

Adic space

<https://ryo1203.github.io>

概要

Adic 空間論についてのゼミを行っているので、発表したところを随時 PDF 化していく。大筋は Adic 空間についての原論文である [Hu93] と [Hu94] に沿っているつもりである。これらに記載のない命題などについては可能な限り出典を記載した。証明については [Mor] や [Wed] など一部参考になっている。

目次

1	Huber ring	1
2	Valuation spectrum	13

1 Huber ring

記法 1.1. A を環、 B, C を A の部分集合とすると、 $B \cdot C$ によって、 B と C の元の一つずつの積の有限和からなる集合を表す。すなわち、

$$B \cdot C := \left\{ \sum_{i=1}^n b_i c_i \mid n \in \mathbb{Z}^+, b_i \in B, c_i \in C \right\} \quad (1.1)$$

である。

定義 1.2 (非アルキメデスの位相環). 位相環 A が非アルキメデスの (non-Archimedean) であるとは、 A の加法部分群からなる $0 \in A$ の基本近傍系が存在することである。

注意 1.3. 位相環 A の開であるような加法部分群 B は閉でもあることがわかる。実際、加法群としての分割を考えると $A = \bigsqcup_{i \in I} (a_i + B)$ となる。平行移動であることから $a_i + B$ も A で開集合になる。とくにある $i_0 \in I$ で $a_{i_0} = 0$ となるように取れるから、 $B = A \setminus \bigsqcup_{i \neq i_0} (a_i + B)$ であり、右辺は開集合の和集合なのでその補集合である B は A で閉集合になる。

定義 1.4 (有界・冪有界・位相的冪零元・adic). A を位相環とする。

1. A の部分集合 B が**有界** (bounded) であるとは、 $0 \in A$ の任意の開近傍 U に対して、ある開近傍 $0 \in V \subset A$ が存在して、任意の $b \in B$ と任意の $v \in V$ の積 bv が U に含まれることである。
2. A の元 a が**冪有界** (power-bounded) であるとは、 A の部分集合 $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が有界であることである。

3. A の元 a が**位相的冪零元** (topologically nilpotent) であるとは、 A の点列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ が $0 \in A$ への収束列になることである。
4. A が **adic** であるとは、ある A のイデアル I が存在して、 $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が $0 \in A$ の基本近傍系を為すことである。このイデアルのことを A の**定義イデアル** (ideal of definition) と呼ぶ。

注意 1.5. 位相環 A が非アルキメデス的であるとする。このとき $B \subset A$ が有界であることは、和で閉じているものからなる基本近傍系が取れることから、 $0 \in A$ の任意の開近傍 U に対してある開近傍 $0 \in V \subset A$ が存在して、 $B \cdot V \subset U$ となることと同値である。

記法 1.6. 位相環 A の冪有界元全体を A° と表し、位相的冪零元全体を $A^{\circ\circ}$ と表すこととする。

定義 1.7 (Huber ring ・ Tate ring). A を位相環とする。

1. A が Huber ring あるいは f-adic ring であるとは、ある部分集合 U と有限集合 $T \subset U$ であって、 $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が $0 \in A$ の基本近傍系を為し、 $T \cdot U = U^2 \subset U$ を満たすものが存在することである。
2. 位相的冪零な単元のことを pseudo-uniformizer と呼ぶ。 A が Tate であるとは、 A が Huber ring であり、pseudo-uniformizer を持つことである。

[Hu93] では f-adic ring と名付けており、[SW] では Huber ring と名付けている。以下では Huber ring と呼ぶこととする。ちなみに、[Ran] には f-adic ring の f は命題 1.9 にあるように、以下で定義される定義イデアルというものが有限生成で取れることに依ると述べられている。

定義 1.8 (定義環 ・ 定義イデアル). A を位相環とし、その部分環 A_0 について、 A_0 が A の**定義環** (ring of definition) であるとは、 A_0 が A で開であり、その相対位相によって A_0 が adic ring となることである。 A の**定義イデアル** (ideal of definition) とは、ある定義環の定義イデアル (定義 1.4) のことである。

定義環と定義イデアルについて次の性質が成り立っている。

命題 1.9. A を Huber ring とし、 A_0 をその部分環とする。

1. A は定義環を持つ。
2. A_0 が A の定義環 $\iff A_0$ が A で開かつ有界。
3. A のすべての定義環は有限生成な定義イデアルを持つ。

証明. A が Huber ring より取ることのできる部分集合 U とその有限部分集合 T を一つ固定する。

(1) W を U によって加法的に生成される A の部分加法群とする。このとき $A_0 := \mathbb{Z} \cdot 1 + W$ とすると A_0 は $U^2 \subset U$ より $W^2 \subset W$ から A の部分環になり、 $U \subset A_0$ であるから A の中で開である。さらに、 $T \subset U \subset A_0$ より T で生成されるイデアル $I := TA_0$ を考える。このイデアルによって A_0 が adic になることを示す。まず $T \cdot U = U^2 \subset U$ より、 $U^2 = T \cdot U \subset TA_0 = I$ から I は開である。 $T \subset U$ から $T^2 \subset T \cdot U$

と $T \cdot W \subset U^2$ から

$$I^2 = T^2 A_0 = T^2 + T^2 \cdot W \subset T \cdot U + T \cdot U^2 \subset T \cdot U = U^2 \quad (1.2)$$

であるので $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が基本近傍系になっていることから、 $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ も A_0 の基本近傍系になる。故に A_0 は adic な開部分環になるから A の定義環になる。

(2) (\Rightarrow) A_0 が定義環のとき、まず定義から A_0 は開であり、基本近傍系 $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ について $I^n \cdot A_0 = I^n$ より A_0 は有界。

(\Leftarrow) 任意の正整数 n について $T(n) := \{t_1 \dots t_n \mid t_1, \dots, t_n \in T\}$ とする。 A_0 が開なので、ある $k \in \mathbb{Z}^+$ が存在して $U^k \subset A_0$ である。 $T \subset U$ より $T^k \subset U^k \subset A_0$ から $T(k) \subset A_0$ である。 T が有限集合だから $T(k)$ も有限集合なのでとくに有限生成イデアル $I := T(k)A_0 \subset A_0$ を取ることができる。 $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が A_0 の基本近傍系になることを示す。 $U^l \subset A_0$ となる $l \in \mathbb{Z}^+$ が取れるから $T \cdot U = U^2$ より $I^n = (T(k)A_0)^n = T(nk)A_0 \supset T(nk)U^l = U^{l+nk}$ となるので任意の正整数 n について I^n は開になる。任意の $0 \in A$ の開近傍 V について A_0 が有界よりとくに、ある正整数 m で $U^m \cdot A_0 \subset V$ となる。 $T \subset U$ から、 $I^m = T(mk)A_0 \subset U^{mk} \cdot A_0 \subset U^m \cdot A_0 \subset V$ より $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ は基本近傍系を為す。ゆえに A_0 はこの有限生成イデアル I を定義イデアルとする adic な開部分環になるので A の定義環になる。

(3) A_0 が定義環なら (2) を経由して有限生成イデアルを取り直せる。 \square

以上を踏まえて、[SW] や [Hu94] など多くの文献では Huber ring を以下の同値な条件で定義している。

命題 1.10. 位相環 A について Huber ring であることと有限生成イデアルを定義イデアルとする定義環を持つことは同値。

証明. まず命題 1.9 から Huber ring は有限生成イデアルを定義イデアルとする定義環を持つ。逆に有限生成イデアル I を定義イデアルとする定義環 A_0 が取れるとき、 $U := I$ とし、その有限部分集合 $T \subset U$ を I の有限個からなる生成系として取ればよい。 \square

この同値条件は扱いやすいが、定義イデアルを取るときに定義環という枠組みが必要になっている。そこで、定義イデアルをイデアルとしてではなく、非単位的有限生成環だと思ふことで定義環という枠組みは必要なくなる。実際、命題 1.9 の証明のように $\mathbb{Z} \cdot 1 + W$ のようなものを考えてしまえば非単位的有限生成環からそれを定義イデアルとして持つような定義環は構成できる。それ故、最低限必要な条件を考えると最初の定義 1.7 の方に妥当性があるとも考えることもできる。

以下では命題 1.9 と命題 1.10 の同値性をとくに言及せずに用いる。次のような Huber ring の例がある。とくに adic ring ではない Huber ring はたしかに存在する。

例 1.11. 1. 有限生成イデアルによって定まっている adic ring は Huber ring である。

2. 環 A とその有限生成イデアル I について、 $A[X]$ に

$$U_n := \left\{ \sum_{k=0}^m a_k X^k \in A[X] \mid a_k \in I^{n+k}, m \in \mathbb{Z}^+ \right\} \quad (1.3)$$

を $0 \in A$ の基本近傍系とする位相を入れる。このとき、 $A[X]$ は Huber ring になるが、任意の正整数 m で $I^m \neq I^{m+1}$ ならば adic ring ではない。

3. $(k, |\cdot|)$ を非自明な非アルキメデスの付値体とする。(例えば \mathbb{Q}_p など) $(A, \|\cdot\|)$ をノルム付き k 代数とし、 A にこのノルムからなる位相を入れると A は Tate ring になる。
4. 環 B とその元 s について、局所化 $\varphi: B \rightarrow B_s$ をとり、 B_s に $\{\varphi(s^n B) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ を $0 \in B_s$ の基本近傍系とする位相を入れれば、 B_s は $s \in B_s$ を pseudo-uniformizer とする Tate ring になる。

証明. (2) $I = (f_1, \dots, f_r)$ としたとき $U := U_1$ は $A[X]$ で開であり、 $T := \{f_1, \dots, f_r\}$ とすると $T \subset U_1$ より $T \cdot U \subset U^2$ である。逆の包含を示す。任意の U の元 $f(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$ と $g(X) = \sum_{k=0}^{m'} b_k X^k$ についてその積 $f(X)g(X) = \sum_{k=0}^{m+m'} (\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}) X^k$ について、 $a_i \in I^{i+1}$ かつ $b_{k-i} \in I^{k-i+1}$ より $a_i b_{k-i} \in I^{k+2}$ より $\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \in I^{k+2} = T \cdot I^{k+1}$ となる。ゆえに $f(X)g(X) \in T \cdot U_1 = T \cdot U$ より $TU = U^2$ となる。また、このことよりとくに $U^2 \subset U_2 \subset U_1 = U$ より $\{U^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ も $A[X]$ の基本近傍系になるので $A[X]$ は Huber ring になる。

一方、任意の正整数 m について $I^m \neq I^{m+1}$ のとき $A[X]$ が adic にならないことを示す。もしイデアル $J \subset A[X]$ で adic になったとすると任意の正整数 k について $U_n \subset J^k \subset U_m$ となる正整数 $n \geq m$ が存在する。 $I^n \neq I^{n+1}$ と $I^{n+1} \subset I^n$ よりある $\alpha \in I^n \setminus I^{n+1}$ が取れる。 $U_n \subset J^k$ から $\alpha \in J^k$ であり、 J^k がイデアルだからとくに任意の 0 以上の整数 i について $\alpha X^i \in J^k \subset U_m$ である。ゆえにこの任意の i について $\alpha \in I^{m+i}$ となる。しかし、十分大きい i を取ると $\alpha \in I^{m+i} \subset I^{n+1}$ となり、 $\alpha \in I^n \setminus I^{n+1}$ に矛盾する。よって $A[X]$ は adic ではない。

(3) $A_0 := \{a \in A \mid \|a\| \leq 1\}$ とし、非自明なノルムであることからある $r \in k$ で $0 < |r| < 1$ となるものが取れる。このとき $\{r^n A_0 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が基本近傍系を為し、 $U := A_0$ かつ $\{T_r := r^n A_0\}$ とすれば A は Huber ring になり、pseudo-uniformizer として $r \in A$ が取れる。□

また、とくに Huber ring において十分多くの定義環が存在する。

命題 1.12. A を Huber ring とする。

1. A_0 と A_1 を A の定義環とすると $A_0 \cap A_1$ と $A_0 \cdot A_1$ も定義環になる。
2. A の有界な部分環 B と A の開部分環 C であって $B \subset C$ となるものについてある A の定義環 A_0 で $B \subset A_0 \subset C$ となるものが存在する。
3. A の冪有界元全体 A° は A の部分環で A の定義環すべての和集合と一致する。
4. A の任意の開部分環 A' について、それに含まれる A の定義環 A_0 が存在する。

証明. (1) A_0 と A_1 は開かつ有界よりその共通部分 $A_0 \cap A_1$ は開であり、有界な集合の部分集合は有界なので $A_0 \cap A_1$ は有界でもあるから $A_0 \cap A_1$ は定義環になる。

$A_0 \cdot A_1$ について $A_0 \subset A_0 \cdot A_1$ より開である。有界であることを示す。とくに十分小さい $0 \in A$ の開近傍 U を取って和で閉じているとして良い。 A_0 が有界より十分小さく、ある $0 \in A$ の開近傍 V_0 であって和で閉じていて $V_0 \cdot A_0 \subset U$ となるものが取れる。この V_0 について A_1 が有界より、ある $0 \in A$ の開近傍 V_1 が存在して $V_1 \cdot A_1 \subset V_0$ となる。ここで $A_0 \cdot A_1$ の元 $\sum x_i y_i$ ($x_i \in A_0, y_i \in A_1$) について、 $y_i \cdot V_1 \subset A_1 \cdot V_1 \subset V_0$ と $x_i \cdot V_0 \subset A_0 \cdot V_0 \subset U$ より

$$(\sum x_i y_i) \cdot V_1 \subset \sum (x_i y_i \cdot V_1) \subset \sum (x_i \cdot V_0) \subset \sum U \subset U \quad (1.4)$$

より $(A_0 \cdot A_1) \cdot V_1 \subset U$ なので $A_0 \cdot A_1$ は有界だから $A_0 \cdot A_1$ は定義環になる。

(2) C について、 $C_0 := A_0 \cap C$ とすると、 A_0 と C は A で開なので C_0 は A で開である。さらに A_0 が A で有界で $C \subset A_0$ よりとくに C も A で有界であるから C_0 も A の定義環になる。とくに $C_0 \subset C$ で C の定義環にもなるのでこれによって C も Huber ring になる。ゆえに $B \subset C$ と有界性から (1) の証明を用いて $B \cdot C_0$ も C で有界かつ $B \subset B \cdot C_0$ から C で開になる。これによって $B \cdot C_0$ は C の定義環になって B を含む。 C が A で開であることと合わせて $B \cdot C_0$ は A で開かつ有界であり、 $B \subset B \cdot C_0 \subset C$ より、 A_0 としてこの $B \cdot C_0$ と取ればよい。

(3) A° が定義環の和集合になっていることを示す。まず、 A の定義環は有界よりその任意の元は冪有界になるから定義環の和集合は A° に含まれる。 A の定義環 A_0 を一つ固定する。任意の A° の元 x について $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ が有界であることから (1) の証明と同様にして $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \cdot A_0 = A_0[x]$ は有界であり、 A_0 を含むので開集合でもあるから A の定義環になる。ゆえに定義環の和集合の中に $A_0[x]$ が含まれるのでとくに x も含まれるので互いの包含関係が示された。

A° が部分環であることは、任意の A° の元 x と y についてある定義環 A_0 と A_1 で $x \in A_0$ と $y \in A_1$ となるものが存在し、(1) から $x + y \in A_0 \cdot A_1 \subset A^\circ$ かつ $xy \in A_0 \cdot A_1 \subset A^\circ$ なので A° は部分環になる。

(4) A はある定義環 B を持つ。このとき $B \cap A'$ は B に含まれている部分環で B の有界性から $B \cap A'$ も有界な部分環。 A' は開だったので (2) を $B \cap A' \subset A'$ に適用すれば良い。 \square

命題 1.9 から次が従う。

系 1.13. A を位相環とする。

1. A が adic ring のとき、 A が Huber ring $\iff A$ が有限生成定義イデアルを持つ。
2. A が Huber ring のとき、 A が adic ring $\iff A$ が有界になる。
3. B を A の開部分環とすると、 A が Huber ring. $\iff B$ が Huber ring.

Huber ring A について、 A° は有界とは限らない。 $A^\circ = \bigcup A_0$ であり、これは有界集合 A_0 の和集合が必ずしも有界ではないという形になっている。すなわち、 $0 \in A$ を原点と見るとき、 A_0 の中では距離が有限であるが、ちょうど A° を境界その外側に距離無限大の地点が存在している。これを踏まえて特に次の Huber ring のクラスを定義する。

定義 1.14 (一様). A を Huber ring とするとき、 A が一様 (uniform) であるとは、 A° が有界であることである。 A° が定義環になることと言ってもよい。

後に定める整元環 A^+ によって、空間の点として取る付値に制限をつけるが、これは A° とは異なる距離無限大との境界として A^+ を取ることに対応している。

冪有界元と位相的冪零元の集合に関する性質を見る。

命題 1.15. A を Huber ring とする。 A° で冪有界元全体を、 $A^{\circ\circ}$ で位相的冪零元全体を表す。(記法 1.6) このとき以下が成り立つ。

1. A° は A の中で開かつ整閉である。
2. $A^{\circ\circ}$ は A° の根基イデアルになる。

証明. (1) A の定義環は開集合であり、命題 1.12(3) から A° が定義環を含むことから A° は開集合になる。 A° が整閉になることを示す。 A° 上整な $x \in A$ を取る。ある $a_0, \dots, a_{n-1} \in A^\circ$ が存在して $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ となる。命題 1.12 から各 a_i についてそれを含むある定義環が取れ、有限個からなるその和集合も定義環になる。その定義環を A_0 とおく。すると $x \in A$ は A_0 上整になっているから $A_0[x] = A + Ax + \dots + Ax^{n-1} \subset A$ と書ける。すると $A[x]$ は有界集合になっている。実際、任意の $0 \in A$ の開近傍 U について A_0 は有界だから、ある $0 \in A$ の開近傍 V が存在して $A \cdot V \subset U$ となる。 V が和で閉じているとしてよいのでそのようにする。各 x, \dots, x^{n-1} に対して一点集合が有界だから、ある $0 \in A$ の開近傍 V_1, \dots, V_{n-1} が存在して $x^i V_i \subset V$ となる。よって $W := V_1 \cap \dots \cap V_{n-1}$ という $0 \in A$ の開近傍 W を取ると

$$(A_0[x]) \cdot W \subset (A_0x) \cdot V_1 + \dots + (A_0x^{n-1}) \cdot V_{n-1} \subset A_0 \cdot V + \dots + A_0 \cdot V \subset U + \dots + U \subset U \quad (1.5)$$

より $A_0[x]$ は有界である。よって $A_0[x]$ も A の定義環だから $A_0[x] \subset A^\circ$ となるのでとくに $\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subset A_0[x]$ から x は A で冪有界になるので $x \in A^\circ$ より A° は A において整閉である。

(2) $A^{\circ\circ} \subset A^\circ$ を示す。 A のある定義環の定義イデアルを I とする。任意の $a \in A^{\circ\circ}$ について任意の正整数 m についてある正整数 N が存在して $n \geq N$ で $a^n \in I^m$ となる。また、有限集合 $\{a, a^2, \dots, a^{N-1}\}$ は有界集合より、ある正整数 m' が存在して $k = 1, \dots, N-1$ で $a^k I^{m'} \subset I^m$ となる。すると $n \geq N$ の a^n について $a^n I^{m'} \subset I^m I^{m'} \subset I^m$ から $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} I^{m'} \subset I^m$ より a は冪有界なので $A^{\circ\circ} \subset A^\circ$ となる。 $A^{\circ\circ}$ が和で閉じていることを示す。 $a, a' \in A^{\circ\circ}$ を取る。任意の $0 \in A$ の開近傍 U についてある正整数 N が存在して任意の $n \geq N$ で $a^n, (a')^n \in U$ となる。とくに U が和で閉じているとして良い。展開式を考えると任意の $n \geq 2N$ で $(a + a')^n \in U$ となる。したがって $a + a' \in A^{\circ\circ}$ なので和で閉じている。また、任意の $b \in A^\circ$ について $ab \in A^{\circ\circ}$ であることを示す。 b が冪有界より、ある $0 \in A$ の開近傍 V が存在して任意の正整数 n で $b^n V \subset U$ となる。 V について、ある正整数 N が存在して任意の $n \geq N$ で $a^n \in V$ となる。よって任意の $n \geq N$ で $(ab)^n = a^n b^n \in b^n V \subset U$ より $ab \in A^{\circ\circ}$ となるから $A^{\circ\circ}$ は A° のイデアルになる。

根基イデアルであることを示す。 $a \in A^\circ$ が $a^m \in A^{\circ\circ}$ となったとする。任意の $0 \in A$ の開近傍 U を取ると有限集合 $\{a, \dots, a^{m-1}\}$ についてある $0 \in A$ の開近傍 V が存在して $k = 1, \dots, m-1$ で $a^k V \subset U$ となる。この V についてある正整数 N が存在して $n \geq N$ で $(a^m)^n \in V$ となる。すると、任意の $n \geq mN$ について $n = mk + r$ となる整数 $N \leq k$ と $0 \leq r \leq m-1$ が存在する。 $k \geq N$ より

$$a^n = a^{mk+r} = (a^m)^k a^r \in a^r V \subset U \quad (1.6)$$

から a は位相的冪零元になるので $A^{\circ\circ}$ は A° の根基イデアルになる。 □

とくに Tate ring のときは次のようにわかりやすい形になる。

命題 1.16. A を Tate ring とし、 B を A の定義環とすると次が成り立つ。

1. B は A のある pseudo-uniformizer を持つ。
2. $s \in B$ を A の pseudo-uniformizer とすると $A = B_s$ であり、 sB が B の定義イデアルになる。

証明. (1) $t \in A$ を pseudo-uniformizer とするとき、 B が $0 \in A$ の開近傍より、 $t^n \rightarrow 0$ より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ によって $t^k \in B$ となる。 t^k も pseudo-uniformizer よりこれを取れば良い。

(2) 任意の $a \in A$ について $s^n \rightarrow 0$ より $s^n a \rightarrow 0$ であるから B が $0 \in A$ の開近傍より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ で $s^k a \in B$ になるので $a \in B_s$ から $s \in A^\times$ と合わせて $A = B_s$ となる。

また、任意の正整数 n について $s^n \in A^\times$ より $A \rightarrow A; a \mapsto s^n a$ は同相であるから、 B が A で開なので $s^n B$ は開である。また、 B の定義イデアル I が $0 \in A$ の開近傍より $s^n \rightarrow 0$ より十分大きい $k \in \mathbb{Z}^+$ で $s^k \in I$ となるものが取れる。よって $s^n B \subset I$ より B の I から定まる位相は sB によって定まる位相と一致するので B は sB を定義イデアルとして持つ。 \square

以下、完備 (化) と言ったら Hausdorff 完備 (化) のことを指すこととする。

定義 1.17 (完備化). A を Huber ring とし、定義環 A_0 とその定義イデアルを I を取る。このとき A の完備化 (completion) とは $\varprojlim A/I^n$ のことであり、それを \hat{A} と表す。ここで $I^n \subset A$ は A_0 のイデアルとしての冪であり、剰余環とその逆極限は加法群として考えて取っている。とくにこれは定義環とその定義イデアルのとり方によらないことが、定義イデアルが基本近傍系を為していることからわかる。

補題 1.18. A を Huber ring とし、 B を A の定義環とし、その定義イデアルを I とする。 \hat{A} と \hat{B} を A と B の完備化とする。とくに完備化の左完全性から $\hat{B} \subset \hat{A}$ とみなせる。このとき次が成り立つ。

1. \hat{A} は Huber ring であり、 \hat{B} は \hat{A} の定義環であり、 $I\hat{B} = \hat{I}$ は \hat{B} の定義環になる。
2. 次の図式

$$\begin{array}{ccc} \hat{A} & \longleftarrow & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ \hat{B} & \longleftarrow & B \end{array}$$

は可換で (環の圏において) 押し出しになっている。である。とくに $\hat{A} \cong \hat{B} \otimes_B A$ が成り立つ。

証明. (1) B が adic より I 進位相の一般論より \hat{B} は $I\hat{B} = \hat{I}$ を定義イデアルとする adic ring になる。さらに、 A も $\{I^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ による完備化だから \hat{A} は $\{\hat{I}^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ を基本近傍系に持つ。ゆえに \hat{B} は開かつ \hat{I} を定義イデアルに持つ adic ring より \hat{A} はこれを定義環と定義イデアルとして持つ Huber ring になる。

(2) 次の図式

$$\begin{array}{ccccc} & & \hat{A} & & \\ & \swarrow i & \longleftarrow & \searrow j & \\ & & \hat{B} \otimes_B A & \xleftarrow{f} & A \\ & \uparrow g & & & \uparrow \iota \\ & \hat{B} & \xleftarrow{k} & B & \end{array}$$

(Note: The diagram also includes a curved arrow labeled l from \hat{B} to \hat{A} .)

を考える。とくに i, ι, k, l はすべて単射であるので \hat{A} の部分環と考えることができる。ここで、 $\hat{B} \otimes_B A$ にある位相を入れることで、 $j: \hat{B} \otimes_B A \rightarrow \hat{A}$ が位相環としての同型射になることを示す。そのために逆射 $h: \hat{A} \rightarrow \hat{B} \otimes_B A$ を構成する。まず、とくに \hat{B} が \hat{A} の部分加法群であるので注意 1.3 と同様に分割 $\hat{A} = \sqcup_{i \in I} (\hat{a}_i + \hat{B})$ を考えることができる。ここで \hat{B} が開集合であり、 \hat{A} において A が稠密なので各 $\hat{a}_i + \hat{B}$

についてある $a_i \in A \cap (\hat{a}_i + \hat{B})$ が取れるから、これらですべて取り替えて $A = \sqcup_{i \in I} (a_i + \hat{B})$ とできる。したがって、とくに $\hat{A} = A + \hat{B}$ と書ける。ゆえに任意の \hat{A} の元 \hat{a} についてある $a \in A$ と $\hat{b} \in \hat{B}$ によって $\hat{a} = a + \hat{b}$ と書ける。ここで h を

$$\begin{aligned} h: \hat{A} &\longrightarrow \hat{B} \otimes_B A \\ \hat{a} = a + \hat{b} &\longmapsto h(\hat{a}) := f(a) + g(\hat{b}) (= 1 \otimes a + \hat{b} \otimes 1) \end{aligned}$$

と定める。 h が j の逆の位相環の準同型になっていることを示す。

h が写像であることを示す。 $a, a' \in A$ と $\hat{b}, \hat{b}' \in \hat{B}$ によって $\hat{a} = a + \hat{b} = a' + \hat{b}'$ となったとする。 $A \ni a - a' = \hat{b}' - \hat{b} \in \hat{B}$ である。ここで、 \hat{A} の部分環とみなすことで $A \cap \hat{B} = B$ が成り立つ。実際、 \hat{B} は \hat{A} における B の閉包に等しく、相対位相を持つので位相空間論の一般論 ([MSE1]) を $A \cap B \subset A \subset \hat{A}$ に適用することで $A \cap \hat{B} = A \cap \overline{B}^{\hat{A}} = \overline{A \cap B}^{\hat{A}} = \overline{B}^{\hat{A}}$ となる。 B は A の開部分環だったので注意 1.3 と合わせて $\overline{A \cap B}^{\hat{A}} = \overline{B}^{\hat{A}} = B$ となるので $A \cap \hat{B} = B$ が成り立つ。これを用いて、 $a - a' = \hat{b}' - \hat{b} \in A \cap \hat{B} = B$ となるから、図式の可換性より $f(a - a') = f(\iota(a - a')) = g(k(a - a')) = g(k(\hat{b}' - \hat{b})) = g(\hat{b}' - \hat{b})$ である。したがって、 $f(a') + g(\hat{b}') = f(a' - a) + f(a) + g(\hat{b}') = g(\hat{b}' - \hat{b}) + f(a) + g(\hat{b}) = f(a) + g(\hat{b})$ より、 $h(\hat{a})$ は $\hat{a} = a + \hat{b}$ の表示のとり方によらないで定まるので h は写像になる。

表示によらないことと定義から h について (a) 加法的、(b) $f = h|_A$ 、(c) $g = h|_{\hat{B}}$ (d) $h(1) = 1$ が成り立つ。 h が環準同型であることを示すためには、積を保つことを示せば良い。任意の $\hat{a} \in \hat{A}$ について \hat{A} で A が稠密より、ある A の点列 (a_n) が存在して $a_n \rightarrow \hat{a}$ となるものが取れる。上述の (b) より $f(a_n) = h(a_n) \in \hat{B} \otimes_B A$ である。ここで、 $\hat{B} \otimes_B A$ が $f: A \rightarrow \hat{B} \otimes_B A$ と $h: \hat{A} \rightarrow \hat{B} \otimes_B A$ が連続とするような完備位相環の構造を持つことが示されれば十分である。実際、 (a_n) が収束列だったので f と h の連続性から $\hat{B} \otimes_B A$ 内の点列 $(f(a_n)) = (h(a_n))$ はとくにコーシー列になる。さらに $\hat{B} \otimes_B A$ の完備性からこの点列は収束するので $h(\hat{a}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ となる。よって、 \hat{A} の元 $\hat{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\hat{a}' = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$ について、 $\hat{a}\hat{a}' = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n a'_n$ となることから、 $\hat{B} \otimes_B A$ が位相環、とくに積の連続性から \lim と積を交換でき、 f はもともと環準同型なので $h(\hat{a}\hat{a}') = \lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n a'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n a'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \lim_{n \rightarrow \infty} f(a'_n) = h(\hat{a})h(\hat{a}')$ となるので h が積を保つことがわかる。

そのような構造が $\hat{B} \otimes_B A$ に入ることを示す。まず、上の図式で $j \circ g = l$ は単射なので $g: \hat{B} \rightarrow \hat{B} \otimes_B A$ も単射になる。 $\hat{B} \otimes_B A$ の位相を $g: \hat{B} \rightarrow \hat{B} \otimes_B A$ が開埋め込みになる位相を入れる。 g が連続になり、(c) より h も \hat{B} において連続だから、とくに $0 \in \hat{B} \subset \hat{A}$ で連続である。よって (b) から f も $0 \in A \subset \hat{A}$ で連続である。 f はもともと環準同型であり、 h は (a) から加法的なので 0 での連続性からそれぞれの定義域全体で連続になる。

また、 \hat{B} の完備性から $g(\hat{B})$ も完備になるので $\hat{B} \otimes_B A$ も完備になる。実際、 $\hat{B} \otimes_B A$ のコーシー列 (x_n) を取ると、 $g(\hat{B})$ が開集合として埋め込まれていたから、ある $N \in \mathbb{Z}^+$ が存在して、任意の N 以上の整数 n と m について $x_n - x_m \in g(\hat{B})$ となる。とくに任意の $n \geq N$ について $x_n - x_N \in g(\hat{B})$ より、ある $\hat{b}_n \in \hat{B}$ によって $x_n = x_N + g(\hat{b}_n)$ となる。任意の 0 の開近傍 $U \subset \hat{B}$ について g が開埋め込みより $g(U)$ は $0 \in \hat{B} \otimes_B A$ の開近傍だから N 以上の $M \in \mathbb{Z}^+$ が存在して、 M 以上の整数 n と m について $x_n - x_m \in g(U)$ となる。 N 以上なので、 $x_n - x_m = (x_N + g(\hat{b}_n)) - (x_N + g(\hat{b}_m)) = g(\hat{b}_n) - g(\hat{b}_m) \in g(U)$ であり、 g は単射だったから $\hat{b}_n - \hat{b}_m \in U$ となるので、 (\hat{b}_n) も \hat{B} のコーシー列になる。 \hat{B} の完備性から (\hat{b}_n) は、ある $\hat{b} \in \hat{B}$ に収束する。十分大きい n において $x_n - (x_N + g(\hat{b})) = g(\hat{b}_n) - g(\hat{b}) \in g(U)$ であるので、 g が開埋め込みより $g(U)$ の形のもので $0 \in \hat{B} \otimes_B A$ の開近傍は全てだから、 $x_n \rightarrow x_N + g(\hat{b})$ となるから、 $\hat{B} \otimes_B A$ は完備である。

$\hat{B} \otimes_B A$ がこの位相で位相環になることを示す。 \hat{B} が位相群だから、 $\hat{B} \otimes_B A$ はすでに位相群になって

いるので、積の連続性を示せば良い。まず、 $\hat{b} \otimes a \in \hat{B} \otimes_B A$ と任意の 0 の開近傍 $U \subset \hat{B} \otimes_B A$ について $(\hat{b} \otimes a) \cdot V \subset U$ となる 0 の開近傍 $V \subset \hat{B} \otimes_B A$ が存在することを示す。 $g^{-1}(U)$ が \hat{B} で開なので、ある \hat{B} の開イデアル S が存在して $S \subset g^{-1}(U) \subset \hat{B}$ となる。 \hat{B} は \hat{A} で開集合だったので S は \hat{A} においても開である。上で示した $A \cap \hat{B} = B$ より $S \cap A \subset \hat{B} \cap A = B \subset A$ となり、 $S \cap A$ は A で開かつ B に含まれる。ここで、 $\{a\} \subset A$ は有界であるから A の開集合 $S \cap A$ に対して、ある 0 の開近傍 $T \subset B$ が存在して、 $a \cdot T \subset S \cap A \subset B \subset A$ となっている。 B において T が開なので、 $T \cdot \hat{B}$ は \hat{B} において開になっているから、その g による像 $g(T \cdot \hat{B})$ は $\hat{B} \otimes_B A$ における開集合になる。 $V := g(T \cdot \hat{B})$ として、これが求める開集合であることを示す。すなわち、 $(\hat{b} \otimes a) \cdot V \subset U$ を示す。 $T \subset B$ より $g(T) = g(k(T)) = f(\iota(T)) = f(T)$ に注意すると、 $V = g(T \cdot \hat{B}) = g(T) \cdot g(\hat{B}) = f(T) \cdot g(\hat{B})$ である。任意の $t \in T$ について、 $f(t) = 1 \otimes t \in \hat{B} \otimes_B A$ より $(\hat{b} \otimes a) \cdot f(t) = \hat{b} \otimes at$ となる。まず、 $at \in a \cdot T \subset B$ だったので B 上のテンソルを取っていることから $\hat{b} \otimes at = at(\hat{b} \otimes 1) = \hat{b}at \otimes 1 = (\hat{b} \otimes 1) \cdot (at \otimes 1)$ となる。さらに $at \in S \cap A \subset S \subset g^{-1}(U)$ から $at \otimes 1 = g(at) \in g(S) \subset U$ となるので $(\hat{b} \otimes a) \cdot f(t) = (at \otimes 1) \cdot (\hat{b} \otimes 1) \in g(S) \cdot g(\hat{B})$ となる。ゆえに記法 1.1 の定義と S が \hat{B} のイデアルであることに注意すると $(\hat{b} \otimes a) \cdot V = (\hat{b} \otimes a) \cdot f(T) \cdot g(\hat{B}) = \{\hat{b} \otimes at \mid t \in T\} \cdot g(\hat{B}) \subset g(S) \cdot g(\hat{B}) = g(S) \subset U$ となる。よって、この V が求める条件を満たすことが示された。

積の連続性を示す。任意の 0 開近傍 $U \subset \hat{B} \otimes_B A$ を取る。十分小さくして和で閉じているようにできる。任意の $x \in \hat{B} \otimes_B A$ について $\hat{B} \otimes_B A$ の元 $y := \sum_{i=1}^n \hat{b}_i \otimes a_i$ と $z := \sum_{j=1}^m \hat{b}'_j \otimes a'_j$ であって、 $yz = x$ となるものを取る。ここで、 U について、各 $\hat{b}_i \otimes a_i$ と $\hat{b}'_j \otimes a'_j$ に対して上で示したように開集合 V が取れる。 $i = 1, \dots, n$ と $j = 1, \dots, m$ それぞれの添字について共通部分を取りそれを V_y と V_z とする。とくに $g(\hat{B})$ が $\hat{B} \otimes_B A$ で開集合かつ adic なので V_y と V_z を十分小さくすることで $V_y \cdot V_z \subset U$ となるようにできる。このとき $y + V_z$ と $z + V_y$ の積は $yz + z \cdot V_z + y \cdot V_y + V_z \cdot V_y$ に含まれる。これは $yz = x$ と $z \cdot V_z \subset U$ かつ $y \cdot V_y \subset U$ と合わせて $x + U$ に含まれる。よって $yz = x$ となるような元についてその開近傍 $(y + V_z) \times (z + V_y) \subset \hat{B} \otimes_B A \times \hat{B} \otimes_B A$ の積 $x + U$ に含まれるから $\hat{B} \otimes_B A$ の積は連続である。

以上より確かに $\hat{B} \otimes_B A$ は f と h を連続とするような完備位相環の構造が入るので h は環準同型になる。定義から $j \circ h = \text{id}_{\hat{A}}$ である。さらに任意の $x \in f(A) \cup g(\hat{B})$ については h の定義より $(h \circ j)(x) = x$ となる。 $h \circ j$ が環準同型より、 $(h \circ j)(\hat{b} \otimes a) = (h \circ j)(g(\hat{b})f(a)) = (h \circ j)(g(\hat{b})) \cdot (h \circ j)(f(a)) = g(\hat{b})f(a) = \hat{b} \otimes a$ より $h \circ j = \text{id}_{\hat{B} \otimes_B A}$ となる。さらに、 $j \circ g$ について開集合 $U \subset \hat{A}$ の j による逆像を g で引き戻したものは図式の可換性から $U \cap \hat{B}$ となるから \hat{B} で開集合になる。よって、 $j^{-1}(U) \supset g(U \cap \hat{B})$ であり、 g が開埋め込みであることから $j^{-1}(U)$ は開集合を含むのでこれ自身も開集合になる。よって j は連続。以上より、 j は連続であり、 h も連続であったから h と j は互いに逆な位相環の準同型になる。したがって位相環としての同型 $\hat{A} \cong \hat{B} \otimes_B A$ を得る。□

注意 1.19. \hat{A} が押し出しの普遍性を満たすことを直接示すことは難しいと思われる。まず $A \cdot \hat{B} = \hat{A}$ と $A \cap \hat{B} = B$ から $j: \hat{B} \otimes_B A \rightarrow \hat{A}$ が同型であることを証明するのは難しい。一般に環 A とその部分環 B と C について $D := B \cap C$ 上のテンソル積に関して $B \otimes_D C \rightarrow B \cdot C = A; b \otimes c \mapsto bc$ が写像であることを確かめるのは難しく、また、写像であったとしても単射であるとは限らない。実際、 B と C と D が体のときこれが単射になることは B と C が D 上線型無関連であるという定義がなされている。例えばこれが写像だが同型にならない反例として [SE1] がある。実際、[SE1] の記号のもとで、 $1 \otimes 1 + \omega \alpha \otimes \alpha^2/2 + \omega^2 \alpha^2 \otimes \alpha/2 \in E \otimes_{\mathbb{Q}} F$ を取るとこれは $E \cdot F$ に移すと 0 になる。一方、 \mathbb{Q} 加群としての同型 $E \cong \mathbb{Q}^3$ と $F \cong \mathbb{Q}^3$ を考えると、この元に対応する $\mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^3 \cong \mathbb{Q}^9$ の元は 0 にならないことが計算によってわかり、単射ではない。

注意 1.20. ここで述べた補題 1.18 の証明は元を取って h を構成することによって示されていた。これは

[Hu93] に沿って示したためであるが、そうではない証明が [GR] の Proposition 8.3.28(3) に記載されている。

系 1.21. A を Huber ring として \hat{A} をその完備化とすると次が成り立つ。

1. A がネーターである定義環を持つとき $A \rightarrow \hat{A}$ は平坦射になる。
2. A がネーターである定義環上有限生成代数のとき A と \hat{A} はネーター環になる。

証明. A のネーターな定義環を B とする。(1) 補題 1.18 より $A \rightarrow \hat{A}$ は自然な射 $A \rightarrow \hat{B} \otimes_B A$ である。 B がネーターかつ adic なので $B \rightarrow \hat{B}$ が平坦になる。 $B \rightarrow A$ による底変換によって平坦性は保たれるから、 $A \cong B \otimes_B A \rightarrow \hat{B} \otimes_B A$ も平坦になるから示された。

(2) 有限生成 B 代数よりある $x_1, \dots, x_n \in A$ によって $A = B[x_1, \dots, x_n]$ と表すことができる。 B がネーターより A はネーターになる。また、 $\hat{A} \cong \hat{B} \otimes_B A = \hat{B} \otimes_B B[x_1, \dots, x_n] \cong \hat{B}[x_1, \dots, x_n]$ になり、 B がネーターかつ adic なので \hat{B} はネーターだから \hat{A} はネーターになる。□

Huber ring の間の射で良い性質を持つものを定義する。

定義 1.22 (adic 射). A と B を Huber ring とする。その間の環準同型 $f: A \rightarrow B$ が adic であるとは、 A の定義環 A_0 とその定義イデアル $I \subset A_0$ と B の定義環 B_0 であって、 $f(A_0) \subset B_0$ かつ I の拡大イデアル $f(I)B_0 \subset B_0$ が B_0 の定義イデアルになるものが存在することである。

注意 1.23. $f: A \rightarrow B$ が adic であるとき、 $I \subset f^{-1}(f(I)B_0)$ から f は連続写像になる。

定義イデアルの拡大については一般に次の主張が成り立っている。すなわち、大きいところで定義イデアルならその性質を下ろすことが出来る。

補題 1.24 ([Ran] Lemma 4.2.2 Lemma 4.2.6). A を Huber ring とする。 A の定義環 A_0 と A_1 が $A_0 \subset A_1$ となっているとする。 A_0 の有限生成イデアル I について以下は同値。

1. I が A_0 の定義イデアルである。
2. A_1 への拡大イデアル IA_1 が A_1 の定義イデアルである。

証明. (1) \implies (2) A_2 は定義環より、ある定義イデアル $J \subset A_2$ を持つ。 I は A_0 で開なので A_1 でも開になるからある正整数 n によって $J^n \subset I \subset A_0 \subset A_1$ となる。 A_1 へ拡大すると J^n は A_1 のイデアルだからそのまま $J^n \subset IA_1 \subset A_1$ となる。よって IA_1 は A_1 で開である。また、 $J \cap A_0 \subset A_0$ は開なので I が A_0 の定義イデアルよりある正整数 m で $I^m \subset J \cap A_0$ となる。 A_1 へ拡大すると $(IA_1)^m \subset (J \cap A_0)A_1 \subset J$ である。以上より、 IA_1 の定める位相と J の定める位相は一致するので I が有限生成であることと合わせて IA_1 は A_1 の定義イデアルになる。

(2) \implies (1) A_0 が A_1 で開であり、 IA_1 が A_1 の定義イデアルなのである正整数 n によって $(IA_1)^n = I^n A_1 \subset A_0$ となる。 I が有限生成より $(IA_1)^n$ の A_1 のイデアルとしての有限個からなる任意の生成系 $\{x_1, \dots, x_r\}$ を取ることが出来る。これらは A_0 に含まれているから A_0 上生成されるイデアル $J := A_0 x_1 + \dots + A_0 x_r \subset A_0$ を構成できる。とくに $J \subset (IA_1)^n$ となる。このとき $\{x_1, \dots, x_r\} \subset A_0$ と $(IA_1)^n \subset A_0$

から

$$\begin{aligned}(IA_1)^{n+n} &= (IA_1)^n (IA_1)^n = (IA_1)^n (A_1 x_1 + \cdots + A_1 x_r) \\ &= (IA_1)^n x_1 + \cdots + (IA_1)^n x_r \subset A_0 x_1 + \cdots + A_0 x_r = J\end{aligned}$$

となるので $(IA_1)^{2n} \subset J \subset (IA_1)^n$ から $\{(IA_1)^k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ が A の基本近傍系を為していることと J が有限生成な A_0 のイデアルより J は A_0 の定義イデアルになる。ここで $(IA_1)^n$ の A_1 上の生成系 $\{x_1, \dots, x_r\}$ は任意に取れていたもので、とくに $I^n \subset A_0$ の A_0 上の有限個からなる生成系と取って J を構成することも出来る。よってこのとき $J = I^n$ であるから I^n は A_0 の定義イデアルになる。冪乗が定義イデアルなので直ちに I 自身が A_0 の定義イデアルであることが従う。 \square

補題 1.25. A と B を Huber ring としてその間の環準同型 $f: A \rightarrow B$ が adic であるとする。このとき以下が成り立つ。

1. f は有界である。すなわち、有界集合の f による像はまた有界集合になる。
2. A_1 と B_1 がそれぞれ A と B の定義環で $f(A_1) \subset B_1$ となっているとする。このとき A_1 の任意の定義イデアル J についてその拡大 $f(J)B_1$ は B_1 の定義イデアルになる。
3. A の定義環 A_1 と B の開部分環 B' が $f(A_1) \subset B'$ となっているとする。このときある B の定義環 B_1 で $f(A_1) \subset B_1 \subset B'$ となるものが存在する。

証明. $f: A \rightarrow B$ が adic であることから取れる定義環や定義イデアルに対して定義 1.22 と同じ記号を用いる。

(1) A の有界集合 T を取る。任意の B の 0 の開近傍 U について、 $f(I)B_0$ が B_0 の定義イデアルよりある正整数 n によって $(f(I)B_0)^n \subset U$ となる。よってとくに $I^n \subset f^{-1}((f(I)B_0)^n) \subset f^{-1}(U)$ となる。一方、 T の有界性からある正整数 m によって $I^m \cdot T \subset I^n$ となる。これより、

$$f(I^m) \cdot f(T) \subset f(I)^n \subset (f(I)B_0)^n \subset f(f^{-1}(U)) \subset U \quad (1.7)$$

となり、 $(f(I)B_0)^n$ が B_0 の元の積と和について閉じているので B_0 を掛けると $(f(I)B_0)^n \cdot f(T) \subset U$ となる。 $f(I)B_0$ は B_0 の定義イデアルであったからこれより $f(T)$ は B で有界であることが示された。

(2) $K := f(I)B_0$ とおく。特にこれは f が adic より B_0 の定義イデアルになっていた。 $f(J)B_1 \subset B_1$ が B_1 の定義イデアルになっていることを示せば良い。まず、 $A_2 := A_0 \cdot A_1$ と $B_2 := B_0 \cdot B_1$ は命題 1.12(1) よりそれぞれ A と B の定義環になっている。仮定より $f(A_0) \subset f(B_0)$ と $f(A_1) \subset f(B_1)$ が成り立っているので $f(A_2) \subset B_2$ が成り立っている。ここで、補題 1.24 を適用することで定義イデアルの拡大 $IA_2, JA_2 \subset A_2$ と $KB_2 \subset B_2$ はそれぞれの環の中の定義イデアルになる。 $f(A_2) \subset B_2$ から $f(IA_2)B_2 = f(I)B_2 = f(I)B_0B_2 = KB_2$ から $f(IA_2)B_2$ は B_2 の定義イデアルになる。(すなわち $f: A_2 \rightarrow B_2$ においては adic の性質がなりたっていることが示された (注意 1.26)) ここで $JA_2 \subset A_2$ の B_2 への拡大イデアル $L := f(JA_2)B_2 \subset B_2$ は B_2 の定義イデアルになる。実際、 IA_2 と JA_2 がともに A_2 の定義イデアルなのである正整数 n と m によって $(IA_2)^n \subset (JA_2)^m \subset IA_2$ となる。これを拡大して $(f(IA_2)B_2)^m \subset L^n \subset f(IA_2)B_2$ より $f(IA_2)B_2$ が B_2 の定義イデアルなので L も B_2 の定義イデアルである。ここで再度、補題 1.24 を $L = f(JA_2)B_2 = (f(J)B_1)B_2$ と $B_1 \subset B_2$ に適用すると $f(J)B_1 \subset B_1$ は B_1 の定義イデアルになっている。

(3) (1) と A_1 の有界性から $f(A_1)$ は B で有界。 $f(A_1) \subset B'$ に命題 1.12(2) を用いればよい。 \square

注意 1.26. 補題 1.25(2) の証明では一度大きい定義環 A_2 と B_2 まで考えて adic の性質が成り立っていること (定義イデアルの拡大が定義イデアルになること) を示し、補題 1.24 によってその性質を下の定義環 A_1 と B_1 に下ろすことによって示した。

系 1.27. Huber ring の間の射 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ について以下が成り立つ。

1. f と g が adic ならばその合成 $g \circ f$ も adic になる。
2. f と g が連続であり、合成 $g \circ f$ が adic ならば g は adic になる。
3. A の開部分環 A' と B の開部分環 B' で $f(A') \subset B'$ となるとする。このとき $f' := f|_{A'}: A' \rightarrow B'$ について、 f が adic $\iff f'$ が adic。

証明. (1) f の adic 性より A と B の定義環 A_0 と B_0 であって $f(A_0) \subset B_0$ かつ A_0 の定義イデアル I で $f(I)B_0$ が B_0 の定義イデアルになるものが存在する。ここで g の adic 性から補題 1.25(1) より $g(B_0)$ が有界であり、 $g(B_0) \subset C$ について命題 1.12(2) よりある C の定義環 C_0 で $g(B_0) \subset C_0 \subset C$ となるものが取れる。さらに g が adic であり、この B_0 とその定義イデアル $f(I)B_0$ と C_0 について補題 1.25(2) より $g(f(I)B_0)C_0 = g(f(I))C_0$ は C_0 の定義イデアルになる。以上よりこの定義環 $A_0 \subset A$ と $C_0 \subset C$ と定義イデアル $I \subset A_0$ を取ると $(g \circ f)(A_0) \subset C_0$ かつ $(g \circ f)(I)C_0$ が C_0 の定義イデアルより $g \circ f$ は adic になる。

(2) $h := g \circ f$ とおく。次の可換図式のように g が adic になるような定義環 B_0 と C_0 と B_0 の定義イデアル J を構成する。

$$\begin{array}{ccccccc}
 C & \longleftarrow & C_0 & \longleftarrow & K & & \\
 g \uparrow & & g \uparrow & & g \uparrow & \swarrow g & \\
 B & \longleftarrow & g^{-1}(C_0) & \longleftarrow & B_0 & \longleftarrow & J := g^{-1}(K) \cap B_0 \\
 f \uparrow & & f \uparrow & & f \uparrow & \swarrow f & \\
 A & \longleftarrow & f^{-1}(B_0) & \longleftarrow & A_0 & \longleftarrow & f^{-1}(J) \cap A_0 \longleftarrow I
 \end{array}$$

C の定義環 C_0 とその定義イデアル K を一つ固定する。 g の連続性から $g^{-1}(C_0)$ は B の開部分環になる。命題 1.12(4) からある B の定義環 B_0 で $g^{-1}(C_0)$ に含まれるものが存在する。このとき g の連続性から $J := g^{-1}(K) \cap B_0$ は B_0 の開イデアルである。さらに f の連続性から $f^{-1}(B_0)$ は A の開部分環であって、 $f^{-1}(J)$ は $f^{-1}(B_0)$ の中の開イデアルである。再度、命題 1.12(4) からある A の定義環 A_0 であって $f^{-1}(B_0)$ に含まれるものが存在し、 $f^{-1}(J) \cap A_0$ は f の連続性から A_0 の開イデアルである。よって、ある A_0 の定義イデアル I であって $I \subset f^{-1}(J) \cap A_0$ となるものが取れる。以上の構成により、

$$h(A_0) = g(f(A_0)) \subset g(f(f^{-1}(B_0))) \subset g(B_0) \subset g(g^{-1}(C_0)) \subset C_0 \quad (1.8)$$

から $(g \circ f)(A_0) \subset C_0$ かつ $g(B_0) \subset C_0$ となる。 A_0 と C_0 が定義環であって $(g \circ f)(A_0) \subset C_0$ より $g \circ f$ が adic より補題 1.25(2) から A_0 の定義イデアル I について $(g \circ f)(I)C_0 \subset C_0$ は C_0 の定義イデアルになる。ここで構成から

$$(g \circ f)(I)C_0 \subset (g \circ f)(f^{-1}(J))C_0 \subset g(J)C_0 = g(g^{-1}(K) \cap B_0) \subset K \quad (1.9)$$

から $(g \circ f)(I)C_0 \subset g(J)C_0 \subset K$ となり C_0 の定義イデアル $(g \circ f)(I)C_0$ と K に含まれているので $g(J)C_0$ も C_0 の定義イデアルになる。よってこの定義環 B_0 と C_0 と B_0 の定義イデアル J を取ることによって g が adic であることが分かった。

(3) (\Rightarrow) f が adic であるから A と B の定義環 A_0 と B_0 と A_0 の定義イデアル I が存在して $f(A_0) \subset B_0$ かつ $f(I)B_0$ が B_0 の定義イデアルになる。 A' と B' が開であることと A_0 と B_0 が開かつ有界であることから $A'_0 := A_0 \cap A' \subset A'$ と $B'_0 := B_0 \cap B' \subset B'$ はそれぞれ A' と B' の定義環になる。さらに $I \subset A_0$ について $I \cap A'_0 \subset A'_0$ は A'_0 の定義イデアルになる。ここでとくに A'_0 と B'_0 は A と B の定義環でもあり、 $f(A'_0) \subset f(B'_0)$ から補題 1.25(2) より $f(I \cap A'_0)B'_0 \subset B'_0$ は B'_0 の定義イデアルになる。したがって $f'|_{A'}$ もこれらによって adic になることが分かった。

(\Leftarrow) f' が adic であるから A' と B' の定義環 A'_0 と B'_0 と A'_0 の定義イデアル I' が存在して $f'(A'_0) = f(A'_0) \subset B'_0$ かつ $f'(I')B'_0 = f(I')B'_0$ が B'_0 の定義イデアルになる。ここで A' と B' が開なので A'_0 と B'_0 は A と B の定義環でもあり、 $I' \subset A'_0$ は A の定義環 A_0 としての定義イデアルにもなっている所以他们らを取るによって f が adic になる。 \square

命題 1.28. $f: A \rightarrow B$ を Huber ring の間の連続準同型とする。 A が Tate であるとき、 B も Tate であって、 f は adic になる。

証明. まず、 A の定義環 A_0 を一つ固定し、それに含まれる pseudo uniformizers $s \in A_0$ をとる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} s^n = 0$ と f の連続性から $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s)^n = 0$ より $f(s) \in B^\circ$ となる。命題 1.15 から $f(s) \in B^\circ$ であるから命題 1.12(3) からある定義環 B_1 が存在して $f(s) \in B_1$ となる。命題 1.16(2) から $f(s)B_1$ は B_1 の定義イデアルになる。同様に $s \in A_0$ より sA_0 は A_0 の定義イデアルになる。ここで f の連続性から $f^{-1}(B_1) \subset A$ は開集合よりある正整数 n で $s^n A_0 \subset f^{-1}(B_1)$ となるから $f(s^n A_0) \subset B_1$ となる。ここで $f(A_0)$ は B で有界になる。実際、 B_0 は有界であることから任意の $0 \in B$ の開近傍 U についてある $0 \in B$ の開近傍 V が存在して $B_0 \cdot V \subset U$ となる。ここで $f(s)^{-n}$ 倍写像は同相なので $(f(s)^{-n}B_0) \cdot (f(s)^nV) \subset U$ であり、 $f(s)^nV$ が $0 \in B$ の開近傍なので $f(s)^{-n}B_0$ も B で有界である。よって $f(A_0) \subset f(s)^{-n}B_0$ から $f(A_0)$ も B で有界である。ここで命題 1.12(2) から $f(A_0) \subset B_0 \subset B$ となる B の定義環 B_0 が存在する。 $f(s) \in B_0$ で $f(s)$ は pseudo uniformizer より $f(s)B_0$ は B_0 の定義イデアルになる。したがってこの A_0 と B_0 と定義イデアル sA_0 をとることによって $f: A \rightarrow B$ は adic になる。 \square

2 Valuation spectrum

Huber ring から空間を構成する。そのために取る点として以下で定める付値を取るようになる。

Γ を全順序 (乗法的) 可換群とする。 0 を任意の $\alpha \in \Gamma$ について $0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0$ かつ $\alpha \geq 0$ として定義して全順序モノイド $\Gamma \cup \{0\}$ を定義する。

定義 2.1. 全順序可換群 Γ の部分群 H が**凸部分群** (convex subgroup) であるとは、任意の $a \leq b$ という H の元 a と b について $[a, b] := \{x \in \Gamma \mid a \leq x \leq b\} \subset H$ となることである。

定義 2.2 (付値). 環 A と全順序モノイド $\Gamma \cup \{0\}$ を取る。環 A 上の $\Gamma \cup \{0\}$ に値を持つ付値 (valuation) とは写像 $v: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ であって

- $v(x + y) \leq \max \{v(x), v(y)\},$
- $v(xy) = v(x)v(y),$
- $v(0) = 0,$
- $v(1) = 1$

を満たすものである。(すなわち乗法的半ノルムのことである)

定義 2.3 (値群・特徴部分群・付値の台). 付値 $v: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ を一つ固定する。 $\text{Im } v \setminus \{0\}$ は *Gamma* の部分群になり、これを v の値群 (value group) といい Γ_v で表す。 $\{v(a) \in \Gamma \cup \{0\} \mid a \in A, v(a) \geq 1\}$ によって Γ で生成される凸部分群を v の特徴部分群^{*1} (characteristic subgroup) といい $c\Gamma$ と表す。とくに $v: A \rightarrow \Gamma_v \cup \{0\}$ と制限して考えたときその特徴部分群を $c\Gamma_v$ と書ける。

付値 $v: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ に対して $\text{Supp}(v) := \text{Ker}(v) = v^{-1}(0)$ は A の素イデアルであり、これを v の台 (support) という。

命題 2.4. 付値 $v: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ について付値 $\bar{v}: \text{Frac}(A/\text{Supp}(v)) \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ であって以下の図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v} & \Gamma \cup \{0\} \\ \downarrow & \nearrow \bar{v} & \\ \text{Frac}(A/\text{Supp}(v)) & & \end{array}$$

を可換にするものが唯一つ存在する。

この \bar{v} による $\text{Frac}(A/\text{Supp}(v))$ の付値環を $A(v)$ で表す。すなわち、 $A(v) := \{x \in \text{Frac}(A/\text{Supp}(v)) \mid \bar{v}(x) \leq 1\}$ となる。

証明. まず $A/\text{Supp}(v)$ 上で \bar{v} を構成する。 $a \in A$ の $A/\text{Supp}(v)$ への像を \bar{a} と表すことにする。このとき $\bar{v}(\bar{a}) := v(a)$ と定義する。 v は付値だからこの定義が代表元のとり方によらないことを示せば良い。 $\bar{a} = \bar{b}$ のとき $a - b \in \text{Supp}(v)$ から $v(b - a) = v(a - b) = 0 \leq v(a), v(b)$ となる。したがって強三角不等式から

$$v(a) \leq \max \{v(a - b), v(b)\} = v(b) \quad (2.1)$$

$$v(b) \leq \max \{v(b - a), v(a)\} = v(a) \quad (2.2)$$

から $v(a) = v(b)$ となるので、代表元のとり方によらない。

$A/\text{Supp}(v)$ が整域であるのでその上の付値 \bar{v} はその商体 $\text{Frac}(A/\text{Supp}(v))$ 上へと拡張することが出来る。すなわち $\bar{v}(\bar{b}/\bar{a}) = v(b)/v(a)$ となっている。これは求める図式の可換性を持ち、その定義から一意的に定まる。 \square

^{*1} 特性部分群という言葉がすでにあるのでここでは仮に特徴部分群と訳した。

定義 2.5. 環 A 上の付値 v と w が同値 (equivalent) であるとは、以下の互いに等しい条件を満たすことである。

1. 順序モノイドとしての同型射^{*2} $f: \Gamma_v \cup \{0\} \rightarrow \Gamma_w \cup \{0\}$ で $w = f \circ v$ となるものが存在する。

$$\begin{array}{ccc} & \Gamma_v \cup \{0\} & \\ & \uparrow v & \\ A & & \\ & \downarrow w & \\ & \Gamma_w \cup \{0\} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ f \\ \\ \end{array}$$

2. $\text{Supp}(v) = \text{Supp}(w)$ かつ $A(v) = A(w)$ となる。
3. 任意の A の元 a と b について $v(a) \geq v(b) \iff w(a) \geq w(b)$ が成り立つ。

さらにこの関係は付値全体の中で同値関係になる。

証明. 同値関係になることは明らかなのでこれらの三条件が等しいことを示せば良い。

- (1) \implies (2) (1) から順序モノイドとしての同型射 f をとると $f(0) = 0$ と単射性に注意すれば

$$a \in \text{Supp}(v) \iff v(a) = 0 \iff 0 = f(v(a)) = w(a) \iff a \in \text{Supp}(w) \quad (2.3)$$

より $\text{Supp}(v) = \text{Supp}(w) \subset A$ となる。この等号からとくに $K := \text{Frac}(A/\text{Supp}(v)) = \text{Frac}(A/\text{Supp}(w))$ であることに注意する。 K の元 x は $x = \bar{b}/\bar{a}$ と表すことができる。 $A(v), A(w) \subset K$ から集合として一致していることを示せば良い。命題 2.4 から $\bar{v}(x) = v(b)/v(a)$ と f が同型射であることに注意すると

$$\begin{aligned} x \in A(v) &\iff \bar{v}(x) \leq 1 \iff \frac{v(b)}{v(a)} \leq 1 \iff v(b) \leq v(a) \iff w(b) = f(v(b)) \leq f(v(a)) = w(a) \\ &\iff \frac{w(b)}{w(a)} \leq 1 \iff \bar{w}(x) \leq 1 \iff x \in A(w) \end{aligned}$$

から $A(v) = A(w) \subset K$ であることが示された。

(2) \implies (3) $\text{Supp}(v) = \text{Supp}(w)$ から $A(v)$ と $A(w)$ を同じ体 $K := \text{Frac}(A/\text{Supp}(v)) = \text{Frac}(A/\text{Supp}(w))$ の中で考えることが出来るので $A(v) = A(w)$ が K の中での集合としての等号として意味を持つ。したがって (2) から

$$v(b) \leq v(a) \iff \bar{v}\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) = \frac{v(b)}{v(a)} \leq 1 \iff \frac{\bar{b}}{\bar{a}} \in A(v) = A(w) \iff \bar{w}\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}}\right) = \frac{w(b)}{w(a)} \leq 1 \iff w(b) \leq w(a) \quad (2.4)$$

より (3) が従う。

(3) \implies (1) $\Gamma_v \cup \{0\} = (\text{Im}(v) \setminus \{0\}) \cup \{0\}$ であるからその元はある $a \in A$ によって $v(a)$ と表せる。ここで

^{*2} 順序を保つ全単射なモノイド間の準同型写像のこと。1 が単位元なので $f(1) = 1$ であり、さらに全射性と順序を保つことから $f(0)$ が $\Gamma_w \cup \{0\}$ の最小元になるので $f(0) = 0$ も従う。

$$\begin{aligned} f: \Gamma_v \cup \{0\} &\longrightarrow \Gamma_w \cup \{0\} \\ v(a) &\longmapsto w(a) \end{aligned}$$

と定義すると (3) より $v(a) = v(b)$ のとき $w(a) = w(b)$ から f は写像になっている。 v と w が乗法的であることから f は積を保ち、 $f(1) = f(v(1)) = w(1) = 1$ からモノイド間の準同型になり、再度 (3) から f は順序を保つことがわかる。全単射性も (3) から従い、構成から $w = f \circ v$ も成り立っているから、この $f: \Gamma_v \cup \{0\} \rightarrow \Gamma_w \cup \{0\}$ を取れば良い。 \square

以上のことを踏まえて、まずは任意の環 A 上に付値を点としてとる位相空間を定義することが出来る。

定義 2.6 (付値スペクトラム). 環 A についてその上の付値全体の集合を定義 2.5 で定めた同値関係によって割った集合を $S(A)$ と表す。 $S(A)$ の元で代表元が v であるものも同じように v と書くこととする。このとき $S(A)$ の位相として任意の $a, b \in A$ に対して

$$\{v \in S(A) \mid v(a) \leq v(b) \neq 0\} \quad (2.5)$$

という形の集合で生成されるものをとる。この位相空間を改めて $\text{Spv}(A)$ と表し、これを A の付値スペクトラム (valuation spectrum) という。

記法 2.7. 付値 $x \in \text{Spv}(A)$ と $f \in A$ について x が乗法的半ノルムであったり、 x を空間の点として f に代入しているように見たりするため、 $x(f) \in \Gamma_x \cup \{0\}$ を $|f(x)|$ と書くこともある。この記法に基づくと (2.5) は $f, g \in A$ に対して

$$\{x \in \text{Spv}(A) \mid |f(x)| \leq |g(x)| \neq 0\} \quad (2.6)$$

と書くことが出来る。

注意 2.8 ([SW] Definition 2.3.2.). 開集合として (2.5) を取ることはスキームにおける基本開集合のような $\{x \in \text{Spv}(A) \mid |f(x)| \neq 0\}$ やリジッド幾何学における有理領域^{*3} $\{x \in \text{Spv}(A) \mid |f_1(x)| \leq |g(x)|, \dots, |f_r(x)| \leq |g(x)|\}$ (ただし $\{f_1, \dots, f_r, g\}$ はイデアルとして A を生成する) というものを開集合として含ませるということを意図している。もし $|g(x)| \neq 0$ の条件がなくなると、とくに $\{x \in \text{Spv}(A) \mid |f(x)| \neq 0\}$ を取ることができなくなってしまう。

定義 2.9 (付値スペクトラムの間の射). 環準同型 $f: A \rightarrow B$ と B 上の付値 $v: B \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ について

$$v|_A := \text{Spv}(f)(v) := v \circ f \quad (2.7)$$

と定義すると A 上の付値になっている。これによって付値スペクトラムの間の写像

$$\begin{aligned} \text{Spv}(f): \text{Spv}(B) &\longrightarrow \text{Spv}(A) \\ v &\longmapsto v \circ f \end{aligned}$$

を定めることができる。とくにこれは (2.5) の形の集合を移し合う連続写像になる。

^{*3} 実際、有理領域と呼ばれる集合を後に定義する。

証明. $v|_A$ が A 上の付値になることは f の準同型性から明らか。 $\text{Spv}(f)$ が連続写像になることを示す。
 $\text{Spv}(A)$ の位相の準開基 $\{v \in \text{Spv}(A) \mid v(a) \leq v(b) \neq 0\}$ を任意に取る。ただし a, b は A の元である。このとき

$$\begin{aligned}\text{Spv}(f)^{-1}(\{v \in \text{Spv}(A) \mid v(a) \leq v(b) \neq 0\}) &= \{w \in \text{Spv}(B) \mid (w \circ f)(a) \leq (w \circ f)(b) \neq 0\} \\ &= \{w \in \text{Spv}(B) \mid w(f(a)) \leq w(f(b)) \neq 0\}\end{aligned}$$

よりこれは $f(a), f(b) \in B$ から得られる $\text{Spv}(B)$ の準開基なのでとくに開集合である。したがって $\text{Spv}(f)$ は (2.5) の形の集合を移し合う連続写像になる。 \square

まず、順序群を凸部分群で割ることによって新しい順序群が構成できることを確認する。

命題 2.10. Γ を可換な順序群とし、その凸部分群 H をとる。このとき自然な群準同型 $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma/H$ について $\pi(\Gamma_{\leq 1}^{*4}) = (\Gamma/H)_{\leq 1}$ となる順序が定まり、これによって Γ/H は順序群になる。

証明. $H \in \Gamma/H$ が単位元であることに注意する。 $\alpha, \beta \in \Gamma/H$ について

$$\alpha \leq H \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists g \in \Gamma_{\leq 1}, \alpha = \pi(g) \quad (2.8)$$

と定義する。すなわち、 $\alpha \leq \beta \iff \alpha\beta^{-1} \leq H$ となるようにするために

$$\alpha \leq \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \alpha\beta^{-1} \leq H \iff \exists g \in \Gamma_{\leq 1}, \alpha\beta^{-1} = \pi(g) \iff \exists g \in \Gamma_{\leq 1}, \alpha = \pi(g)\beta \quad (2.9)$$

と定義する。

反射律、反対称律、推移律を満たすことを示す。

反射律を示す。任意の $\alpha \in \Gamma/H$ について $g = 1 \in \Gamma_{\leq 1}$ を取れば $\alpha = \pi(g)\alpha$ より $\alpha \leq \alpha$ である。反対称律を示す。 $\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \alpha$ のときある $g, h \in \Gamma_{\leq 1}$ で $\alpha = \pi(g)\beta$ かつ $\beta = \pi(h)\alpha$ となる。すると $\alpha = \pi(g)\pi(h)\alpha = \pi(gh)\alpha$ より $\pi(gh) = H \in \Gamma/H$ より $gh \in H \subset \Gamma$ となる。 $g \leq 1$ かつ $h \leq 1$ から $gh \leq g \leq 1$ であり、 $gh \in H \subset \Gamma$ と H が凸部分群であることから $g \in [gh, 1] \subset H$ より $\pi(h) = H \in \Gamma/H$ となる。したがって $\alpha = \pi(g)\beta = H\beta = \beta$ より反対称律も成り立つ。推移律を示す。 $\alpha \leq \beta$ かつ $\beta \leq \gamma$ のときある $g, h \in \Gamma_{\leq 1}$ で $\alpha = \pi(g)\beta$ かつ $\beta = \pi(h)\gamma$ となる。これより $\alpha = \pi(gh)\gamma$ であり、 $g \leq 1$ から h を掛けて $gh \leq 1$ より $gh \in \Gamma_{\leq 1}$ なので $\alpha \leq \gamma$ となるので推移律も成り立つ。

また、任意の $\alpha, \beta \in \Gamma/H$ についてある $a, b \in \Gamma$ で $\alpha = \pi(a)$ と $\beta = \pi(b)$ となるものが取れて、 $\alpha = \pi(a) = \pi(ab^{-1})\pi(b) = \pi(ab^{-1})\beta$ であり、 ab^{-1} は 1 以上か 1 以下か必ず決まるので α と β は必ず比較できるので Γ/H は全順序集合になる。さらに $\alpha \leq \beta$ となる Γ/H の元と $\gamma \in \Gamma/H$ を任意にとると $(\alpha\gamma)(\beta\gamma)^{-1} = \alpha\beta^{-1} \leq H$ より定義から $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ より Γ/H は順序群になる。さらに $\pi(\Gamma_{\leq 1}) = (\Gamma/H)_{\leq 1}$ は (2.8) より分かる。 \square

位相空間 $\text{Spv}(A)$ における特殊化や一般化は付値の構成によって具体的に書くことが出来る。

*4 $\Gamma_{\leq 1} := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \leq 1\}$.

命題 2.11. $v \in \text{Spv}(A)$ と Γ_v の凸部分群 H を一つ固定する。命題 2.10 から $\Gamma_v/H \cup \{0\}$ が定義できてこのとき写像 $v/H: A \rightarrow \Gamma_v/H \cup \{0\}$ と $v|_H: A \rightarrow H \cup \{0\}$ を次のように定義する。

$$v/H(a) = \begin{cases} v(a) \bmod H & (v(a) \neq 0) \\ 0 & (v(a) = 0). \end{cases} \quad (2.10)$$

$$v|_H(a) = \begin{cases} v(a) & (v(a) \in H) \\ 0 & (v(a) \notin H). \end{cases} \quad (2.11)$$

このとき次が成り立つ。

1. v/H は A の付値であり、 $\text{Spv}(A)$ において v の一般化になる。すなわち $v \in \overline{\{v/H\}}$ となる。
2. $v|_H$ は A の付値 $\iff c\Gamma_v \subset H$ であり、このとき $\text{Spv}(A)$ において v の特殊化になる。すなわち $v|_H \in \overline{\{v\}}$ となる。

参考文献

- [BV] K. Buzzard and A. Verberkmoes, “Stably uniform affinoids are sheafy,” arXiv:1404.7020 [math], Sep. 2015, Accessed: Aug. 02, 2021. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1404.7020>
- [Mor] S. Morel, “Adic spaces”, [Online]. Available: http://perso.ens-lyon.fr/sophie.morel/adic_notes.pdf
- [Wed] T. Wedhorn, “Adic Spaces,” arXiv:1910.05934 [math], Oct. 2019, Accessed: Jul. 11, 2021. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1910.05934>
- [Hu94] R. Huber, “A generalization of formal schemes and rigid analytic varieties,” Math Z, vol. 217, no. 1, pp. 513 – 551, Sep. 1994, doi: 10.1007/BF02571959.
- [Hu93] R. Huber, “Continuous valuations,” Math Z, vol. 212, no. 1, pp. 455 – 477, Jan. 1993, doi: 10.1007/BF02571668.
- [SW] P. Scholze and J. Weinstein, Berkeley lectures on p-adic geometry. Princeton; Oxford: Princeton University Press, 2020.
- [Ran] D. Rankeya, “HUBER RINGS”, [Online]. Available: https://rankeya.people.uic.edu/Huber_rings.pdf
- [GR] O. Gabber and L. Ramero, “Foundations for almost ring theory – Release 7.5,” arXiv:math/0409584, Sep. 2018, Accessed: Dec. 22, 2020. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/math/0409584>
- [MSE1] “general topology - Relative closure theorem,” Mathematics Stack Exchange. <https://math.stackexchange.com/questions/2649922/relative-closure-theorem> (accessed Aug. 30, 2021).
- [SE1] “abstract algebra - Linearly disjoint fields - Mathematics Stack Exchange.” <https://math.stackexchange.com/questions/2786433/linearly-disjoint-fields> (accessed Aug. 30, 2021).