Cohen-Gabberの定理のメモ

発表用のメモから作成したものなので、申し訳ありませんが**不十分なところ**がたくさん残っています。また、**再配布などはしない**ようお願いいたします。

Cohen-Gabberの定理

1. Cohen-Gabberの定理の主張について
2. Cohen-Gabberの定理の証明と応用について

これは「第18回 可換環論サマースクール（https://ryo1203.github.io/html/summer_school_2023.html）」のためのノートである。

環といったら（1を持つ）可換環のこととする。環Rの要素$f \in R$に対し、R/fRを単にR/fとも書く。出てくる環はすべてネーターになる。

参考文献

主な参考文献は次の三つである。本稿の内容の大部分はこれらの記事に載っている。

- [ILO] Illusie-Laszlo-Orgogozo, Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie etale des schemas quasi-excellents, Exposé IV, 2012, https://arxiv.org/abs/1207.3648v1
- [KS] Kurano-Shimomoto, An elementary proof of Cohen-Gabber theorem in the equal characteristic $p > 0$ case, 2018, https://arxiv.org/abs/1510.03573v2
- [Illusie] Illusie, On Gabber’s refined uniformization, 2008, https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~luc.illusie/refined_uniformization3.pdf

以下も参照した。

- [Skalit] Koszul Factorization and the Cohen-Gabber Theorem, 2016, https://arxiv.org/abs/1610.01264v3
- [Heitmann] The Étale locus in complete local rings, in Commutative Algebra: 150 Years with Roger and Sylvia Wiegand, 2021, https://www.ams.org/books/conm/773/
- [André] Weak functoriality of Cohen-Macaulay algebras, 2020
- [Shimomoto] An embedding problem of Noetherian rings into the Witt vectors, 2015, https://arxiv.org/abs/1503.02018v3
- [MS] Ma-Schwede, Singularities in mixed characteristic via perfectoid big Cohen-Macaulay algebras, 2021
- [OS] Ochiai-Shimomoto, Specialization Method in Krull Dimension two and Euler System Theory over Normal Deformation Rings, 2019
- [CLMST] Perfectoid signature, perfectoid Hilbert-Kunz multiplicity, and an application to local fundamental groups, 2022, https://arxiv.org/abs/2209.04046v2
- [PT] Polstra-Tucker, F-signature and Hilbert-Kunz multiplicity: a combined approach and comparison, 2018
- [Sato] Stability of test ideals of divisors with small multiplicity, 2018
- [Takahashi] The category of maximal Cohen–Macaulay modules, MSRI Summer Graduate School, Commutative Algebra and Related Topics, 2017 https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~takahashi/daihonpublic.pdf

- [松村] 可換環論
- [Stacks] Stacks Project
- [Bourbaki] Algèbre commutative, Chapitres 8 et 9

発表用のメモから作成したものなので、申し訳ありませんが**不十分なところ**がたくさん残っています。また、**再配布などはしない**ようお願いいたします。

1. Cohen-Gabberの定理の主張について

Cohen-Gabberの定理は、Cohen構造定理のGabberによる精密化である。本稿の目的は、Cohen-Gabberの定理の主張と証明や応用について紹介をすることである。

まずはCohen構造定理（の一つの形）を復習する。

定義1.1（係数環）
$(A, \mathfrak{m}, k)$をネーター完備局所環とし、$p = \operatorname{char} k \geqq 0$とおく。以下の条件を満たす部分環$C \subseteq A$を$A$の係数環と呼ぶ。
1. (C, pC)はネーター完備局所環
2. $A = C + \mathfrak{m}$

Aが等標数のとき、係数環とは$C \hookrightarrow A \to k$が同型になる部分体Cのことである。射$\phi\colon k \to A$であって$k \to A \to k$が恒等写像であるものとも同一視できる。この場合、係数環を係数体と呼ぶ。
Aが混標数の整域のとき、係数環はcdvr with uniformizer pで剰余体がkと同型なものになる。

定理1.2（Cohen [Bourbaki, IX.27, §2, n5]）
$(A, \mathfrak{m})$はネーター完備局所環とする。
1. 係数環は存在する。
2. Aは等標数とする。k_0を係数体とし$x_1, \dots, x_d$をsopとすると、$k_0[\![\underline{X}]\!] \to A$が自然に誘導され、有限単射となる。
3. Aは混標数の整域とする。Cを係数環とし$p = x_1, \dots, x_d$をsopとすると、$C[\![X_2, \dots, X_d]\!] \to A$が自然に誘導され、有限単射となる。

1では、Cohen-Gabberの定理（このメモではCGTと省略もする）の主張を説明する。

1.1. 正標数版Cohen-Gabberの定理

💡 **定理1.3（正標数版CGT）** $(A, \mathfrak{m}, k)$を等標数$p > 0$のネーター完備局所環とする。次の条件を満たす係数体k_0とsop $x_1, \ldots, x_d$が存在する：$A_0 := k_0[\![\underline{X}]\!]$とおくとき、すべての$P \in \operatorname{Assh} A$に対し$\operatorname{Frac} A_0 \to \operatorname{Frac}(A/P)$は有限次分離拡大になる。

等次元で被約ならば$A_0 \to A$はgenerically étaleである。つまり$\operatorname{Spec} A_0$の非空開集合上でエタールということである（[ILO, 2.1.2]）。定理は正標数だからこそ意味のある主張になる。

ところで、定理1.2の形のCohen構造定理は、体上有限生成整域のNoether正規化定理と似ている。体上有限生成整域に対する、正標数版CGTと似た定理はよく知られている。

💡 **定理1.4** see [KS, Introductionの最後]
Aをk上有限生成な整域とする。$k \to \operatorname{Frac} A$は分離拡大（つまり分離生成）とする。このとき、（代数的独立な）$x_1, \ldots, x_d \in A$であって、Aが$k[x_1, \ldots, x_d]$上で整かつ分離的となるものがある。

Aがk上分離的と仮定しているところがCGTと異なっている。CGTでこのような仮定はいらないのは、完備局所環では係数体kを取り替えることができるからである。逆に言えば、CGTの証明では係数体をうまく作らなくてはならない。

正標数版CGTの改良・変種も考えられている。[Skalit, Thm 2.7]では、Aが体でない整域で剰余体が代数閉体という仮定をつけたもとで、$A_0 \to A$の次数がpと互いに素にできることが示されている。[Heitmann, Prop 0.8]では、係数体k_0に対し、CGTの結論を満たすsopが存在するための必要十分条件が示されている。

1.2. 混標数版Cohen-Gabberの定理

混標数版の主張を述べる。

一般の場合は複雑なので、まずは簡単な場合から述べる。

💡 **定理1.5（混標数版CGTの簡単な場合）** [Illusie, Thm 3.5の直後][ILO, 4.3.3の直前]
ARA/pは被約とする。このとき、A_0であってp-generically étale（Spec A_0/pとdenseに交わるある開集合U上でétale）なものがとれる。

この場合は、A/pに正標数版CGTを適用することで証明できる。

一般の場合の混標数版CGTを述べる。

💡 **定理1.6（混標数版CGT）** [ILO, 4.2.2, 4.3.1]
Aは、さらに正規とする。$d \geqq 2$とする。
(1) Aの有限拡大A'：正規な完備局所整域と、V：混標数cdvrでA'と同じ剰余体k'を持つものとが存在して、ある射$V[[X_2, ..., X_d]] \to A'$が有限単射でp-generically étaleなものがある。
(2) lはpと互いに素な素数とする。このとき(1)のA',Vはさらに次を満たすようにできる。
A',Vにはある有限l群Hの作用が入り、k'に同じ作用を誘導し、$A \to A'$と$V[[X_2, ..., X_d]] \to A'$はH同変（=作用と可換）になり（ただしHはX_iを固定する）、$A \to (A')^H$が誘導され次数はlと互いに素になる。

💡 **例** [ILO, 4.3.2][Illusie, 3.7] cf. [MS, 5.19]

混標数CGTの証明・応用に深くは立ち入らないので、ここで簡単に説明してしまう。なお、正標数版の証明・応用については後半。

定理の有限拡大は、Eppの定理（Epp [Stacks, 09F9]、[ILO, 3.1.2][Illusie, Thm 3.6]も見よ）を利用して存在が証明される。

混標数版CGTは、Gabberのlocal uniformization定理・alteration定理（[Illusie, 1節]）に使われ、これはエタールコホモロジーのGabberの有限性定理に用いられた。また、[André]や[Shimomoto]でも使われている。

2. Cohen-Gabberの定理の証明と応用について

2.1. 正標数版CGTの証明

ここでは、正標数版 CGTについて、[KS]による初等的な別証明の概略を説明する。（[Heitmann, 0.8の直前]も参考にした。）

💡 **定理2.1**（再掲） $(A, \mathfrak{m}, k)$を等標数$p > 0$のネーター完備局所環とする。次の条件を満たす係数体$\phi\colon k \to A$とsop $x_1, \ldots, x_d$が存在する：$A_0 := k[\![\underline{X}]\!]$とおくとき、すべての$P \in \mathrm{Assh}\, A$に対し$\mathrm{Frac}\, A_0 \to \mathrm{Frac}(A/P)$は有限次分離拡大になる。

使われる道具は、Weierstrass予備定理とCohen構造定理（の証明）である。これらの詳細についても[KS]を参照のこと。

まず定理を$A \cong k[\![X_1, \ldots, X_{d+1}]\!]/f_1 \cdots f_r$（$f_i \in k[\![X_1, \ldots, X_d]\!][X_{d+1}]$はモニック多項式）の場合に帰着する。大体、$\mathfrak{m}$がd+1元生成ということである。もしすべての$i = 1, \ldots, r$で$\partial_{d+1} f_i \neq 0$ならば、$\mathrm{Frac}(k[\![X_1, \ldots, X_d]\!])$上で$\overline{X_{d+1}} \in A/f_i$が分離代数的となって証明が終わる。しかし、これを満たすようにできるかどうかはすぐにはわからない。代わりに、すべての$i = 1, \ldots, r$で$\partial_1 f_i \neq 0$となるよう係数体$\phi\colon k \to A$と生成系$x_1, \ldots, x_{d+1}$を取り替えられることを示して、定理を証明する。この取り替えは、iについて帰納的に行われる。帰納法の各ステップでは、$\partial_j f_s \neq 0$となるjが(1)存在する場合と(2)しない場合とに分けて取り替えがされる。(1)の場合は定理1.4と似ている。(2)の場合に係数体の取り替えが必要となる。

(1)の場合、係数体はそのままで、xを$x_1, \ldots, x_j - x_1^n, \ldots, x_{d+1}$に取り替えればよい（ただし$n \gg 1$で$p \nmid n$）。(2)の場合、まず$f_i$の係数$\alpha \in k \setminus k^p$を固定する。$\delta \in k^\times$とし、係数体を$k \to k[[X_1]] \hookrightarrow A$（ここで$\alpha \mapsto \alpha + \delta X_1$とする）に取り替える（この射の詳細は省略する）。$\delta$は有限個の例外を除いてなんでもよい。

2.2. 正標数版CGTの応用

ここでは、正標数版CGTの応用をごく簡単に紹介する。

[MS]ではCGTが使われている。混標数版CGTの簡単な場合（定理1.5）を拡張している。

> 💡 **定理2.2**（[MS, Lemma 5.18] cf. [Heitmann, Thm 0.1]）
> A：混標数のネーター完備局所整域、剰余体が無限。A/pはregular in codim 0（たとえばreduced）。
> 素イデアルQは、$p \in Q$かつ$(A/p)_Q$はRLRとする。ある$g \notin Q$と$A_0 :=$について
> $(A_0)_g \to A_g$ がエタール。

[Heitmann]ではこの定理をさらに精密にしており、必要十分条件を与えている。無限体の仮定も外している。[MS]の証明ではFlennerのlocal Bertiniの定理（Flenner1977、Trivedi1994）を使っているが、[Heitmann]ではlocal Bertiniを使っていない。

[MS]のtest ideal（[MS, Def 5.1]）についての定理（[MS, Thm 5.20]）の証明の中で道具として使われている。

他にもいくつか応用について述べる。

[Sato]はtest idealについての論文で、CGTが使われている。[Takahashi, Prop 4.5とRmk 4.6]でもCGTが使われているようである。

Bertiniについては、[OS]の次の定理で使われている。

💡 **定理2.3**（[OS, 2.8]）
$(A, \mathfrak{m}, k)$を等標数の正規ネーター完備局所整域で、次元dが2以上のものとする。
$q_1, \ldots, q_r$：相異なるht 1 prime
このとき、非零単項イデアルの無限集合$\{x_n A\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}}$で、$R/x_n$が被約で$x_n \notin q_1 \cup \cdots \cup q_r$なものがある。

F符号（F-signature）を扱う論文でもCGTが使われている（[PT]、[CLMST]など）。

💡 **定理2.4** [PT, Lem. 2.3]
$(A, \mathfrak{m}, k)$をF有限なネーター完備局所整域とする。k_0は係数体で$x_1, \ldots, x_d$はsopでCGTを満たすとする。このとき、$0 \neq c \in A$で、任意の$e \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$に対し$A[A_0^{1/p^e}] \cong A \otimes_{A_0} A_0^{1/p^e}$かつ$c \cdot A^{1/p^e} \subseteq A[A_0^{1/p^e}]$となるものが存在する。

これより、たとえば、この加群が（階数のわかる）自由加群であることが直ちにしたがう。これは、たとえば[PT, Thm. 5.1]（以前から知られていた定理の別証明だが）で使われる。

参考文献ははじめの方にまとめてある。