ と f が同型射であることに注意すると

$$\begin{aligned} x \in A(v) &\Leftrightarrow \overline{v}(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{v(b)}{v(a)} \leq 1 \Leftrightarrow v(b) \leq v(a) \Leftrightarrow w(b) = f(v(b)) \leq f(v(a)) = w(a) \\ &\Leftrightarrow \frac{w(b)}{w(a)} \leq 1 \Leftrightarrow \overline{w}(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in A(w) \end{aligned}$$

[*2] 順序を保つ全単射なモノイド間の準同型写像のこと。1 が単位元なので $f(1) = 1$ であり、さらに全射性と順序を保つことから $f(0)$ が $\Gamma_w \cup \{0\}$ の最小元になるので $f(0) = 0$ も従う。

から $A(v)=A(w)\subset K$ であることが示された。

(2) $\Longrightarrow$ (3) $\operatorname{Supp}(v)=\operatorname{Supp}(w)$ から $A(v)$ と $A(w)$ を同じ体 $K:=\operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(v))=\operatorname{Frac}(A/\operatorname{Supp}(w))$ の中で考えることが出来るので $A(v)=A(w)$ が K の中での集合としての等号として意味を持つ。したがって (2) から

$$v(b)\leq v(a)\Leftrightarrow \overline{v}\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)=\frac{v(b)}{v(a)}\leq 1\Leftrightarrow \frac{\bar{b}}{\bar{a}}\in A(v)=A(w)\Leftrightarrow \overline{w}\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right)=\frac{w(b)}{w(a)}\leq 1\Leftrightarrow w(b)\leq w(a) \tag{2.4}$$

より (3) が従う。

(3) $\Longrightarrow$ (1) $\Gamma_v\cup\{0\}=(\operatorname{Im}(v)\setminus\{0\})\cup\{0\}$ であるからその元はある $a\in A$ によって $v(a)$ と表せる。ここで

$$\begin{aligned} f\colon \Gamma_v\cup\{0\} &\longrightarrow \Gamma_w\cup\{0\}\\ v(a) &\longmapsto w(a)\end{aligned}$$

と定義すると (3) より $v(a)=v(b)$ のとき $w(a)=w(b)$ から f は写像になっている。v と w が乗法的であることから f は積を保ち、$f(1)=f(v(1))=w(1)=1$ からモノイド間の準同型になり、再度 (3) から f は順序を保つことがわかる。全単射性も (3) から従い、構成から $w=f\circ v$ も成り立っているから、この $f\colon \Gamma_v\cup\{0\}\to\Gamma_w\cup\{0\}$ を取れば良い。 □

以上のことを踏まえて、まずは任意の環 A 上に付値を点としてとる位相空間を定義することが出来る。

定義 2.6 (付値スペクトラム). 環 A についてその上の付値全体の集合を定義 2.5 で定めた同値関係によって割った集合を $S(A)$ と表す。$S(A)$ の元で代表元が v であるものも同じように v と書くこととする。このとき $S(A)$ の位相として任意の $a,b\in A$ に対して

$$\{v\in S(A)\mid v(a)\leq v(b)\neq 0\} \tag{2.5}$$

という形の集合で生成されるものをとる。この位相空間を改めて $\operatorname{Spv}(A)$ と表し、これを A の**付値スペクトラム** (valuation spectrum) という。

事実 2.7 ([Hu93] Proposition 2.2). $\operatorname{Spv}(A)$ は spectral space になる。

記法 2.8. 付値 $x\in\operatorname{Spv}(A)$ と $f\in A$ について x が乗法的半ノルムであったり、x を空間の点として f に代入しているように見たりするため、$x(f)\in\Gamma_x\cup\{0\}$ を $|f(x)|$ と書くこともある。この記法に基づくと (2.5) は $f,g\in A$ に対して

$$\{x\in\operatorname{Spv}(A)\mid |f(x)|\leq|g(x)|\neq 0\} \tag{2.6}$$

と書くことが出来る。

注意 2.9 ([SW] Definition2.3.2.). 開集合として (2.5) を取ることはスキームにおける基本開集合のような $\{x\in\operatorname{Spv}(A)\mid |f(x)|\neq 0\}$ やリジッド幾何学における有理領域[*3] $\{x\in\operatorname{Spv}(A)\mid |f_1(x)|\leq$

*3 実際、有理領域と呼ばれる集合を後に定義する。

$|g(x)|, \ldots, |f_r(x)| \leq |g(x)|\}$(ただし $\{f_1, \ldots, f_r, g\}$ はイデアルとして A を生成する) というものを開集合として含ませるということを意図している。もし $|g(x)| \neq 0$ の条件がなくなると、とくに $\{x \in \mathrm{Spv}(A) \mid |f(x)| \neq 0\}$ を取ることができなくなってしまう。

注意 2.10. 定義 2.3 で定義した付値の台は

$$\begin{aligned} \mathrm{Supp}\colon \mathrm{Spv}(A) &\longrightarrow \mathrm{Spec}(A) \\ v &\longmapsto \mathrm{Supp}(v) \end{aligned}$$

という写像を与える。このときこれは定義 2.6 で定めた $\mathrm{Spv}(A)$ の位相と $\mathrm{Spec}(A)$ のザリスキー位相に関して連続写像になる。

証明. $f \in A$ に関する $\mathrm{Spec}(A)$ の基本開集合 $D(f) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ の Supp による逆像が開集合なら良い。実際、

$$\mathrm{Supp}^{-1}(D(f)) = \{x \in \mathrm{Spv}(A) \mid f \notin \mathrm{Supp}(x) = x^{-1}(0)\} = \{x \in \mathrm{Spv}(A) \mid |f(x)| \neq 0\} \tag{2.7}$$

であり、これは $\mathrm{Spv}(A)$ の開集合なので Supp は連続写像になる。 □

定義 2.11 (付値スペクトラムの間の射). 環準同型 $f\colon A \to B$ と B 上の付値 $v\colon B \to \Gamma \cup \{0\}$ について

$$v|_A := \mathrm{Spv}(f)(v) := v \circ f \tag{2.8}$$

と定義すると A 上の付値になっている。これによって付値スペクトラムの間の写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Spv}(f)\colon \mathrm{Spv}(B) &\longrightarrow \mathrm{Spv}(A) \\ v &\longmapsto v \circ f \end{aligned}$$

を定めることができる。とくにこれは (2.5) の形の集合を移し合う連続写像になる。

証明. $v|_A$ が A 上の付値になることは f の準同型性から明らか。*Spv*(f) が連続写像になることを示す。$\mathrm{Spv}(A)$ の位相の準開基 $\{v \in \mathrm{Spv}(A) \mid v(a) \leq v(b) \neq 0\}$ を任意に取る。ただし a, b は A の元である。このとき

$$\begin{aligned} \mathrm{Spv}(f)^{-1}(\{v \in \mathrm{Spv}(A) \mid v(a) \leq v(b) \neq 0\}) &= \{w \in \mathrm{Spv}(B) \mid (w \circ f)(a) \leq (w \circ f)(b) \neq 0\} \\ &= \{w \in \mathrm{Spv}(B) \mid w(f(a)) \leq w(f(b)) \neq 0\} \end{aligned}$$

よりこれは $f(a), f(b) \in B$ から得られる $\mathrm{Spv}(B)$ の準開基なのでとくに開集合である。したがって $\mathrm{Spv}(f)$ は (2.5) の形の集合を移し合う連続写像になる。 □

まず、順序群を凸部分群で割ることによって新しい順序群が構成できることを確認する。

命題 2.12. Γ を可換な順序群とし、その凸部分群 H をとる。このとき自然な群準同型 $\pi\colon \Gamma \to \Gamma/H$ について $\pi(\Gamma_{\leq 1}$[*4]$) = (\Gamma/H)_{\leq 1}$ となる順序が定まり、これによって Γ/H は順序群になる。

証明. $H \in \Gamma/H$ が単位元であることに注意する。$\alpha, \beta \in \Gamma/H$ について

$$\alpha \leq H \overset{\text{def}}{\iff} \exists g \in \Gamma_{\leq 1}, \alpha = \pi(g) \tag{2.9}$$

と定義する。すなわち、$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} \leq H$ となるようにするために

$$\alpha \leq \beta \overset{\text{def}}{\iff} \alpha\beta^{-1} \leq H \Leftrightarrow \exists g \in \Gamma_{\leq 1}, \alpha\beta^{-1} = \pi(g) \Leftrightarrow \exists g \in \Gamma_{\leq 1}, \alpha = \pi(g)\beta \tag{2.10}$$

と定義する。

反射律、反対称律、推移律を満たすことを示す。

反射律を示す。任意の $\alpha \in \Gamma/H$ について $g = 1 \in \Gamma_{\leq 1}$ を取れば $\alpha = \pi(g)\alpha$ より $\alpha \leq \alpha$ である。反対称律を示す。$\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \alpha$ のときある $g, h \in \Gamma_{\leq 1}$ で $\alpha = \pi(g)\beta$ かつ $\beta = \pi(h)\alpha$ となる。すると $\alpha = \pi(g)\pi(h)\alpha = \pi(gh)\alpha$ より $\pi(gh) = H \in \Gamma/H$ より $gh \in H \subset \Gamma$ となる。$g \leq 1$ かつ $h \leq 1$ から $gh \leq g \leq 1$ であり、$gh \in H \subset \Gamma$ と H が凸部分群であることから $g \in [gh, 1] \subset H$ より $\pi(h) = H \in \Gamma/H$ となる。したがって $\alpha = \pi(g)\beta = H\beta = \beta$ より反対称律も成り立つ。推移律を示す。$\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \gamma$ のときある $g, h \in \Gamma_{\leq 1}$ で $\alpha = \pi(g)\beta$ かつ $\beta = \pi(h)\gamma$ となる。これより $\alpha = \pi(gh)\gamma$ であり、$g \leq 1$ から h を掛けて $gh \leq 1$ より $gh \in \Gamma_{\leq 1}$ なので $\alpha \leq \gamma$ となるので推移律も成り立つ。

また、任意の $\alpha, \beta \in \Gamma/H$ についてある $a, b \in \Gamma$ で $\alpha = \pi(a)$ と $\beta = \pi(b)$ となるものが取れて、$\alpha = \pi(a) = \pi(ab^{-1})\pi(b) = \pi(ab^{-1})\beta$ であり、ab^{-1} は 1 以上か 1 以下か必ず決まるので α と β は必ず比較できるので Γ/H は全順序集合になる。さらに $\alpha \leq \beta$ となる Γ/H の元と $\gamma \in \Gamma/H$ を任意に取ると $(\alpha\gamma)(\beta\gamma)^{-1} = \alpha\beta^{-1} \leq H$ より定義から $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ より Γ/H は順序群になる。さらに $\pi(\Gamma_{\leq 1}) = (\Gamma/H)_{\leq 1}$ は (2.9) より分かる。 □

位相空間 $\mathrm{Spv}(A)$ における特殊化や一般化は付値の構成によって具体的に書くことが出来る。

命題 2.13. $v \in \mathrm{Spv}(A)$ と Γ_v の凸部分群 H を一つ固定する。命題 2.12 から $\Gamma_v/H \cup \{0\}$ が定義できてこのとき写像 $v/H\colon A \to \Gamma_v/H \cup \{0\}$ と $v|_H\colon A \to H \cup \{0\}$ を次のように定義する。

$$v/H(a) = \begin{cases} v(a) \mod H & (v(a) \neq 0) \\ 0 & (v(a) = 0). \end{cases} \tag{2.11}$$

$$v|_H(a) = \begin{cases} v(a) & (v(a) \in H) \\ 0 & (v(a) \notin H). \end{cases} \tag{2.12}$$

このとき次が成り立つ。

1. v/H は A の付値であり、$\mathrm{Spv}(A)$ において v の一般化になる。すなわち $v \in \overline{\{v/H\}}$ となる。
2. $v|_H$ は A の付値 $\iff c\Gamma_v \subset H$ であり、このとき $\mathrm{Spv}(A)$ において v の特殊化になる。すなわち $v|_H \in \overline{\{v\}}$ となる。

証明. (1) v/H が付値になることは命題 2.12 より $\pi\colon \Gamma \to \Gamma/H$ が順序を保つ準同型であることから $v/H = \pi \circ v$ からわかる。$v \in \overline{\{v/H\}}$ を示す。$\mathrm{Spv}(A)$ の位相を考えると $a, b \in A$ によって $v \in \{w \in$

[4] $\Gamma_{\leq 1} \coloneqq \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \leq 1\}$.

$\mathrm{Spv}(A) \mid w(a) \leq w(b) \neq 0\}$ となるときに v/H も含まれることを示せば良い。実際、$v(a) \leq v(b) \neq 0$ から π で移せば 0 でない元は定義から 0 に移らないので $v/H(a) = \pi(v(a)) \leq \pi(v(b)) = v/H(b) \neq 0$ より v/H も含まれる。

(2) 必要十分性に関係なく一般に成り立つことを確認する。$v(1) = 1 \in H$ と $v(0) = 0 \notin H$ より $v|_H(1) = 1$ かつ $v|_H(0) = 0$ となっている。また、A の元 a, b について $v(ab) \notin H$ となったとする。このとき定義から $v|_H(ab) = 0$ であり、H が部分群であるので $v(a) \in H$ かつ $v(b) \in H$ ならば $v(ab) \in H$ より、その対偶を考えれば $v(a) \notin H$ または $v(b) \notin H$ である。したがって $v|_H(a) = 0$ または $v|_H(b) = 0$ よりその積 $v|_H(a)v|_H(b) = 0$ から $v|_H(ab) = v|_H(a)v|_H(b)$ が成り立つ。したがって $v(ab) \notin H$ のときは乗法性は満たされる。その他の $v(ab) \in H$ のときの乗法性と強三角不等式について確認すれば良い。

($\Leftarrow$) $v|_H$ が乗法的であることを示す。上の議論から $v(ab) \in H$ の場合に $v|_H(ab) = v|_H(a)v|_H(b)$ を示せば良い。$v(a)$ と $v(b)$ の対称性から

(a) $v(a) \leq 1$ かつ $v(b) \leq 1$,
(b) $v(a) \geq 1$ かつ $v(b) \geq 1$,
(c) $v(a) \leq 1 \leq v(b)$

の場合を考える。v の乗法性から (a) のとき $v(ab) \leq v(a), v(b) \leq 1$ であり、(b) のとき $1 \leq v(a), v(b) \leq v(ab)$ であるので H が凸部分群だから $v(ab) \in H$ より $v(a), v(b) \in H$ となる。このとき $v|_H(a) = v(a)$ かつ $v|_H(b) = v(b)$ より $v|_H(ab) = v(ab) = v(a)v(b) = v|_H(a)v|_H(b)$ なので乗法的である。(c) のとき $c\Gamma_v \subset H$ からとくに $1 \leq v(b)$ から $v(b) \in H$ となる。ゆえに $v(b)^{-1} \in H$ から $v(a) = v(ab)v(b)^{-1} \in H$ より (a)(b) の場合と同様に乗法性が成り立つ。

$v|_H$ が強三角不等式を満たすことを示す。$a, b \in A$ について $v(a+b) \notin H$ なら $v|_H(a+b) = 0 \leq \max\{v|_H(a), v|_H(b)\}$ より成り立っている。$v(a+b) \in H$ となっているとする。$v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ であるので、$v(a) \leq v(b)$ として $v(a+b) \leq v(b)$ であるとしてよい。$1 \leq v(b)$ なら $c\Gamma_v \subset H$ から $v(b) \in H$ であり、$v(b) \leq 1$ であっても $H \ni v(a+b) \leq v(b) \leq 1$ で H が凸部分群より $v(b) \in H$ である。常に $v|_H(a) \leq v(a)$ であるのでよって $v|_H(a) \leq v(a) \leq v(b) = v|_H(b)$ かつ $v|_H(a+b) = v(a+b) \leq v(b) = v|_H(b)$ だから $v|_H(a+b) \leq \max\{v|_H(a), v|_H(b)\}$ となるので強三角不等式を満たす。以上より $v|_H$ は A 上の付値になる。

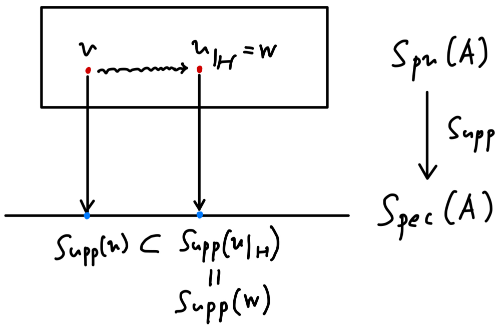
($\Rightarrow$) 背理法で示す。$c\Gamma_v \not\subseteq H$ とすると H が凸部分群であり、$c\Gamma_v$ は $\{v(a) \mid a \in A, v(a) \leq 1\}$ を含む最小の凸部分群であるからとくに $\{v(a) \mid a \in A, v(a) \leq 1\} \not\subseteq H$ となる。従って $f \in A$ で $v(f) > 1$ かつ $v(f) \notin H$ となるものが取れる。ここで $v(f) > 1 = v(1)$ より強三角不等式に関する性質から $H \ni v(f) = v(f+1)$ から $v|_H(f+1) = 0$ となる。仮定から $v|_H$ は A 上の付値なので $0 = v|_H(f) < v|_H(1) = 1$ より再度、強三角不等式に関する性質から $0 = v|_H(f+1) = v|_H(1) = 1$ より $0 \notin \Gamma$ に矛盾する。従って $c\Gamma_v \subset H$ である。

$v|_H \in \overline{\{v\}}$ を示す。$a, b \in A$ で $v|_H \in \{w \in \mathrm{Spv}(A) \mid w(a) \leq w(b) \neq 0\}$ となるものを任意に取る。$v|_H(a) \leq v|_H(b) \neq 0$ からとくに $v(b) \in H$ である。$v(a) \in H$ のとき $v(a) = v|_H(a) \leq v|_H(b) = v(b)$ である。$v(a) \notin H$ で $v(b) < v(a)$ となったとする。$c\Gamma_v \subset H$ から $v(a) < 1$ である必要があるが、このとき $H \ni v(b) < v(a) < 1$ で H が凸部分群なので $v(a) \in H$ となって矛盾する。従って $v(a) \leq v(b)$ となる。以上より $v \in \{w \in \mathrm{Spv}(A) \mid w(a) \leq w(b) \neq 0\}$ となるので $v|_H \in \overline{\{v\}}$ となる。 $\square$

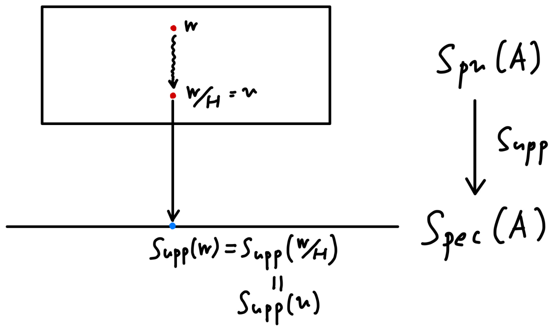
定義 2.14 (horizontal/vertical specialization). $v, w \in \mathrm{Spv}(A)$ をとる。

1. w が v の horizontal specialization[*5]であるとは、ある凸部分群 $H \subset \Gamma_v \cup \{0\}$ であり、$c\Gamma_v \subset H$ となり、$w = v|_H$ となることである。
2. w が v の vertical specialization[*6]であるとは、ある凸部分群 $H \subset \Gamma_w \cup \{0\}$ であって $v = w/H$ となることである。

水平や垂直という言葉の意味は次の図 1a と図 1b を考えるとわかる。図は [Mur] FIGURE 5 を参考にしている。



(a) w が v の horizontal specialization.



(b) w が v の vertical specialization.

事実 2.15 ([Hu93] Lemma2.3). $v \in \mathrm{Spv}(A)$ の任意の特殊化は v の垂直特殊化の水平特殊化である。

以上のことを踏まえ、$\mathrm{Spv}(A)$ を更に扱いやすいもののみの集合へと制限するためにいくつかの定義と補題を扱う。

記法 2.16. 以下ではこの節が終わるまで、A を環として、A のイデアル I を、ある有限生成な A のイデアル J で $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ となるものが存在しているものとする。

定義 2.17 (cofinal). A 上の付値 $v \colon A \to \Gamma \cup \{0\}$ について $\gamma \in \Gamma \cup \{0\}$ が Γ の部分群 H において cofinal であるとは、任意の $h \in H$ についてある正整数 n が存在して $\gamma^n < h$[*7]となることである。

補題 2.18. $v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset$ ならば Γ_v の凸部分群 H であって、任意の $i \in I$ について $v(i) \in \Gamma_v$ が H で cofinal になるようなものが存在する。さらにそのような凸部分群の中で包含関係について最大な H がと

*6 [Hu93] では primary specialization と呼んでいるが、[Mor] では horizontal specialization だったためそちらを採用した。
*6 [Hu93] では secondary specialization と呼んでいるが、[Mor] では vertical specialization だったためそちらを採用した。
*7 真の不等号であることに注意する。

れる。とくに $c\Gamma_v \subset H$ であり、$v(I) \neq \{0\}$ なら $v(I) \cap H \neq \emptyset$ となる。

証明. $v(I) = \{0\}$ なら $H = \Gamma_v$ ととれば良い。$v(I) \neq \{0\}$ となったとする。J の有限個からなる生成系を T とする。$h := \max\{v(t) \in \Gamma_v \mid t \in T\}$ を取る。$H \subset \Gamma_v$ を h の生成する凸部分群とする。すなわち H は h の生成する巡回群の生成する凸部分群のことである。

$h < c\Gamma_v$[*8]であることを示す。任意の $a \in \sqrt{J}$ について $\sqrt{J} = \sqrt{I}$ なのである正整数 n で $a^n \in I$ から仮定 $v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset$ より $v(a^n) = v(a)^n \notin c\Gamma_v$ である。もし $v(a) \geq 1$ なら $v(a)^n \geq 1$ より $v(a)^n \in c\Gamma_v$ となってしまうので $v(a) < 1$ である。もしある $\gamma \in c\Gamma_v$ で $v(a) \geq \gamma$ となったら $\gamma \leq v(a) < 1$ で $c\Gamma_v$ が凸部分群より $v(a) \in c\Gamma_v$ から $v(a)^n \in c\Gamma_v$ より矛盾するので任意の $\gamma \in c\Gamma_v$ で $v(a) < \gamma$ となる。$T \subset \sqrt{J} = \sqrt{I}$ よりとくに $h < c\Gamma_v$ である。さらに $h < 1$ でもある。

任意の $i \in I$ で $v(i)$ が H で cofinal になることを示す。H が h で生成される巡回群から生成される凸部分群なので補題 2.19 から、とくに任意の $\gamma \in H$ についてある正整数 n が存在して $h^n \leq \gamma$ となる。とくに $h < 1$ なので $h^{n+1} < h^n \leq \gamma$ となるので h は H で cofinal になる。任意の $t \in T$ で $v(t) \leq h$ から $v(t)^{n+1} \leq h^{n+1}$ より $v(t)$ も H で cofinal になる。$h < c\Gamma_v$ から $h < c\Gamma_v < h^{-1}$ なので $c\Gamma_v \subsetneq H$ である。補題 2.20 の H を今考えている H で考えると $T \subset \mathfrak{c}$ と $J = TA$ から任意の $j \in J$ は $v(j)$ が H で cofinal になる。さらに $\sqrt{J} = \sqrt{I}$ より任意の $i \in I$ についてある正整数 n で $i^n \in J$ であるから $v(i^n) = v(i)^n$ が H で cofinal より $v(i)$ も H で cofinal になる。よってこの H を取ることによって求める性質を持つ凸部分群が存在することが示された。

この構成した H がそのようなもののうち最大のものであることを示す。Γ_v の凸部分群 H' で任意の $i \in I$ で $v(i)$ が H' で cofinal になったとする。$\sqrt{I} = \sqrt{J}$ から任意の $j \in J$ で $v(j)$ が H' で cofinal になるのでとくに上で取った h は H' で cofinal になる。よって任意の $\gamma \in H'$ で、ある正整数 n が存在して $h^n < \gamma$ となる。$\gamma \leq 1$ となる $\gamma \in H'$ については $H \ni h^n < \gamma \leq 1$ から H が凸部分群だから $\gamma \in H$ となる。$1 \leq \gamma$ となる $\gamma \in H'$ については $H \ni \gamma^{-1} \leq 1$ を考えることによって上と同様にして $\gamma^{-1} \in H$ だから $\gamma \in H$ となる。以上より $H' \subset H$ となるのでこの H は最大のものである。上記の証明からいずれの場合にしても $c\Gamma_v \subset H$ となる。

$v(I) \neq \{0\}$ のときは H の構成から $h = v(t)$ となる $t \in T \subset J$ について $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ より、ある正整数 n で $t^n \in I$ となる。従って $H \ni h^n = v(t)^n = v(t^n) \in v(I)$ より $H \cap v(I) \neq \emptyset$ となる。 □

補題 2.19 ([Wed] Remark 1.9). H' を Γ の部分群であるとし、H を H' から生成される凸部分群であるとする。このとき $\gamma \in \Gamma$ に対し、γ が H に入っていることと、ある $h, h' \in H'$ で $h \leq \gamma \leq h'$ となることとは同値になる。

証明. Γ の部分集合 H'' を

$$H'' := \{\gamma \in \Gamma \mid \exists h, h' \in H', h \leq \gamma \leq h'\} \tag{2.13}$$

と定義する。これが H' を含む最小の凸部分群であることを示せば H と一致することがわかるので証明ができる。$H' \subset H''$ は定義より明らか。H' を含む任意の凸部分群 C を取ると、任意の $\gamma \in H''$ についてある $h, h' \in H' \subset C$ で $h \leq \gamma \leq h'$ から C が凸部分群であることより $\gamma \in C$ となる。C が Γ の部分群であ

[*8] 任意の $\gamma_v \in c\Gamma_v$ で $h < \gamma_v$ となるということ。

ることを示す。まず、H' が Γ の部分群より $H' \ni 1 \leq 1 \leq 1 \in H'$ より $1 \in H''$ である。任意の $\alpha, \beta \in C$ についてそれぞれ $h \leq \alpha \leq h'$ と $g \leq \beta \leq g'$ となる H' の元 h, h', g, g' が取れる。ここで H' が部分群より $H' \ni hg \leq \alpha\beta \leq h'g' \in H'$ から $\alpha\beta \in H''$ となるので積について閉じている。また、この α について $H' \ni (h')^{-1} \leq \alpha^{-1} \leq h^{-1} \in H'$ から $\alpha^{-1} \in H''$ より逆元を持つ。また、$\alpha \leq \gamma \leq \beta$ となる $\gamma \in \Gamma$ をとると $H' \ni h \leq \alpha \leq \gamma \leq \beta \leq g' \in H'$ より $\gamma \in H''$ となる。以上より H'' は H' を含む最小の凸部分群になっているから $H = H''$ より求める主張が成り立つ。 □

補題 2.20 ([Wed] Lemma 7.1, Proposition 1.20). A 上の付値 v について Γ_v の凸部分群 H で $c\Gamma_v \subsetneq H$ となっているとする。このとき $\mathfrak{c}$ を $v(a)$ が H で cofinal となるような $a \in A$ の元全体とするとき、$\mathfrak{c}$ は A のイデアルである。

証明. まず、$a \in \mathfrak{c}$ と $b \in A$ について $v(b) \leq v(a)$ であるとき、正整数 n で $v(b)^n \leq v(a)^n$ から $v(a)$ が H で cofinal より $v(b)$ も H で cofinal である。これから、任意の $a, b \in \mathfrak{c}$ について $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ から $a + b \in \mathfrak{c}$ となる。$a \in \mathfrak{c}$ と $b \in A$ について $ab \in \mathfrak{c}$ を示す。$v(b) \leq 1$ のとき $v(ab) \leq v(a)$ で $a \in \mathfrak{c}$ から上の議論から $ab \in \mathfrak{c}$ となる。$v(b) > 1$ のとき、$v(b) \in c\Gamma_v$ である。$c\Gamma_v \subsetneq H$ から、ある $h \in H$ で $h < c\Gamma_v < h^{-1}$ となるものが取れる。$v(a)$ が H で cofinal なので、ある正整数 n で $v(a)^n < h$ となるから $v(a)^n h^{-1} < 1$ である。$v(b) \in c\Gamma_v < h^{-1}$ から $v(b)^{2n} < h^{-1}$ なので

$$v(ab)^{2n} = (v(a)v(b))^{2n} = v(a)^{2n}v(b)^{2n} < v(a)^n v(a)^n h^{-1} < v(a)^n \tag{2.14}$$

となり、$v(a)^n$ も H で cofinal なので $v(ab)$ も H で cofinal になるから $ab \in \mathfrak{c}$ になる。以上より、$\mathfrak{c}$ は A のイデアルになる。 □

定義 2.21 ($c\Gamma_v(I)$). 付値 $v \in \mathrm{Spv}(A)$ について Γ_v の部分群 $c\Gamma_v(I)$ を補題 2.18 で構成した H を用いて

$$c\Gamma_v(I) \coloneqq \begin{cases} c\Gamma_v & (v(I) \cap c\Gamma_v \neq \emptyset) \\ H & (v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset) \end{cases}$$

と定義する。定義から $c\Gamma_v, H \subset \Gamma_v$ であり、補題 2.18 から $c\Gamma_v \subset H$ より $c\Gamma_v \subset c\Gamma_v(I) \subset \Gamma_v$ が成り立っている。

補題 2.22. $v \in \mathrm{Spv}(A)$ について以下は同値。

1. $\Gamma_v = c\Gamma_v(I)$ である。
2. $\Gamma_v = c\Gamma_v$ または、任意の $i \in I$ について $v(i)$ は Γ_v で cofinal になる。
3. $\Gamma_v = c\Gamma_v$ または、I のある生成系 T が存在して、任意の $t \in T$ で $v(t)$ は Γ_v で cofinal になる。

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2)　$c\Gamma_v(I)$ の定義からわかる。

(2) $\Longrightarrow$ (1)　$\Gamma_v = c\Gamma_v$ のとき、$\Gamma_v = c\Gamma_v \subset c\Gamma_v(I) \subset \Gamma_v$ より $\Gamma_v = c\Gamma_v(I)$ となる。$\Gamma_v \neq c\Gamma_v$ のとき、$c\Gamma_v(I)$ は補題 2.18 の H に等しい。仮定から Γ_v は補題 2.18 の条件を満たしているので $c\Gamma_v(I) \subset \Gamma_v$ と $c\Gamma_v(I)$ の最大性から $\Gamma_v = c\Gamma_v(I)$ となる。

(2) $\Longrightarrow$ (3)　明らか。

(3) $\Longrightarrow$ (2)　$\Gamma_v \neq c\Gamma_v$ のとき、$c\Gamma_v \subsetneq \Gamma_v$ であるので補題 2.20 から I の生成系が Γ_v で cofinal なら任意の $i \in I$ で $v(i)$ も Γ_v で cofinal になる。 □

定義 2.23 ($\mathrm{Spv}(A, I)$)**.** 以上の記号 (記法 2.16) を用いて $\mathrm{Spv}(A)$ の部分空間として

$$\mathrm{Spv}(A, I) \coloneqq \{v \in \mathrm{Spv}(A) \mid \Gamma_v = c\Gamma_v(I)\} \tag{2.15}$$

と定義する。

定義 2.24 (レトラクション)**.** 写像 r を

$$\begin{aligned} r\colon\ \mathrm{Spv}(A) &\longrightarrow \mathrm{Spv}(A, I) \\ v &\longmapsto r(v) \coloneqq v|_{c\Gamma_v(I)} \end{aligned}$$

と定義することができる。さらに、包含写像 $\iota\colon \mathrm{Spv}(A, I) \to \mathrm{Spv}(A)$ について $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathrm{Spv}(A,I)}$ となる。

証明. まず、$r(v) = v|_{c\Gamma_v(I)} \in \mathrm{Spv}(A)$ であるから $\Gamma_{r(v)} = c\Gamma_{r(v)}(I)$ を示せば良い。まず、$c\Gamma_v \subset c\Gamma_v(I)$ に注意すると

$$\begin{aligned} \{r(v)(a) \mid a \in A, r(v)(a) \geq 1\} &= \{v(a) \mid a \in A, v(a) \geq 1, v(a) \in c\Gamma_v(I)\} \\ &= \{v(a) \mid a \in A, v(a) \geq 1\} \cap c\Gamma_v(I) \\ &= \{v(a) \mid a \in A, v(a) \geq 1\} \end{aligned}$$

となっているから、特徴部分群の最小性から $c\Gamma_{r(v)} = c\Gamma_v$ となる。

$v(I) \cap c\Gamma_v \neq \emptyset$ のとき、定義 2.21 から $c\Gamma_v(I) = c\Gamma_v$ であるから $r(v) = v|_{c\Gamma_v(I)} = v|_{c\Gamma_v}$ であるので $r(v)$ の値域は $c\Gamma_v$ になっているから $c\Gamma_v = \Gamma_{r(v)}$ となる。よって、値域の制限を考えることで $v(I) \cap c\Gamma_v = r(v)(I) \cap c\Gamma_v$ である。上で示した $c\Gamma_{r(v)} = c\Gamma_v$ と合わせて $\emptyset \neq v(I) \cap c\Gamma_v = r(v)(I) \cap c\Gamma_v = r(v)(I) \cap c\Gamma_{r(v)}$ となる。ゆえに定義から $c\Gamma_{r(v)}(I) = c\Gamma_{r(v)}$ であるから、以上のことをまとめて、$c\Gamma_{r(v)}(I) = c\Gamma_{r(v)} = c\Gamma_v = c\Gamma_v(I) = \Gamma_{r(v)}$ となる。

$v(I) \cap c\Gamma_v = \emptyset$ のときを考える。定義から任意の $i \in I$ について $v(i)$ は $c\Gamma_v(I)$ で cofinal になっている。$c\Gamma_{r(v)} \neq c\Gamma_{r(v)}$ となったとする。$\Gamma_{r(v)} = c\Gamma_v(I)$ なので任意の $i \in I$ について $v(i)$ は $\Gamma_{r(v)}$ で cofinal になっているから、補題 2.22 より $\Gamma_{r(v)} = c\Gamma_{r(v)}(I)$ である。以上より $r(v) \in \mathrm{Spv}(A, I)$ となることが示された。

また、任意の $v \in \mathrm{Spv}(A, I)$ について $\Gamma_v = c\Gamma_v(I)$ より $r(v) = v|_{c\Gamma_v(I)} = v$ だから $r \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathrm{Spv}(A,I)}$ である。 □

この空間の中である特定の形の部分集合を取る。

定義 2.25. A の元 $f_1, \ldots, f_r, g$ が $I \subset \sqrt{(f_1, \ldots, f_r)}$ となるとき、$\mathrm{Spv}(A, I)$ の部分集合 U を

$$U \coloneqq \{v \in \mathrm{Spv}(A, I) \mid v(f_1) \leq v(g) \neq 0, \ldots, v(f_r) \leq v(g) \neq 0\} \tag{2.16}$$

と定義する。この形の部分集合は位相の定義から $\mathrm{Spv}(A, I)$ の開集合であり、これら全体を $\mathscr{R}$ と書くこととする。

事実 2.26 ([Hu93] Proposition 2.6). $\mathrm{Spv}(A, I)$ と $\mathscr{R}$ について次が成り立つ。

1. $\mathrm{Spv}(A, I)$ は spectral space になる。
2. $\mathscr{R}$ は $\mathrm{Spv}(A, I)$ の有限交叉で閉じた開基になる。
3. レトラクション $r\colon \mathrm{Spv}(A) \to \mathrm{Spv}(A, I)$ は $\mathscr{R}$ の元を $\mathscr{R}$ に移し合う。
4. $v \in \mathrm{Spv}(A)$ が $v(I) \neq \{0\}$ のとき $r(v)(I) \neq \{0\}$ となる。

3 Continuous valuations of Huber rings

Huber ring から得られる空間の点として採用する連続付値という概念を定義する。

定義 3.1 (連続付値). A を Huber ring として、$v\colon A \to \Gamma_v \cup \{0\}$ を A 上の付値とする。v が A 上の**連続付値** (continuous valuation) であるとは、任意の $\gamma \in \Gamma_v$ についてある $0 \in A$ の開近傍 U が存在して任意の $u \in U$ で $v(u) < \gamma$ となることである。すなわち、位相環であることから $v^{-1}([0, \gamma)) = \{a \in A \mid v(A) < \gamma\}$ が A の開集合になることである。

このとき A 上の連続付値全体を $\mathrm{Cont}(A)$ で表し、$\mathrm{Spv}(A)$ の相対位相を入れる。

注意 3.2. v が連続付値であるとは、$\Gamma_v \cup \{0\}$ に $[0, \gamma)$ という形から得られる位相を入れたとき、v が連続写像になることと言い換えることが出来る。

定義 3.3. $f\colon A \to B$ を Huber ring の間の連続準同型であるとする。任意の $v \in \mathrm{Cont}(B) \subset \mathrm{Spv}(B)$ について定義 2.11 で定義した通り $\mathrm{Spv}(f)(v) = v \circ f \in \mathrm{Spv}(A)$ が取れる。このとき $\mathrm{Spv}(f)(v)$ は A 上の連続付値である。とくに $\mathrm{Spv}(f)$ の $\mathrm{Cont}(A)$ への制限 $\mathrm{Cont}(f) \coloneqq \mathrm{Spv}(f)|_{\mathrm{Cont}(B)}$ を取ると $\mathrm{Spv}(f)$ の連続性から連続写像 $\mathrm{Cont}(f)\colon \mathrm{Cont}(B) \to \mathrm{Cont}(A)$ を得る。

注意 3.4 ([Mur] Goal 1.2). とくに離散環 A を取るとその上の付値は常に連続だから $\mathrm{Spv}(A) = \mathrm{Cont}(A)$ となる。すなわち、

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ring})^{\mathrm{op}} \arrow[r, hook] \arrow[drr, "\mathrm{Spv}"'] & (\mathrm{HubRing})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathrm{Cont}"] \arrow[dr, "\mathrm{Cont}"] & (\mathrm{Top}) \\
 & & (\mathrm{SpecSp}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

という関係がある。

Huber ring$A$ に対して $\mathrm{Cont}(A)$ を定義 2.23 を用いて表すことが出来る。まず、$A^{\circ\circ} \cdot A$ が記法 2.16 のイデアル I の条件を満たしていることを示す。

補題 3.5. Huber ring$A$ について、A の有限集合 T をとる。まず、A の任意の定義イデアル I について $\sqrt{A^{\circ\circ}\cdot A}=\sqrt{I\cdot A}$ となる。また、$T\cdot A$ が A の開集合 $\Longleftrightarrow A^{\circ\circ}\cdot A\subset\sqrt{T\cdot A}$ が成り立つ。

証明. $\sqrt{A^{\circ\circ}\cdot A}=\sqrt{I\cdot A}$ を示す。　$\sqrt{I\cdot A}$ の任意の元 a を取ると、ある正整数 n で $a^n\in I\cdot A$ であり、$I\subset A^{\circ\circ}$ だからその有限個からなる生成系について考えて十分大きい冪を取ると $a\in\sqrt{A^{\circ\circ}\cdot A}$ であることがわかる。逆に、I が開集合だから任意の $A^{\circ\circ}$ の元 a について、ある正整数 n で $a^n\in I$ となるので $A^{\circ\circ}\subset\sqrt{I\cdot A}$ となる。A の根基イデアルになることに注意すれば $\sqrt{A^{\circ\circ}\cdot A}\subset\sqrt{I\cdot A}$ がわかる。

($\Rightarrow$)　任意の $A^{\circ\circ}\cdot A$ の元 a を取ると、ある A の元 $a_1,\dots,a_n$ と $A^{\circ\circ}$ の元 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ が存在して $a=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$ と書ける。$T\cdot A$ が開集合より、十分大きい正整数 N_i によって $\alpha_i^{N_i}\in T\cdot A$ となるので、さらに十分大きい冪 a^N は $T\cdot A$ に含まれるから $A^{\circ\circ}\cdot A\subset\sqrt{T\cdot A}$ となる。

($\Leftarrow$)　最初に示したとおり $\sqrt{A^{\circ\circ}\cdot A}=\sqrt{I\cdot A}$ であるので $A^{\circ\circ}\cdot A\subset\sqrt{T\cdot A}$ の両辺で根基を取ると $\sqrt{I\cdot A}=\sqrt{A^{\circ\circ}\cdot A}\subset\sqrt{\sqrt{T\cdot A}}=\sqrt{T\cdot A}$ となる。I は有限生成であるのでその生成系について十分大きい冪を取れば、ある正整数 N で $I^N\subset T\cdot A$ となるので $T\cdot A$ は A で開集合になる。 □

定理 3.6. A を Huber ring とするとき、

$$\mathrm{Cont}(A)=\{v\in\mathrm{Spv}(A,A^{\circ\circ}\cdot A)\mid\forall a\in A^{\circ\circ},v(a)<1\}\tag{3.1}$$

が成り立つ。記法 2.16 の仮定を $A^{\circ\circ}\cdot A$ が補題 3.5 で示したとおり満たしているので $\mathrm{Spv}(A,A^{\circ\circ}\cdot A)$ は定義できている。

証明. $\subset$ を示す。　任意の $\mathrm{Cont}(A)$ の元 w を取る。まず $w\in\mathrm{Spv}(A,A^{\circ\circ}\cdot A)$ を示す。任意の $A^{\circ\circ}$ の元 a と任意の $\gamma\in\Gamma_w$ を取る。w の連続性から $\{\alpha\in A\mid w(\alpha)<\gamma\}$ は A の開集合であるので $\lim_{n\to\infty}a^n=0$ より、ある正整数 n で $a^n\in\{\alpha\in A\mid w(\alpha)<\gamma\}$ となる。よって $w(a)^n<\gamma$ から $w(a)$ は Γ_w で cofinal になる。$A^{\circ\circ}\cdot A$ の生成系 $A^{\circ\circ}$ の元 a について $w(a)$ が Γ_w で cofinal であることが示されたので、補題 2.22 より、$\Gamma_w=c\Gamma_w(A^{\circ\circ}\cdot A)$ であるから $w\in\mathrm{Spv}(A,A^{\circ\circ}\cdot A)$ となる。とくに、$\gamma=1\in\Gamma_w$ を取ると、上で示したとおり任意の $a\in A^{\circ\circ}$ について、ある正整数 N が存在して $w(a)^N<1$ となるので $w(a)<1$ より、w は右辺の集合に含まれる。

$\supset$ を示す。　右辺の集合に含まれる v を取る。

まず、任意の $a\in A^{\circ\circ}$ について $v(a)$ が Γ_v で cofinal になることを示す。$v\in\mathrm{Spv}(A,A^{\circ\circ}\cdot A)$ なので、$\Gamma_v=c\Gamma_v(A^{\circ\circ}\cdot A)$ である。$\Gamma_v\neq c\Gamma_v$ のときは補題 2.22 から、任意の $a\in A^{\circ\circ}\subset A^{\circ\circ}\cdot A$ について $v(a)$ は Γ_v で cofinal であるのでよい。$\Gamma_v=c\Gamma_v$ であるときを考える。任意の $a\in A^{\circ\circ}$ と任意の $\gamma\in\Gamma_v$ について、$\gamma\geq 1$ のときは $v(a)<1\leq\gamma$ となるのでよい。$\gamma<1$ のときを考える。$\gamma\in\Gamma_v=c\Gamma_v$ であり、$c\Gamma_v$ は $(\Gamma_v)_{\geq 1}$ で生成される部分群 $\{v(t)v(t')^{-1}\in\Gamma_v\mid t,t'\in A,v(t),v(t')\geq 1\}$ から生成される凸部分群であるので、補題 2.19 から、ある A の元 t と t' で $v(t')v(t)^{-1}\leq\gamma<1$ となる。$v(t')\geq 1$ より、$v(t)^{-1}\leq\gamma<1$ となる。ここで、$a\in A^{\circ\circ}$ から、$n\to\infty$ で $ta^n\to 0$ であるので、$A^{\circ\circ}$ が A で開集合なので、ある正整数 N で $ta^N\in A^{\circ\circ}$ となる。したがって、v の仮定から $v(t)v(a)^N=v(ta^N)<1$ であるので、$v(a)^N<v(t)^{-1}\leq\gamma$ となるので、$v(a)$ は Γ_v で cofinal になる。

この帰結を用いて v が連続になることを示す。A が Huber ring であるので、ある有限集合 T と A の

部分集合 U で $T \cdot U = U^2 \subset U$ で $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が $0 \in A$ の基本近傍系になるものが取れる。まず、$0 \in A$ の基本近傍系であるので、$U \subset A^{\circ\circ}$ となるから、v の仮定より任意の $u \in U$ で $v(u) < 1$ となる。T が有限集合なので、$h := \max\{v(t) \mid t \in T\}$ がとれる。$T \subset U \subset A^{\circ\circ}$ から、上で示したことより $v(h)$ が Γ_v で cofinal であるので、任意の $\gamma \in \Gamma_v$ について、ある正整数 n で $h^n < \gamma$ となる。ゆえに、$(v(T))^n = \{v(t_1)\cdots v(t_n) \mid t_1, \ldots, t_n \in T\}$ の任意の元について、h の定義から $v(t_1)\cdots v(t_n) \leq h^n < \gamma$ となる。よって、任意の $U^{n+1} = T^n \cdot U$ の元 a を取ると、a は T の n 個の元からなる積と U の元の積の有限和であるので、$h^n < \gamma$ と合わせて $v(a) < \gamma$ となる。したがって $U^{n+1} \subset \{a \in A \mid v(a) < \gamma\}$ であるので A における開集合になるから v は連続である。以上より等号が示された。 □

系 3.7. $\mathrm{Cont}(A)$ は $\mathrm{Spv}(A, A^{\circ\circ} \cdot A)$ の閉集合になる。とくに事実 2.26 から $\mathrm{Cont}(A)$ は spectral space である。

証明. $\mathrm{Cont}(A)$ の補集合を考えると、$\mathrm{Spv}(A, A^{\circ\circ} \cdot A) \setminus \mathrm{Cont}(A) = \{v \in \mathrm{Spv}(A, A^{\circ\circ} \cdot A) \mid \exists a \in A^{\circ\circ}\} = \cup_{a \in A^{\circ\circ}} \{v \in \mathrm{Spv}(A, A^{\circ\circ} \cdot A) \mid v(1) \leq v(a)\}$ となり、$\{v \in \mathrm{Spv}(A, A^{\circ\circ} \cdot A) \mid v(1) \leq v(a)\}$ は $\mathrm{Spv}(A, A^{\circ\circ} \cdot A)$ で開集合なので $\mathrm{Cont}(A)$ は閉集合になる。 □

以上の命題を用いて、$\mathrm{Cont}(A)$ ではなく、その中の $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ というものを定義するための準備をする。

定義 3.8. A を Huber ring とする。

$$\mathscr{F}_A := \left\{ \bigcap_{a \in S} \{v \in \mathrm{Cont}(A) \mid v(a) \leq 1\} \;\middle|\; S \subset A \right\} \tag{3.2}$$

$$\mathscr{G}_A := \{A^+ \subset A \mid A^+ \text{は } A \text{ の整閉な開部分環}\} \tag{3.3}$$

という集合族を定義する。

注意 3.9. とくに命題 1.15 から $A^\circ \in \mathscr{G}_A$ となる。

これら $\mathscr{F}_A$ と $\mathscr{G}_A$ の間に一対一の対応がある。

定理 3.10. Huber ring$A$ に対して次が成り立つ。

1. $\mathscr{G}_A$ と $\mathscr{F}_A$ の間の包含関係を逆にする写像

$$\begin{aligned} \sigma \colon \mathscr{G}_A &\longrightarrow \mathscr{F}_A \\ G &\longmapsto \{v \in \mathrm{Cont}(A) \mid \forall g \in G, v(g) \leq 1\} \\ \tau \colon \mathscr{F}_A &\longrightarrow \mathscr{G}_A \\ F &\longmapsto \{a \in A \mid \forall v \in F, v(a) \leq 1\} \end{aligned}$$

は互いに逆写像になっている。とくに $\mathscr{G}_A$ と $\mathscr{F}_A$ には一対一の対応がある。

2. $G \in \mathscr{G}_A$ であって $G \subset A^\circ$ となるものを取る。このとき任意の $v \in \mathrm{Cont}(A)$ は $\sigma(G)$ の元の vertical specialization になる。すなわち、ある Γ_v の凸部分群 H が存在して $v/H \in \sigma(G)$ となる。とくに $\sigma(G)$ は $\mathrm{Cont}(A)$ で稠密になる。

3. A が Tate かつ Noether な定義環を持つとき、(2) の逆が成り立つ。すなわち、$G \in \mathscr{G}_A$ について $\sigma(G)$ が $\mathrm{Cont}(A)$ で稠密なら $G \subset A^\circ$ となる。

証明. (1)　$\sigma \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_A}$ を示す。　$\mathscr{F}_A$ の元 $F = \cap_{a \in S}\{v \in \mathrm{Cont}(A) \mid v(A) \leq 1\}$ を取る。ただし S は A のある部分集合である。すると、$\tau(F) = \{a \in A \mid \forall v \in F v(a) \leq 1\}$ と $\sigma \circ \tau(F) = \{v \in \mathrm{Cont}(A) \mid \forall g \in \tau(F), v(g) \leq 1)\}$ である。任意の $v \in F$ について任意の $g \in \tau(F)$ について $v \in F$ から $v(g) \leq 1$ であるので $F \subset \sigma \circ \tau(F)$ である。逆に任意の $v \in \sigma \circ \tau(F)$ を取ると、任意の $g \in \tau(F)$ で $v(g) \leq 1$ となる。とくに S を 1 以下にするような付値によって 1 以下になる A の元全体が $\tau(F)$ なので $S \subset \tau(F)$ から、任意の $a \in S$ で $v(a) \leq 1$ となるので $v \in F$ になるから $\sigma \circ \tau(F) \subset F$ となるので $\sigma \circ \tau(F) = F$ となる。

$\tau \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathscr{G}_A}$ を示す。　$G \in \mathscr{G}_A$ を取ると、$\tau \circ \sigma(G)$ は G の元を全部 1 以下にするような付値によって 1 以下になるような A の元であるので、とくに $G \subset \tau \circ \sigma(G)$ となる。

$G \subsetneq \tau \circ \sigma(G)$ となったとして矛盾を導く。([Mur] FIGURE 5 に以下の証明の図がある) このとき、ある $a \in \tau \circ \sigma(G) \setminus G$ が取れる。もし a が冪零だったらある正整数 n で $a^n = 0 \in G$ であり、G が整閉なので $a \in G$ となって矛盾する。ゆえに零環ではない $A[a^{-1}]$ の部分環 $G[a^{-1}]$ が取れる。もし $a \in G[a^{-1}]$ となったとすると a が G 上整になるので G の整閉性から $a \in G$ となり、$a \notin G$ に反するので $a \notin G[a^{-1}]$ である。したがって、ある $G[a^{-1}]$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ であって $a^{-1} \in \mathfrak{p}$ となるものが取れる。$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{p}$ に含まれる $G[a^{-1}]$ の極小素イデアルとする。ここで体 $K := \mathrm{Frac}(G[a^{-1}/\mathfrak{q}])$ の中に局所部分環 $(G[a^{-1}]/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}}$ があるから、これを支配する K における付値環 R が存在する。すなわち、$(G[a^{-1}]/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}} \subset R \subset K$ かつ $\mathfrak{p}/\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}_R$ となる。この R に関する乗法付値 $s' \colon K \to \Gamma_1 \cup \{0\}$ を取ると可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathfrak{p}/\mathfrak{q} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathfrak{m}_R \arrow[d, hook] & \\
G[a^{-1}] \arrow[r] \arrow[rrrrd, bend right, "s"'] & G[a^{-1}]/\mathfrak{q} \arrow[r, hook] \arrow[rrd] & (G[a^{-1}]/\mathfrak{q})_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}} \arrow[r, hook, "\text{dominant}"] & R \arrow[r, "s'"] \arrow[d, hook] & (\Gamma_1)_{\leq 1} \cup \{0\} \arrow[d, hook] \\
 & & & K = \mathrm{Frac}(G[a^{-1}]/\mathfrak{q}) \arrow[r, "s'"] & \Gamma_1 \cup \{0\}
\end{tikzcd}$$

によって $G[a^{-1}]$ 上の付値 s が取れる。ここで s' は体 K における付値環 R に対応する付値なので $\mathrm{Supp}(s') = \{0\} \subset K$ であることに注意すると $\mathrm{Supp}(s) = \mathfrak{q}$ となる。さらに $G \subset G[a^{-1}] \subset R$ かつ $\mathfrak{p}/\mathfrak{q} \subset \mathfrak{m}_R$ より、任意の $g \in G$ で $s(g) \leq 1$ かつ任意の $x \in \mathfrak{p}$ で $s(x) < 1$ である。とくに $a^{-1} \in \mathfrak{p}$ から $s(a^{-1}) < 1$ となる。

ここで今度は $G[a^{-1}]_{\mathfrak{q}} \hookrightarrow A[a^{-1}]_{\mathfrak{q}}$ を考える。$A[a^{-1}]_{\mathfrak{q}}$ は零環ではないので、素イデアルが存在し、それらは $G[a^{-1}] \setminus \mathfrak{q} \subset A[a^{-1}]$ と共通部分を持たない $A[a^{-1}]$ の素イデアルと一対一に対応している。ここでそのような素イデアル $\tilde{\mathfrak{q}} \subset A[a^{-1}]$ を取ると、その $G[a^{-1}]_{\mathfrak{q}}$ への引き戻し $\tilde{\mathfrak{q}} \cap G[a^{-1}]$ は $G[a^{-1}]_{\mathfrak{q}}$ の素イデアルになって、次のような対応をしている。

$$\begin{tikzcd}
G[a^{-1}] \arrow[r, hook] \arrow[d] & A[a^{-1}] \arrow[d] \\
G[a^{-1}]_{\mathfrak{q}} \arrow[r, hook] & A[a^{-1}]_{\mathfrak{q}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{\mathfrak{q}} \cap G[a^{-1}] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \tilde{\mathfrak{q}} \arrow[d, mapsto] \\
\tilde{\mathfrak{q}} A[a^{-1}]_{\mathfrak{q}} \cap G[a^{-1}]_{\mathfrak{q}} \arrow[r, mapsto] & \tilde{\mathfrak{q}} A[a^{-1}]_{\mathfrak{q}}
\end{tikzcd}$$

このとき、$\tilde{\mathfrak{q}} \cap G[a^{-1}]$ は $G[a^{-1}]$ の素イデアルであって $\mathfrak{q}$ に含まれるものに対応しているから、$\mathfrak{q}$ の極小性より $\tilde{\mathfrak{q}} \cap G[a^{-1}] = \mathfrak{q}$ となっている。ゆえに、単射 $G[a^{-1}]/\mathfrak{q} \hookrightarrow A[a^{-1}]/\tilde{\mathfrak{q}}$ が取れるから、体拡大 $K = \mathrm{Frac}(G[a^{-1}]/\mathfrak{q}) \hookrightarrow L \coloneqq \mathrm{Frac}(A[a^{-1}]/\tilde{\mathfrak{q}})$ が得られる。ここで、K の付値環 R について、$R \subset L$ とみなせるから、これを支配する L の付値環 R' が取れる。すると、K 上の付値 s' はこの R' に対応する $L = \mathrm{Frac}(A[a^{-1}]/\tilde{\mathfrak{q}})$ 上の付値 $t' \colon L \to \Gamma_2 \cup \{0\}$ に延長される。すると、

$$\begin{tikzcd}
G[a^{-1}] \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[rrrr, bend left, "s"] & G[a^{-1}]/\mathfrak{q} \arrow[r] \arrow[d, hook] & R \arrow[r] \arrow[d, hook, "\text{dominant}"] & K = \mathrm{Frac}(G[a^{-1}]/\mathfrak{q}) \arrow[r, "s'"'] \arrow[d, hook] & \Gamma_1 \cup \{0\} \arrow[d] \\
A[a^{-1}] \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right, "t"] & A[a^{-1}]/\tilde{\mathfrak{q}} \arrow[r] & R' \arrow[r] & L = \mathrm{Frac}(A[a^{-1}]/\tilde{\mathfrak{q}}) \arrow[r, "t'"] & \Gamma_2 \cup \{0\} \\
A \arrow[u] \arrow[rrrru, bend right, "u:=t|_A"] & & & &
\end{tikzcd}$$

という延長ができるので $G[a^{-1}]$ 上の付値 s の $A[a^{-1}]$ への延長 t が取れて、A への制限を取って A 上の付値 $u \coloneqq t|_A$ が取れる。まず、$a^{-1} \in R$ と $t|_R = s|_R$ から $t(a^{-1}) = s(a^{-1}) < 1$ なので $t(a) > 1$ に注意すると $a \in A \subset A[a^{-1}]$ から $u(a) = t(a)$ なので $u(a) > 1$ となる。さらに任意の $g \in G$ について $G \subset R$ かつ $G \subset A$ から $u(g) = t(g) = s(g) \leq 1$ となる。

ここで、u について $c\Gamma_u \subset c\Gamma_u$ なので命題 2.13 から $v \coloneqq u|_{c\Gamma_u} \colon A \longrightarrow c\Gamma_u$ は A 上の付値になる。ここで、$u(a) > 1$ より $u(a) \in c\Gamma_u$ から $v(a) = u(a) > 1$ となる。さらに任意の $g \in G$ で $v(g) \leq 1$ となる。

$v \in \mathrm{Cont}(A)$ を示す。定理 3.6 から

(a) $v \in \mathrm{Spv}(A, A^{\circ\circ} \cdot A)$

(b) $\forall x \in A^{\circ\circ}$ に対して $v(x) < 1$

が示されれば良い。(a) については $\Gamma_v = c\Gamma_u$ であり、任意の $\alpha \in A$ で $u(\alpha) \geq 1$ と $v(\alpha) \geq 1$ が同値であるから、それらを含む最小の凸部分群も同じになるので $c\Gamma_u = c\Gamma_v$ となる。ゆえに $\Gamma_v = c\Gamma_v$ から補題 2.22 より $\Gamma_v = c\Gamma_v(A^{\circ\circ} \cdot A)$ なので $v \in \mathrm{Spv}(A, A^{\circ\circ} \cdot A)$ となる。(b) については任意の $x \in A^{\circ\circ}$ について $n \to \infty$ で $ax^n \to 0$ なので G が A で開であることから、ある正整数 n が存在して $ax^n \in G$ となる。ゆえに、示したことから $u(ax^n) \leq 1$ と $v(a) > 1$ より、$v(x)^n \leq v(a)^{-1} < 1$ となるので $v(x) < 1$ となる。

以上より $v \in \mathrm{Cont}(A)$ となる。よって $v \in \sigma(G)$ であるが、$v(a) > 1$ から $a \notin \tau \circ \sigma(G)$ より、a のとり方に矛盾する。ゆえに $G = \tau \circ \sigma(G)$ となる。

以上より σ と τ は互いに逆写像であることがわかり、とくに $\mathscr{G}_A$ と $\mathscr{F}_A$ は包含関係を逆にする一対一対応を持つ。

(2)　$v \in \mathrm{Cont}(A)$ を任意に取る。

$\mathrm{Supp}(v)$ が A で開であるとき。　このときは $v/\Gamma_v \colon A \to \Gamma_v/\Gamma_v \cup \{0\} = \{0, 1\}$ を取ると、$v(a) \neq 0$ なら $v/\Gamma_v(a) = 1$ であって、$v(a) = 0$ なら $v/\Gamma_v(a) = 0$ となる。とくに $\{a \in A \mid v/\Gamma_v(a) < 1\} = \mathrm{Supp}(v)$ は A で開であるので $v/\Gamma_v \in \mathrm{Cont}(A)$ となる。任意の $g \in G$ について $v/\Gamma_v(g) \leq 1$ であるから $v/\Gamma_v \in \sigma(G)$ と

なる。

Supp(v) が A で開でないとき。　$A^{\circ\circ}$ は A で開集合であるので、とくに $A^{\circ\circ} \not\subseteq$ Supp(v) である。よって、ある $a \in A^{\circ\circ}$ が存在して $v(a) > 0$ となる。とくに $v \in \mathrm{Cont}(A)$ から定理 3.6 より $0 < v(a) < 1$ となる。$H \subset \Gamma_v$ を $v(a) \notin H$ となる Γ_v における最大の凸部分群とすると、$w(a) \neq 1 \in \Gamma_v/H$ であるから $\Gamma_v/H \cup \{0\} \neq \{1, 0\}$ である。もし Γ_v/H が最小元 γ を持ったとすると、自明な群でないことからとくに $\gamma < 1$ である。すると $\gamma^2 < \gamma$ となり、最小性に反する。したがって Γ_v/H は最小元を持たない。標準的な射を $\pi\colon \Gamma_v \to \Gamma_v/H$ とおくと Γ_v/H の任意の元は、ある $\gamma \in \Gamma_v$ によって $\pi(\gamma)$ と書ける。$0 \neq \delta' < \pi(\gamma)$ が存在していることが、Γ_v/H が最小元を持たないことからわかり、$w = \pi \circ v$ となっているので

$$
\begin{aligned}
\{a \in A \mid w(a) < \pi(\gamma)\} &= \bigcup_{0 \neq \delta' < \pi(\gamma)} \{a \in A \mid w(a) \leq \delta'\} = \bigcup_{0 \neq \pi(\delta) < \pi(\gamma)} \{a \in A \mid w(a) \leq \pi(\delta)\} \\
&\supset \bigcup_{0 \neq \pi(\delta) < \pi(\gamma)} \{a \in A \mid v(a) \leq \delta\} \supset \bigcup_{0 \neq \pi(\delta) < \pi(\gamma)} \{a \in A \mid v(a) < \delta\}
\end{aligned}
$$

となるから v の連続性からこれは A の開集合になるので w は $\mathrm{Cont}(A)$ に含まれる。

任意の $g \in G$ で $w(g) \leq 1$ となることを示す。もしそうでなかったとすると、ある $g \in G$ で $w(g) > 1$ となるものが取れる。

まず、$\Gamma_w = \Gamma_v/H$ が階数 1 になることを示す。すなわち、Γ_v/H は非自明な凸部分群を持たないことを示す。単位群ではない Γ_v/H の凸部分群 $\mathscr{H}$ を任意に取る。すると、この Γ_v への引き戻し $H' \coloneqq \pi^{-1}(\mathscr{H})$ は H を含む部分群である。さらに $\alpha \in \Gamma_v$ であって、ある $\gamma, \delta \in H'$ によって $\gamma \leq \alpha \leq \delta$ となるとき、π は順序を保つので $\mathscr{H} \ni \pi(\gamma) \leq \pi(\alpha) \leq \pi(\delta) \in \mathscr{H}$ となり、$\mathscr{H}$ は凸部分群であるので $\pi(\alpha) \in \mathscr{H}$ から $\alpha \in H'$ となる。ゆえに $H' = \pi^{-1}(\mathscr{H})$ は Γ_v の凸部分群である。$\mathscr{H} \neq \{H\} \subset \Gamma_v$ から $H \subsetneq H'$ となる凸部分群であることから、H の最大性より $v(a) \in H'$ となる。したがって $w(a) \in \mathscr{H}$ である。上で示した w の連続性と $a \in A^{\circ\circ}$ から注意 3.2 の位相に関して $n \to \infty$ で $w(a)^n \to 0 \in \Gamma_v/H$ となるので以下の図のように考える。

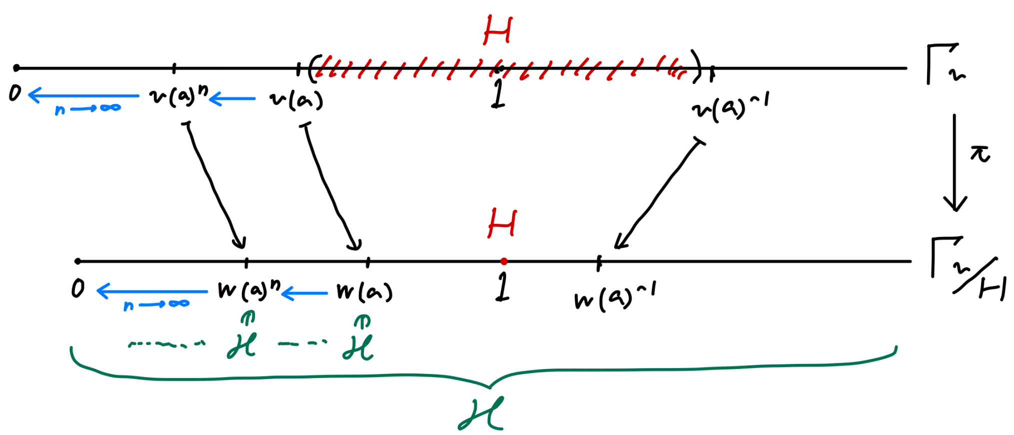


図 2: 単位群ではない凸部分群 $\mathscr{H} \subset \Gamma_v/H$ は全体に一致する。

任意の $\gamma \in (0, 1] \subset \Gamma_v/H$ について $[0, \gamma) \subset \Gamma_v/H$ が 0 の開近傍であるので十分大きい正整数 N で $w(a)^N \in [0, \gamma)$ となる。$w(a)^N \in \Gamma_v/H$ から $w(a)^N \neq 0$ より $w(a)^N \in (0, \gamma)$ なので $w(a)^N < \gamma \leq 1$ よ

り $\mathscr{H}$ が凸部分群であることから $\gamma \in \mathscr{H}$ となる。したがって $(0,1] \subset \mathscr{H}$ であるから、$\mathscr{H}$ が群なので $\Gamma_v/H = \mathscr{H}$ である。ゆえに Γ_v/H は非自明な凸部分群は存在しないので階数 1 である。

階数 1 なので $\Gamma_w = \Gamma_v/H$ は $\mathbb{R}^+$ に埋め込めるから、$w(a) \neq 0$ と $w(g) > 1$ から十分大きい正整数 n で $w(g^n a) = w(g)^n w(a) > 1$ となる。一方、$a \in A^{\circ\circ}$ と $G \subset G^\circ$ から $g \in A^\circ$ と命題 1.15 から $A^{\circ\circ}$ が A° のイデアルになっていることより $g^n a \in A^{\circ\circ}$ となる。$w \in \mathrm{Cont}(A)$ から定理 3.6 より $w(g^n a) < 1$ となるので矛盾する。したがって任意の $g \in G$ で $w(g) \leq 1$ から $w = v/H \in \sigma(G)$ となる。

とくに命題 2.13 より $v \in \overline{\{v/H\}} \subset \overline{\sigma(G)}$ から $\overline{\sigma(G)} = \mathrm{Cont}(A)$ より $\mathrm{Cont}(A)$ で $\sigma(G)$ は稠密である。

(3)　省略。 □

$\mathrm{Cont}(A)$ ではなくて、その中の $F \in \mathscr{F}_A$ に制限して考えたい。しかし、$\mathrm{Cont}(A)$ と十分近いものを考えたいため、F が $\mathrm{Cont}(A)$ で稠密なものであると良い。これを踏まえて定理 3.10(2) から $G := \tau(F)$ は A° に含まれていてほしい。これから、次のような整元環という対象を考える。

定義 3.11 (整元環・Huber pair). A を Huber ring とする。

1. A の開部分環 A^+ が A の中で整閉かつ $A^+ \subset A^\circ$ のとき A^+ を A の**整元環** (ring of integral elements) という。A とその整元環 A^+ の組 (A, A^+) を Huber pair[*9] という。
2. Huber pair(A, A^+) がそれぞれ adic、Tate、**完備**であるとは、Huber ring$A$ がそれぞれ adic,Tate, 完備であることである。
3. Huber pair(A, A^+) と (B, B^+) の間の射 $f\colon (A, A^+) \to (B, B^+)$ とは $f\colon A \to B$ という環準同型であって $f(A^+) \subset B^+$ となるものである。Huber pair の間の射 $f\colon (A, A^+) \to (B, B^+)$ がそれぞれ**連続**、adic であるとは $f\colon A \to B$ がそれぞれ連続、adic となることである。

scheme 論における環のスペクトラムにあたる、adic 空間を構成するときに張り合わせることになる空間を以下のように定義する。

定義 3.12 (adic spectrum). Huber pair(A, A^+) について定理 3.10 で得られる $\sigma(G) \subset \mathrm{Cont}(A)$ を改めて

$$\mathrm{Spa}(A, A^+) := \{v \in \mathrm{Cont}(A) \mid \forall a \in A^+, v(a) \leq 1\} \tag{3.4}$$

と書き、相対位相を入れて、これを adic spectrum という。

定義 3.13. 連続射 $f\colon (A, A^+) \to (B, B^+)$ について定義 3.3 で得られる $\mathrm{Cont}(f)\colon \mathrm{Cont}(B) \to \mathrm{Cont}(A)$ によって $f(A^+) \subset B^+$ から制限することで $\mathrm{Spa}(f)\colon \mathrm{Spa}(B, B^+) \to \mathrm{Spa}(A, A^+)$ を得ることが出来る。

命題 3.14. A を Huber ring とする。A の部分環 B を $\mathbb{Z} \cdot 1 + A^{\circ\circ}$ の A における整閉包と定義する。このとき B は A の整元環のなかで最小のものであって、$\mathrm{Cont}(A) = \mathrm{Spa}(A, B)$ となる。

[*9] [Hu93] では、この組を affinoid ring と呼んでいる。

証明. まず、$A^{\circ\circ} \subset B$ から B は A の開部分環であって、整閉包を取っていることから A で整閉なので B は A の整元環になる。A の任意の整元環 A^+ について、任意の $x \in A^{\circ\circ}$ に対して A^+ が A で開集合だから、ある正整数 n で $x^n \in A^+$ であって、A^+ は整閉だから $x \in A^+$ なので $A^{\circ\circ} \subset A^+$ より $\mathbb{Z} \cdot 1 + A^{\circ\circ} \subset A^+$ となる。A^+ は A で整閉だから、両辺の A における整閉包をとれば $B \subset A^+$ となるので B は最小の整元環である。

$\mathrm{Spa}(A, B) \subset \mathrm{Cont}(A)$ は定義から明らか。逆に任意の $v \in \mathrm{Cont}(A)$ をとると、定理 3.6 から任意の $a \in A^{\circ\circ}$ について $v(A) < 1$ なので強三角不等式を用いて $v(\mathbb{Z} \cdot 1 + A^{\circ\circ}) \subset (\Gamma_v \cup \{0\})_{\leq 1}$ となる。任意の B の元 b は $\mathbb{Z} \cdot 1 + A^{\circ\circ}$ 上整なので、ある $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{Z} \cdot 1 + A^{\circ\circ}$ が存在して $b^n + \alpha_{n-1}b^{n-1} + \cdots + \alpha_1 b + \alpha_0 = 0$ となる。ゆえに上で示したことと合わせて

$$v(b)^n = v(-\alpha_{n-1}b^{n-1} - \cdots + \alpha_1 b - \alpha_0) \leq \max\{v(b)^k v(\alpha_k) \mid k = 0, \ldots, n-1\} \leq \max\{v(b)^k \mid k = 0, \ldots, n-1\} \tag{3.5}$$

より、ある正整数 m で $v(b)^m \leq 1$ なので $v(b) \leq 1$ であるる。よって $v \in \mathrm{Spa}(A, B)$ から $\mathrm{Cont}(A) \subset \mathrm{Spa}(A, B)$ となるのでこれらの集合は一致する。 □

定義 2.25 をあらためて $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ において定義する。

定義 3.15 (有理領域). Huber pair(A, A^+) をとる。A の有限集合 $T_1, \ldots, T_n$ であって $T_i \cdot A$ が A で開集合であるものをとる。さらに A の元 $s_1, \ldots, s_n$ を任意に取る。このとき $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ の部分集合を

$$R\left(\frac{T_1}{s_1}, \ldots, \frac{T_n}{s_n}\right) := \bigcap_{i=1}^{n} \{v \in \mathrm{Spa}(A, A^+) \mid \forall t \in T_i, v(t) \leq v(s_i) \neq 0\} \tag{3.6}$$

と定義する。これを $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ の**有理集合** (rational subset) という。とくに定義 2.6 の位相の入れ方から有理集合はすべて $\mathrm{Spa}(A, A^+)$ の開集合になる。

参考文献

[BV] K. Buzzard and A. Verberkmoes, "Stably uniform affinoids are sheafy," arXiv:1404.7020 [math], Sep. 2015, Accessed: Aug. 02, 2021. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1404.7020

[Mor] S. Morel, "Adic spaces", [Online]. Available: http://perso.ens-lyon.fr/sophie.morel/adic_notes.pdf

[Wed] T. Wedhorn, "Adic Spaces," arXiv:1910.05934 [math], Oct. 2019, Accessed: Jul. 11, 2021. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1910.05934

[Hu94] R. Huber, "A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties," Math Z, vol. 217, no. 1, pp. 513 – 551, Sep. 1994, doi: 10.1007/BF02571959.

[Hu93] R. Huber, "Continuous valuations," Math Z, vol. 212, no. 1, pp. 455 – 477, Jan. 1993, doi: 10.1007/BF02571668.

[SW] P. Scholze and J. Weinstein, Berkeley lectures on p-adic geometry. Princeton; Oxford: Princeton University Press, 2020.

[Ran] D. Rankeya, "HUBER RINGS", [Online]. Available: https://rankeya.people.uic.edu/Huber_rings.pdf

[Mur] T. Murayama, "Continuous valuations and the adic spectrum", [Online]. Available: http://www-personal.umich.edu/~takumim/Huber.pdf

[GR] O. Gabber and L. Ramero, "Foundations for almost ring theory – Release 7.5," arXiv:math/0409584, Sep. 2018, Accessed: Dec. 22, 2020. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/math/0409584

[MSE1] "general topology - Relative closure theorem," Mathematics Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/questions/2649922/relative-closure-theorem (accessed Aug. 30, 2021).

[SE1] "abstract algebra - Linearly disjoint fields - Mathematics Stack Exchange." https://math.stackexchange.com/questions/2786433/linearly-disjoint-fields (accessed Aug. 30, 2021).