

# Le lemme d'Abhyankar perfectoide

<https://ryo1203.github.io>

## 概要

Le lemme d'Abhyankar perfectoide ([An1]) の何章かを日本語でメモする。和訳そのものではなくいくつか書き足したり省略したりしている。まだ理解できていない命題などには?をつけてある。章の番号などは原文に揃える。

## 目次

1	Preliminaires de presque-algebre	2
1.1	Cadre	2
1.2	$V^a$ -module	2
1.3	Lemmes de Mittag-Leffler et de Nakayama	3
1.4	$V^a$ -algebra	3
1.5	Recadrage	4
1.6	Platitude	5
1.7	$A$ -Modules projectifs finis	5
1.8	$A$ -algebres étales finies	6
1.9	Extensions galoisiennes	7
2	La categorie bicomplete des algebres de Banach uniformes	11
2.1	Algebres de Banach	11
2.2	Normes spectrales	14
2.3	Dictionnaire	17
2.4	Extensions entieres d'algebres normees uniformes	28
2.5	Monomorphismes (et recadrage)	31
2.6	Epimorphismes (et localisation)	35
2.7	Produits (et transformee de Gelfand)	37
2.8	Limites	38
2.9	Colimites	40
3	La categorie bicomplete des algebres perfectoides	43
3.1	Corps perfectoides	43
3.2	Algebres perfectoides	44
3.3	Basculement	46

## 1 Preliminaires de presque-algèbre

### 1.1 Cadre

cadre もしくは basic setup とは、環  $V$  とその冪等イデアル  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$  の組  $(V, \mathfrak{m})$  のことである。

[GR] と同様に  $\tilde{\mathfrak{m}} := \mathfrak{m} \otimes_V \mathfrak{m}$  が  $V$  上平坦であることを仮定する。この仮定は base change で不変である ([GR] Remark 2.1.4)。\*<sup>1</sup> $\mathfrak{m}$  が  $V$  上平坦であるよりも弱い条件である。もし  $V$  上平坦であれば  $\mathfrak{m} \cong \tilde{\mathfrak{m}}$  となる。

$\pi \in V$  を非零因子とし、 $(\pi^{1/p^i})$  を整合的な  $p$  乗根の列とすると、単項イデアルの和集合

$$\pi^{1/p^\infty} V := \bigcup_{i \geq 1} \pi^{1/p^i} V \quad (1.1)$$

を上記の  $\mathfrak{m}$  として取ることが出来る。本稿ではこの場合を考えれば十分である。

### 1.2 $V^a$ -module

$V^a$  加群の圏 ( $V^a\text{-Mod}$ ) (正確には  $(V, \mathfrak{m})^a$  加群の圏) とは  $V$  加群の圏 ( $V\text{-Mod}$ ) の  $\mathfrak{m}$ -torsion なものからなる Serre 部分圏による圏の局所化のことである。ここで、 $V$  加群が  $\mathfrak{m}$ -torsion であるとは、 $\mathfrak{m}$  によって消えることであり、これを almost zero であるという。

$\text{Hom}_{V^a}(M, N) = \text{Hom}_V(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M, N)$  となる ([GR] 2.2.2)。

$V$  加群の射が almost injective/almost surjective であるとは、その核/余核が almost zero であることである。これらは  $V^a$  加群の圏における mono 射と epi 射に対応している。

$V^a$  加群の圏はアーベル圏である。とくに  $V$  加群の射が almost injective かつ almost surjective であることは almost isomorphism であること ( $V^a\text{-Mod}$  で同型であること) に等しい。対象に関しては恒等的な局所化関手  $M \mapsto M^a$  は次の随伴を持つ。

- (1) 右随伴:  $N \mapsto N_* := \text{Hom}_{V^a}(V^a, N)$  (これを almost element という)。
- (2) 左随伴:  $N! := \tilde{\mathfrak{m}} \otimes_V N_*$ 。

とくにこれらは colimit と limit について可換であり、

$$\text{Hom}_{V^a\text{-Mod}}(M^a, N^a) \cong \text{Hom}_V(\tilde{\mathfrak{m}} \otimes_V M, N) \quad (1.2)$$

が成り立っている ([GR] 2.2.2)。さらに  $(N_*)^a \cong N$  と  $(M^a)_* \cong \text{Hom}_V(\tilde{\mathfrak{m}}, M)$  が成り立つ (この右辺も混同のない限りにおいて  $M_*$  と書くこともある)。関手  $(-)_*$  は右完全ではないが、射  $N \rightarrow N'$  が epi 射であることと  $N_* \rightarrow N'_*$  が almost surjective であることは同値である。

---

\*<sup>1</sup> 環準同型  $V \rightarrow W$  があるとき、 $\mathfrak{m} \subset V$  を base change した  $\mathfrak{m}_W := \mathfrak{m} \otimes_V W$  とイデアルの拡大  $\mathfrak{m}W$  について、 $\mathfrak{m}_W \cong \mathfrak{m}W$  である。これによって  $(W, \mathfrak{m}W)$  は cadre になる。

### 1.3 Lemmes de Mittag-Leffler et de Nakayama

現在の文脈における Mittag-Leffler の補題は次のとおりである。 $(N^n)$  を  $V^a$  加群の射影系とし、その間の射が epi 射であれば  $\varprojlim N^n \rightarrow N^0$  は epi 射になる。これは  $V\text{-Mod}$  で同様に成り立つことと、二つの右完全関手  $(-)_!$  と  $(-)^a$  を順番に作用させることによって示される  $((-)_!)^!$  と  $(-)^a$  の合成は  $V^a\text{-Mod}$  上で恒等的である。<sup>\*2</sup>

以上よりアーベル圏  $V^a\text{-Mod}$  は bicomplete である。(すなわち colimit と limit を持つ) また、 $V$  を generator として持ち、epi 射の積はまた epi 射になり、したがって  $\lim^i$  はアーベル群の圏におけるものと同じ形になる。とくに可算な添字集合であるとき  $i > 1$  は消える。局所化関手は  $\lim^1$  と可換であるので通常の余核として計算できる。

現在の文脈における完備な加群に対する 中山の補題は次のとおりである ([GR] Lem.5.3.3)。<sup>\*3</sup>  $I$  を  $V$  のイデアルとし、 $f: M \rightarrow N$  を  $I$  進完備な  $V^a$  加群<sup>\*4</sup>の間の射とする。このとき  $M/I \rightarrow N/I$  が epi 射ならば  $f$  も epi 射になる。

実際、水平方向の (各次数ごとに積をとる) 射が epi 射である可換図式 (テンソル積や  $\text{gr}$  は  $V\text{-Mod}$  で取っている)

$$\begin{array}{ccc} (\text{gr}_I V) \otimes_{V/I} M/IM & \longrightarrow & \text{gr}_I M \\ \downarrow 1 \otimes \bar{f} & & \downarrow \text{gr}_I f \\ (\text{gr}_I V) \otimes_{V/I} N/IN & \longrightarrow & \text{gr}_I N \end{array}$$

について、仮定から左の射が epi 射なので  $\text{gr}_I f$  も epi 射になっている。これより、 $f_n: M/I^n M \rightarrow N/I^n N$  も epi 射になり、蛇の補題から  $\text{Ker}(f_{n+1}) \rightarrow \text{Ker}(f_n)$  も epi 射になる。limit を取ることによって Mittag-Leffler より  $\lim^1 \text{Ker}(f_n) = 0$  になるので  $f$  は epi 射になる。

### 1.4 $V^a$ -algebra

$V^a$  代数 (本稿では常に可換なもの) とは  $V^a\text{-Mod}$  における (可換) モノイド対象である。 $V^a$  代数からなる  $V^a\text{-Mod}$  のモノイダル部分圏を  $V^a\text{-Alg}$  と表す。関手  $(-)^a$  は  $V\text{-Alg}$  に  $V^a\text{-Alg}$  を対応付け、(部分圏への制限によって)  $(-)_*$  を右随伴として持つ。また、左随伴として  $((-)_!)^!$  ではなく  $((-)_!)^!!$  を持つ ([GR] 2.2.25)。

圏  $V^a\text{-Alg}$  はテンソル積を持ち、 $(A \otimes_V B)^a \cong A^a \otimes_{V^a} B^a$  となる。

もし  $A$  が  $V^a$  代数だったとすると、圏  $A\text{-Mod}$  や  $A\text{-Alg}$  を定義できる ([GR] 2.2.12)。<sup>\*5</sup> また、 $M$  と  $N$  を  $A$  加群とすると、 $\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, N)$  は自然に  $A_*$  加群の構造を持つので

$$\text{alHom}_A(M, N) := (\text{Hom}_{A\text{-Mod}}(M, N))^a \quad (1.3)$$

を定義できる。これを almost morphism という ([GR] 2.2.11)。関手  $(-)^a$  は  $A_*\text{-Alg}$  に  $A\text{-Alg}$  に対応付け、 $(-)_*$  を右随伴として持つ。 $A$  代数  $B$  に対して  $B_* = \text{Hom}_V(\bar{\mathfrak{m}}, B)$  は加群の構造だけでなく、確かに  $A_*$  代

<sup>\*2</sup>  $\bar{m}$  が  $V$  上平坦であるので  $N_! = \bar{\mathfrak{m}} \otimes_V N_* \cong \bar{\mathfrak{m}} N_* \subset N_*$  となる。すると  $N_! \cong \bar{\mathfrak{m}} N_*$  と  $N_*$  が almost isomorphism であることから  $(N_!)^a \cong (N_*)^a \cong N$  より従う。

<sup>\*3</sup> [AM] Lemma 10.23 の類似。

<sup>\*4</sup>  $V^a$  加群が  $I$  進完備であるとは、自然な射  $M \rightarrow \varprojlim M/I^n$  が  $V^a\text{-Mod}$  で同型になることである ([GR] Def 5.3.1(iv))。

<sup>\*5</sup> 対象は通常の  $A$  加群や  $A$  代数で考えられ、射のみが異なる。一般の“モノイダル圏上の加群”という概念に等しい。

数の構造を持つ。とくに (非自明な) 積構造を持つ。実際、[GR] 2.2.9 のように定まる。つまり  $a, b \in B_*$  について、 $(V, \tilde{\mathfrak{m}})$  が cadre であることから得られる同型  $\nu: \tilde{\mathfrak{m}} \otimes_V \tilde{\mathfrak{m}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{m}}$  によって、 $x \in \tilde{\mathfrak{m}}$  に対して  $(a \cdot b)(x) := \mu_B \circ (a \otimes b) \circ \nu(x)$  によって定義される。

$\mathcal{K}$  代数 (結合的可換かつ単位的) の圏が (small) limit と colimit を持ち、加群化関手 ( $\mathcal{K}$ -Mod への忘却関手) は limit と filtered colimit を保つことがわかっている。 $(-)^a$  を介して、almost algebra に対しても同じことが言える。有限直積への分解  $V = \prod V_i$  を与えることは冪等な完全正規直交系  $e_i \in V_i$  を与えることに等しい。

圏  $A\text{-Mod}$  はテンソル積  $\otimes_V$  を持ち、これが  $A\text{-Alg}$  に余積を与える。

$V^a\text{-Alg}$  の射  $\varphi: A \rightarrow B$  が mono 射であることと  $\varphi_*: A_* \rightarrow B_*$  が almost injective であることは同値である。この場合を  $B$  が  $A$  の**拡大**という。

#### 1.4.1 Example

almost algebra は次のような場合に自然に出てくる。 $\mathcal{K}$  を非離散的な付値をもつ完備体とする。 $V := \mathcal{K}^\circ$  を付値環とし、 $\mathfrak{m} := \mathcal{K}^{\circ\circ}$  を付値イデアルとする。 $\varpi$  を  $\mathfrak{m}$  のゼロではない元とし、 $A$  を  $\varpi$ -torsion が無い、もしくは infinite  $\varpi$ -divisible <sup>\*6</sup>が無いような  $V$  代数とする。 $\mathcal{K}$  代数  $A[1/\varpi]$  に対して  $\varpi$  から得られる自然なノルムを与える。このとき単位円板は  $(A^a)_*$  に等しい (命題 2.3.1(2b)) (一般には単位円板は  $A$  と異なるが almost isomorphism になることがわかっている)。

### 1.5 Recadrage

cadre の変換  $(V, \mathfrak{m}) \rightarrow (V', \mathfrak{m}')$  を考える ( $V$  から  $V'$  への環準同型であり、 $\mathfrak{m}$  を  $\mathfrak{m}'$  の中へ移すものである)。スカラーの制限による完全関手  $V'\text{-Mod} \rightarrow V\text{-Mod}$  によって、完全関手

$$(V', \mathfrak{m}')^a\text{-Mod} \longrightarrow (V, \mathfrak{m})^a\text{-Mod} \quad (1.4)$$

を得る。もし  $\mathfrak{m}' = V' = V$  だとすると、この関手は局所化関手  $(-)^a: V\text{-Mod} \rightarrow (V, \mathfrak{m})^a\text{-Mod}$  に等しい。<sup>\*7</sup> 同様にして環構造を変えないスカラーの制限による関手  $(V', \mathfrak{m}')^a\text{-Alg} \rightarrow (V, \mathfrak{m})^a\text{-Alg}$  が定義できる。この関手で  $A'$  に  $A$  が対応されるとき、次の関手

$$A'\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}, \quad (1.5)$$

$$A'\text{-Alg} \longrightarrow A\text{-Alg} \quad (1.6)$$

を recadrage という。とくに対象の下部構造は変化していないが、cadre が変化している。もし  $\mathfrak{m}' = V' = V$  だとすると、この関手は局所化関手  $(-)^a: A\text{-Mod}/\text{Alg} \rightarrow (V, \mathfrak{m})^a\text{-Mod}/\text{Alg}$  に等しい。もし  $\mathfrak{m}$  が  $\mathfrak{m}'$  を生成するとすると、recadrage は同型になる。これは  $A' \mapsto A$  と対応しているため、もともとその下部環構造は変化しておらず、その上の加群も変化せず、 $\mathfrak{m}$  が  $\mathfrak{m}'$  を生成していることから almost zero module であることも変化しないからである。ここで、almost element をとる関手  $(-)_* (= ((-)^a)_*): V'\text{-Mod} \rightarrow V\text{-Mod}$  と recadrage を一度挟む関手  $V'\text{-Mod} \rightarrow (V')^a\text{-Mod} \rightarrow V^a\text{-Mod} \rightarrow V\text{-Mod}$  の二つの関手の間の自然変換

$$\text{Hom}_{V'}(\tilde{\mathfrak{m}}', N) \longrightarrow \text{Hom}_V(\tilde{\mathfrak{m}}, N) \quad (1.7)$$

<sup>\*6</sup>  $x \in A$  が infinite  $\varpi$ -divisible であるとは、任意の正整数  $n$  について  $x \in \varpi^n A$  であるようなものである。

<sup>\*7</sup>  $(V, V)$  を cadre とするときの almost zero module は zero module に等しいので  $(V, V)^a\text{-Mod}$  は  $V\text{-Mod}$  そのものである。

を (自然に) 与えることが出来る。

感覚的には、 $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}'$  であることから "almost" 性 (almost zero など) は recadrage によってより緩い条件になる。<sup>\*8</sup>しかし  $\mathfrak{m}$  が  $\mathfrak{m}'$  を生成する場合は変化しない。

## 1.6 Platitude

$A$  加群  $M$  が flat であるとは、 $A\text{-Mod}$  上の自己関手  $-\otimes_A M$  が完全になることである。

射  $\varphi: A \rightarrow B$  が (faithfully)flat であるとは、 $B \otimes_A -: A\text{-Mod} \rightarrow B\text{-Mod}$  が (faithful)exact になることである。射  $\varphi$  が flat(faithfully flat) であることと、 $B$  が  $A$  加群として flat( $\varphi$  が mono 射かつ  $B/A$  が  $A$  加群として flat) は同値 ([GR] 3.1.2(vi))。<sup>\*9</sup>もし  $\varphi_*$  が flat(faithfully flat) であればこの条件は満たされる。さらに、 $\varphi: A \rightarrow B$  が faithfully flat であることと  $\varphi_{!!}: A_{!!} \rightarrow B_{!!}$  が faithfully flat であることは同値 ([GR] 3.1.3 ii)。<sup>\*10</sup>(faithfully)flat なものたちの filtered colimit は、また (faithfully)flat になる。base change や合成などについての通常のもと同様な性質も成り立っている ([GR] 3.1.2)。

## 1.7 $A$ -Modules projectifs finis

今までのものと異なり、通常の加群とは微妙に異なる状況であるような性質について見ていく。

### 1.7.1

$A$  を  $V^a$  代数とする。 $A$  加群  $P$  が finite projective であるとは、任意の  $\eta \in \mathfrak{m}$  に対して、ある正整数  $n$  と  $A$  加群の射  $P \rightarrow A^n \rightarrow P$  であって、この合成が  $\eta \text{id}_P$  になっていることである (この性質は  $A\text{-Mod}$  での  $P$  の同型類によらない)。

finite projective であることは以下の二つの条件を満たすことと等しい ([GR] 2.3.10(i), 2.4.15)。

- (a)  $P$  が almost projective である。すなわち、任意の  $A$  加群  $N$  と任意の  $i > 0$  で  $\mathfrak{m} \text{Ext}_A^i(P, N) = 0$  となる。
- (b)  $P$  は almost finite type である。すなわち、任意の  $\eta \in \mathfrak{m}$  について、射  $A^{n(\eta)} \rightarrow P$  が存在して、その余核が  $\eta$  によって消える。

### 1.7.2 Remark

- (1) finite projective な加群  $P$  は flat である ([GR] 2.4.18)。加えて、 $P$  が  $A$  加群として faithful(すなわち、 $A \rightarrow (\text{End}(P))^a$  が mono 射) になるならば faithfully flat である。
- (2)  $P$  を finite projective であるとき、その外積  $\bigwedge^r P$  も finite projective になる。また、trace morphism と呼ばれる射  $\text{tr}_{P/A}: (\text{End}(P))^a \rightarrow A$  を得る ([GR] 4.1.1)。
- (3)  $A'$  を faithfully flat な  $A$  代数とする。このとき  $P$  が finite projective な  $A$  加群であることと、 $P \otimes_A A'$  が finite projective な  $A'$  加群であることは同値 ([GR] 3.2.26 (ii)(iii))。

<sup>\*8</sup>  $\mathfrak{m}$  や  $\mathfrak{m}'$  を掛けて消えるものを無視するが、 $\mathfrak{m}$  より大きい  $\mathfrak{m}'$  を掛けても消えなければならない方が条件が厳しい。

<sup>\*9</sup> faithfully flat の方については、 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$  に関する Tor sequence を考えれば良い。

<sup>\*10</sup> 一般に  $(-)_{!!}$  で flat 性は保たれない。

**補題 1.7.1.**  $I$  を  $A$  のイデアルとし、 $A$  は  $(V^a$  代数として)  $I$  進完備であるとする。このとき任意の finite projective な  $A$  加群  $P$  は  $(A$  加群として)  $I$  進完備である。

**証明.** ([GR] 5.3.5 参照) 自然な射  $P \rightarrow \hat{P} := \varprojlim P/I^n$  が  $(A\text{-Mod での})$  同型になることを示せば良い。任意の  $\eta \in \mathfrak{m}$  について、ある正整数  $n$  が存在して可換図式

$$\begin{array}{ccccc} P & \longrightarrow & A^n & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \hat{P} & \longrightarrow & \hat{A}^n & \longrightarrow & \hat{P} \end{array}$$

を得る。水平方向の合成はともに  $\eta \text{id}$  であり、真ん中の垂直方向の射は  $A$  の  $I$  進完備性から同型になる。図式を追うことで  $P \rightarrow \hat{P}$  の核と余核は  $\eta$  で打ち消されることがわかる。よって  $P \rightarrow \hat{P}$  は  $A\text{-Mod}$  で同型になる。□

finite projective な  $A$  加群  $P$  が of (constant) rank  $r$  であるとは、 $\bigwedge^{r+1} P = 0$  かつ、 $\bigwedge^r P$  が可逆  $A$  加群<sup>\*11</sup>になることである ([GR] Def 4.3.9 (iv))。[GR] 4.4.24 によれば、このような加群は fpqc topology に関して階数  $r$  の局所自由加群になっている (この結果は以降では使わない)。

## 1.8 $A$ -algebrés étales finies

$A$  代数  $B$  が finite étale/finite étale of rank  $r$  とは次の二条件を満たすことである。

- (a)  $B$  は finite projective/finite projective of rank  $r$  な  $A$  加群である。
- (b)  $B$  は unramified である。すなわち、 $A$  代数としての分解  $B \otimes_A B \cong B \times C$  であって、この同型と第一成分の射影の合成  $B \otimes_A B \rightarrow B \times C \rightarrow B$  は積を取る準同型  $\mu_B: B \otimes_A B \rightarrow B$  と一致するものがある。

(a) のもとで、(b) の条件と  $\mu_B$  が flat であることは同値 ([GR] 3.1.2 (vii), 3.1.9)。

### 1.8.1 Remark

- (1) finite étale 拡大  $A \hookrightarrow B$  は faithfully flat である。
- (2)  $B$  を  $A$  上 finite étale とするとき  $A$  加群の射である trace 写像として  $\text{Tr}_{B/A}: B \rightarrow A$  が、 $b \in B$  の積による  $B$  上の自己準同型のトレースを取ることによって得られる。これは base change と可換であり ([GR] 4.1.8(ii))、 $B$  の元の積との合成によって  $B$  とその  $A$  双対が同型になる ([GR] 4.1.14)。 $B_*$  はその  $A_*$  双対と同型になる。 $B$  がとくに finite étale 拡大のときは  $\text{Tr}_{B/A}$  は epi 射になる (上記 (1) と [GR] 4.1.11)。
- (3)  $A'$  と  $B$  を  $A$  代数とし、 $A \hookrightarrow A'$  が faithfully flat であるとする。このとき  $B$  が  $A$  上 finite étale (of rank  $r$ ) であることと  $B \otimes_A A'$  が  $A'$  上 finite étale (of rank  $r$ ) であることは同値 ([GR] 2.4.18, 3.2.26(ii))。

<sup>\*11</sup>  $A$  加群  $M$  が可逆であるとは、 $M \otimes_A M^* \cong A$  となることである。ただし、 $M^* := \text{alHom}_A(M, A)$  である。

### 1.8.2

Grothendieck の”remarkable equivalence”は現在の文脈においても、 $\mathfrak{m} = \pi^{1/p^\infty} V$  か、 $A$  が  $\pi$  進完備であれば成り立つ。すなわち、 $\pi$  による剰余によって finite étale  $A$  代数と finite étale  $A/\pi$  代数は圏同値になる ([GR] Theo 5.3.27)。

## 1.9 Extensions galoisiennes

### 1.9.1

$A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$  を  $V^a$  代数の拡大とする。 $X \subset \text{Hom}_A(B, C)$  として  $A$  上の環準同型からなる集合とする。このとき標準的な  $C$  代数の射

$$B \otimes_A C \longrightarrow \prod_{\chi \in X} C \quad (1.8)$$

$$b \otimes c \longmapsto (\chi(b)c)_{\chi \in X} \quad (1.9)$$

が取れる。

また、 $G$  を  $B$  の  $A$  自己同型からなる有限群とすると、 $B \rightarrow B \otimes_A B, b \mapsto 1 \otimes b$  によって  $B \otimes_A B$  に  $B$  加群の構造を入れると、標準的な  $B$  代数の射

$$B \otimes_A B \longrightarrow \prod_{\gamma \in G} B \quad (1.10)$$

$$b \otimes b' \longmapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G} \quad (1.11)$$

が得られる。 $n$  を  $G$  の位数とし、 $G^n$  の元  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  に、その添字の入れ替えによって  $\mathfrak{S}_n$  を作用させる。このとき輪積 (produit en couronne) によって群  $\mathfrak{S}_n \wr G$  が定義できる。<sup>\*12</sup>ここで  $\prod_{\gamma \in G} B$  に  $(\sigma, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))(b_1, \dots, b_n) = (\gamma_{\sigma^{-1}(1)}(b_{\sigma^{-1}(1)}), \dots, \gamma_{\sigma^{-1}(n)}(b_{\sigma^{-1}(n)}))$  によって  $\mathfrak{S}_n \wr G$  を  $A$  自己同型に作用させる ( $G \subset \text{Aut}_A(B)$ ) であることから  $A$  自己同型であることがわかる)。

$B^G$  によって  $B$  中の  $G$ -不変なものからなる  $A$  代数を表す ( $B^G$  は  $A$  加群としては  $B \xrightarrow{(\dots, \gamma^{-1}, \dots)} \prod_{\gamma \in G} B$  の核と一致する)。

### 1.9.2

$V^a$  代数の拡大  $A \hookrightarrow B$  が群  $G$  に関して Galois<sup>\*13</sup>であるとは、 $A$  加群としての同型  $B^G \cong A$  があり、(1.10) の標準的な射  $B \otimes_A B \rightarrow \prod_{\gamma \in G} B$  が  $B$  加群として同型になることである。 $(-)_*$  が colimit と可換なので、Galois であることは  $(B_*)^G = A_*$  かつ  $(B \otimes_A B)_* \rightarrow \prod_{\gamma \in G} B_*$  が (通常の意味で) 同型になっていることである。<sup>\*14</sup>自然に  $G \times G$  は  $B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$  上の  $A$  自己準同型を得るが、次の対応

<sup>\*12</sup>  $\mathfrak{S}_n \wr G$  は上記の  $\mathfrak{S}_n$  の  $G^n$  への作用による半直積とする。すなわち、集合としては  $\mathfrak{S}_n \times G^n$  であり、積は  $(\sigma, (\gamma_1, \dots, \gamma_n))(\sigma', (\gamma'_1, \dots, \gamma'_n)) = (\sigma\sigma', (\gamma_{\sigma'(1)}\gamma'_1, \dots, \gamma_{\sigma'(n)}\gamma'_n))$  として定義される。

<sup>\*13</sup> almost Galois ということもある。

<sup>\*14</sup>  $(-)_*$  が一般にテンソル積と可換ではないので、 $B$  が  $A$  上 Galois だとしても  $B_*$  が  $A_*$  上 Galois であるか否かはわからない。さらに  $(-)_\#$  が一般に有限積と可換ではないので、 $B_\#$  が  $A_\#$  上 Galois であるか否かもわからない。

$$G \times G \longrightarrow \mathfrak{S}_n \wr G \quad (1.12)$$

$$(\gamma, 1) \longmapsto (r_{\gamma^{-1}}, (1, \dots, 1)) \quad (1.13)$$

$$(1, \gamma) \longmapsto (l_\gamma, (\gamma, \dots, \gamma)) \quad (1.14)$$

によって  $G \times G$  は  $\mathfrak{S}_n \wr G$  の部分群になる。ただし、 $g \in G$  について  $l_g$  と  $r_g$  はそれぞれ  $G = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  と添字付けるとき、

$$\gamma_{r_g(i)} = \gamma_i \circ g \quad (1.15)$$

$$\gamma_{l_g(i)} = g \circ \gamma_i \quad (1.16)$$

によって  $l_g, r_g \in \mathfrak{S}_n$  とみなす。とくに  $\mathfrak{S}_n \wr G$  の部分群になることで  $G \times G$  は  $B \otimes_A B$  の  $A$  自己同型からなる群である。

- 命題 1.9.1.** (1)  $A \hookrightarrow B$  が  $G$  に関する Galois 拡大であるとする、これは階数が  $G$  の位数であるような finite étale 射になる (とくに (1) から faithfully flat になる)。また、trace 写像  $\text{Tr}_{B/A}$  が  $G$  共役元の和  $b \mapsto \sum_{\gamma \in G} \gamma(b)$  によって与えられる。
- (2)  $A'$  を  $A$  代数とする。 $A \hookrightarrow B$  が  $G$  に関する Galois 拡大であるならば  $A' \hookrightarrow B \otimes_A A'$  も  $G$  に関する Galois 拡大になる。 $A'$  が  $A$  上 faithfully flat のときはこの逆も成り立つ。
- (3)  $C$  が  $G$  に関する Galois 拡大  $A \hookrightarrow B$  の中間にある拡大で、 $C \hookrightarrow B$  が  $H \triangleleft G$  に関する Galois 拡大であるとする。このとき  $B^H \cong C$  から自然に、 $G/H$  は  $C$  から  $B$  への  $A$  上の環準同型からなる集合になり、(1.8) の標準的な射  $B \otimes_A C \rightarrow \prod_{\gamma \in G/H} B$  を考えることが出来るが、これは同型になる。さらに  $A \hookrightarrow C$  は階数  $|G/H|$  の finite étale 射となる。

**証明.** (1) 重要な点は  $B$  が  $A$  上 finite étale であって、とくに section 1.8 の定義から、 $B$  が finite projective な  $A$  加群になっていることである (古典的な環の Galois 理論の議論をもとに考えていく)。  $B$  は  $A$  上  $G$  に関して Galois ゆえ  $(B_*)^G = A_*$  となっている。  $B_*$  の  $A_*$  上の共役元の和を与える写像

$$t_{B/A}: B_* \longrightarrow (B_*)^G = A_* \quad (1.17)$$

$$b \longmapsto \sum_{\gamma \in G} \gamma(b) \quad (1.18)$$

をとる。ここで  $B$  を  $B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$  の第一成分の射影<sup>\*15</sup>によって  $B \otimes_A B$  加群とみなすことにする (これは  $\mu_B: B \otimes_A B \rightarrow B$  によって  $B \otimes_A B$  の構造を入れていることに等しい)。  $B = (B_*)^a$  であることに注意すると、 $V^a\text{-Alg}$  のテンソル積の定義から

$$B \otimes_A B = (B_*)^a \otimes_{(A_*)^a} (B_*)^a = (B_* \otimes_{A_*} B_*)^a \quad (1.19)$$

ゆえに、 $(B \otimes_A B)_* = (B_* \otimes_{A_*} B_*)_*$  となることから得られる自然な射  $B_* \otimes_{A_*} B_* \rightarrow (B \otimes_A B)_*$  は almost isomorphism になる。

任意の  $\eta \in \mathfrak{m}$  を一つ固定する。仮定から  $(B \otimes_A B)_* \cong \prod_{\gamma \in G} B_*$  より、 $(1, 0, \dots, 0) \in \prod_{\gamma \in G} B_*$  に対応する幂等元  $e'_\eta \in (B \otimes_A B)_*$  が取れる。almost isomorphism であることから、余核が  $\eta$  で打ち消されるので、

<sup>\*15</sup>  $b \otimes b' \mapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G}$  で第一成分で取る  $\gamma \in G$  は  $\gamma = 1 = \text{id}_B \in G$  としている。



とくに  $e_\eta := \eta e'_\eta \in B_* \otimes_{A_*} B_*$  となる。すると

$$e_\eta^2 = (\eta e'_\eta)^2 = \eta^2 e'^2_\eta = \eta^2 e'_\eta = \eta e_\eta \quad (1.20)$$

より  $e_\eta^2 = \eta e_\eta \in B_* \otimes_{A_*} B_*$  となる。さらに積を取る写像  $\mu_{B_*}: B_* \otimes_{A_*} B_* \rightarrow B_*$  の核  $\text{Ker}(\mu_{B_*}) \subset B_* \otimes_{A_*} B_*$  はそれぞれ  $(B \otimes_A B)_*$  と  $\prod_{\gamma \in G} B_*$  のイデアル  $I, J$  に almost isomorphism である。まず、 $J$  は射の構成 (1.10) から  $\{0\} \times \prod_{\gamma \in G \setminus \{\text{id}_{B_*}\}} B_*$  に含まれる。ゆえに  $(1, 0, \dots, 0)$  によって打ち消される。元の対応を考えれば  $(B \otimes_A B)_*$  において  $e'_\eta I = 0$  となる。  $\text{Ker}(\mu_{B_*})$  と  $I$  が almost isomorphism から  $\eta I \cong \text{Ker}(\mu_{B_*})$  である。ゆえに

$$e_\eta \text{Ker}(\mu_{B_*}) = \eta e'_\eta \text{Ker}(\mu_{B_*}) \cong \eta^2 e'_\eta I = 0 \quad (1.21)$$

より、 $e_\eta \in B_* \otimes_{A_*} B_*$  は  $\text{Ker}(\mu_{B_*})$  を打ち消す。また、 $e'_\eta$  と  $(1, 0, \dots, 0)$  の対応と (1.10) の構成から

$$\mu_{B_*}(e_\eta) = \mu_{B_*}(\eta e'_\eta) = \eta 1_{B_*} \quad (1.22)$$

より  $\mu_{B_*}(e_\eta) = \eta 1_{B_*} \in B_*$  となる。

$e_\eta \in B_* \otimes_{A_*} B_*$  より、ある正整数  $n(\eta)$  によって

$$e_\eta := \sum_{i=1}^{n(\eta)} b_i \otimes b'_i \quad (1.23)$$

と表せる。 $e_\eta = \eta e'_\eta$  であり  $e'_\eta$  が  $(1, 0, \dots, 0)$  に対応していることから、(1.10) によって  $e_\eta$  を移せば、 $G \ni \gamma \neq \text{id}_{B_*}$  ならば  $\sum_{i=1}^{n(\eta)} \gamma(b_i) b'_i = 0$  かつ、 $\sum_{i=1}^{n(\eta)} b_i b'_i = \eta 1_{B_*}$  となる。したがって、 $b \in B_*$  について、

$$\eta b = \sum_{i=1}^{n(\eta)} b b_i b'_i = \left( \sum_{i=1}^{n(\eta)} b b_i b'_i \right) + \sum_{\gamma \in G \setminus \{\text{id}_{B_*}\}} \left( \sum_{i=1}^{n(\eta)} \gamma(b b_i) b'_i \right) = \sum_{\gamma \in G} \sum_{i=1}^{n(\eta)} \gamma(b b_i) b'_i = \sum_{i=1}^{n(\eta)} t_{B/A}(b b_i) b'_i \quad (1.24)$$

である。このとき次の  $A_*$  加群の射の合成

$$B_* \xrightarrow{b \mapsto (t_{B/A}(b b_i))_{i=1}^{n(\eta)}} A_*^{n(\eta)} \xrightarrow{(a_i)_{i=1}^{n(\eta)} \mapsto \sum_{i=1}^{n(\eta)} a_i b'_i} B_*$$

は  $\eta \text{id}_{B_*}$  になる。したがって  $((-)^a$  で  $A\text{-Mod}$  に移して考えれば)  $B$  は  $A$  上 finite projective であることがわかる。 $B$  が  $G$  に関して  $A$  上 Galois であることからとれる同型  $B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$  より、 $B$  は  $A$  上 unramified であるので  $B$  は  $A$  上 finite étale になる。

$A \rightarrow B$  が faithfully flat であることからその base change である  $B \rightarrow B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$  も faithfully flat になるので faithfully descent から  $B$  は階数  $|G|$  になる。また、 $\text{Tr}_{B/A} = (t_{B/A})^a$  となる。

(2)  $B$  が  $G$  に関して  $A$  上の Galois 拡大より、上で示した (1) から  $A \hookrightarrow B$  は (faithfully) flat になる。よって  $A' \rightarrow B' := A' \otimes_A B$  は環の拡大になる。 $B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B$  より、 $B'$  加群として

$$B' \otimes_{A'} B' = (B \otimes_A A') \otimes_{A'} (B \otimes_A A') \cong (B \otimes_A B) \otimes_A A' \cong \left( \prod_{\gamma \in G} B \right) \otimes_A A' \cong \prod_{\gamma \in G} B' \quad (1.25)$$

となる。また、 $G$  を  $B' = B \otimes_A A'$  の第一成分に作用させることで section 1.9.2 のように  $G \times G \subset \mathfrak{S}_n \wr G$  の部分群として作用させられる。 $(B' \otimes_{A'} B')^{G \times 1}$  を計算する。(1.12) によって  $G \times 1$  の任意の元  $(\gamma, 1)$  に対応する  $(r_{\gamma^{-1}}, (1, \dots, 1)) \in \mathfrak{S}_n \wr G$  をとる。 $\prod_{\gamma \in G} B$  の元  $(b_1, \dots, b_n)$  が任意の  $\gamma \in G$  で

$$(r_{\gamma^{-1}}, (1, \dots, 1))(b_1, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_n) = (b_{(r_{\gamma^{-1}})^{-1}(1)}, \dots, b_{(r_{\gamma^{-1}})^{-1}(n)}) = (b_1, \dots, b_n) \quad (1.26)$$

となるとする。  $G = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  と添字付けられていて、(1.15) の定義から  $\gamma_{(r_{\gamma-1})^{-1}(i)} = \gamma_i \circ \gamma$  ゆえ、とくに  $\gamma := \gamma_i^{-1} \circ \gamma_j$  と取れば  $\gamma_{(r_{\gamma-1})^{-1}(i)} = \gamma_j$  となる。このことから任意の二つの添字を入れ替えるような作用を  $G \times 1$  は含むので、 $b_1 = \dots = b_n$  となる。対角成分を考えることで、 $B'$  加群の同型

$$A' \otimes_{A'} B' \cong B' \cong \left( \prod_{\gamma \in G} B' \right)^{G \times 1} \cong (B' \otimes_{A'} B')^{G \times 1} \quad (1.27)$$

となる。また、 $A \rightarrow B$  が flat より、その base change  $A' \rightarrow B'$  も flat になる。ここで、 $G$ -不変な部分は

$$(B' \otimes_{A'} B')^{G \times 1} = \text{Ker} \left( B' \otimes_{A'} B' \xrightarrow{(\dots, (\gamma, 1)^{-1}, \dots)} \prod_{\gamma \in G} (B' \otimes_{A'} B') \right) \quad (1.28)$$

$$B'^G = \text{Ker} \left( B' \xrightarrow{(\dots, \gamma^{-1}, \dots)} \prod_{\gamma \in G} B' \right) \quad (1.29)$$

と、核として得ることが出来る。完全列  $0 \rightarrow B'^G \rightarrow B' \rightarrow \prod_{\gamma \in G} B'$  に flat な射  $A' \rightarrow B'$  によって  $- \otimes_{A'} B'$  を作用させれば、完全列

$$0 \longrightarrow B'^G \otimes_{A'} B' \longrightarrow B' \otimes_{A'} B' \longrightarrow \prod_{\gamma \in G} (B' \otimes_{A'} B') \quad (1.30)$$

が得られる。核を比較すれば

$$(B' \otimes_{A'} B')^{G \times 1} \cong B'^G \otimes_{A'} B' \quad (1.31)$$

であることがわかる。(1.27) と (1.31) から自然な射によって同型

$$A' \otimes_{A'} B' \cong B'^G \otimes_{A'} B' \quad (1.32)$$

を得る。 $A' \rightarrow B'$  の faithfully flat 性<sup>\*16</sup>から  $A' \cong B'^G$  となる。これと (1.25) から  $A' \hookrightarrow B'$  は  $G$  に関する Galois 拡大になる。

$A \rightarrow A'$  が faithfully flat ならここまでの同型について faithfully flat descent より  $A \rightarrow B$  に関する同型に降下するので逆も成り立つ。

(3) (1.8) で  $X = G/H$  として与えられる標準的な  $B$  代数の射  $C \otimes_A B \rightarrow \prod_{\bar{\gamma} \in G/H} B$  に  $B \otimes_C -$  を作用させた  $B \otimes_C (C \otimes_A B) \rightarrow B \otimes_C (\prod_{\bar{\gamma} \in G/H} B)$  は次のように同型な射の合成によって得られる。

$$B \otimes_C (C \otimes_A B) \cong B \otimes_A B \cong \prod_{\gamma \in G} B \cong \prod_{\bar{\gamma} \in G/H} \left( \prod_{h \in H} B \right) \cong \prod_{\bar{\gamma} \in G/H} (B \otimes_C B) \cong B \otimes_C \left( \prod_{\bar{\gamma} \in G/H} B \right). \quad (1.33)$$

ここで、二つ目の同型は  $A \hookrightarrow B$  が  $G$  に関する Galois 拡大であることから、四つ目の同型は  $C \hookrightarrow B$  が  $H$  に関する Galois 拡大であることから従う。 $A \hookrightarrow B$  が (1) より、とくに faithfully flat であることから descent を考えれば  $C \otimes_A B \rightarrow \prod_{\bar{\gamma} \in G/H} B$  は  $B$  代数の同型になる。

また、 $A \rightarrow C$  の base change  $B \rightarrow C \otimes_A B \cong \prod_{\bar{\gamma} \in G/H} B$  は自明に階数  $|G/H|$  の finite étale 射になっている。 $A \hookrightarrow B$  の faithfully flat 性と section 1.8.1 の (3) から  $A \hookrightarrow C$  も階数  $|G/H|$  の finite étale 射になる。□

<sup>\*16</sup>  $A'$ -Alg において "almost" に通常の場合と同じことが成り立つ。

### 1.9.3

1 章の最後に almost algebra から離れて、次の便利な Galois 理論に関する二つの補題を与える。1 つ目の方はここでは標準的なものを与えているが、より一般に成り立つ。

**補題 1.9.2.** ?  $R \hookrightarrow S$  を (通常の) 階数  $r$  の finite étale 拡大になっているとする。このとき  $\mathfrak{S}_r$  に関する Galois 拡大  $R \hookrightarrow T$  であって、 $S$  を経由し、 $S \hookrightarrow T$  が  $\mathfrak{S}_{r-1}$  に関する Galois 拡大になるものが存在する。

**証明.**  $X = \text{Spec}(R)$ 、 $Y = \text{Spec}(S)$  とし、 $Z$  を  $r$  個の積  $Y \times_X Y \times_X \cdots \times_X Y$  の partial diagonal の補集合であるとする。 $Y$  が  $X$  上 finite étale であることから、partial diagonal は開かつ閉であり、結果として  $Z$  も開かつ閉になり、このことから  $X$  上 finite étale になる (さらに第一成分の射影によって  $Y$  上 finite étale にもなる)。閉であることからとくに  $Z$  も affine scheme になる。一方、 $\mathfrak{S}_r$  を各成分の入れ替えによって作用させることで、ファイバー積において étale 被覆  $\mathfrak{S}_r \times Z \rightarrow Z \times_X Z$  ( $\mathfrak{S}_{r-1} \times Z \rightarrow Z \times_Y Z$ ) は同型になることがわかる。□

**補題 1.9.3.** ?  $G$  を  $S$  の自己同型からなる有限群とし、 $R := S^G$  という  $G$  不変な  $S$  の部分環をとる。ここで  $R \subset S' \subset S$  という部分拡大であって  $G$  の作用で閉じている  $S'$  が  $G$  に関して  $R$  上 Galois ならば  $S' = S$  となる。

**証明.**  $S'$  が  $R$  上  $G$  に関して Galois より得られる同型  $S' \otimes_R S' \cong \prod_{\gamma \in G} S'$  から得られる、各  $\gamma \in G$  に対する冪等元  $e_\gamma$  をとる。その  $S \otimes_R S'$  への像も冪等元であるから、冪等元による分解

$$S \otimes_R S' \cong \prod_{\gamma \in G} e_\gamma(S \otimes_R S') \cong \prod_{\gamma \in G} S'' \quad (1.34)$$

を与える ( $e_\gamma$  は  $G$  の元を並び替える)。命題 1.9.1 と section 1.8.1 (1) によって  $S'$  は  $R$  上 faithfully flat になる。すると  $S'' \cong (S \otimes_R S')^{G \times 1} = S^G \otimes_R S' = S'$  がわかるので  $S' \otimes_R S' \cong S \otimes_R S'$  ゆえ、 $S' \hookrightarrow S$  と  $S'$  の  $R$  上の faithfully flat 性から  $S = S'$  となる。□

## 2 La categorie bicomplete des algebres de Banach uniformes

本稿での中心的な役割を果たすのは完備非アルキメデスの付値体上の、冪乗法的なノルムに関して完備な可換代数である。この章では (現在の文脈における) 函数解析と可換代数の間の言語に関する一般的な性質などについて述べる。

### 2.1 Algebres de Banach

全体を通して [BGR] を参考にしている。

### 2.1.1

$\mathcal{K}$  を完備な非自明な非アルキメデス的 (乗法) 付値を持つ体で剰余体が  $k$  であるとする。 $\mathcal{K}^\circ$  を付値環とし、 $\mathcal{K}^{\circ\circ}$  を付値イデアルとすると  $k = \mathcal{K}^\circ / \mathcal{K}^{\circ\circ}$  となっている。

本稿では  $\mathcal{K}$  代数は結合的可換かつ単位的であるとする (ただし零代数は除かない)。 $\mathcal{A}$  を  $\mathcal{K}$  代数とする。 $\mathcal{K}$  代数の半ノルム (semi-norm) とは、 $|\cdot|: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  であって  $|a+b| \leq \max(|a|, |b|)$  と、 $|ab| \leq |a||b|$  であって  $a \in \mathcal{K}$  のときこれが等号になり、 $\mathcal{A} \neq 0$  なら  $|1_{\mathcal{A}}| = 1$  になるものである。これがノルム (norm) であるとは、さらに  $\mathcal{A} \setminus \{0\}$  で 0 を値に取らないときのことをいう。 $\mathcal{A}_{\leq r}$  や、簡単に  $\mathcal{A}_{\leq r}$  によって、 $a \in \mathcal{A}$  で  $|a| \leq r$  となるものからなる  $\mathcal{A}$  の部分加法群を表すことにする。同様に  $\mathcal{A}_{< r} := \{a \in \mathcal{A} \mid |a| < r\}$  という  $\mathcal{A}$  の部分加法群を定義する。とくに単位円板  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  は  $\mathcal{A}$  の開部分  $\mathcal{K}^\circ$  代数である。

乗法的ノルム (multiplicative norm) とは、ノルムであって、任意の  $a, b \in \mathcal{A}$  で  $|a||b| = |ab|$  となることである。とくに乗法的ノルムを持つ  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  は整域である。

ノルム  $\mathcal{K}$  代数 (normed  $\mathcal{K}$  algebra) の圏を対象をノルムを持った  $\mathcal{K}$  代数であって、射を連続な  $\mathcal{K}$  代数の射からなるものとして定める。つまりその射  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  は  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  上有界になる。すなわち、作用素ノルム  $\|\varphi\| := \sup_{a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}} |\varphi(a)|/|a| < \infty$  になる ([DM] Lemma 2.11 より、通常連続性などとの同値性がわかる)。 $\varphi$  が isometric であるとは、 $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{B}$  のノルム  $\mathcal{K}$  部分代数になることである。すなわち、任意の  $a \in \mathcal{A}$  に対して  $|\varphi(a)| = |a|$  となることである。

この圏は push-out を持つ。明示的には  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  と、その上の  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{C}$  のノルムのテンソル積

$$|x| := \inf \left\{ \max_{i=1}^n \{|b_i||c_i|\} \mid x = \sum_{i=1}^n b_i \otimes c_i \in \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C} \right\} \quad (2.1)$$

を半ノルムとして持つ。

Banach  $\mathcal{K}$  代数の圏 ( $\mathcal{K}$ -Ban) とは完備ノルム  $\mathcal{K}$  代数からなる、ノルム  $\mathcal{K}$  代数の充満部分圏のことである。Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  を一つ固定するとき、Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{B}$  と  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  の組を Banach  $\mathcal{A}$  代数という。自明な構成によって圏  $\mathcal{A}$ -Ban を得る。すなわち、対象は Banach  $\mathcal{A}$  代数であって、射は  $\mathcal{A}$  上の代数の射  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  であって連続なものである。

### 2.1.2

圏  $\mathcal{K}$ -Ban は始対象  $\mathcal{K}$  を持ち、終対象 0 を持つ。また完備テンソル積 (complete tensor product) ([BGR] 3.1.1 Prop.2) によって得られる  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  を push-out として持ち、finite colimit も持つ。関手  $-\hat{\otimes}_{\mathcal{K}} \mathcal{A}$  は忘却関手  $\mathcal{A}$ -Ban  $\rightarrow \mathcal{K}$ -Ban の左随伴である。

また、 $\mathcal{K}$ -Ban は fiber 積  $\mathcal{B} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  を持ち、有限 limit も持つ。

$I$  を  $\mathcal{B}$  の閉イデアル、 $J$  を  $\mathcal{C}$  の閉イデアルとし、 $K$  を  $I \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C} + \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} J \subset \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  の  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  への像の閉包とする。すると標準的な射

$$(\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C})/K \rightarrow (\mathcal{B}/I) \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\mathcal{C}/J) \quad (2.2)$$

が定義できるが、これは isometric になる ([BGR] 2.1.8 Prop.6 とその証明)。

さらに、 $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{A}$  上 (通常の意味で) finite projective であって、 $\mathcal{C}$  のノルムから定まる位相が finite projective  $\mathcal{A}$  加群の canonical topology であるとき、 $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  は完備になる ([KL] Lemma 2.2.12 (c))。

### 2.1.3 Remark

- (1)  $\mathcal{C}'$  がノルム  $\mathcal{A}$  代数  $\mathcal{C}$  のノルム  $\mathcal{A}$  部分代数であったとしても、 $B \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}'$  が  $B \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  のノルム部分代数になるとは限らない。
- (2)  $\mathcal{C}$  が  $\mathcal{A}$  上の直交基底  $c_1, \dots, c_n, \dots$  を持つとする。このとき  $d \in B \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}$  は一意的に  $d = \sum_{j \geq 1} b_j \otimes c_j$  と書いて、さらに  $|d| = \max_{j \geq 1} \{|b_j| |c_j|\}$  となる (ただし有限個を除いて  $b_j = 0$  である)。実際、 $d = \sum_{i=1}^{m'} b'_i \otimes c'_i$  と書いたとする。まず  $c'_i = \sum_{j \geq 1} a_{ij} c_j$  となる  $a_{ij} \in \mathcal{A}$  が取れる。ただし有限個を除いて  $a_{ij} = 0$  である。すると  $|c'_i| = \max_{j \geq 1} \{|a_{ij}| |c_j|\}$  となり、 $b_j = \sum_{i=1}^{m'} a_{ij} b'_i$  で  $\max_{j \geq 1} \{|b_j| |c_j|\} \leq \max_{j \geq 1, i=1}^{m'} \{|a_{ij}| |c_j| |b'_i|\} \leq \max_{i=1}^{m'} \{|c'_i| |b'_i|\}$  となる。

### 2.1.4

$\mathcal{A}$  をノルム  $\mathcal{K}$  代数とすると、 $\mathcal{A}^\circ$  によって**冪有界元** (power bounded element) 全体の集合を表す。これは  $\mathcal{A}$  の開部分  $\mathcal{K}^\circ$  代数となり、 $\mathcal{A}_{\leq 1}$  を含み、同値なノルムのとり方によらずに一意的に定まる。この  $(-)^{\circ}$  は射の連続性から関手的であり、完備化と可換である。さらに  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  に sup ノルム  $|(a, b)| := \max \{|a|, |b|\}$  を与えることで、 $\mathcal{A} \times \mathcal{B}^\circ = \mathcal{A}^\circ \times \mathcal{B}^\circ$  を得る。

$\mathcal{A}^\circ$  によって**位相的冪零元** (topologically nilpotent) 全体の集合を表す。これは  $\mathcal{A}^\circ$  の開イデアルになり、 $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \sqrt{\mathcal{A}^\circ}$  となる。もし  $\mathcal{A}$  が完備であれば、 $\mathcal{A}^{\circ\circ}$  は  $\mathcal{A}^\circ$  の Jacobson 根基に含まれる。実際、任意の  $(a, b) \in \mathcal{A}^{\circ\circ} \times \mathcal{A}^\circ$  に対して  $1 - ab \in \mathcal{A}^\circ$  は  $ab \in \mathcal{A}^{\circ\circ}$  と  $\mathcal{A}$  の完備性から逆元として  $\sum_{n \geq 0} a^n b^n \in \mathcal{A}$  を持つからである。とくに  $\mathcal{A}$  の完備性のもとで、 $\mathcal{A}^\circ$  の元が可逆であることと、 $\mathcal{A}^\circ / \mathcal{A}^{\circ\circ}$  への像が可逆であることは同値である。とくにこのとき  $\mathcal{A}$  の任意の極大イデアルは閉である ([BGR] 1.2.4 Cor. 5)。

対応  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^\circ / \mathcal{A}^{\circ\circ}$  はノルム  $\mathcal{K}$  代数の圏から被約  $k$  代数の圏への関手を定める。

### 2.1.5

任意の Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  を一つ固定する。多項式環  $\mathcal{A}[T]$  の係数の sup ノルムを

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i T^i \right| := \sup_{i=1}^n \{|a_i|\} \quad (2.3)$$

と定め、これを **Gauss ノルム** (Gauss norm) という ( $\mathcal{A}$  のノルムが乗法的なら Gauss ノルムも乗法的になる)。このノルムによる完備化を  $\mathcal{A}\langle T \rangle$  で表す。冪級数の非アルキメデスの付値に関する収束に関する同値性から、Gauss ノルムによって収束する形式的冪級数を考えれば

$$\mathcal{A}\langle T \rangle = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i T^i \in \mathcal{A}[[T]] \mid \lim_{i \rightarrow \infty} |a_i| = 0 \right\} \quad (2.4)$$

となり、その上のノルムは

$$\left| \sum_{i \geq 0} a_i T^i \right| = \sup_{i \geq 0} \{|a_i|\} \quad (2.5)$$

となっている。この中の冪有界元全体は  $(\mathcal{A}\langle T \rangle)^\circ = \mathcal{A}^\circ\langle T \rangle$  となる ([BGR] 1.4.2 Prop.1)。組  $(\mathcal{A}\langle T \rangle, T)$  は Banach  $\mathcal{A}$  代数  $\mathcal{B}$  とその冪有界元の組  $b \in \mathcal{B}^\circ$  の組  $(\mathcal{B}, b)$  に対してある種の普遍性を与える ([BGR] 1.4.3 Cor.2)。すなわち、ただ一つの  $\mathcal{A}$  代数の間の連続同型  $\mathcal{A}\langle T \rangle \rightarrow \mathcal{B}$  であって、 $T$  を  $b$  に移すものが存在する。

### 2.1.6 Remark

isometric に関する疑問を扱うときには、対象はそのまま、射をその作用素ノルムが 1 以下であるようなものに制限した  $\mathcal{K}$ -Ban の充満では無い部分圏について考えるとよい。この圏においても  $\widehat{\otimes}$  は余積になり、組  $(\mathcal{A}\langle T \rangle)$  は  $(\mathcal{B}, b \in \mathcal{B}_{\leq 1})$  に対して上記と同様の普遍性を持つ。

もし  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  がその部分圏の射であるとする、 $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle \rightarrow \mathcal{B}\langle T \rangle$  から得られる標準的な射  $\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle \rightarrow \mathcal{B}\langle T \rangle$  は isometric な同型射になる。その逆射は  $\mathcal{B}\langle T \rangle$  の持つ普遍性から得られる。ここで、(2.2) のようにして閉イデアル  $I = (0) \subset \mathcal{B}$  と  $\mathcal{A}\langle T \rangle$  の任意の閉イデアル  $J$  について  $K$  を  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} J \subset \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle$  の  $\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle$  への像の閉包とする。このとき可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle & \longrightarrow & \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle \\ & \searrow & \downarrow \cong \\ & & \mathcal{B}\langle T \rangle \end{array}$$

から、 $K \subset \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle$  に対応するのは  $\overline{JB\langle T \rangle} \subset \mathcal{B}\langle T \rangle$  であることがわかる。ゆえに (2.2) から

$$\mathcal{B}\langle T \rangle / \overline{JB\langle T \rangle} \cong (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\langle T \rangle) / K \rightarrow \mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} (\mathcal{A}\langle T \rangle / J) \quad (2.6)$$

は isometric になる。

## 2.2 Normes spectrales

### 2.2.1

ノルム  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  上のノルム  $|\cdot|$  から誘導されるスペクトラル半ノルム (spectral semi-norm) <sup>\*17</sup> とは、

$$|a|_{sp} := \lim_{m \rightarrow \infty} |a^m|^{1/m} \quad (2.7)$$

によって与えられるものである (この limit は確かに存在する)。とくに  $|\cdot|_{sp}$  は冪乗法的であるが、これは一般にノルムになるとは限らない ( $a$  が 0 でなくても  $|a|_{sp} = 0$  になりうる)。一般に  $|\cdot|_{sp} \leq |\cdot|$  である。 $|\cdot|_{sp} = |\cdot|$  のとき、すなわち  $|\cdot|$  が冪乗法的であるとき、 $|\cdot|$  をスペクトラルノルム (spectral norm) であるといい、このとき  $\mathcal{A}$  をスペクトラルノルム  $\mathcal{K}$  代数 (spectral norm  $\mathcal{K}$  algebra) という。この場合には  $\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A}_{\leq 1}$  かつ  $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \mathcal{A}_{<1}$  となる。

?ノルム  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  が乗法的であることと、 $\mathcal{A}$  がスペクトラルかつ  $\mathcal{A}^\circ / \mathcal{A}^{\circ\circ}$  が整域であることは同値である ([BGR] 1.5.3 Prop.1)。<sup>\*18</sup>

### 2.2.2

ノルム  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  について  $\mathcal{A}^\circ$  が有界<sup>\*19</sup>であるとき、一様 (uniform) であるという。これは  $\mathcal{A}$  のノルムがそれから誘導されるスペクトラル半ノルムと同値であることと等しい ([Ari] Ex 1.5.13)。実際、まず同値であっ

<sup>\*17</sup> アルキメデス的な場合と同様にしてこの半ノルムは "spectral" であることがわかる。実際、これは乗法的有界半ノルムの上限であるので Berkovich スペクトラム  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  に含まれているからである。

<sup>\*18</sup>  $|\mathcal{K}| \neq |\mathcal{A}|$  のとき、 $\mathcal{A}$  は付値体ではないが  $\mathcal{A}^\circ / \mathcal{A}^{\circ\circ}$  が体になるものが存在する。

<sup>\*19</sup>  $|\mathcal{A}^\circ|$  が  $\mathbb{R}$  の中で有界集合であること。

たとえと冪有界性は保たれていて、一般に  $\mathcal{A}^\circ \subset \mathcal{A}_{\|_{sp} \leq 1}$  が成り立つ<sup>\*20</sup>ことから  $\mathcal{A}$  は一様になる。<sup>?</sup>逆は  $a \in \mathcal{A}$  に対して、 $|a| \leq |a|_{sp} \sup\{|b| \mid b \in \mathcal{A}^\circ\}$  が成り立つことからわかる。とくに同値であることからスペクトル半ノルムもノルムになる。<sup>\*21</sup>このときこれをスペクトラル (半) ノルムと書くこととする。

任意の一様ノルム  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  は被約である。もし  $|\mathcal{K}|$  が  $\mathbb{R}_+$  で稠密だったら  $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \mathcal{K}^{\circ\circ} \mathcal{A}^\circ = (\mathcal{A}^{\circ\circ})^2$  となる。

### 2.2.3 Examples

- (1) 任意の被約アフィノイド  $\mathcal{K}$  代数 (すなわち、 $\mathcal{K}\langle T_1, \dots, T_n \rangle$  の剰余環) はスペクトラル半ノルムをノルムとして持ち、とくに一様である ([BGR] 6.2.1 Prop.4(iii))。さらにこのとき、代数構造が位相を決定し、スペクトラル (半) ノルムも決定する ([BGR] 6.1.3 Prop.2)。
- (2)  $\mathcal{A}$  が一様/スペクトラルであるとき、 $\mathcal{A}\langle T \rangle$  も同じ性質を持つ。すなわち、 $\mathcal{A}\langle T \rangle^\circ = \mathcal{A}^\circ\langle T \rangle$  は有界/単位円板になる。

### 2.2.4

一様ノルム  $\mathcal{K}$  代数の間の  $\mathcal{K}$  準同型  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  について、連続であることと  $\varphi(\mathcal{A}^\circ) \subset \mathcal{B}^\circ$  であることは同値 ([DM] Lemma 2.11)。さらにノルムがスペクトラルであるとき、連続性は  $\|\varphi\| \leq 1$  と同値 (冪有界元全体と単位円板が同じ集合になるため)。このことから、一様ノルム  $\mathcal{K}$  代数のスペクトラル (半) ノルムは位相構造と適合する唯一つのスペクトラルノルムである。

$\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  は完備であるスペクトラルノルムを高々一つしか持たないことがわかる。実際、二つの完備なスペクトラルノルム  $|\cdot|_1$  と  $|\cdot|_2$  について、とくに  $|\cdot|_1$  を  $|\cdot|_2$  の  $\sup$  に置き換えることで恒等写像  $(\mathcal{A}, |\cdot|_1) \rightarrow (\mathcal{A}, |\cdot|_2)$  は連続になる。Banach の開写像定理から  $|\cdot|_1$  と  $|\cdot|_2$  は同値になる。よって同相であることから  $|\cdot|_1 = |\cdot|_2$  となる。

一様ノルム代数の完備化は一様 Banach 代数になる。これは Banach の開写像定理から、Banach 代数が一様であることとスペクトラル半ノルムで完備であること (したがって半ノルムからノルムになる) が同値<sup>\*22</sup>であることからわかる。<sup>\*23</sup>

### 2.2.5

$\mathcal{K}$ -Ban/ $\mathcal{A}$ -Ban の中の一様 Banach 代数からなる充満部分圏をそれぞれ  $\mathcal{K}$ -uBan/ $\mathcal{A}$ -uBan と表す。<sup>\*24</sup>包含関手  $\mathcal{K}$ -uBan  $\rightarrow$   $\mathcal{K}$ -Ban は左随伴として一様化 (uniformization) 関手  $(-)^u: \mathcal{K}$ -Ban  $\rightarrow$   $\mathcal{K}$ -uBan を持つ。これはスペクトラル半ノルムによる (分離的) 完備化によって与えられる (section 2.2.4 の最後にある同値性からわかる)。定義から、 $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ -Ban の一様化  $\mathcal{A}^u$  は (元々のノルムに関して完備だけでなく) スペクトラル半ノルムに関して完備より、とくにスペクトラル半ノルムをノルムとして持つ。ゆえにスペクトラル  $\mathcal{K}$  代数になる。ここで単位随伴  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^u$  が同型であることは  $\mathcal{A}$  がスペクトラル半ノルムに関して完備であることと同値な

<sup>\*20</sup>  $a \in \mathcal{A}^\circ$  を取ると、ある定数  $C \in \mathbb{R}$  が存在して任意の正整数  $m$  で  $|a^m|_{sp} = |a|_{sp}^m \leq C$  となる。ゆえに  $|a|_{sp} \leq C^{1/m}$  が任意の正整数  $m$  で成り立つので  $m \rightarrow \infty$  として  $|a|_{sp} \leq 1$  となる。

<sup>\*21</sup> ある定数  $C$  で  $|\cdot| \leq C|\cdot|_{sp}$  より、 $|x|_{sp} = 0$  になったら  $|x| = 0$  より  $x = 0$  になるので  $|\cdot|_{sp}$  はノルムになる。

<sup>\*22</sup> 恒等写像  $f: (\mathcal{A}, |\cdot|) \rightarrow (\mathcal{A}, |\cdot|_{sp})$  について、「 $(\mathcal{A}, |\cdot|)$  が一様」 $\Leftrightarrow$  「ノルムが同値」 $\Leftrightarrow$  「 $f$  が同相」となる。よって、 $f$  の連続全単射性からこれは  $f$  が開写像であることと等しく、Banach の開写像定理からこれは値域  $(\mathcal{A}, |\cdot|_{sp})$  の完備性と等しい。

<sup>\*23</sup> 一様ノルム代数の完備化はそのスペクトラル半ノルムによる完備化に等しいからである。

<sup>\*24</sup>  $|a|_{sp} \leq |a|$  から、 $|\cdot|$  の位相より  $|\cdot|_{sp}$  の位相のほうが細かい。とくに  $|\cdot|_{sp}$  に関する Cauchy 列が  $|\cdot|$  の Cauchy 列になるかどうかわからないから、 $|\cdot|_{sp}$  で完備かどうかわからない。



で、 $\mathcal{A}$  が一様であることと同値。

圏  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  は始対象  $\mathcal{K}$  と終対象  $0$  をもち、push-out として完備テンソル積の一様化  $\widehat{\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}} (= (\widehat{\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}})^u)$  を持ち、finite colimit も持つ。一様化関手は包含関手を右随伴として持つので、push-out を保つ。すなわち、 $\widehat{\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}} = \widehat{\mathcal{B}^u \otimes_{\mathcal{A}^u} \mathcal{C}^u}$  となる。 $\mathcal{A}$  を一様 Banach であるとする、関手  $-\widehat{\otimes}_{\mathcal{K}}^u \mathcal{A}: \mathcal{K}\text{-uBan} \rightarrow \mathcal{A}\text{-uBan}$  は忘却関手  $\mathcal{A}\text{-uBan} \rightarrow \mathcal{K}\text{-uBan}$  の左随伴になる。<sup>\*25</sup>

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  を  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  における射とし、 $J$  を  $\mathcal{A}\langle T \rangle$  の閉イデアルとする。このとき標準的な射

$$(\mathcal{B}\langle T \rangle / J\mathcal{B}\langle T \rangle)^u \rightarrow \widehat{\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}}^u (\mathcal{A}\langle T \rangle / J)} \quad (2.8)$$

は isometric になる ( $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{B}$  がスペクトラルであるとしてよく、このとき (2.6) から従う)。

### 2.2.6

一様 Banach 代数の fiber(有限) 積は sup ノルムを与えることで一様になる。よって、一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の圏は有限 limit を持つ。

一様 Banach 代数の直積成分は一様である。実際、ノルム代数  $\mathcal{A}$  に対して零でない冪等元  $e$  のノルムは 1 以上<sup>\*26</sup>であり、さらに  $\mathcal{A}$  がスペクトラルだったらノルムは 1 になるからである。より正確には、任意の代数としての直積分解  $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$  は一様ノルム代数の圏における直積分解を与える。

### 2.2.7 Remark

$\mathcal{C}$  が  $\mathcal{A}$  上の直交基底を持ち、 $\mathcal{B}$  がスペクトラルであるとき、

$$\mathcal{B} \longrightarrow \widehat{\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}} \quad (2.9)$$

$$b \longmapsto b \otimes 1 \quad (2.10)$$

は isometric になる。これは、section 2.1.3 (2) に注意すると  $|b \otimes 1|_{sp} = \lim_{m \rightarrow \infty} |b^m \otimes 1|^{1/m} = \lim_{m \rightarrow \infty} |b^m|^{1/m} = |b|$  であることからわかる。

### 2.2.8 Example

?  $\mathcal{K}$  の (有限次)Galois 拡大体  $\mathcal{L}$  をとり、その Galois 群が  $G$  であるとする。 $\mathcal{K}$  のノルムを一意的に  $\mathcal{L}$  上に延長できる (とくに  $G$  は isometric に作用する)。このとき  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}$  にノルムのテンソル積によって (半) ノルムを与えると、有限次元一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数となる。(1.10) と同様にして得られる  $\mathcal{K}$  準同型  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L} \rightarrow \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$  は連続全単射になり、(Banach の開写像定理から) Banach 代数としての同型を与え、? とくに  $\widehat{\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}} \cong \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$  と表せられる。ゆえに Banach 代数  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L}$  がスペクトラルであることと、 $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{K}} \mathcal{L} \rightarrow \prod_{\gamma \in G} \mathcal{L}$  が isometric であることは同値。さらにこれは cadre を  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  としたとき、 $(\mathcal{L}^\circ)^a$  が  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  上 Galois であることと同値。離散付値である場合、このことは、付値体の拡大  $\mathcal{L}/\mathcal{K}$  が unramified であることと同値。無限次拡大のときはより注意深く扱わなければならない。

以下では  $\mathcal{K}$  の剰余体  $k$  は標数  $p > 0$  であるとする。

<sup>\*25</sup>  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  すべてが体であったとしても  $\widehat{\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}}$  が被約であるとは限らない。

<sup>\*26</sup>  $|e| = |e^2| \leq |e|^2$  からわかる。



## 2.3 Dictionnaire

### 2.3.1

まず最初にいくつかの閉包操作について扱う。(単位的可換) 環の拡大  $R \hookrightarrow S$  を取る。

$s \in S$  が  $R$  上 integral であるとは、その冪からなる集合  $\{s^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$  が  $S$  の中で有限生成  $R$  部分加群を生成することである。almost integral <sup>\*27</sup> であるとは、その冪からなる集合  $\{s^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$  が  $S$  の中で生成する  $R$  部分加群が、ある有限生成  $R$  部分加群に含まれることである。integral/almost integral の元全体をそれぞれ、 $R_S^+$ 、 $R_S^*$  と表す。これは  $S$  の部分環になり、それぞれ、 $R$  の  $S$  の中の integral closure/complete integral closure という。 $R = R_S^+$  のとき  $R$  を  $S$  上 integrally closed といい、 $R = R_S^*$  のとき  $R$  を  $S$  上 completely integrally closed という。とくに  $R_S^+$  は  $S$  上 integrally closed であるが、(2) から  $R_S^*$  は一般に completely integrally closed ではない。また、明らかに  $R_S^+ \subset R_S^*$  となる ( $R$  が Noether ならこれは一致する)。

$p$  を素数とする。 $s \in S$  が  $R$  上  $p$ -root ( $p$ -radiciel) であるとは、ある正整数  $n$  が存在して  $s^{p^n} \in R$  となることである。 $R$  が  $S$  で  $p$ -root closed であるとは、任意の  $R$  上  $p$ -root な  $S$  の元がすべて  $R$  に入ることである。すなわち、「 $s \in S$  かつ  $s^p \in R \implies s \in R$ 」となることである。 $R$  の  $S$  における  $p$ -root closure とは、 $R_S^+$  と書き、 $R$  と  $S$  の間で  $p$ -root closed な部分環の中で最小のもののことである。 $S$  の部分環の増大列  $(R_i)_{i \geq 0}$  を帰納的に  $R_0 := R$  で、 $R_{i+1}$  を  $R_i$  上  $p$ -root な  $S$  の元全体によって  $R_i$  上 (代数として) 生成される  $S$  の部分環とする。このとき  $p$ -root closure はこの和集合によって構成できる。明らかに  $R_S^+ \subset R_S^*$  となり、 $R$  が  $S$  で  $p$ -root closed であることと  $R = R_S^+$  は同値である。

$R$  の標数が  $p$  であるか、 $S = R[1/p]$  であるとき、 $R$  上  $p$ -root な  $S$  の元全体の集合は  $S$  の部分環になり、それは  $R_S^+$  に一致する。

可換図式

$$\begin{array}{ccc} R & \hookrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ R' & \hookrightarrow & S' \end{array}$$

に対して、以上の性質は準同型で保たれるため、自然な準同型  $R_S^+ \rightarrow R_{S'}^+$ 、 $R_S^+ \rightarrow R_{S'}^+$ 、 $R_S^* \rightarrow R_{S'}^*$  が得られる (一つ目の準同型は上記で構成した  $R_i$  について  $R_i \rightarrow R'_i$  によって得られる)。とくに次の可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} R & \hookrightarrow & R_S^+ & \hookrightarrow & R_S^+ & \hookrightarrow & R_S^* & \hookrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ R' & \hookrightarrow & R_{S'}^+ & \hookrightarrow & R_{S'}^+ & \hookrightarrow & R_{S'}^* & \hookrightarrow & S' \end{array}$$

が成り立つ。

$S$  の中の  $R$  の integral closure を取る操作は局所化と可換である ([AM] Prop. 5.12)。また、同様に  $p$ -root closure を取る操作も局所化と可換である。しかし、completely integrally closure を取る操作は局所

<sup>\*27</sup> 補題 2.5.3 で示すように、これは almost mathematics における integral 性と一致しない。

化と可換とは限らない。

### 2.3.2

函数解析と可換環論の間の概念を集めておく。

$\varpi \in \mathcal{K}^\circ \setminus \{0\}$  一つ固定する。 $\Gamma \subset \mathbb{R}$  によって対応する値群とする。すなわち  $|\varpi|^\Gamma = |\mathcal{K}^\times|$  を満たす。任意の  $s \in \Gamma$  に対して、ある  $\varpi_s \in \mathcal{K}^\times$  を  $|\varpi_s| = |\varpi|^s$  となる元として取る (以下の議論はこの元のとり方によらない)。<sup>\*28</sup> また、 $|\varpi| < 1$  から、任意の  $x \in \mathcal{K}^\times$  について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\varpi^n x| = 0$  より十分大きい  $n$  で  $|\varpi^n x| \leq 1$  なので  $\varpi^n x \in \mathcal{K}^\circ$  となるから  $x \in \mathcal{K}^\circ[1/\varpi]$  である。よって  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^\circ[1/\varpi]$  であるので、とくに以下の命題 2.3.1 (2) で定める  $\mathcal{A} = \mathcal{A}[1/\varpi]$  は  $\mathcal{K}$  代数になる。

**命題 2.3.1.** (1)  $\mathcal{A}$  をノルム  $\mathcal{K}$  代数であって  $|\mathcal{K}|$  が  $|\mathcal{A}|$  で稠密であるとする。任意の  $a \in \mathcal{A}$  について

$$|a| = |\varpi|^r, \quad r := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\} \quad (2.11)$$

となる。とくに  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  は  $\varpi$  進位相を持ち、 $\mathcal{A}$  が Banach であることと  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  が  $\varpi$  進完備であることは同値になる。

(2) 逆に、 $\mathcal{A}$  を flat な  $\mathcal{K}^\circ$  代数とする (? とくに  $\varpi$ -torsion free であることと同値)。

$$\mathcal{A} := \mathcal{A}[1/\varpi] \quad (2.12)$$

と定める。任意の  $a \in \mathcal{A}$  に対して

$${}^A|a| := |\varpi|^r, \quad r := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} a \in \mathcal{A}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad (2.13)$$

と定義する。

(a) 定義した (2.13) は  $\mathcal{A}$  上に半ノルムを与える。これがノルムであることと任意の  $A \setminus \{0\}$  の元が infinite  $\varpi$ -divisible にならないことは同値。さらにこのとき  $|\mathcal{K}|$  は  ${}^A|\mathcal{A}|$  で稠密になる。

さらに  $\widehat{A}$  も flat な  $\mathcal{K}^\circ$  代数であり、 $\widehat{A} = \widehat{A}[1/\varpi]$  かつ、 $\widehat{A}_{\leq 1} = \widehat{\mathcal{A}_{\leq 1}}$  が成り立つ。

(b) 一般に  $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{K}^\circ \mathcal{A}$  が成り立つ。 $\Gamma$  が離散的であれば  $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}$  となる。 $\Gamma$  が離散的でないとき  $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}_*$  となる。ここで、 $\mathcal{A}_* := \text{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{A}) = \bigcap_{s \in \Gamma_{>0}} \varpi_{-s} \mathcal{A}$  と定義している。<sup>\*29</sup> また、 ${}^A| - | = {}^{\mathcal{A}_{\leq 1}}| - |$  も成り立つ。

(c) 準同型  $\varphi: \mathcal{A} = \mathcal{A}[1/\varpi] \rightarrow \mathcal{A}' = \mathcal{A}'[1/\varpi]$  は、 $\varphi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}'$  ならば連続である。ノルム代数の間の射になっているとき、もし  $\varphi^{-1}(\mathcal{A}') = \mathcal{A}$  ならば isometric である。さらに正確に、連続写像  $\varphi$  が isometric であることと、 $\varphi(\mathcal{A}_{\leq 1}) \subset \mathcal{A}'_{\leq 1}$  かつ  $\varphi$  の誘導する  $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi \rightarrow \mathcal{A}'_{\leq 1}/\varpi$  が単射であることは同値。

(d)  $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{A}'$  の部分代数であって  $\mathcal{A}'/\mathcal{A}$  が  $\varpi$ -torsion free であるとき、 ${}^{\mathcal{A}'}| - |$  の  $\mathcal{A}$  への制限は  ${}^A| - |$  になる。

$J$  が  $\mathcal{A}$  のイデアルであって  $\mathcal{A}/J$  が  $\varpi$ -torsion free になるとき、 ${}^{\mathcal{A}/J}| - |$  は  ${}^A| - |$  の商半ノルムになる。逆に  $\mathcal{A}$  の任意のイデアル  $I$  に対して  $(\mathcal{A}/I)_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1}/I_{\leq 1})_*$  が成り立つ。

<sup>\*28</sup>  $|\varpi_s| = |\varpi|^s$  となる元を取ったとすると、 $\mathcal{K}$  のノルムは乗法的なので  $|\varpi_s(\varpi'_s)^{-1}| = 1$  となっている。すなわち、この代表元  $\varpi_s$  のとり方は  $\mathcal{K}^\circ \setminus \mathcal{K}^{\circ\circ}$  の積を除いて一意的に定まる。

- (e)  $B$  と  $C$  を  $\varpi$ -torsion free な  $A$  代数とする。このとき  $(B \otimes_A C)/(\varpi^\infty\text{-torsion})$  上に (2.13) で定義される半ノルムは  $B$  と  $C$  の半ノルムのテンソル積に一致する (ここで  $\varpi^\infty\text{-torsion}$  は任意の正整数  $n$  に対して  $\varpi^n$  で消えるような元のことである)。逆に  $B$  と  $C$  をノルム  $A$  代数とするとき、 $\Gamma$  が離散的ならば

$$(B \otimes_A C)_{\leq 1} = (B_{\leq 1} \otimes_{A_{\leq 1}} C_{\leq 1})/(\varpi^\infty\text{-torsion}) \quad (2.14)$$

となり、そうでないならば

$$(B \otimes_A C)_{\leq 1} = ((B_{\leq 1} \otimes_{A_{\leq 1}} C_{\leq 1})/(\varpi^\infty\text{-torsion}))_* \quad (2.15)$$

となる。

上のテンソル積を完備テンソル積に変えても同様のことが成り立つ。

- (3) ノルム  $K$  代数  $A$  を一つ固定する。 $A^\circ$  による剰余 (もしくは完備化) によって、 $A^\circ$  の中の開 [completely]integrally closed な  $K^\circ$  部分代数と被約  $k$  代数  $A^\circ/A^\circ$  の中の [completely]integrally closed な  $k$  部分代数 (もしくは  $\widehat{A}^\circ$  の中の開 integrally closed な  $K^\circ$  部分代数) の間に全単射がある。

以下ではノルム  $K$  代数  $A$  に対して、 $|K|$  が  $|A|$  で稠密であるとする。

- (4)  $A$  を上のように取り、 $A := A[1/\varpi]$  とする。section 2.3.1 の記号を用いると  $A_A^+$  があり、また、

$$A_A^+ := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+, a^{p^n} \in A\} \quad (2.16)$$

と定義されていた。さらに  $A = A[1/\varpi]$  であることに注意すると、

$$A_A^* = \{a \in A \mid \exists m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+, \varpi^m a^n \in A\} \quad (2.17)$$

となっている。<sup>\*30</sup> このとき

$$A_A^+ \subset A_A^+ \subset A_A^* = (A_*)^*_A = A^\circ \quad (2.18)$$

と  $(A_A^+)^* = (A^\circ)^*$  が成り立ち、さらにこれは  $|A|$  から誘導されるスペクトラル半ノルムによる単位円板と等しい。すなわち  $A_{||_{sp} \leq 1} = (A_A^+)^* = (A^\circ)^*$  となる。

とくに  $A_{\leq 1}$  が Noether のとき、 $A$  における  $A_{\leq 1}$  の integral closure は  $A^\circ$  に等しい。

- (5) ノルム  $K$  代数  $A$  について以下は同値。

- (a)  $|A|$  はスペクトラルである。
- (b)  $A_{\leq 1} = A^\circ$  である。
- (c)  $A_{\leq 1} = (A_{\leq 1})^*_A$  である (すなわち、 $A_{\leq 1}$  は  $A$  で completely integrally closed である)。
- (d)  $A_{\leq 1} = (A_{\leq 1})^+_A$  である (すなわち、 $A_{\leq 1}$  は  $A$  で integrally closed である)。
- (e)  $A_{\leq 1} = (A_{\leq 1})^{\dagger}_A$  となる (すなわち、 $A_{\leq 1}$  は  $A$  で  $p$ -root closed である)。
- (f) (さらに、もし  $|p| \leq |\varpi|$  かつ  $1/p \in \Gamma$  ならば<sup>\*31</sup>) Frobenius 射  $A_{\leq 1}/\varpi_{1/p} \xrightarrow{x \mapsto x^p} A_{\leq 1}/\varpi$  は単射である。

- (6) ノルム  $K$  代数  $A$  が一様ならば、次の二つ

$$(A_{||_{sp} \leq 1})^\circ = (A^\circ)^* = (A_{\leq 1})^*_A \quad (2.19)$$

$$\widehat{A}^\circ = (\widehat{A})^\circ \quad (2.20)$$

が成り立つ。

(7)  $\mathcal{A}$  が Banach  $\mathcal{K}$  代数であれば、 $(\mathcal{A}^\circ)^\circ$  はスペクトラル半ノルムによる  $(\mathcal{A}^\circ)_*$  の (分離的) 完備化になる。

証明. (1) もし  $|a| \in |\mathcal{K}^\times|$  であれば、 $|\mathcal{K}^\times| = |\varpi|^\Gamma$  より、ある  $r \in \Gamma$  が存在して

$$|a| = |\varpi|^r = (|\varpi|^{-r})^{-1} = |\varpi_{-r}|^{-1} \quad (2.21)$$

となる。この  $r$  が  $r' := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\}$  に等しくなることを示す。まず、 $|\cdot|$  は  $\mathcal{K}$  代数のノルムであるので  $\mathcal{K}$  の元に関する乗法性から、 $\varpi_{-s} \in \mathcal{K}^\times$  について、 $|\varpi_{-r}a| = 1$  より  $\varpi_{-r}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  なので  $r \leq r'$  となる。逆に  $\varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  となる任意の  $s \in \Gamma$  を取る。すると、 $r$  のとり方から  $|a| = |\varpi|^r$  であることに注意すると、

$$1 \geq |\varpi_{-s}a| = |\varpi_{-s}||a| = |\varpi|^{-s}|a| = |\varpi|^{-s+r} \quad (2.22)$$

となる。 $\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus \{0\}$  であって、 $\mathcal{K}$  上ではノルムは乗法的なので  $|\varpi| < 1$  ゆえ、この (2.22) から  $-s+r \leq 0$  より  $r \leq s$  となるので、 $r' \leq r$  である。したがって  $r = r'$  から、 $|a| \in |\mathcal{K}^\times|$  のとき (2.11) が成り立つ。そうでない場合、まず任意の  $|a| \in |\mathcal{A}|$  について、 $|\varpi| < 1$  に注意すると、

$$|\varpi|^{\sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\}} = \inf\{|\varpi|^s \in \mathbb{R} \mid s \in \Gamma, \varpi_{-s}a \in \mathcal{A}_{\leq 1}\} \quad (2.23)$$

$$= \inf\{|\varpi|^s \in \mathbb{R} \mid s \in \Gamma, |\varpi_{-s}a| \leq 1\} \quad (2.24)$$

$$= \inf\{|\varpi|^s \in \mathbb{R} \mid s \in \Gamma, |a| \leq |\varpi|^s \in |\mathcal{K}|\} \quad (2.25)$$

となっている<sup>\*32</sup>ので、 $|\mathcal{K}|$  の  $|\mathcal{A}|$  における稠密性からわかる。

とくに  $0 \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  の基本近傍系として、任意の正整数  $n$  に対して半径  $|\varpi|^n$  の単位円板  $B_n(0) := \{a \in \mathcal{A}_{\leq 1} \mid |a| \leq |\varpi|^n\}$  が取れるので、 $\mathcal{A}_{\leq 1}$  は  $\varpi$  進位相を持つ。 $\mathcal{A}$  の完備性はその閉単位円板  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  の完備性と同値<sup>\*33</sup>なので、 $\mathcal{A}$  が Banach であることと  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  が  $\varpi$  進完備であることは同値。

(2) (a)  ${}^A|\cdot|$  が  $\mathcal{A}$  上の半ノルムであることは  $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{K}^\circ$  代数であることからわかる。さらに  $\mathcal{K}$  代数の半ノルムであることは、(b) の証明の最初で示したとおり  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\leq 1}$  であることより、任意の  $x \in \mathcal{K}$  について  ${}^A|x| = |x|$  となることからわかる ((1) の証明と同様)。とくに footnote \*28 から、この  ${}^A|\cdot|$  は  $\varpi_s$  のとり方によらず定まる。 $\mathcal{A}$  の  ${}^A|\cdot|$  による位相は  $\varpi$  進位相に等しい。よって、 ${}^A|\cdot|$  がノルムであることと  $\mathcal{A}$  が  $\varpi$  進分離的であることは同値。つまり  $\bigcap_{n \geq 1} \varpi^n \mathcal{A} = 0$  であるが、これは  $\mathcal{A} \setminus \{0\}$  が infinite  $\varpi$ -divisible を持たないことに等しい。また、 ${}^A|\cdot|$  の構成から  $|\mathcal{K}| = |\varpi|^\Gamma$  は  ${}^A|\mathcal{A}|$  で稠密になる。

$\mathcal{A}$  は  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat なので、任意の正整数  $n$  で  $\mathcal{A}/\varpi^{n-1} \xrightarrow{\varpi} \mathcal{A}/\varpi^n$  が単射。 $\mathcal{A}$  は半ノルム  ${}^A|\cdot|$  の定義から  $\varpi$  進位相を持っているから、 $\hat{\mathcal{A}} = \varprojlim \mathcal{A}/\varpi^n$  となるので、単射性からこれは  $\varpi$ -torsion free であるから  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat になる。

<sup>\*31</sup> 記号  $A_*$  は  $\Gamma$  が  $\mathbb{R}$  で稠密なとき、 $\mathcal{K}^{\circ\circ}$  が  $\mathcal{K}^\circ$  で冪等イデアルになり cadre を  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  としたときに almost mathematics で定義したものと同様のものになる。稠密でないときは  $A_* = A$  となる。

<sup>\*31</sup>  $a \in A_{\mathcal{A}}^*$  のとき、ある有限生成  $A$  加群  $B$  が存在して  $A[a] \subset B \subset \mathcal{A} = A[1/\varpi]$  になる。 $B = A(\alpha_1/\varpi^{n_1}) + \cdots + A(\alpha_k/\varpi^{n_k})$  と書いて、任意の正整数  $n$  で  $a^n \in A[a] \subset B$  となる。十分大きい  $N$  によって  $\varpi^N a^n \in A$  となる。逆にある  $N$  で任意の  $n$  で  $\varpi^N a^n \in A$  となるとき、 $a^n \in A1/\varpi^N$  から  $A[a] \subset A1/\varpi^N$  となるので  $a \in A_{\mathcal{A}}^*$  になる。

<sup>\*31</sup>  $1/p \in \Gamma$  は  $\varpi_{1/p}$  が存在することに必要。 $|p| \leq |\varpi|$  は Frobenius 射  $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi_{1/p} \rightarrow \mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi$  が環準同型になるために必要。

<sup>\*32</sup> とくにこの表示から  $\varpi_s$  のとり方によらない。

<sup>\*33</sup>  $\mathcal{A}$  の任意の Cauchy 列  $(a_n)_{n=1}^\infty$  に対して、ある正整数  $N$  が存在して  $n, m \geq N$  で  $|a_n - a_m| \leq 1$  となる。このとき  $(a'_n := a_n - a_N)_{n=N}^\infty$  を取れば、これは  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  の中の Cauchy 列になるので、 $\mathcal{A}_{\leq 1}$  の完備性が使える。

等号  $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{A}[1/\varpi]$  は  $\mathcal{A}$  が  $A$  を定義環、 $\varpi A$  を定義イデアルとする Huber ring になっていることから従う。  
 $\widehat{\mathcal{A}}_{\leq 1} = \widehat{A}_{\leq 1}$  については  $\widehat{\mathcal{A}}$  上に定まるノルムを考えれば単位閉円板についての議論から良い。

(b) まず  $A \subset \mathcal{A}_{\leq 1}$  を示す。任意の  $a \in A$  を取り、 ${}^A|a| = |\varpi|^r$  となったとする。とくに  $\varpi_0 = 1$  として取れることから、 $\varpi_0 a \in A$  ゆえ、 $r \geq 0$  なので、 $|\varpi| < 1$  から  ${}^A|a| = |\varpi|^r \leq |\varpi|^0 = 1$  より、 $a \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  となる。よって  $A \subset \mathcal{A}_{\leq 1}$  である。

一方、 $\alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  を取り、 ${}^A|\alpha| = |\varpi|^r$  となったとする。とくに  $r \geq 0$  である。 $\Gamma$  が  $\mathbb{R}^+$  で稠密であるとする。 $r = \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a \in A\} \geq 0$  から、任意の  $s \in \Gamma_{>0}$  に対して、ある  $s' \in \Gamma$  が存在して  $-s \leq s'$  かつ  $\varpi_{-s'}\alpha \in A$  となる。 $0 \leq s + s'$  から  $|\varpi_s \varpi_{s'}| = |\varpi|^{s+s'} \leq 1$  より  $\varpi_s \varpi_{s'} \in \mathcal{K}^\circ$  なので、 $(\varpi_s \varpi_{s'})\varpi_{-s'}\alpha = \varpi_s \alpha \in A$  ゆえ、任意の  $s \in \Gamma_{>0}$  で  $\alpha \in \varpi_{-s}A$  となる。したがって  $\mathcal{A}_{\leq 1} \subset A_*$  である。逆に  $\alpha \in A_* = \bigcap_{s \in \Gamma_{>0}} \varpi_{-s}A \subset \mathcal{A}$  を任意に取る。すると  $\Gamma$  が加法群なので任意の  $s \in \Gamma_{>0}$  で  $\varpi_s \alpha \in A$  から、任意の  $s \in \Gamma_{<0}$  で  $\varpi_{-s} \alpha \in A$  となることになる。 $\varpi$  ゆえに  $\Gamma$  の  $\mathbb{R}^+$  での稠密性から  $r = \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}a \in A\} \geq 0$  なので、 ${}^A|\alpha| = |\varpi|^r \leq 1$  より、 $\alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  となるので、一般に  $\mathcal{A}_{\leq 1} = A_* = \bigcap_{s \in \Gamma_{>0}} \varpi_{-s}A$  となる。

$\Gamma$  が離散的であるとき、とくに  $r$  は  $\sup$  ではなく  $\max$  で取れるので  $r \in \Gamma$  となり、 $\varpi_{-r}\alpha = \varpi_r^{-1}\alpha \in A$  となる。 $|\varpi_r| = |\varpi|^r \leq 1$  から  $\varpi_r \in \mathcal{K}^\circ$  であり、 $A$  は  $\mathcal{K}^\circ$  代数なので  $\varpi_r(\varpi_r^{-1}\alpha) = \alpha \in A$  となる。したがってとくに  $\Gamma$  が離散的であるときは  $\mathcal{A}_{\leq 1} = A$  となる。

$\mathcal{K}^{\circ\circ}A$  の元を  $x_k \in \mathcal{K}^{\circ\circ}$  と  $a_k \in A$  によって  $\sum_{k=1}^n x_k a_k$  と表す。このとき上で示したことから  $A \subset \mathcal{A}_{\leq 1}$  と  ${}^A|x_k| = |x_k| < 1$  であることから、

$${}^A\left|\sum_{k=1}^n x_k a_k\right| \leq \max\{{}^A|x_k a_k| \mid k = 1, \dots, n\} < \max\{{}^A|a_k| \mid k = 1, \dots, n\} \leq 1 \quad (2.26)$$

より、 $\mathcal{A}_{<1} \supset \mathcal{K}^{\circ\circ}A$  となる。逆に  $a/\varpi^n \in \mathcal{A}_{<1} = (A[1/\varpi]_{<1})$  を任意に取る。 ${}^A|a/\varpi^n| = |\varpi|^r < 1$  より、 $|\varpi| < 1$  から  $0 < r = \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s}(a/\varpi^n) \in A\}$  より、ある  $0 < s \in \Gamma$  で  $\varpi_{-s}(a/\varpi^n) \in A \subset \mathcal{A}$  となる。 $\varpi_{-s} = \varpi_s^{-1}$  と取って良く、 $s > 0$  から  $|\varpi_s| = |\varpi|^s < 1$  ゆえ  $\varpi_s \in \mathcal{K}^{\circ\circ}$  なので、 $a/\varpi^n \in \varpi_s A \subset \mathcal{K}^{\circ\circ}A$  より  $\mathcal{A}_{<1} = \mathcal{K}^{\circ\circ}A$  となる。

${}^A|\alpha| = {}^{\mathcal{A}_{\leq 1}}|\alpha|$  を示す。 ${}^A|\alpha| = |\varpi|^r$  と  ${}^{\mathcal{A}_{\leq 1}}|\alpha| = |\varpi|^{r'}$  となったとする。まず  $s \in \Gamma$  で  $\varpi_{-s}\alpha \in A$  ならば  $A \subset \mathcal{A}_{\leq 1}$  より  $r \leq r'$  となる。逆に  $s \in \Gamma$  で  $\varpi_{-s}\alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1} = A_*$  となったとすると、任意の  $t \in \Gamma_{>0}$  で  $\varpi_{-s}\alpha \in \varpi_{-t}A$  から  $\varpi_t \varpi_{-s}\alpha \in A$  となる。とくに元のとり方によらないことから  $\varpi_{-(s-t)}\alpha \in A$  より  $s-t \leq r$  となる。 $t \rightarrow 0$  とすれば  $s \leq r$  より  $r' \leq r$  なので  $r = r'$  より、 ${}^A|-| = {}^{\mathcal{A}_{\leq 1}}|-|$  となる。

(c)  $\mathcal{K}$  代数の射  $\varphi: A[1/\varpi] \rightarrow A'[1/\varpi]$  について  $\varphi(A) \subset A'$  が成り立っているとする。(b) から

$$\varphi(\mathcal{A}_{\leq 1}) = \varphi(A_*) = \varphi\left(\bigcap_{s \in \Gamma_{>0}} \varpi_{-s}A\right) \subset \bigcap_{s \in \Gamma_{>0}} \varpi_{-s}\varphi(A) \subset \bigcap_{s \in \Gamma_{>0}} \varpi_{-s}A' = A'_* = \mathcal{A}'_{\leq 1} \quad (2.27)$$

より、 $\varphi$  は有界なのでとくに連続になる。さらに  $\varphi^{-1}(A') = A$  のとき、任意の  $\alpha \in A$  について  ${}^A|\alpha| = |\varpi|^r$  かつ、 ${}^{A'}|\varphi(\alpha)| = |\varpi|^{r'}$  となったとする。まず  $\varpi_{-s}\alpha \in A$  ならば  $\varphi$  が  $\mathcal{K}$  代数の射で  $\varphi(A) \subset A'$  より  $\varpi_{-s}\varphi(\alpha) \in \varphi(A) \subset A'$  なので、 $r \leq r'$  となる。逆に  $\varpi_{-s'}\varphi(\alpha) \in A'$  だとすると、 $\varphi(\varpi_{-s'}\alpha) \in A'$  と  $\varphi(A') = A$  から  $\varpi_{-s'}\alpha \in A$  より、 $r' \leq r$  なので、 $r = r'$  から  $\varphi$  は isometric になる。

最後の同値性を示す。 $\varphi$  が isometric であることと、 $\varphi$  が  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  と  $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \varphi(A)$  を  $\mathcal{K}^\circ$  代数として同型に対応させることは同値になる。実際、まず  $\varphi$  が isometric になっているならば、 $\mathcal{A}'_{\leq 1}$  に移るのは  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  に入っている元のみである。 $\varphi$  は単射であるので  $\varphi(\mathcal{A}_{\leq 1}) \cap \mathcal{A}'_{\leq 1}$  が対応する。よって  $\mathcal{K}^\circ$  代数の同型になる。逆に  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  と

$\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \varphi(\mathcal{A})$  を  $\mathcal{K}^\circ$  代数として同型に対応しているとする。任意の  $\alpha \in \mathcal{A}$  について、ある正整数  $m$  が存在して  $\varpi^m \alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  となる。もし  $A'|\varphi(\varpi^m \alpha)| = A|\varpi^m \alpha|$  となったとすれば、このノルムは  $\mathcal{K}$  代数のノルムより、 $A'|\varphi(\alpha)| = A|\alpha|$  となる。ゆえに  $\alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  として  $A'|\varphi(\alpha)| = A|\alpha|$  を示せば良い。(b) から  $A|-| = A_{\leq 1}|-|$  となっていることに注意する。まず  $\varpi_{-s} \alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  であるとき、 $\varphi$  の仮定から  $\varpi_{-s} \varphi(\alpha) \in \varphi(\mathcal{A}_{\leq 1}) = \mathcal{A}'_{\leq 1}$  ゆえ、 $A'|\varphi(\alpha)| \leq A|\alpha|$  となる。逆に、 $\varpi_{-s'} \varphi(\alpha) \in \mathcal{A}'_{\leq 1}$  のとき  $\varphi(\varpi_{-s'} \alpha) \in \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \varphi(\mathcal{A})$  であるので、 $\varphi$  の仮定から  $\varpi_{-s'} \alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  となる。したがって  $A'|\varphi(\alpha)| = A|\alpha|$  となるので  $\varphi$  が isometric になる。

まず  $\varphi$  が isometric なら、上記のことから  $\varphi(\mathcal{A}_{\leq 1}) \subset \mathcal{A}'_{\leq 1}$  となる。また、もし  $\alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  で  $\varphi(\alpha) \in \varpi \mathcal{A}'_{\leq 1}$  だったとすると、 $\varpi_{-1} \varphi(\alpha) \in \mathcal{A}'_{\leq 1}$  より、 $A'|\varphi(\alpha)| \leq |\varpi| < 1$  となる。isometric であることから  $A|\alpha| \leq |\varpi|$  より  $\varpi^{-1} \alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  なので  $\alpha \in \varpi \mathcal{A}_{\leq 1}$  であるから  $\mathcal{A}/\varpi \rightarrow \mathcal{A}'/\varpi$  は単射になる。

逆を示す。 $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi \rightarrow \mathcal{A}'_{\leq 1}/\varpi$  の単射性からもし  $\varphi(\alpha) = 0$  ならば、 $\varpi^{-1} \alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  となり、 $\varphi(\varpi^{-1} \alpha) = 0$  から、繰り返して  $\alpha$  は infinite  $\varpi$ -divisible となる。isometric の概念はノルム  $\mathcal{K}$  代数の間の射においてのみ定義しているから、今  $A|-|$  はノルムなので (a) から infinite  $\varpi$ -divisible を持たないから  $\alpha = 0$  となる。よって、 $\varphi$  も単射になる。とくに  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$  として考えて良い。上で示した同値性から、 $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \mathcal{A}$  を示せば良い。 $\varphi$  の仮定から  $\mathcal{A}_{\leq 1} \subset \mathcal{A}'_{\leq 1}$  から  $\mathcal{A}_{\leq 1} \subset \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \mathcal{A}$  が成り立っている。ここで任意の  $\alpha \in \mathcal{A}$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varpi^n \alpha = 0$  より、十分大きい  $n$  で  $\varpi^n \alpha \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  なので、 $\alpha \in 1/\varpi^n \mathcal{A}_{\leq 1}$  となる。よって、任意の正整数  $n$  で  $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap 1/\varpi^n \mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}_{\leq 1}$  を示せばよい。まず明らかに  $\mathcal{A}_{\leq 1} \subset \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap 1/\varpi^n \mathcal{A}_{\leq 1}$  となっている。 $n = 1$  のとき、 $\alpha/\varpi \in \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap 1/\varpi \mathcal{A}_{\leq 1}$  を任意にとると  $\alpha \in \varpi \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \mathcal{A}_{\leq 1}$  から  $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi \rightarrow \mathcal{A}'_{\leq 1}/\varpi$  の単射性より  $\alpha \in \varpi \mathcal{A}_{\leq 1}$  となるので  $\alpha/\varpi \in \mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi$  より  $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap 1/\varpi \mathcal{A}_{\leq 1}$  となる。帰納法を用いる。任意の  $\alpha/\varpi^{n+1} \in \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap 1/\varpi^{n+1} \mathcal{A}_{\leq 1}$  を取る。 $\varpi$  を掛けると、帰納法の仮定から  $\alpha/\varpi^n \in \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap 1/\varpi^n \mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}_{\leq 1}$  なので、ある  $\beta \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  が存在して  $\alpha/\varpi^{n+1} = \beta/\varpi$  となる。ゆえに  $\alpha/\varpi^{n+1} = \beta/\varpi \in \mathcal{A}'_{\leq 1} \cap 1/\varpi \mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}_{\leq 1}$  なので任意の正整数  $n$  で  $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap 1/\varpi^n \mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}_{\leq 1}$  が成り立つから、上で述べたとおり、 $\mathcal{A}'_{\leq 1} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}_{\leq 1}$  となるので、 $\varphi$  は isometric になる。

(d)  $\mathcal{A}'/\mathcal{A}$  が  $\varpi$ -torsion free であることから  $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}[1/\varpi] = \mathcal{A}$  となる。よって (c) の  $\varphi$  を包含写像として取れば  $\mathcal{A}[1/\varpi] \rightarrow \mathcal{A}'[1/\varpi]$  は isometric になるので  $A'|-|$  の  $\mathcal{A}$  への制限が  $A|-|$  になる。

$A/J|-|$  は  $(\mathcal{A}/J)[1/\varpi] = \mathcal{A}/(J[1/\varpi])$  上の半ノルムである。 $a \in \mathcal{A}$  に対して  $\bar{a}$  を  $\mathcal{A}/(J[1/\varpi])$  への像とする。 $\mathcal{A}/J$  が  $\varpi$ -torsion free であることから  $\mathcal{A} \cap J[1/\varpi] = J$  となる。とくに  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}[1/\varpi] \rightarrow (\mathcal{A}[1/\varpi])/(J[1/\varpi]) = \mathcal{A}/J[1/\varpi]$  によって  $\mathcal{A}$  と  $\mathcal{A}/J$  は同型になっている。すると次の等式

$$\sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} \bar{a} \in \mathcal{A}/J\} = \sup_{i \in J[1/\varpi]} \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} a + i \in \mathcal{A}\} \quad (2.28)$$

が成り立つ。実際、 $s \in \Gamma$  で  $\varpi_{-s} \bar{a} \in \mathcal{A}/J \subset \mathcal{A}/J[1/\varpi]$  なら、ある  $\alpha \in \mathcal{A}$  が存在して  $\alpha$  は  $\varpi_{-s} \bar{a} \in \mathcal{A}/J[1/\varpi]$  に移るので、 $\varpi_{-s} a - \alpha \in J[1/\varpi]$  ゆえ、ある  $i \in J[1/\varpi]$  で  $\varpi_{-s} a - i \in \mathcal{A}$  となるので  $\geq$  は成り立つ。逆に  $\varpi_{-s} a + i \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}[1/\varpi]$  のとき、 $\mathcal{A}/J[1/\varpi]$  に移すと  $\varpi_{-s} \bar{a} \in \mathcal{A}/J$  より  $\leq$  も成り立つので  $\geq$  は成り立つ。 $i \in J[1/\varpi]$  に対して  $i = \varpi_{-s}(i/\varpi_{-s})$  と  $i/\varpi_{-s} \in J[1/\varpi]$  に注意すると、 $A/J|\bar{a}| = \sup_{i \in J[1/\varpi]} A|a + i| = \sup_{a' \mapsto \bar{a}} A|a'|$  より、商半ノルムになることがわかる。

$\mathcal{A}$  のイデアル  $\mathcal{I}$  について、もし  $\alpha \in \mathcal{A}$  が  $\varpi \alpha \in \mathcal{I}$  だったとすると、 $\mathcal{I}$  は  $\mathcal{K}$  加群でもあるので  $\alpha \in \mathcal{I}$  から  $\mathcal{A}/\mathcal{I}$  は  $\varpi$ -torsion free である。さらに  $\mathcal{A}/\mathcal{I} = (\mathcal{A}_{\leq 1}/\mathcal{I}_{\leq 1})[1/\varpi]$  であるので、(b) から  $(\mathcal{A}/\mathcal{I})_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1}/\mathcal{I}_{\leq 1})^*$  となる。

(e) ?

(3) まず  $\mathcal{A}^\circ$  の開  $\mathcal{K}^\circ$  部分代数  $\mathcal{B}$  を取ると、開であることから  $\mathcal{A}^{\circ\circ}$  を必ず含む。逆に  $\mathcal{A}^{\circ\circ}$  を含むならばこ



れは開集合なので開  $K^\circ$  部分代数になる。よって  $\mathcal{A}^\circ$  の開  $K^\circ$  部分代数と  $\mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$  の  $k$  部分代数が一对一に対応している。[completely] integrally closed 同士に対応していることを示す。次のことから互に対応していることがわかる。

**主張.**  $S$  を環とし、そのイデアル  $I$  をとる。  $R$  が  $I$  を含む  $R$  の部分環とする。  $s \in S$  と  $\bar{s} \in S/I$  を  $s$  の像とする。このとき  $s$  が  $R$  上 (completely) integral であることと  $\bar{s}$  が  $R/I$  で (completely) integral であることは同値。

この主張は、 $I$  による剰余で  $S$  の中で  $I$  を含む有限生成  $R$  部分加群と  $S/I$  の中の有限生成  $R/I$  部分加群が一对一に対応していることと、section 2.3.1 の定義から従う。

完備化については  $\mathcal{A}^{\circ\circ}$  による剰余の対応を考えると、[Mor] Prop.V.1.2.5 と同様に示される。

(4)  $A_{\mathcal{A}}^\dagger \subset A_{\mathcal{A}}^+ \subset A_{\mathcal{A}}^*$  は section 2.3.1 の通り、一般に成り立っている。  $a \in A_{\mathcal{A}}^*$  は、ある有限生成  $A$  加群  $B$  で  $A[a] \subset B \subset \mathcal{A}$  となる。ここで  $B$  は  $A \subset A^* \subset \mathcal{A}_{\leq 1}$  と合わせて有界であるので、  $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subset B$  も有界だから  $a \in \mathcal{A}^\circ$  であるので  $A_{\mathcal{A}}^* \subset \mathcal{A}^\circ$  となる。  $a \in (A_*)_{\mathcal{A}}^*$  についても同じことが言えるから  $A_{\mathcal{A}}^* \subset (A_*)_{\mathcal{A}}^* \subset \mathcal{A}^\circ$  となる。逆に  $a \in \mathcal{A}^\circ$  を取ると、ある  $N \in \mathbb{Z}^+$  が存在して、任意の正整数  $n$  で  $|a^n| \leq |\varpi|^N$  となる。よって、  $\varpi_{-N} = \varpi^{-N}$  から、  $\varpi^{-N} a^n \in A$  ゆえ  $a^n \in \varpi^N A$  となる。したがって  $A[a] \subset \varpi^N A \subset \mathcal{A}$  から、  $a \in A_{\mathcal{A}}^*$  なので  $A_{\mathcal{A}}^* = (A_*)_{\mathcal{A}}^* = \mathcal{A}^\circ$  となることが示された。

$(A_{\mathcal{A}}^\dagger)_* = (\mathcal{A}^\circ)_*$  を示す。  $A_{\mathcal{A}}^\dagger[1/\varpi] = \mathcal{A}$  となっているので、  $A_{\mathcal{A}}^\dagger$  から得られる  $\mathcal{A}$  上の半ノルム  $A_{\mathcal{A}}^\dagger|\cdot|$  を取る。これを  $|\cdot|^\dagger$  と書くこととする。  $a \in \mathcal{A}$  と  $s \in \Gamma$  について、(2.16) から、

$$\varpi_{-s} a \in A_{\mathcal{A}}^\dagger \iff \exists n \in \mathbb{Z}^+, (\varpi_{-s} a)^{p^n} = \varpi_{-p^n s} a^{p^n} \in A \quad (2.29)$$

なので  $|a|^\dagger = |\varpi|^{r^\dagger}$  は  $r^\dagger := \sup\{s \in \Gamma \mid \varpi_{-s} a \in A_{\mathcal{A}}^\dagger\} = \sup\{s \in \Gamma \mid \exists n \in \mathbb{Z}^+, \varpi_{-p^n s} a^{p^n} \in A\}$  より、

$$|a|^\dagger = \inf\{|\varpi|^s \mid s \in \Gamma, n \in \mathbb{Z}^+, \varpi_{-p^n s} a^{p^n} \in A\} = \inf_{n \in \mathbb{Z}^+} |a^{p^n}|^{1/p^n} \quad (2.30)$$

となり、(Fukete の補題から) これは  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a^{p^n}|$  と一致するので  $|a|^\dagger = |a|_{sp}$  となる。

$|\cdot|^\dagger = A_{\mathcal{A}}^\dagger|\cdot|$  であることから、(b) より、  $(A_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$  と  $\mathcal{A}$  におけるスペクトラル半ノルム  $|\cdot|^\dagger$  の単位円板は一致する。とくに  $|\cdot|^\dagger$  は  $A|\cdot|$  から誘導されるスペクトラル半ノルム  $|\cdot|_{sp}$  と一致しているので、  $(A_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$  はそのスペクトラル半ノルム  $|\cdot|_{sp}$  による単位円板と一致する。

$a \in \mathcal{A}^\circ$  は  $A|\cdot|$  による冪有界元であり、  $|a|_{sp} \leq |a|$  から、  $|a|_{sp}$  においても冪有界になる。よってとくに  $|a|_{sp} \leq 1$  なので  $a \in (A_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$  となるので、  $\mathcal{A}^\circ \subset (A_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$  である。すると、  $\alpha \in \mathcal{A}$  が  $\varpi_s \alpha \in \mathcal{A}^\circ \subset (A_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$  であることから、  $\mathcal{A}_*^\circ = (A_{\mathcal{A}}^\dagger)_*$  となることがわかる。

$A_* = \mathcal{A}_{\leq 1}$  より、  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  が Noether なら、  $(A_*)_{\mathcal{A}}^+ = (A_*)_{\mathcal{A}}^* = A_{\mathcal{A}}^* = A_{\mathcal{A}}^+$  なので  $\mathcal{A}$  における  $\mathcal{A}_{\leq 1}$  の integral closure は  $\mathcal{A}^\circ$  に等しい。

(5)  $A = \mathcal{A}_{\leq 1}$  として考えた  $A|\cdot|$  と元々の  $|\cdot|$  は (1) より一致しているので、今までの結果を用いることが出来る。まず (2.18) から  $\mathcal{A}_{\leq 1} \subset (\mathcal{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^\dagger \subset (\mathcal{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^+ \subset (\mathcal{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^* = \mathcal{A}^\circ$  となる。よって、まず (a)  $\Rightarrow$  (b)  $\Leftrightarrow$  (c)  $\Rightarrow$  (d)  $\Rightarrow$  (e) がわかる。(4) から  $(\mathcal{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^\dagger$  から得られるノルム  $|\cdot|^\dagger$  と  $|\cdot|_{sp}$  は一致する。?

(e)  $\Leftrightarrow$  (f) を示す。  $x \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  が  $x^p \in \varpi \mathcal{A}_{\leq 1}$  となったとき、  $|(x/\varpi_{1/p})^p| = |x^p \varpi^{-1}| \leq 1$  より  $(x/\varpi_{1/p})^p \in \mathcal{A}_{\leq 1} = (\mathcal{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^\dagger$  ゆえ、  $x/\varpi_{1/p} \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  なので Frobenius 射  $\mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi_{1/p} \rightarrow \mathcal{A}_{\leq 1}/\varpi$  は単射になる。?逆に、  $\alpha \in \mathcal{A}$  が  $\alpha^p \in \mathcal{A}_{\leq 1}$  となったとき、

(6) 一様ノルム  $K$  代数の位相に関する主張であるため、最初から  $\mathcal{A}$  がスペクトラルであるとしてよい。

(5) の (b) と (c) から  $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}^\circ = (\mathcal{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^*$  である。(1) から  $\mathcal{A}$  のノルム  $|\cdot|$  は  $\mathcal{A}_{\leq 1}|\cdot|$  に一致しているので、(2) の (b) より  $(\mathcal{A}^\circ)_* = (\mathcal{A}_{\leq 1})_* = \mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}^\circ = (\mathcal{A}_{\leq 1})_{\mathcal{A}}^*$  となることがわかった。

(a) から  $\widehat{\mathcal{A}}_{\leq 1} = \widehat{\mathcal{A}_{\leq 1}}$  であるので、これを適用すれば良い。

(7) まず (4) から  $(\mathcal{A}^\circ)_*$  がスペクトラル半ノルム  $|\cdot|_{sp}$  による単位円板になる。 $\mathcal{A}^u$  は  $\mathcal{A}$  のスペクトラル半ノルムによる完備化であり、スペクトラルだから  $(\mathcal{A}^u)_{\leq 1} = \mathcal{A}^{u^\circ}$  である。よって、単位円板が閉であることから、 $\mathcal{A}^{u^\circ}$  は  $(\mathcal{A}^\circ)_*$  の完備化に等しい。□

### 2.3.3 Remark

- (1) Frobenius 射  $\mathcal{A}^\circ/\varpi_{1/p} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{A}^\circ/\varpi$  は  $\mathcal{A}$  が一様でなかったとしても常に単射になる。
- (2) 命題 2.3.1(2.18) において  $A_{\mathcal{A}}^+ \subset A_{\mathcal{A}}^* = \mathcal{A}^\circ \subset \mathcal{A}_{\|\cdot\|_{sp} \leq 1}$  は真の包含になり得る。例を与える。 $A := \mathcal{K}^\circ[\varpi T, \dots, \varpi^{i+1}T^{p^i}, \dots] \subset \mathcal{K}^\circ[T]$  とする。このとき  $|\cdot| := A|\cdot|$  と表すことにする。すると  $|T^m| = |\varpi|^{-1 - \lfloor \log_p m \rfloor}$  かつ  $\mathcal{A} = A[1/\varpi] = \mathcal{K}[T]$  かつ  $\mathcal{A}^\circ = A_{\mathcal{A}}^* = \mathcal{K}^\circ + \mathcal{K}^\circ \circ T \mathcal{K}^\circ[T]$  かつ  $(\mathcal{A}_{\mathcal{A}}^\circ)^* = (A_{\mathcal{A}}^*)^* = \mathcal{K}^\circ[T]$  と  $(\mathcal{A}_{\mathcal{A}}^\circ)^+ = \mathcal{A}^\circ$  が成り立つ。これは completely integral closure である  $A_{\mathcal{A}}^*$  の completely integral closure がもとに戻らない例になっている。さらにスペクトラル半ノルムによる単位円板と  $\mathcal{A}^\circ$  が一致していない例になっている。

### 2.3.4

以下では  $|\mathcal{K}|$  が  $\mathbb{R}_+$  で稠密であるとする。

**系 2.3.2.** 関手  $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}^\circ$  は一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の圏 ( $\mathcal{K}$ -uBan) と  $\mathcal{K}^\circ$  代数  $B$  であって以下の条件を満たすものへの圏同値を与える。

- (1)  $B$  は  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat である。
- (2)  $B$  は  $\varpi$  進完備である。
- (3)  $B$  は  $B[1/\varpi]$  において  $[p\text{-root/integrally/completely integrally}]$  closed である。
- (4)  $B = \text{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^\circ, B)(= B_*)$  となる。

準逆関手は  $B \mapsto (B[1/\varpi], {}^B|\cdot|)$  によって与えられる。一様 Banach  $\mathcal{A}$  代数と  $\mathcal{A}^\circ$  代数で上の条件を満たすものとの間にも同じ圏同値が与えられる。

(4) のもとで (3) (の三つの条件) は  ${}^B|\cdot|$  がスペクトラルであることと同値である (命題 2.3.1(b) と (5) からわかる)。圏同値であるから  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^\circ[1/\varpi]$  上に  ${}^{\mathcal{B}^\circ}|\cdot|$  で定める位相とともとのノルム  $|\cdot|$  で定める位相が一致しているだけで、ノルムとして一致しているわけではないから  $\mathcal{B}$  がスペクトラルとは言っていない。あくまで一様性からノルム  $\mathcal{K}$  代数として同型になるだけ。

**証明.**  $\mathcal{B}^\circ$  が (1) から (4) を満たすことを示す。

(1) について。  $b \in \mathcal{B}^\circ$  が  $\varpi b = 0 \in \mathcal{B}^\circ$  のとき  $\varpi b = 0 \in \mathcal{B}$  であるから、 $\varpi^{-1}$  を掛けて  $b = 0$  より、 $\mathcal{B}^\circ$  は  $\varpi$ -torsion free なので良い。

(2) について。  $\mathcal{B}$  が一様 Banach より section 2.2.4 からスペクトラル半ノルムについても完備である。すると  $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}_{\|\cdot\|_{sp} \leq 1}$  だから  $\mathcal{B}^\circ$  も完備になる。 $\mathcal{B}^\circ$  の持つ位相は命題 2.3.1(1) をスペクトラル半ノルムに対して



適用すれば  $\varpi$  進位相であることがわかるので  $\mathcal{B}^\circ$  は  $\varpi$  進完備。

(3) について。 命題 2.3.1(5) を  $(\mathcal{B}, |\cdot|_{sp})$  に適用すれば  $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}_{||_{sp} \leq 1}$  よりよい。

(4) について。  $|\mathcal{K}|$  が  $\mathbb{R}_+$  で稠密であるから、命題 2.3.1 で取れる  $\Gamma$  は  $\mathbb{R}$  で稠密なので、命題 2.3.1(b) をスペクトラル半ノルムに適用すれば  $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}_{||_{sp} \leq 1} = \mathcal{B}_*^\circ = \text{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ}, \mathcal{B}^\circ)$  よりよい。  $\square$

**系 2.3.3.**  $\mathcal{B}$  を一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数とする。このとき自然に  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{B}^\circ$  と  $\mathcal{B}^\circ/\varpi$  と  $\mathcal{B}^\circ/\mathcal{B}^{\circ\circ}$  それぞれの冪等元の間に全単射がある。

系 2.3.2 から  $\mathcal{B}$  はスペクトラルとしてよい。 $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{B}^\circ$  の間に関しては  $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}_{\leq 1}$  より section 2.2.6 の後半からわかる。 $\mathcal{B}^\circ$  と  $\mathcal{B}^\circ/\varpi$  の間に関しては  $\mathcal{B}^\circ$  が  $\varpi$  進完備であることから従う。 $\mathcal{B}^\circ/\varpi$  と  $\mathcal{B}^\circ/\mathcal{B}^{\circ\circ}$  の間に関しては  $\mathcal{B}^\circ/\varpi \rightarrow \mathcal{B}^\circ/\mathcal{B}^{\circ\circ}$  の核が冪零イデアルになることから従う。

**補題 2.3.4.**  $\mathcal{A}$  を一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数とする。 $\mathfrak{m}$  を  $\mathcal{A}^\circ$  の冪等イデアルであって、 $\mathcal{K}^{\circ\circ}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$  となるものとする。 $\mathcal{A}^\circ$  代数の圏における自己関手を  $(\mathcal{A}^\circ, \mathfrak{m})$  を cadre としたときの局所化の almost element により与える。すなわち、 $\mathcal{A}^\circ$  代数  $B$  に対して

$$B \mapsto (B^a)_* = \text{Hom}_{(\mathcal{A}^\circ)^a}((\mathcal{A}^\circ)^a, B^a) = \text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B) \quad (2.31)$$

とする。この関手は系 2.3.2 の四条件を保つ。とくに almost element を取る関手  $(-)^a$  は系 2.3.2 の四条件を満たす  $\mathcal{A}^\circ$  代数のなす圏上の局所化関手  $(-)^a$  の右随伴になる。よって limit と可換になる。

$(\mathcal{A}^\circ, \mathfrak{m})$  が cadre であることを確認する。仮定から冪等イデアルになっている。さらに  $\tilde{\mathfrak{m}}$  が  $\mathcal{A}^\circ$  上 flat であることは、

最初の cadre として取れる  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  から  $(\mathcal{A}^\circ, \mathfrak{m})$  へと  $(\mathcal{A}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ}\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A}^{\circ\circ})$  <sup>\*34</sup> までの変換が得られる。<sup>\*35</sup> cadre の変換について section 1.5 と生成していることから  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  と  $(\mathcal{A}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ}\mathcal{A}^\circ)$  における "almost" は同じ意味を持つ。とくに上の三つすべてで同じ意味を持つ。

**証明.** (1) を保つこと。  $B$  が  $\varpi$ -torsion free のとき  $B_+$  も  $\varpi$ -torsion free になるので良い。

(2) を保つこと。 こちらはより注意深く扱う必要がある。というのも、関手  $B \mapsto (B^a)_*$  は limit と可換だが  $\varpi^n$  による剰余と可換とは限らないからである。任意の  $\mathcal{A}^\circ$  代数  $B$  について、ここで標準的な射  $u: \widehat{(B^a)_*} \rightarrow (\widehat{B^a})_*$  が  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)/\varpi^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B/\varpi^n)$  の limit を取ることで得られる。ここで  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B/\varpi^n)$  の核を計算する。 $\mathcal{A}^\circ$  加群の完全列

$$0 \longrightarrow \varpi^n B = \varpi^n \mathcal{A}^\circ \otimes_{\mathcal{A}^\circ} B \longrightarrow B \longrightarrow B/\varpi^n \quad (2.32)$$

に左完全関手  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, -)$  を作用させると、完全列

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, \varpi^n B) = \varpi^n \text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B/\varpi^n) \quad (2.33)$$

が得られるので  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)/\varpi^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B/\varpi^n)$  は単射。ゆえにその limit  $u$  も単射。limit と  $\text{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, -)$  の可換性から、可換図式

<sup>\*34</sup>  $|\mathcal{K}|$  が  $\mathbb{R}_+$  で稠密なので section 2.2.2 から確かに cadre の仮定 (とくに冪等性) を満たす。

<sup>\*35</sup>  $\mathfrak{m} \subset \mathcal{A}^\circ$  と  $\mathcal{K}^{\circ\circ}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$  から  $\mathfrak{m} = \mathcal{K}^{\circ\circ}\mathfrak{m} \subset \mathcal{K}^{\circ\circ}\mathcal{A}^\circ = \mathcal{A}^{\circ\circ}$  より  $(\mathcal{K}^{\circ\circ}, \mathcal{K}^\circ) \rightarrow (\mathfrak{m}, \mathcal{A}^\circ) \rightarrow (\mathcal{A}^{\circ\circ}, \mathcal{A}^\circ)$  という変換が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
(B^a)_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B) & \longrightarrow & \widehat{B^a}_* = \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)/\varpi^n \\
\downarrow \cong & & \downarrow u \\
(\widehat{B^a})_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, \varprojlim_n B/\varpi^n) & \xrightarrow{\cong} & \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B/\varpi^n)
\end{array}$$

より  $u$  は全射にもなるのでとくに  $\mathcal{A}^\circ$  代数の同型を与える。  $B$  が  $\varpi$  進完備であれば、同型  $\widehat{(B^a)}_* \cong (\widehat{B^a})_* = (B^a)_*$  より、  $(B^a)_*$  も  $\varpi$  進完備なので、この性質も保たれることがわかった。

(3) を保つこと。  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)[1/\varpi]$  が  $\varpi f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)$  もしくは  $f^p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)$  となったとする。このとき任意の  $\eta \in \tilde{\mathfrak{m}}$  に対して  $\varpi f(\eta) \in B$  もしくは  $f^p(\eta) \in B$  なので、  $B$  の仮定から  $f(\eta) \in B$  なので  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)$  より良い。

(4) を保つこと。  $B = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ}, B)$  であるとする。

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ}, (B^a)_*) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)) \quad (2.34)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ} \otimes_{\mathcal{K}^\circ} \mathcal{A}^\circ, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B)) \quad (2.35)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ} \otimes_{\mathcal{K}^\circ} \tilde{\mathfrak{m}}, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}^\circ}(\tilde{\mathfrak{m}}, B) \quad (2.36)$$

が成り立つ。ここで二つ目の等号は  $\mathcal{K}^{\circ\circ} \rightarrow \mathcal{A}^\circ$  への base change によるもの。三つ目は随伴性から。系 2.3.2(1) から  $\mathcal{A}^\circ$  は  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat であり、  $\tilde{\mathfrak{m}}$  も  $\mathcal{A}^\circ$  上 flat だから  $\tilde{\mathfrak{m}}$  は  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat になる。すると、  $\mathcal{K}^{\circ\circ}$  は  $\mathcal{K}^\circ$  のイデアルだから flat 性より  $\mathcal{K}^{\circ\circ} \otimes_{\mathcal{K}^\circ} \tilde{\mathfrak{m}} \cong \tilde{\mathfrak{m}}$  となるので四つ目の等号がわかる。  $\square$

### 2.3.5 Remark

- (1) 一方で、  $(-)^a$  の左随伴  $(-)_\parallel$  は系 2.3.2(2) から (4) を保たない。しかし、  $(-)^a$  の左随伴  $(-)_\parallel$  を  $\mathcal{A}^\circ$  代数  $B$  で (1) から (4) を満たすものからなる圏の上に定義することが出来る。これは次の操作によって得られる。

- (a)  $B_\parallel$  を  $\varpi^\infty$ -torsion で割る (これで (1) を満たす)。
- (b)  $\varpi$  進完備化を取る (これで (2) を満たす)。
- (c)  $1/\varpi$  による局所化の中での  $[p\text{-root/integral}]$  closure に置き換える (これで (3) を満たす)。
- (d)  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  を cadre としたときの almost element をとる (これで (4) を満たす)。

とくにこれらの操作は互いの性質を保つ (命題 2.3.1 より互いに性質を消すことはなく、最後の二つは  $\varpi$  による局所化における冪有界元全体の集合への変換になる)。

- (2) 同様に、  $\mathcal{A}^\circ$  代数で (1) から (4) を満たすものからなる圏の余積は  $\otimes$  ではない ((2)、(3) と (4) を保たない)。しかし、  $(B \otimes_A C)[1/\varpi]$  における  $(B \otimes_A C)/(\varpi^\infty\text{-torsion})$  の completely integral closure の完備化  $B \widehat{\otimes}_A^u C$  で与ええられる bifunctor によって与えられる。

### 2.3.6

位相の文脈に関する疑問に対して almost mathematics を拡張する。位相加群と連続準同型からなる圏はアーベル圏になっていない。しかしながら、一様 Banach 代数に対して、今までの結果から類似物を構成することが出来る。一様 Banach 代数  $\mathcal{A}$  を一つ固定し、一様 Banach  $\mathcal{A}^\circ$  代数の圏  $(\mathcal{A}^\circ\text{-uBan})$  を、対象が (通常の) 一様 Banach  $\mathcal{A}$  代数  $\mathcal{B}^\circ$  であって、射  $\mathcal{B}^\circ \rightarrow \mathcal{C}^\circ$  を  $((\mathcal{A}^\circ)^a$  代数としての射)  $(\mathcal{B}^\circ)^a \rightarrow (\mathcal{C}^\circ)^a$  によって与える (cadre として補題 2.3.4 の  $(\mathcal{A}^\circ, \mathfrak{m})$  を取っている)。もし cadre が  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  で取れたとすると、この圏は通常の一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の圏と一致する。

対象に関して恒等的な関手  $(-)^{\hat{a}}: \mathcal{A}\text{-uBan} \rightarrow \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-uBan}$  が得られる。<sup>\*36</sup>補題 2.3.4 から、 $(-)^{\hat{a}}$  は右随伴  $(-)_*$  を持つ。これは  $\mathcal{B}^{\hat{a}}$  に対して

$$(\mathcal{B}^{\hat{a}})_* := ((\mathcal{B}^{\circ})^a)_*[1/\varpi] \quad (2.37)$$

によって与えられる (系 2.3.2 と補題 2.3.4 から確かに  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-uBan}$  へ移る)。実際、とくに単位随伴は

$$\mathcal{B} \longrightarrow (\mathcal{B}^{\hat{a}})_* = ((\mathcal{B}^{\circ})^a)_*[1/\varpi] = \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(\tilde{\mathbf{m}}, \mathcal{B}^{\circ})[1/\varpi] = \text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{cont}}(\tilde{\mathbf{m}} \otimes_{\mathcal{A}^{\circ}} \mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad (2.38)$$

$$\beta = b/\varpi^n \longmapsto (x \mapsto bx)/\varpi^n \quad (2.39)$$

によって与えられる (最後の項は  $\tilde{\mathbf{m}} \otimes_{\mathcal{A}^{\circ}} \mathcal{A}$  に  $\tilde{\mathbf{m}} \otimes_{\mathcal{A}^{\circ}} \mathcal{A}^{\circ} = \tilde{\mathbf{m}}$  の  $\varpi$  進位相から得られる位相を入れ、 $\mathcal{A}$  上の位相加群として見たときの連続準同型全体の集合に section 1.4 で定義した積と同様にして演算を入れている)。実際、随伴になっていることは、 $\mathcal{B} \in \mathcal{A}\text{-uBan}$  と  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\hat{a}} \in \mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-uBan}$  に対して、

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}\text{-uBan}}(\mathcal{B}, (\mathcal{C}^{\hat{a}})_*) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{cont}}(\mathcal{B}, (\mathcal{C}^{\hat{a}})_*[1/\varpi]) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{cont}}(\mathcal{B}, \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}^{\text{cont}}(\tilde{\mathbf{m}} \otimes_{\mathcal{A}^{\circ}} \mathcal{A}, \mathcal{C})) \quad (2.40)$$

$$= \text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{cont}}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\tilde{\mathbf{m}} \otimes_{\mathcal{A}^{\circ}} \mathcal{A}), \mathcal{C}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\text{cont}}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}^{\circ}} \tilde{\mathbf{m}}, \mathcal{C}) \quad (2.41)$$

$$= \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(\mathcal{B}^{\circ} \otimes_{\mathcal{A}^{\circ}} \tilde{\mathbf{m}}, \mathcal{C}^{\circ}) = \text{Hom}_{(\mathcal{A}^{\circ})^a}((\mathcal{B}^{\circ})^a, (\mathcal{C}^{\circ})^a) \quad (2.42)$$

$$= \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\hat{a}}}(\mathcal{B}^{\hat{a}}, \mathcal{C}^{\hat{a}}) \quad (2.43)$$

よりわかる (五つ目の等式は位相の入れ方から従う)。もし  $\mathbf{m}$  が  $\mathcal{B}$  に忠実に作用するならばこの単位随伴の射は単射になる。また、 $((\mathcal{B}^{\hat{a}})_*)^{\circ} = \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(\tilde{\mathbf{m}}, \mathcal{B}^{\circ})$  を満たす。

一方、 $(-)^{\hat{a}}$  は  $(-)_{\hat{\Pi}}$  を左随伴として持つ。

後に与える例 (section 2.5.4) から、almost element の包含写像

$$(\mathcal{B}^{\hat{a}})_* \subset (\mathcal{B}^a)_* = \text{Hom}_{\mathcal{A}^{\circ}}(\tilde{\mathbf{m}}, \mathcal{B}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\tilde{\mathbf{m}} \otimes_{\mathcal{A}^{\circ}} \mathcal{A}, \mathcal{B}) \quad (2.44)$$

は一般に等号にはならない。しかしながら次の結果がある。

**補題 2.3.5.**  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  を一様 Banach  $\mathcal{A}$  代数の射とする。 $\varphi^{\circ}: \mathcal{B}^{\circ} \rightarrow \mathcal{C}^{\circ}$  をその制限した射とする。このとき  $(\mathcal{A}^{\circ}, \mathbf{m})$  を cadre として取ったとき、 $\varphi$  が almost isomorphism であることと  $\varphi^{\circ}$  が almost isomorphism であること (すなわち  $\varphi^{\hat{a}} = (\varphi^{\circ})^a$  が  $\mathcal{A}^{\hat{a}}\text{-uBan}$  で同型射になること) は同値。

**証明.**  $\varphi^{\circ}$  が almost isomorphism のとき、 $\mathbf{m} \text{Ker}(\varphi^{\circ}) = 0$  かつ  $\mathbf{m} \text{Coker}(\varphi^{\circ}) = 0$  となる。ここで  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{\circ}[1/\varpi]$  と  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\circ}[1/\varpi]$  より  $\varphi = \varphi^{\circ}[1/\varpi]$  となっていることに注意すると、計算によって  $\varphi$  も almost isomorphism であることがわかる。また、 $\varphi$  が almost injective のとき、 $\text{Ker}(\varphi^{\circ}) \subset \text{Ker}(\varphi)$  から、 $\mathbf{m} \text{Ker}(\varphi^{\circ}) \subset \mathbf{m} \text{Ker}(\varphi) = 0$  より  $\varphi^{\circ}$  も almost injective になる。

$\varphi$  が almost isomorphism のとき  $\varphi^{\circ}$  が almost surjective になることを示す。まず section 2.3.5 から  $\varphi_{\hat{\Pi}}^a: (\mathcal{B}^a)_{\hat{\Pi}} \rightarrow (\mathcal{C}^a)_{\hat{\Pi}}$  が得られる。構成から局所化との可換なので  $(\varphi^a)_{\hat{\Pi}} = ((\varphi^{\circ})^a)_{\hat{\Pi}}[1/\varpi]$  となる。 $\varphi$  は almost isomorphism より  $\varphi^a$  は同型射だから、 $\varphi_{\hat{\Pi}}^a$  も同型射になる。よって次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc} ((\mathcal{B}^{\circ})^a)_{\hat{\Pi}} & \longrightarrow & ((\mathcal{B}^{\circ})^a)_{\hat{\Pi}} & \longrightarrow & \mathcal{B}^{\circ} \\ \downarrow ((\varphi^{\circ})^a)_{\hat{\Pi}} & & \downarrow ((\varphi^{\circ})^a)_{\hat{\Pi}} & & \downarrow \varphi^{\circ} \\ ((\mathcal{C}^{\circ})^a)_{\hat{\Pi}} & \longrightarrow & ((\mathcal{C}^{\circ})^a)_{\hat{\Pi}} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{\circ} \end{array}$$

<sup>\*36</sup> 射に関しては  $\mathcal{A}\text{-uBan}$  の射の連続性から  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  を制限して  $\mathcal{B}^{\circ} \rightarrow \mathcal{C}^{\circ}$  が得られるのでこれを  $(-)^a$  で移せば良い。

について、真ん中の垂直方向の射は同型射 ( $(\varphi^a)_{\hat{\Pi}}$  が同型射だから) で、下の水平方向の射の合成は almost isomorphism になる ([GR] Rem.2.2.28)。よって一番右の  $\varphi^\circ$  も almost surjective になるので良い。  $\square$

## 2.4 Extensions entieres d'algebres normees uniformes

### 2.4.1

$\mathcal{A}$  を一様ノルム  $K$  代数とし、 $\mathcal{B}$  を  $\mathcal{A}$  の拡大であって、そのノルムは  $\mathcal{A}$  のノルムの延長として持っているとする。まず  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^\circ = \mathcal{A}^\circ$  が成り立つ。

**補題 2.4.1.** (1)  $\mathcal{B}$  における  $\mathcal{A}^\circ$  の completely integral closure は  $\mathcal{B}^\circ$  に含まれる。とくに  $\mathcal{A}^\circ$  は  $\mathcal{A}$  において completely integrally closed である。

有限群  $G$  が  $\mathcal{B}$  に作用していて、 $\mathcal{B}^G = \mathcal{A}$  となっているとする。

- (2)  $G$  の作用がノルムを保つとする (例えばとくにスペクトラルかつ完備なときにこれを満たす)。このとき  $(\mathcal{B}^\circ)^G = \mathcal{A}^\circ$  であり、 $\mathcal{B}$  は  $\mathcal{A}$  上 integral、 $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{A}^\circ$  上 integral、 $\mathcal{B}$  の中での  $\mathcal{A}^\circ$  の integral closure は  $\mathcal{B}^\circ$  に一致する。
- (3)  $\mathcal{B}$  が一様であるとする。このとき  $\mathcal{B}$  の  $|\cdot|_{sp}$  は  $\mathcal{B}$  上の唯一つの  $G$ -不変なスペクトラルノルムであって  $\mathcal{A}$  上のスペクトラル半ノルムを拡張しているものである。
- (4) さらに  $\mathcal{B}$  がスペクトラルであるとする。 $g$  を  $\mathcal{A}$  の元とする。もし  $\mathcal{A}$  上で  $g$  を掛ける写像が単射/isometric であるならば、 $\mathcal{B}$  上で  $g$  を掛ける写像も単射/isometric になる。

**証明.** (1)  $b \in \mathcal{B}$  について  $\mathcal{B}$  中の有限生成  $\mathcal{A}^\circ$  加群であって  $b$  の任意の冪乗を含むとする。 $\mathcal{A}$  は一様だから  $\mathcal{A}^\circ$  は有界であり、包含写像  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  は連続だから、その有限生成  $\mathcal{A}^\circ$  加群は有界。よって  $b \in \mathcal{B}^\circ$  となる。

(2)  $G$  がノルムを保つことから、 $G$  の作用は  $\mathcal{B}^\circ$  を保つ。すると仮定から  $(\mathcal{B}^\circ)^G = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^\circ = \mathcal{A}$  となる。さらに有限群の作用のある任意の環はその不変部分環上 integral になっている ([AM] ex.5.12)。とくに  $\mathcal{B}^G = \mathcal{A}$  から  $\mathcal{B}$  は  $\mathcal{A}$  上 integral になる。 $(\mathcal{B}^\circ)^G = \mathcal{A}^\circ$  から  $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{A}^\circ$  上 integral になる。また、(1) から  $\mathcal{B}$  における  $\mathcal{A}^\circ$  の integral closure は  $\mathcal{B}^\circ$  に含まれていて、今示したことから  $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{A}^\circ$  上 integral なので integral closure である  $(\mathcal{A}^\circ)_\mathcal{B}^+$  は  $\mathcal{B}^\circ$  に一致する。

ここで、 $\mathcal{B}$  のノルム  $|\cdot|$  がスペクトラルかつ完備であるとき、section 2.2.4 からそのようなノルムの唯一性より  $|\cdot|$  は  $G$  の作用で不変である。

(3)  $\mathcal{B}$  が一様なので section 2.2.2 から  $|\cdot|_{sp}$  は  $\mathcal{B}$  上スペクトラルなノルムであり  $\mathcal{A}$  上のスペクトラル半ノルムを拡張したものになる。さらに  $G$  の作用で不変である。 $|\cdot|$  を  $\mathcal{B}$  上のスペクトラルノルムであって、 $G$  の作用で不変であって  $\mathcal{A}$  のスペクトラル半ノルムを拡張したものであるとする。 $b \in \mathcal{B}$  について、 $\mathcal{B}^G = \mathcal{A}$  より、多項式

$$\prod_{\gamma \in G} (T - \gamma(b)) = T^d + \sum_{i=1}^d a_i T^{d-i} \in \mathcal{A}[T] \quad (2.45)$$

が取れる。[BGR] 3.1.2. Prop.1 より

$$\max_{\gamma \in G} |\gamma(b)| = \max_{1 \leq i \leq d} |a_i|^{1/i} \quad (2.46)$$

となる。 $\max_{\gamma \in G} |\gamma(b)|' = \max_{\gamma \in G} |\gamma(b)|_{sp}$  となり、 $G$  の作用による不変性から  $|\cdot|' = |\cdot|_{sp}$  となる。

(4) 同様の計算によってわかる。そもそも  $b \in \mathcal{B}$  と  $a_i \in \mathcal{A}$  を上の (3) のように取ると、任意の  $a \in \mathcal{A}$  について、

$$\prod_{\gamma \in G} (T - \gamma(ab)) = T^d + \sum_{i=1}^d (a^i a_i) T^{d-i} \quad (2.47)$$

となる。すると (3) と  $\mathcal{B}$  がスペクトラルであることから  $|ab| = |ab|_{sp} = \max_{1 \leq i \leq d} |a^i a_i|^{1/i}$  となる。

これを用いて示す。 $\mathcal{A}$  上で  $g$  を掛ける写像が単射であるとする。 $g \in \mathcal{A}$  であり、もし  $b \in \mathcal{B}$  が  $gb = 0$  となったとすると、 $0 = |gb| = \max_{1 \leq i \leq d} |g^i a_i|^{1/i}$  ゆえ、任意の  $1 \leq i \leq d$  で  $|g^i a_i| = 0$  から  $g^i a_i = 0 \in \mathcal{A}$  となる。仮定から  $a_i = 0$  である。よって、(2.45) から  $T^d = \prod_{\gamma \in G} (T - \gamma(b))$  より、 $b^d = 0 \in \mathcal{B}$  となるが、 $\mathcal{B}$  はとくに一樣なので section 2.2.2 から被約なので  $b = 0$  となる。よって  $\mathcal{B}$  上でも  $b$  を掛ける写像は単射になる。

$\mathcal{A}$  上で  $g$  を掛ける写像が isometric になったとすると、上で示したことから

$$|gb| = \max_{1 \leq i \leq d} |g^i a_i|^{1/i} = \max_{1 \leq i \leq d} |a_i|^{1/i} = |b| \quad (2.48)$$

より isometric になる。  $\square$

(2) の  $G$  の作用によるノルムの不変性が無いと、 $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{A}^\circ$  上 integral にならないように取れることがある。また、(2) の仮定のもとであっても必ずしも  $\mathcal{B}$  が  $\mathcal{A}$  上有限ではなく、もし有限であったとしても、 $\mathcal{B}^\circ$  が  $\mathcal{A}^\circ$  上有限ではない可能性がある。その例は次のとおりである。

#### 2.4.2 ?Examples prophylactiques

- (1)  $V$  を完備離散付値環で標数が 2 でないものとし、その一意化係数を  $\varpi$  とする。 $A := V[[T]]$  とし、 $A$  の商体  $Q(A)$  の、ある有限次 Galois 拡大で Galois 群を  $G$  とする体の中での  $A$  の integral closure を  $B$  とおく。このとき  $B$  は  $A$  上有限になる。<sup>\*37</sup>  $\mathcal{A} := A[1/\varpi]$  とし、 $\mathcal{B} := B[1/\varpi]$  とおき、ノルムを命題 2.3.1(2) で定義した  $^A|\cdot|$  と  $^B|\cdot|$  とする。

$\mathcal{A}$  は  $\mathcal{K} := Q(V)$  代数であり、 $|\varpi|^\Gamma = |\mathcal{K}|$  となる  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  は  $\varpi$  が  $V$  の一意化係数なので  $\Gamma = \mathbb{Z}$  となる。よって命題 2.3.1(b) から  $\mathcal{A}_{\leq 1} = A$  かつ  $\mathcal{B}_{\leq 1} = B$  成り立つ。 $A = V[[T]]$  は  $V[T]$  の  $\varpi$  進位相による完備化なので  $\varpi$  進完備であるから、infinite  $\varpi$ -divisible を持たないので命題 2.3.1(a) から  $\mathcal{A}$  はノルム  $\mathcal{K}$  代数であり、 $\mathcal{A}_{\leq 1} = A$  と、その  $\varpi$  進完備性から (1) と合わせて  $^A|\cdot|$  は  $A$  上の  $\varpi$  進位相と一致し、 $\mathcal{A}$  は Banach  $\mathcal{K}$  代数になる。さらに  $^A|\cdot|$  が  $\mathcal{A}$  上で乗法的ノルムになることもわかる。<sup>\*38</sup> ゆえに  $\mathcal{A}$  はとくにスペクトラルであることから命題 2.3.1(5) と合わせて  $A = \mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}^\circ$  より  $\mathcal{A}$  は一樣 Banach  $\mathcal{K}$  代数となる。補題 2.4.1(2) のように  $\mathcal{A}$  は  $G$  が isometric に作用する。

さらに  $\mathcal{B}$  も一樣 Banach  $\mathcal{K}$  代数となる。まず  $B$  が  $A$  上 integral より  $\varpi B$  も  $B$  の素イデアルになる。例えば  $B = A[U]/(U^2 - TU + \varpi)$  とできる。このとき  $B = \mathcal{A}[\sqrt{T^2 - 4\varpi}]$  となる。多項式  $U^2 - TU + \varpi$

<sup>\*37</sup> [AM] Prop.5.17 と有限次 Galois 拡大は有限次分離的代数拡大なので、 $B$  は  $A$  上の有限生成加群の部分加群になる。 $A$  はその構成から Noether なので  $B$  も  $A$  上有限生成加群になる。

<sup>\*38</sup> 任意の  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  はある整数  $n, m$  と  $a, b \in A \setminus \varpi A$  によって  $\alpha = a\varpi^n$  と  $\beta = b\varpi^m$  と書ける。 $\Gamma = \mathbb{Z}$  に注意すると、 $\varpi_{-N}\alpha\beta \in A$  なら、 $ab\varpi^{-N+n+m} \in A$  より、 $ab \in \varpi^{N-n-m}A$  となる。 $\varpi A = \varpi V[[T]]$  が  $A/\varpi A = V/\varpi V[T]$  で  $A$  の素イデアルなることに注意すると、 $ab \notin \varpi A$  であるから  $N - n - m \leq 0$  ゆえ、 $N \leq n + m$  となるので、定義から  $^A|ab| = ^A|a|^A|b|$  になるので、乗法的ノルムになる。

は  $Q(A)$  で既約になが、 $\widehat{Q(A)}$  で分解し、同じく  $\widehat{A[1/T]}$  で分解する。根は

$$u := \frac{\varpi}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1))2^n \varpi^{n+1}}{(n+1)!T^{2n+1}} \quad (2.49)$$

と  $T - u$  を持つ。すると  $B$  は  $U$  と  $T - U$  をそれぞれ単元にするような  $A$  から誘導される二つの乗法的ノルムを持つ。代数  $B' := B[1/\varpi]$  に後者のノルム ( $G$ -不変でもなく完備でもない) を入れると  $U/\varpi = 1/(T - U)$  を持つが、これはノルムが 1 だが  $A$  上 integral ではない。 $(B')^\circ$  の位相は  $\varpi$  進位であるが、 $B$  上は  $\varpi$  進位相ではなく  $U$  進位相を持つ (より弱い)。

- (2)  $\mathcal{K}$  が完全体かつ標数 2 であるとする。 $\mathcal{A} := \mathcal{K}^\circ[[T^{1/2^\infty}]] \otimes_{\mathcal{K}^\circ} \mathcal{K}$  とし、 $\mathcal{B}$  を quadratic extension である  $\mathcal{A}[U](U^2 - TU - 1)$  における 2-root closure とする。 $\mathcal{A}$  上 integral であることから、 $(\mathcal{A} + \mathcal{A}U)/T$  に含まれる。計算すると

$$U^{1/2} = T^{1/2}(U - 1), \dots, U^{1/2^i} = T^{-1/2-1/4-\dots-1/2^i}(U - \alpha_i), \alpha_i \in \mathcal{A} \quad (2.50)$$

となり、 $\mathcal{B}/\mathcal{A} = \bigcup_{i \geq 1} T^{-1/2-1/4-\dots-1/2^i} U \mathcal{A} = U/TT^{1/2^\infty} \mathcal{A}$  であり、これは  $\mathcal{A}$  上有限にならない。 $\mathcal{B}$  についても同じく有限にならない。一方で  $\mathcal{A}$  線型な  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  のレトラクションとして  $U^{1/2^i}$  を  $1 + a_i \in \mathcal{A}$  で  $a_i = T^{12^i}(1 + a_{i+1})$  に移すものが取れる。ここで  $a_0 = T^{1/2}(1 + a_1) = T^{1/2} + \dots + T^{1/2^{i-1}}(1 + a_i)$  を  $i \rightarrow \infty$  とすると、これは  $\mathcal{A}$  では収束しない。よってそのようなレトラクションは存在しない。

- (3) 同様に、 $\mathcal{B}$  が  $\mathcal{A}$  上有限であって、 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  が split するとすると、 $\mathcal{B}^\circ$  は必ずしも  $\mathcal{A}^\circ$  上有限ではない。さらに  $\mathcal{A}^\circ$  線型な  $\mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  は必ずしも split しない。 $\mathcal{A}$  を前述の  $\mathcal{K}$  として取る (標数 2 の完体)。 $\mathcal{B}$  を  $\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus \{0\}$  を取って、quadratic extensio である  $\mathcal{K}[U]/(U^2 - \varpi U - 1)$  とする。すると  $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{B}$  において  $\mathcal{K}^\circ$  の integral closure になり、 $\mathcal{K}^\circ[U]$  の 2-root closure とる。しかし  $\mathcal{K}^\circ$  加群  $\mathcal{B}^\circ/\mathcal{K}^\circ = \varpi^{1/2^\infty} \mathcal{K}^\circ U/\varpi$  は有限ではなく、 $\mathcal{K}^\circ$  線型なレトラクション  $\mathcal{K}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  は存在しない。同じような例がある ([BGR] 6.4.1)。

### 2.4.3

**補題 2.4.2.**  $\mathcal{A}$  を一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数とする。ノルムを忘れることで、忠実充満関手

$$\{\text{finite étale 一様 Banach } \mathcal{A} \text{ 代数}\} \longrightarrow \{\text{finite étale } \mathcal{A} \text{ 代数}\} \quad (2.51)$$

が得られる。

**証明.** 忠実性は明らか。充満性について finite étale  $\mathcal{A}$  代数  $\mathcal{B}$  の商  $\mathcal{B}'$  は直和因子であること ( $\text{Spec}(\mathcal{B}')$  は  $\text{Spec}(\mathcal{B})$  において開かつ閉である) を考えると、完備スペクトラルノルムの一意性から、同型射であって isometric の場合に帰着できる。□

### 2.4.4 Remark

上記は圏同値になる ([KL] prop. 2.8.16 (b))。 $\mathcal{B}$  は加群として finite projective な  $\mathcal{A}$  代数であり、これは標準的な完備ノルムの同値類を与えられる。技巧的な点はこれらが一様であることを示す点である。ただしこの事実は使わない。



## 2.5 Monomorphismes (et recadrage)

### 2.5.1

$\mathcal{K}$ -uBan の mono 射は  $\mathcal{K}$  代数の射であって連続かつ単射なものである。実際、単射  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  は明らかに mono 射になる。逆を考えると、 $\mathcal{A}$  は零でないとしてよく、そのとき  $\mathcal{K} \oplus \text{Ker } \varphi \subset \mathcal{A}$  は  $\mathcal{A}$  の Banach 部分代数になる。すると、 $\mathcal{K} \oplus \text{Ker } \varphi \rightarrow \mathcal{A}$  となる射を  $\text{Ker } \varphi$  をそのまま  $\mathcal{A}$  に移すものと、 $0 \in \mathcal{A}$  に移すものが取れる。この二つの射について mono 射の性質を用いれば良い。

このことは形式的に  $\mathcal{K}$ -uBan が自由対象 (free object) を持つことから従う。すなわち、 $S \mapsto \mathcal{K}\langle T_s \rangle_{s \in S}$  が忘却関手  $\mathcal{K}\text{-uBan} \rightarrow (\text{Sets})$  の左随伴になる。

### 2.5.2

$|\mathcal{K}|$  が  $\mathbb{R}_+$  で稠密であるとする。section 2.3.6 で考えた形の recadrage によって一様 Banach 代数の mono 射を生じさせることが出来る ((2.39))。このことについて詳しく考えるために、基本的な場合として、cadre として取った  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  から、cadre

$$(B := \mathcal{K}^\circ \langle T^{1/p^\infty} \rangle := \widehat{\mathcal{K}^\circ [T^{1/p^\infty}]}, \mathfrak{m} := T^{1/p^\infty} B^{\circ\circ} = (T)^{1/p^\infty} \mathcal{K}^{\circ\circ} B) \quad (2.52)$$

への変換を考える。ここで  $(\mathcal{K} \langle T^{1/p^\infty} \rangle)^\circ = \mathcal{K}^\circ \langle T^{1/p^\infty} \rangle$  であり、 $\mathfrak{m}$  は flat であり  $\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}}$  となる。

もし  $B$  が一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数であれば、射  $(\mathcal{K} \langle T^{1/p^\infty} \rangle)^\circ \rightarrow B$  を与えることはある  $g \in B^\circ$  であって適格的な  $p$  冪乗根の列  $(g^{1/p^m})$  を持つものを与えることに等しい ( $g^{1/p^m}$  が  $T^{1/p^m}$  の像になる)。

**補題 2.5.1.**  $B$  を一様 Banach  $\mathcal{K} \langle T^{1/p^\infty} \rangle$  代数として、 $T \in \mathcal{K} \langle T^{1/p^\infty} \rangle$  の像を  $g \in B$  とする。

- (1) 標準的な射  $((B^\circ)^a)_* \rightarrow B^\circ[1/g]$  が取れて、これは単射であり、像は  $\varpi$  進完備かつ、

$$g^{-1/p^\infty} B^\circ := \bigcap_{m \geq 1} g^{-1/p^m} B^\circ \subset B^\circ[1/g] \quad (2.53)$$

と等しい。

- (2) 射  $B^\circ \rightarrow ((B^\circ)^a)_*$  が単射であることと、 $g$  が  $B$  で非零因子であることは同値。

- (3) 射  $((B^\circ)^a)_*/\varpi \rightarrow ((B^\circ)^a/\varpi)_*$  は単射 ( $\varpi$  は  $\mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus \{0\}$  の任意の元)。

(almost element を取る  $(-)_*$  は cadre として  $(B, \mathfrak{m})$  という (2.52) で定義したものを取っている)

**証明.** (1)  $B$  が一様なので命題 2.3.1 の (6) と  $\mathcal{K}^\circ \rightarrow B$  による ?base change によって

$$B^\circ = \text{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ}, B^\circ) = \text{Hom}_B(\mathcal{K}^{\circ\circ} \widehat{\otimes}_{\mathcal{K}^\circ} B, B^\circ) = \text{Hom}_B(B^{\circ\circ}, B^\circ) \quad (2.54)$$

となる。 $\mathfrak{m} = T^{1/p^\infty} B^{\circ\circ} = \bigcup_{n \geq 1} T^{1/p^n} B^{\circ\circ} = \varinjlim_n T^{1/p^n} B^{\circ\circ}$  であり、 $T$  が  $B^{\circ\circ}$  で非零因子だから、垂直方向が同型射な可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} B^{\circ\circ} & \xrightarrow{\cdot T^{1-1/p}} & B^{\circ\circ} & \xrightarrow{\cdot T^{1/p-1/p^2}} & B^{\circ\circ} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \cdot T & & \downarrow \cdot T^{1/p} & & \downarrow \cdot T^{1/p^2} & & \\ TB^{\circ\circ} & \hookrightarrow & T^{1/p} B^{\circ\circ} & \hookrightarrow & T^{1/p^2} B^{\circ\circ} & \hookrightarrow & \dots \end{array}$$

を考えると、 $T^{1/p^m}$  を掛ける写像で  $\mathfrak{m} \cong \varinjlim_{T^{1/p^m-1/p^{m+1}}} B^{\circ\circ}$  となる。ゆえに、(2.54) と  $T^{1/p^m} \in B$  が  $g^{1/p^m} \in \mathcal{B}$  に対応していることから

$$((\mathcal{B}^\circ)^a)_* = \text{Hom}_B(\mathfrak{m}, \mathcal{B}^\circ) = \text{Hom}_B\left(\varinjlim_{T^{1/p^m-1/p^{m+1}}} B^{\circ\circ}, \mathcal{B}^\circ\right) \quad (2.55)$$

$$= \varprojlim_{T^{1/p^m-1/p^{m+1}}} \text{Hom}_B(B^{\circ\circ}, \mathcal{B}^\circ) = \varprojlim_{g^{1/p^m-1/p^{m+1}}} \mathcal{B}^\circ \quad (2.56)$$

となる。とくに  $\mathcal{B}$  が一様であることから  $\mathcal{B}^\circ$  は被約であるので、(2.56) から  $((\mathcal{B}^\circ)^a)_*$  は被約になる。ゆえに  $((\mathcal{B}^\circ)^a)_*$  上で  $g \in \mathcal{B}^\circ$  を掛ける写像は単射になる。実際、 $b = (b_m) \in ((\mathcal{B}^\circ)^a)_* = \varprojlim_{g^{1/p^m-1/p^{m+1}}} \mathcal{B}^\circ$  について、 $gb = g(b_m) = (gb_m) = 0$  とすると、 $0 = gb^{p^m} = (g^{1/p^m} b)^{p^m} \in ((\mathcal{B}^\circ)^a)_*$  から被約性より  $g^{1/p^m} b = 0$  となる。ゆえに任意の正整数  $m$  で  $g^{1/p^m} b_m = 0$  であるため、limit の定義から  $b_m = g^{1/p^m-1/p^{m+1}} b_{m+1} = g^{(p-1)/p^{m+1}} b_{m+1} = 0$  より  $b = 0$  となるから  $((\mathcal{B}^\circ)^a)_*$  上で  $g$  を掛ける写像は単射。したがって、 $\mathfrak{m} = T^{1/p^\infty} B^{\circ\circ}$  より、 $((\mathcal{B}^\circ)^a)_*$  は  $\mathfrak{m}$ -torsion free である。とくに第一成分の射影

$$((\mathcal{B}^\circ)^a)_* = \varprojlim_{g^{1/p^m-1/p^{m+1}}} \mathcal{B}^\circ \longrightarrow \mathcal{B}^\circ[1/g] \quad (2.57)$$

$$(b_m) \longmapsto b_1 \quad (2.58)$$

が取れる。もし  $b_1 = 0$  となったとすると、 $0 = b_1 = g^{1-1/p} b_2$  に  $g^{1/p}$  を掛けて  $gb_2 = 0$  となる。同様に  $g^{1-1/p^2} b_3 = g^{1-1/p}(g^{1/p-1/p^2} b_3) = g^{1-1/p} b_2 = b_1 = 0$  に  $g^{1/p^2}$  を掛けると  $gb_3 = 0$  となり、これを繰り返せば  $g(b_m) = 0$  となるが上で示したとおり  $(b_m) = 0$  となるから (2.58) は単射になる。

今度は次のような垂直方向の射が同型な可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{B}^\circ & \xleftarrow{\cdot g^{1-1/p}} & \mathcal{B}^\circ & \xleftarrow{\cdot g^{1/p-1/p^2}} & \mathcal{B}^\circ & \xleftarrow{\quad} & \cdots \\ \uparrow \cdot g & & \uparrow \cdot g^{1/p} & & \uparrow \cdot g^{1/p^2} & & \\ g^{-1} \mathcal{B}^\circ & \xleftarrow{\quad} & g^{-1/p} \mathcal{B}^\circ & \xleftarrow{\quad} & g^{-1/p^2} \mathcal{B}^\circ & \xleftarrow{\quad} & \cdots \end{array}$$

を考えると (2.56) から

$$((\mathcal{B}^\circ)^a)_* = \varprojlim_{g^{1/p^m-1/p^{m+1}}} \mathcal{B}^\circ \cong \varprojlim_{incl} g^{-1/p^m} \mathcal{B}^\circ = \bigcap_{m \geq 1} g^{-1/p^m} \mathcal{B}^\circ = g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ \quad (2.59)$$

より従う。また  $\mathcal{B}^\circ$  は  $\varpi$  進完備なので補題 2.3.4 から  $((\mathcal{B}^\circ)^a)_*$  は  $\varpi$  進完備である。

(2)  $\mathcal{B}^\circ \rightarrow ((\mathcal{B}^\circ)^a)_* \subset \mathcal{B}^\circ[1/g]$  を考えれば良い。

(3)  $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{B}$  が  $\mathcal{K}$  代数であって、 $\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus \{0\}$  から  $\varpi$ -torsion free であるから、完全列

$$0 \rightarrow \varprojlim_{g^{1/p^m-1/p^{m+1}}} \mathcal{B}^\circ \xrightarrow{\cdot \varpi} \varprojlim_{g^{1/p^m-1/p^{m+1}}} \mathcal{B}^\circ \rightarrow \varprojlim_{g^{1/p^m-1/p^{m+1}}} (\mathcal{B}^\circ / \varpi) \quad (2.60)$$

が取れることと (1) で示した同型からわかる。 □

$(g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)[1/\varpi]$  と、それを含む  $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}$  を比較して  $b \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}$  に対して次を定義する。

$$|b|_{g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}} := \sup_{m \geq 1} |g^{1/p^m} b|_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \quad (2.61)$$

ここで  $|\cdot|_{\mathcal{B}}$  は一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数である  $\mathcal{B}$  のノルムのことである。  $+\infty$  の値を取るということ以外は  $|\cdot|_{g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}}$  はノルムの性質を満たす。  $b \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  であって  $|b|_{g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}} < \infty$  を満たすものの全体の集合は



一様 Banach 代数をなす (もし  $\mathcal{B}$  がスペクトラルであればこれもスペクトラルになる)。誘導されたスペクトラルノルム代数は  $(\mathcal{B}^{\circ})_*$  ではない (section 2.3.6)。  $g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}$  の部分環  $(g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B})^{\circ}$  は、幕乗からなる集合が  $|\cdot|_{g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}}$  に関して有界であるような元からなるものであり、

$$(g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B})^{\circ} = g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ} \quad (2.62)$$

を満たす。実際、  $b \in (g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B})^{\circ} \Leftrightarrow \sup_{l \geq 1} |b^l|_{g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}} < \infty \Leftrightarrow \sup_{l, m \geq 1} |(g^{1/p^m} b)^l|_{\mathcal{B}} < \infty \Leftrightarrow b \in g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ}$  から一致する。

**補題 2.5.2.**  $g \in \mathcal{B}^{\circ}$  が  $\mathcal{B}$  で可逆であるとする。このとき  $\mathcal{B}^{\circ} = g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ}$  となる。

**証明.**  $\mathcal{B}$  の一様性から最初から  $\mathcal{B}$  がスペクトラルであるとして良い。  $\mathcal{B}^{\circ} = \mathcal{B}_{\leq 1}$  ゆえ、  $g \in \mathcal{B}^{\circ}$  より命題 2.3.1(5) から  $g^{1/p^m} \in \mathcal{B}^{\circ}$  であることから、  $1 \leq |g^{-1/p^m}| = |g|^{-1/p^m}$  となる。 section 2.5.2 の仮定から  $|\mathcal{K}|$  が  $\mathbb{R}_+$  で稠密なので、ある  $\lambda'_m \in \mathcal{K}$  であって

$$1 \leq |g^{-1/p^m}| \leq |\lambda'_m| \leq |g^{-1/p^m}| + \frac{1}{m} \quad (2.63)$$

となるものが取れる。すると  $\lambda_m := (\lambda'_m)^{-1} \in \mathcal{K}^{\circ}$  が取れて、  $|\lambda_m g^{-1/p^m}| \leq 1$  から  $\lambda_m g^{-1/p^m} \in \mathcal{B}^{\circ}$  となる。さらに  $m \rightarrow \infty$  で  $|g^{-1/p^m}| = |g|^{-1/p^m} \rightarrow 1$  に注意すれば  $|\lambda'_m| \rightarrow 1$  ゆえ、  $|\lambda_m| \rightarrow 1$  となる。すなわち、点列  $\lambda_m \in \mathcal{K}^{\circ}$  であって、ノルムが 1 に収束していき、  $\lambda_m g^{-1/p^m} \in \mathcal{B}^{\circ}$  となるものが存在する。すると任意の  $b \in g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ}$  に対して、  $\lambda_m b = (\lambda_m g^{-1/p^m})(g^{1/p^m} b) \in \mathcal{B}^{\circ}$  から、  $\lambda_m$  のノルムが 1 に収束していることと合わせて  $b \in \mathcal{B}^{\circ}$  となる。  $\square$

### 2.5.3 Remark

- (1)  $\mathcal{B}$  上で  $g$  を掛ける写像が isometric になったとすると、  $\mathcal{B}^{\circ}[1/g] \cap \mathcal{B} = \mathcal{B}^{\circ}$  となり、  $g^{1/p^m} \mathcal{B}^{\circ}$  は  $\mathcal{B}^{\circ}$  で閉集合で、  $\mathcal{B}^{\circ} \hookrightarrow g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ}$  は isometric で、  $|\cdot|_{g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}}$  は  $g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}$  を一様 Banach 代数にするノルムになる。このとき

$$g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B} = (g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B})^{\circ}[1/g] = (g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ})[1/g] = ((\mathcal{B}^{\circ})^a)_*[1/g] = \mathcal{B}_* \quad (2.64)$$

となる。ただし最後の almost element は cadre として  $(\mathcal{K}^{\circ}[T^{1/p^{\infty}}], (T)^{1/p^{\infty}} \mathcal{K}^{\circ} \mathcal{K}^{\circ}[T^{1/p^{\infty}}])$  を取っている。一方、もし  $g$  を掛ける写像が isometric でなかったとすると、  $g$  が非零因子であったとしても、包含  $\mathcal{B}^{\circ} \hookrightarrow g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ}$  が必ずしも isometric にはならないだけでなく、  $(g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ})[1/\varpi]$  は下記の section 2.5.4 の例の通り  $g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}$  と異なる可能性がある。

- (2) 包含  $\mathcal{B}^{\circ} \subset g^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ}$  は一般に真の包含であり、  $g$  を掛ける写像が isometric であったとしても真の包含である。?実際、  $\mathcal{K} + T_1^{1/p^{\infty}} \mathcal{K} \langle T_1^{1/p^{\infty}}, T_2^{1/p^{\infty}} \rangle$  の  $\mathcal{K} \langle T_1^{1/p^{\infty}}, T_2^{1/p^{\infty}} \rangle$  の中での完備化を取り、  $g = T_1$  として取れば良い。

### 2.5.4 Exemple prophylactique

$\mathcal{K}$  が標数  $p$  の完全体であるとする。完全  $\mathcal{K}^{\circ}$  代数  $\mathcal{K}^{\circ} \langle T_1^{1/p^{\infty}}, (\varpi^m T_1^{1/p^m} T_2)^{1/p^{\infty}} \rangle_{m \in \mathbb{Z}_+}$  は、ある一様 Banach  $\mathcal{K} \langle T_1^{1/p^{\infty}} \rangle$  代数  $\mathcal{B}$  の  $\mathcal{B}^{\circ}$  になる。とくに  $\mathcal{B} = (T_1^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B}^{\circ})[1/\varpi] \neq T_1^{-1/p^{\infty}} \mathcal{B} \ni T_2$  となる。

### 2.5.5

$g$  が非零因子であるとする。 $\mathcal{B}^\circ[1/g]$  と  $\mathcal{B}[1/g] = \mathcal{B}^\circ[1/\varpi g]$  <sup>\*39</sup> のそれぞれにおける  $\mathcal{B}^\circ$  の complete integral closure の定義を思い出す (section 2.3.1) と (2.17) から

$$(\mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}^\circ[1/g]}^* := \{b \in \mathcal{B}^\circ[1/g] \mid \exists m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+, g^m b^n \in \mathcal{B}^\circ\} \quad (2.65)$$

$$(\mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^* := \{b \in \mathcal{B}[1/g] = \mathcal{B}^\circ[1/\varpi g] \mid \exists m \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+, (\varpi g)^m b^n \in \mathcal{B}^\circ\} \quad (2.66)$$

となる。また、もし  $G$  が  $\mathcal{B}^\circ$  の  $\mathcal{K}^\circ$  上の自己同型であって  $g$  を固定するものからなる群とすると、 $G$  は  $\mathcal{B}[1/g] = \mathcal{B}^\circ[1/\varpi g]$  上へと延長できて、

$$((\mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^*)^G = ((\mathcal{B}^\circ)^G)_{\mathcal{B}[1/g]}^* \quad (2.67)$$

となる。

**補題 2.5.3.**  $\mathcal{B}$  を一様 Banach  $\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle$  代数 (もしくは一様ノルム代数) であり、 $T$  の像を  $g \in \mathcal{B}^\circ$  とする。このとき以下は同値。

- (1)  $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ = (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^\dagger$  となる ( $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{B}^\circ[1/g]$  で  $p$ -root closed になる)。
- (2)  $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ = (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^\dagger$  となる ( $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{B}[1/g]$  で  $p$ -root closed になる)。
- (3)  $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ = (\mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}^\circ[1/g]}^*$  となる。
- (4)  $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ = (\mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^*$  となる。
- (5)  $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{B}^\circ[1/g]$  で completely integrally closed になる。
- (6)  $g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{B}[1/g]$  で completely integrally closed になる。

**証明.** まず (2.65) と (2.66) から

$$g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ \subset (\mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}^\circ[1/g]}^* \subset (\mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^* \subset (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^* \quad (2.68)$$

$$g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ \subset (\mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}^\circ[1/g]}^* \subset (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}^\circ[1/g]}^* \subset (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^* \quad (2.69)$$

から、(6) から他の五つの条件はすべて出てくる。よって (1)  $\implies$  (2) と (2)  $\implies$  (6) を示せば良い。

(1)  $\implies$  (2)  $\mathcal{B}$  の一様性から、最初からスペクトラルであるとして良い。 $b \in \mathcal{B}[1/g]$  が  $b^p \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  となったとする。 $g \in \mathcal{B}[1/g]$  から、ある  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  で  $g^m b \in \mathcal{B}$  となる。すると  $b^p \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  からとくに  $(g^m b)^p = g^{pm} b^p \in \mathcal{B}^\circ$  なので命題 2.3.1(5) から  $g^m b \in \mathcal{B}^\circ$  となる。ゆえに  $b \in \mathcal{B}^\circ[1/g]$  であるので、(1) の仮定から  $b \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  であるので示された。

(2)  $\implies$  (6)  $b \in (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)_{\mathcal{B}[1/g]}^*$  を取る。(2.66) のようにして、ある正整数  $m$  が存在して、任意の正整数  $n$  で  $(\varpi g)^m b^{p^n} \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  となる。 $\varpi_{m/p^n} g^{m/p^n} b \in \mathcal{B}[1/g]$  であって、スペクトラルであるとしていることから  $\mathcal{B}^\circ = \mathcal{B}_{\leq 1}$  より  $\varpi$  について  $\varpi_{m/p^n}$  を取ると確かに  $(\varpi_{m/p^n} g^{m/p^n} b)^{p^n} \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  となる。(2) の仮定から  $\varpi_{m/p^n} g^{m/p^n} b \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  となる。(2.62) の議論から一様性に注意すると命題 2.3.1(6) から

$$g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ = (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B})^\circ = ((g^{-1/p^\infty} \mathcal{B})^\circ)_* = (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)_* = \bigcap_{\Gamma \ni s > 0} \varpi_{-s}(g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ) \quad (2.70)$$

<sup>\*39</sup>  $\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ}$  から section 2.3.2 の議論と同様にして  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^\circ[1/\varpi]$  となっていることに注意する。

となる。 $b \in \mathcal{B}[1/g] = (g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ)[1/g]$  であるから<sup>\*40</sup> 十分小さい任意の  $0 < s \in \Gamma$  について  $\varpi_{-s} b \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  であることを示せば良い。よって、任意の  $n$  で  $\varpi_{m/p^n} b \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  を示せば良い。すなわち、それぞれの  $n$  について十分大きい任意の  $n'$  に関して  $\varpi_{m/p^n} g^{1/p^{n'}} b \in \mathcal{B}^\circ$  を示せば良いことがわかる。<sup>\*</sup>任意の  $n$  で  $\varpi_{m/p^n} g^{m/p^n} b \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  となっていることからこれは示されるので  $b \in g^{-1/p^\infty} \mathcal{B}^\circ$  となる。  $\square$

## 2.5.6 Remark

以上の最後の (2)  $\implies$  (6) の議論から、環  $R$  であって適合的な  $p$  冪乗根  $t^{1/p^m}$  を持つ  $R$  の非零因子  $t$  について、もともと  $(t^{-1/p^\infty} R)^\dagger_{R[1/t]} \subset R^*_{R[1/t]}$  となっていることに注意すると  $R^*_{R[1/t]} = (t^{-1/p^\infty} R)^\dagger_{R[1/t]}$  を示せる。

## 2.6 Epimorphismes (et localisation)

### 2.6.1

$\mathcal{K}$ -uBan において、像が稠密であるような射は epi 射になる。epi 射  $\varphi$  が extrémal であるとは、 $\varphi = \mu \circ \lambda$  という分解で  $\mu$  が mono 射で  $\lambda$  が同型射になるものを持つことである。 $\mathcal{K}$ -uBan において任意の射  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  は標準的な分解  $\mathcal{A} \xrightarrow{\psi} (\mathcal{A}/\text{Ker}(\varphi))^u \xrightarrow{\chi} \mathcal{B}$  が取れて、 $\psi$  は extrémal な epi 射である (しかしながら  $\chi$  が mono 射であることは明らかではなく、それゆえ任意の extrémal な epi 射が  $\psi$  の形をしているかも明らかではない)。全射な射  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  は extrémal な epi 射になる。これは全射性と連続性から  $\mathcal{B}$  のノルムは  $\mathcal{A}$  のノルムから得られる商半ノルムと同値であることと、Banach の開写像定理からわかる (上で定義された  $\chi$  が同型射になる)。

以下では  $\mathcal{A}$  を一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数とする。

### 2.6.2

次に、 $\mathcal{K}$  上の解析幾何学で使われる uniform localisation を説明する。 $f_1, \dots, f_n, f \in \mathcal{A}$  がイデアルとして  $\mathcal{A}$  を生成するとする。 $\overline{(fU_i - f_i)_i}$  によって  $\mathcal{A}\langle U_1, \dots, U_n \rangle$  <sup>\*41</sup> で  $fU_i - f_i$  によって生成されるイデアルの閉包 (これもまたイデアルになる) とする。このとき

$$\mathcal{A} \left\{ \frac{f_1, \dots, f_n}{f} \right\} := \mathcal{A}\langle U_1, \dots, U_n \rangle / \overline{(fU_i - f_i)_i} \quad (2.71)$$

と定義する。位相は  $\mathcal{A}\langle U_1, \dots, U_n \rangle$  から得られる商半ノルムによって入れる。閉イデアルで割っているから完備性が保たれていることに注意する。これは Banach  $\mathcal{A}$  代数  $\mathcal{B}$  であって  $f$  の像が可逆で  $f_i/f \in \mathcal{B}^\circ$  となるものの中で普遍性を持つ ([BGR] 6.4.1). <sup>\*42</sup>  $\mathcal{A}[1/f] \rightarrow \mathcal{A}\{(f_1, \dots, f_n)/f\}$  の像が稠密より、射  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\{(f_1, \dots, f_n)/f\}$  は Banach  $\mathcal{K}$  代数の射として epi 射になる。これは  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[U_1, \dots, U_n]/(fU_i - f_i)_i$  が、 $f_1, \dots, f_n, f$  が  $\mathcal{A}$  をイデアルとして生成することから同型射であることがわかる  $\mathcal{A}[1/f] \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}[U_1, \dots, U_n]/(fU_i - f_i)_i$  を経由することから従う。

<sup>\*40</sup> section 2.5.3 の例は  $[1/g]$  ではなく  $[1/\varpi]$  についてであることを注意する。 $[1/g]$  ならこれは一致する。

<sup>\*41</sup> section 2.1.5 で定義したもの。

<sup>\*42</sup> [BGR] ではアフィノイドの場合で行っていて、このとき  $(fU_i - f_i)_i$  は自然に閉集合になっている。そのかわりに閉包を取った  $\overline{(fU_i - f_i)_i}$  で考えても同じことが言える。

$i = 1$  で  $f_i = 1$  として取れる基本的な形

$$\mathcal{A}\left\{\frac{1}{f}\right\} := \mathcal{A}\langle U \rangle / \overline{(fU - 1)} \quad (2.72)$$

について詳しく見る。これは Banach  $\mathcal{A}$  代数  $\mathcal{B}$  であって  $f$  の像が可逆で  $f^{-1} \in \mathcal{B}^\circ$  となるものの中で普遍性を持つ。もし  $f \in \mathcal{A}^{\circ\circ}$  だったら、 $fU - 1$  が  $\mathcal{A}\langle U \rangle$  で可逆なので  $\mathcal{A}\{1/f\} = 0$  となる。

**補題 2.6.1 ([Mih] Prop.2.3).**  $\mathcal{A}$  が一様であれば、 $\mathcal{A}\langle U \rangle$  のイデアル  $(fU - 1)$  は閉イデアルである。

Gelfand 変換を用いた議論は、より明確に [KL] 2.8.8 に記載されている。

$\lambda \in \mathcal{K}^\circ$  であって  $g := \lambda f \in \mathcal{A}^\circ$  となるものを一つ固定する。

$$\mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} := \mathcal{A}\left\{\frac{1}{f}\right\} \quad (2.73)$$

と定義するとこれは  $T \mapsto g$  となる Banach  $\mathcal{K}\langle T \rangle$  代数となる (そのために  $g \in \mathcal{A}^\circ$  が必要)。また、 $\iota_{\lambda/g}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\{\lambda/g\}$  を標準的な射とする。すると (2.6) から同型

$$\mathcal{A}\left\{\frac{\lambda}{g}\right\} \cong \mathcal{A} \widehat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle} \left( \mathcal{K}\langle T \rangle \left\{ \frac{\lambda}{T} \right\} \right) \quad (2.74)$$

が取れて、 $g \in \lambda \mathcal{A}^{\circ\circ}$  のとき  $\mathcal{A}\{\lambda/g\} = 0$  となる。以下の性質は簡単にわかる。

- (a) もし  $|\lambda| \leq |\mu|$  ならば、標準的な射  $\mathcal{A}\{\lambda/g\} \rightarrow \mathcal{A}\{\mu/g\}$  が取れて、標準的な射  $\mathcal{A}\{\mu/g\} \rightarrow \mathcal{A}\{\lambda/g\} \{\mu/g\}$  は同型になる。
- (b) もし  $|g - h| < |\lambda|$  ならば、標準的な同型  $\mathcal{A}\{\lambda/g\} \cong \mathcal{A}\{\lambda/h\}$  が取れる (等式  $1/h - 1/g = \sum_{m \geq 1} \lambda^{-m-1} (g - h)^m (\lambda/g)^{m+1}$  を考えれば良い)。
- (c) 任意の  $a \in \mathcal{A}$  について  $|\iota_{\lambda/g}(a)| = \inf_{m \geq 1} |(g/\lambda)^m a|_{\mathcal{A}}$  となる。

### 2.6.3 Examples

- (1) スペクトラルノルム代数  $\mathcal{A} := \mathcal{K}\langle T \rangle$  について、 $\mathcal{K}\langle T, \lambda/T \rangle := \mathcal{A}\{\lambda/T\} = (\mathcal{A}\{\lambda/T\})^u$  とする。これは半径  $(\lambda, 1)$  の”閉環”上で解析的関数からなるスペクトラルノルム代数である。また、 $(\mathcal{K}\langle T, \lambda/T \rangle) = \mathcal{K}^\circ\langle T, \lambda/T \rangle$  はノルムが 1 で抑えられる有界な関数からなる部分代数である。この上のノルムは  $\lambda = 0$  もしくは  $|\lambda| = 1$  のときのみ乗法的ノルムになる。一般的に  $\mathcal{A}$  が乗法的 Banach  $\mathcal{K}$  代数のとき、 $\mathcal{A}\{1/g\} = (\mathcal{A}\{1/g\})^u$  は  $\mathcal{A}$  の商体の完備化  $\widehat{Q(\mathcal{A})}$  の中の Banach 部分代数になることに注意する。
- (2) Banach 代数  $\mathcal{K}\langle T, \lambda/T \rangle$  と  $\mathcal{K}\langle T, \lambda^2/T^2 \rangle$  は Banach 代数として同型であるが isometric ではない。これは前者はスペクトラルであるが後者はそうでないことからわかる (後者では  $|\lambda/T| = |\lambda|^{-1} > 1$  となる)。

$\mathcal{A}\{\lambda/g\}$  が一様でない可能性もある ([Mih] section 3)。ただし  $\mathcal{A}$  が被約なアフィノイドでスペクトラルノルムを持つときはそのようなことは起きない ([BGR] 7.2.3 prop.4)。いつでも  $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A}\{\lambda/g\})^u$  は  $\mathcal{K}$ -uBan で epi 射になる。これは  $\mathcal{A}[1/g]$  の像が  $(\mathcal{A}\{\lambda/g\})^u$  で稠密であることからわかる。関手  $\mathcal{A} \mapsto (\mathcal{A}\{\lambda/T\})^u$  は、 $\mathcal{K}\langle T \rangle$ -uBan の中の  $\mathcal{B}$  で  $T/\lambda$  が  $\mathcal{B}^\circ$  で可逆になるものからなる充満部分圏から  $\mathcal{K}$ -uBan への包含関手の左随伴になっている。

**補題 2.6.2.**  $g \in \mathcal{A}$  が非零因子であるとする。  $\iota: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  を Banach 代数の mono 射であって、 ( $\mathcal{A}$  代数として)  $\mathcal{A}'$  が  $\mathcal{A}[1/g]$  に含まれているとする。このとき誘導される射  $\mathcal{A}\{\lambda/g\} \rightarrow \mathcal{A}'\{\lambda/g\}$  は Banach 代数としての同型射である。

**証明.** (O.Gabber による)。任意の  $n \in \mathbb{Z}^+$  に対して  $V_n$  を  $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}$  中の  $(a', a := g^n a')$  という元からなる閉部分空間とする。第一成分の射影を考えると Banach 空間  $\widehat{\bigoplus_{m \geq 1} V_m}$  から  $\mathcal{A}'$  への全射が取れる。  $W_n \subset \mathcal{A}'$  を  $\bigoplus_{m \leq n} V_m$  の  $\mathcal{A}'$  への像とする。このとき  $\mathcal{A}' = \bigcup_{n \geq 1} W_n$  となる。Baire の定理から十分大きい  $n$  で  $W_n \neq \emptyset$  となる。このとき  $\bigoplus_{m \leq n} V_m$  の完備性と合わせて Banach の開写像定理からその像  $W_n \neq \emptyset$  は  $\mathcal{A}'$  で開集合になる。よって  $W_n$  は空でない開かつ閉な集合だから  $\mathcal{A}' = W_n$  となる。ゆえに  $g^n$  を掛けることで連続写像  $\mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$  を得る。よって、連続写像  $\mathcal{A}'\{\lambda/g\} \rightarrow \mathcal{A}\{\lambda/g\}$  が得られる。  $\mathcal{A}\{\lambda/g\}$  上で  $g^{-n}$  を掛ける写像を合成することによって標準的な射  $\mathcal{A}\{\lambda/g\} \rightarrow \mathcal{A}'\{\lambda/g\}$  の連続な逆写像が取れる。  $\square$

**補題 2.6.3.**  $\mathcal{A}$  が一様であり、  $g$  が非零因子であるとする。このとき  $\mathcal{A}^\circ \rightarrow \varinjlim_{\lambda \rightarrow 0} (\mathcal{A}\{\lambda/g\})$  は単射になる。

**証明.**  $\mathcal{A}$  のノルム  $|\cdot|$  がスペクトラルであるとして良い。任意の  $a \in \mathcal{A}^\circ \setminus \{0\}$  と任意の  $\lambda \in \mathcal{K}^\circ \setminus \{0\}$  について、section 2.6.2(c) から  $|a|_{\mathcal{A}\{\lambda/g\}} = \inf_{m \geq 1} |(g/\lambda)^m a|_{\mathcal{A}}$  である。  $|\lambda| \leq |ga|$  となる。  $\lambda$  を取ると、  $\inf_{m \geq 1} |(g/\lambda)^m a|_{\mathcal{A}} \geq 1$  であるから  $a$  の  $(\mathcal{A}\{\lambda/g\})^\circ$  への像は 0 にならない。  $\square$

#### 2.6.4 Remark

- (1)  $\iota_{\lambda/g}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\{\lambda/g\}$  が単射であることと、  $[\inf_{m \geq 1} |(g/\lambda)^m a|_{\mathcal{A}} = 0 \implies a = 0]$  が成り立つことは同値。  
例えばこれは  $\mathcal{A}$  上で  $g$  を掛ける写像が isometric であればよい。また、  $(\mathcal{A}\{\lambda/g\})^u \rightarrow (\mathcal{A}\{\mu/g\})^u$  はいつでも単射になる ( $\mu = 1$  として  $\mathcal{A}[1/g]$  の稠密性を用いればよい)。一方、  $|\lambda| < 1$  のとき  $(\mathcal{A}\{\lambda/g\})$  上で  $g$  を掛ける写像は isometric にならない。
- (2)  $\mathcal{K}^\circ[T_1, T_2, (T_2 T_1^i)/\varpi^i]_{i \geq 1}$  の完備化は一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数で  $T_1$ -torsion free な  $\mathcal{A}$  の単位閉円板  $\mathcal{A}^\circ$  となる。しかし  $T_2$  が  $\mathcal{K}^\circ[T_1, T_2, (T_2 T_1^i)/\varpi^i, \lambda/T_1]_{i \geq 1}$  において  $\varpi$ -infinite divisible であるので、もし  $|\lambda| > |\varpi|$  であるとする  $\iota_{\lambda/T_1}(T_2) = 0$  となる。

## 2.7 Produits (et transformee de Gelfand)

### 2.7.1

無限個の Banach 代数の積は一般には存在しない。もし  $\mathcal{A}$  が一様でなかったとすると、  $\mathcal{A}^\circ$  の非有界な点列  $(a_n)$  が取れて、?このとき  $\mathcal{K} \xrightarrow{1 \mapsto a_n} \mathcal{A}$  という射は  $\mathcal{K}$  から Banach 代数への射と同値にならない。

逆に、スペクトラルなノルム代数の間の射が  $\|\varphi\| \leq 1$  を満たすことから、一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の圏は次のように積をもつ (空積は零代数になる)。これを uniform product とすることもある。

$$\prod_{\alpha}^u \mathcal{A}^{\alpha} := \left\{ (a^{\alpha}) \in \prod_{\alpha} \mathcal{A}^{\alpha} \mid |(a^{\alpha})| := \sup_{\alpha} |a^{\alpha}|_{sp} < \infty \right\}. \quad (2.75)$$

ここで  $(\prod^u \mathcal{A}^{\alpha})^{\circ} = \prod (\mathcal{A}^{\alpha})^{\circ}$  となる。

## 2.7.2 Exemple prophylactique

スペクトラル Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  が (通常の代数として) ”連結” <sup>\*43</sup> なスペクトラル Banach  $\mathcal{K}$  代数の uniform product として  $\mathcal{A} = \prod^u \mathcal{A}^\alpha$  に分解できるときはいかなるときかを考える。このようなことは起きない。  $B(\mathcal{A})$  によって  $\mathcal{A}$  の冪等元 (もしくは、同じことだが  $\mathcal{A}^\circ$  の冪等元) からなる Bool 代数とする。上記のような分解 (もしくは、同じことだが  $\mathcal{A}^\circ = \prod (\mathcal{A}^\alpha)^\circ$  という分解) を持つことは、  $B(\mathcal{A})$  が完備かつ atomic になることと同値である。ここで完備とは任意の部分集合が上限を持つことであり、atomic とは任意の 0 でない元が極小元からなる集合の上限として表されることである。

逆に Bool 代数  $B$  から初めて一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A} := (\mathcal{K}\langle T_b \rangle_{b \in B} / (T_b T_{b'} - T_{b \wedge b'}, T_b + T_{\neg b'} - 1))^u$  を定義し、位相的に (位相的有限型と言ったときの位相的と同義) 冪等元  $T_b$  によって生成されている。すると  $B(\mathcal{A}) \cong B$  となる。もし  $B$  が例えば無限自由 Bool 代数 (完備でも atomic でもない) とすると、上記のことから  $\mathcal{A}$  は連結成分による uniform product の分解を持たない。[Ber] cor.9.2.7 からさらにこのとき  $\mathcal{A}$  の Berkovich スペクトラム  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  は  $B$  の極大スペクトラムを同一視できる ( $B$  の極大スペクトラム自身は  $\text{Spec}(\mathcal{A})$  の連結成分の profinite space と同一視出来る)。また、 $\mathcal{A}$  はその空間上の  $\mathcal{K}$  に値をとる有界連続関数からなる代数になる。

## 2.7.3

一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  の Gelfand transformation とは、

$$\Gamma \mathcal{A} := \prod_{x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})}^u \mathcal{H}(x) \quad (2.76)$$

のことである。積は  $\mathcal{A}$  の Berkovich スペクトラムの点 ( $\mathcal{A}$  上の乗法的有界半ノルム) の上で取り、 $\mathcal{H}(x)$  は  $x$  の剰余体 <sup>\*44</sup> の完備化とする。このとき標準的な mono 射  $\mathcal{A} \rightarrow \Gamma \mathcal{A}$  が取れて、これが isometric であることと、 $\mathcal{A}$  がスペクトラルであることは同値になっている ([Ber] 1.3.2)。この Berkovich スペクトラム  $\mathcal{M}(\Gamma \mathcal{A})$  は離散空間  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  の Stone-Cech コンパクト化になり ([Ber] 1.2.3)、写像  $\mathcal{M}(\Gamma \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$  は標準的な全射になる。

このような構成は  $\mathcal{K}$ -uBan 上の自己関手  $\Gamma$  を定義する。射の対応は、 $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  について連続な ”diagonal” 射  $\mathcal{H}(x) \rightarrow \prod_{f_*(y)=x}^u \mathcal{H}(y)$  が誘導され、 $\Gamma(f)$  は  $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$  上で uniform product を取ることによって得られる。これは忠実関手 ( $\mathcal{B} \rightarrow \Gamma \mathcal{B}$  が mono 射であるから) になるが充満ではない。スペクトラル Banach 代数の間の連続な射  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  が誘導する  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$  が全射であれば、isometric になる。

## 2.8 Limites

### 2.8.1

一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数からなる圏は equalizer を持つ。これは代数における通常の equalizer を表現する部分代数は閉集合になっているためである。また、この圏は積を持つので完備である (すなわち、任意の (small) limit を持つ)。

<sup>\*43</sup> 一様 Banach 代数が連結である、すなわち 0 と 1 以外の冪等元を持たない、ことは Berkovich スペクトラム  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  が連結空間であることと同値 ([Ber] cor.7.4.2)。

<sup>\*44</sup>  $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$  の剰余体とは  $Q(\mathcal{A}/\text{Supp}(x))$  のことである ([Ber] cor.1.3.2)。

一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数からなる射影系  $(\mathcal{A}^\alpha)$  であって、添字は (filtered とは限らない) 順序集合  $(\{\alpha\}, \leq)$  であるとする。このとき limit として uniform limit は

$$\text{ulim } \mathcal{A}^\alpha := \{a = (a^\alpha) \in \varprojlim \mathcal{A}^\alpha \mid |a| := \sup_\alpha |a^\alpha|_{sp} < \infty\} \quad (2.77)$$

と定義できる。これは確かに一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数であって更にスペクトラルになる。また、スペクトラル半ノルムであることから  $(-)^{\circ}$  は単位円板になっているので

$$(\text{ulim } \mathcal{A}^\alpha)^{\circ} = \varprojlim (\mathcal{A}^\alpha)^{\circ} \quad (2.78)$$

となる。とくに系 2.3.2(1) から (4) はこの limit で保たれる。

### 2.8.2 Example

- (1)  $(r_i)$  を正の実数からなる 1 へ収束する増加数列とする。このとき、半径  $r_i$  の”閉円板”上の変数  $T$  の解析的関数からなる代数は一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の射影系を為し、その uniform limit は  $\mathcal{K}^{\circ}[[T]] \otimes_{\mathcal{K}^{\circ}} \mathcal{K}$  となり、すなわち”単位開円板”上で有界な解析的関数からなる代数になる。
- (2)  $|\varpi| < 1$  について、半径  $(|\varpi|^j, 1)$  の”閉環”上の解析的関数からなる代数  $\mathcal{K}\langle T, \varpi^i/T \rangle$  (section 2.6.3) は一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の射影系を為し、その limit は  $\mathcal{K}\langle T \rangle$  となる。これは非アルキメデス的な場合における Riemann の拡張定理の単純な場合である。<sup>\*45</sup>

**補題 2.8.1.**  $(\mathcal{A}^\alpha)$  を一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数からなる射影系とし、その uniform limit が  $\mathcal{A}$  になっているとする。このとき標準的な射  $\mathcal{A}^{\circ}/\varpi \rightarrow \varprojlim ((\mathcal{A}^\alpha)^{\circ}/\varpi)$  は単射になる。

**証明.**  $\mathcal{A}^\alpha$  は  $\varpi$ -torsion free であるから、完全列  $0 \rightarrow \varprojlim (\mathcal{A}^\alpha)^{\circ} \xrightarrow{\varpi} \varprojlim (\mathcal{A}^\alpha)^{\circ} \rightarrow \varprojlim ((\mathcal{A}^\alpha)^{\circ}/\varpi)$  が取れるのでわかる。  $\square$

**補題 2.8.2.**  $(\mathcal{A}^\alpha)$  を一様 Banach  $\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle$  代数からなる射影系とする。この uniform limit は自然に一様 Banach  $\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle$  代数になる。 $g^{1/p^m}$  によって  $\mathcal{A}^\alpha$  における  $T^{1/p^m}$  の像とする。<sup>\*46</sup> このとき標準的な同型

$$g^{-1/p^\infty} (\varprojlim (\mathcal{A}^\alpha)^{\circ}) \cong \varprojlim (g^{-1/p^\infty} (\mathcal{A}^\alpha)^{\circ}) \quad (2.79)$$

がある。

**証明.** 一様 Banach  $\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle$  代数であることは、 $g^{1/p^m}$  を取れば良い。

cadre として  $(\mathcal{K}^{\circ}[T^{1/p^\infty}], T^{1/p^\infty} \mathcal{K}^{\circ\circ}[T^{1/p^\infty}])$  を取って、関手  $(-)^a$  と  $(-)_*$  を考えると、これは limit を保つ。ゆえに (2.78) と補題 2.5.1(1) から、

<sup>\*45</sup> 原点付近では  $\varpi^i$  の外側だけで定義されているが、その limit を取ることで原点で定義できるようになっている。

<sup>\*46</sup> 射影系を為していることからこの  $g^{1/p^m}$  は  $\alpha$  によらずに互いに移り合うように取れる。



$$g^{-1/p^\infty} \varprojlim (\mathcal{A}^\alpha)^\circ = g^{-1/p^\infty} (\text{ulim } \mathcal{A}^\alpha)^\circ = (((\text{ulim } \mathcal{A}^\alpha)^\circ)^a)_* \quad (2.80)$$

$$= ((\varprojlim (\mathcal{A}^\alpha)^\circ)^a)_* = \varprojlim (((\mathcal{A}^\alpha)^\circ)^a)_* \quad (2.81)$$

$$= \varprojlim (g^{-1/p^\infty} (\mathcal{A}^\alpha)^\circ) \quad (2.82)$$

となるので良い。もしくは、この形であれば limit の順番が変えられるので

$$g^{-1/p^\infty} (\varprojlim_\alpha (\mathcal{A}^\alpha)^\circ) = \varprojlim_m (g^{-1/p^m} (\varprojlim_\alpha (\mathcal{A}^\alpha)^\circ)) = \varprojlim_m \varprojlim_\alpha (g^{-1/p^m} (\mathcal{A}^\alpha)^\circ) \quad (2.83)$$

$$= \varprojlim_\alpha \varprojlim_m (g^{-1/p^m} (\mathcal{A}^\alpha)^\circ) = \varprojlim_\alpha (g^{-1/p^\infty} (\mathcal{A}^\alpha)^\circ) \quad (2.84)$$

からもわかる。  $\square$

とくにこの補題 2.8.2 を uniform licalisation からなる射影系  $((\mathcal{A} \{ \varpi^i/g \})^u)$  に適用し、これは  $1/g$  を含むことから、補題 2.5.2 と合わせてこの射影系の uniform limit を  $\tilde{\mathcal{A}}$  とすると、

$$(\tilde{\mathcal{A}})^\circ = g^{-1/p^\infty} (\tilde{\mathcal{A}})^\circ \quad (2.85)$$

となる。

## 2.9 Colimites

### 2.9.1

一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数からなる帰納系  $(\mathcal{B}_\alpha)$  であって、添字は filtered な順序集合  $(\{\alpha\}, \leq)$  であるとする。このとき (通常の)  $\mathcal{K}$  代数としての colimit を取った  $\varinjlim \mathcal{B}_\alpha$  に  $|(b_\alpha)| := \lim_\alpha |b_\alpha|_{sp}$  による (スペクトラルな) 半ノルムを入れる (単調性から確かにこの limit は存在し、半ノルムが定義される)。このとき uniform colimit を  $\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha$  と書き、これを  $\varinjlim \mathcal{B}_\alpha$  の、この半ノルムによる完備化によって定義する。このノルムによって  $\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha$  は (スペクトラルな) 一様 banach 代数になる。

以上のことから、この uniform (filtered) colimit は  $\mathcal{K}$ -uBan における filtered colimit を与える。さらに命題 2.3.1 の記号を用いて、 $(\text{colim } \mathcal{B}_\alpha)^\circ |(b_\alpha)| = \lim_\alpha |b_\alpha|_{sp}$  となり、 $(\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha)^\circ = (\widehat{\varinjlim \mathcal{B}_\alpha}^\circ)_*$  となる。

もし  $\mathcal{B}_\alpha$  がスペクトラルであり、 $\mathcal{B}_\beta \rightarrow \mathcal{B}_\alpha$  が isometric であれば、 $\mathcal{B}_\beta \rightarrow \text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha$  も isometric である。このときは  $(\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha)^\circ = (\widehat{\varinjlim \mathcal{B}_\alpha}^\circ)$  となる。

### 2.9.2

$\mathcal{K}$ -uBan は以上で見たとおり filtered colimit を持ち、さらに push-out として  $\widehat{\otimes}^u$  を持つ (section 2.2.5)。とくに始対象  $\mathcal{K}$  を持つので coequalizer も存在する。ゆえに  $\mathcal{K}$ -uBan は余完備である。すなわち、(small) colimit を持つ。

**補題 2.9.1.**  $\text{ucolim}$  は uniform localisation (section 2.6.2 の一様化) と可換である。すなわち、 $\lambda \in \mathcal{K}^\circ \setminus \{0\}$  と一様 Banach  $\mathcal{K}\langle T \rangle$  代数とみなした filtered な帰納系  $(\mathcal{B}_\alpha)$  に対して、 $g$  を  $T$  の像として互いに移り合うように  $\mathcal{B}_\alpha \{ \lambda/g \}$  が定義できて、 $\text{ucolim}(\mathcal{B}_\alpha \{ \lambda/g \})^u = ((\text{ucolim } \mathcal{B}_\alpha) \{ \lambda/g \})^u$  となる。

**証明.**  $\text{ucolim}$  と  $\widehat{\otimes}^u$  は可換であり、uniform localisation を取る関手  $((-) \{ \lambda/g \})^u$  について (2.74) の表示を考えると、一様化を取っていることに注意すれば



$$\text{ucolim} \left( \mathcal{B}_\alpha \left\{ \frac{\lambda}{g} \right\} \right) \cong \text{ucolim} \left( \mathcal{B}_\alpha \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle}^u \left( \mathcal{K}\langle T \rangle \left\{ \frac{\lambda}{T} \right\} \right) \right) \quad (2.86)$$

$$= (\text{ucolim} \mathcal{B}_\alpha) \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle}^u \left( \mathcal{K}\langle T \rangle \left\{ \frac{\lambda}{T} \right\} \right) \cong \left( (\text{ucolim} \mathcal{B}_\alpha) \left\{ \frac{\lambda}{g} \right\} \right)^u \quad (2.87)$$

より可換である。もしくは uniform localisation の左随伴関手としての性質からもわかる。  $\square$

### 2.9.3 Example

- (1)  $\mathcal{K}$  が標数  $p > 0$  であるとする、 $p$ -root closure の完備化は  $\text{ucolim} \mathcal{K}^{1/p^i}$  となる。
- (2)  $\mathcal{A}$  をスペクトラル Banach  $\mathcal{K}$  代数として  $g \in \mathcal{A}^\circ$  を取る。 $\mathcal{A}$  を  $T \mapsto g$  によって  $\mathcal{K}\langle T \rangle$  代数とする。 $\mathcal{K}\langle T^{1/p^{i+1}} \rangle$  は  $\mathcal{K}\langle T^{1/p^i} \rangle$  上に  $1, T^{1/p^{i+1}}, \dots, T^{(p-1)/p^{i+1}}$  を直交基底として持つ。このとき

$$\mathcal{A}\langle g^{1/p^i} \rangle := \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle}^u \mathcal{K}\langle T^{1/p^i} \rangle \quad (2.88)$$

$$\mathcal{A}\langle g^{1/p^\infty} \rangle = \text{ucolim}_i \mathcal{A}\langle T^{1/p^i} \rangle = \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle}^u \mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle \quad (2.89)$$

と定義する。下の (2.89) の等式は  $\text{ucolim}$  と  $\hat{\otimes}^u$  が可換であり、 $\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle = \text{ucolim}_i \mathcal{K}\langle T^{1/p^i} \rangle$  となっていること (colimit の普遍性からわかる) から従う。section 2.2.7 を  $\mathcal{C} := \mathcal{K}\langle T^{1/p^{i+1}} \rangle$ 、 $\mathcal{A} := \mathcal{K}\langle T^{1/p^i} \rangle$ 、 $\mathcal{B} := \mathcal{A}\langle g^{1/p^i} \rangle$  として適用すると、一様化を行っていることから  $\mathcal{B}$  はスペクトラルであるので

$$\mathcal{A}\langle g^{1/p^i} \rangle \rightarrow \mathcal{A}\langle g^{1/p^i} \rangle \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T^{1/p^i} \rangle}^u \mathcal{K}\langle T^{1/p^{i+1}} \rangle \cong \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle}^u \mathcal{K}\langle T^{1/p^{i+1}} \rangle = \mathcal{A}\langle g^{1/p^{i+1}} \rangle \quad (2.90)$$

は isometric になる。すると section 2.9.1 の最後の議論から  $i = 0$  と取って  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}\langle g^{1/p^\infty} \rangle$  は isometric になる。また、(2.8) を  $\mathcal{A} := \mathcal{K}$ 、 $\mathcal{B} := \mathcal{A}$ 、 $T := T^{1/p^i}$ 、 $J := (T - g)$  として適用すると、

$$(\mathcal{A}\langle T^{1/p^i} \rangle / (T - g))^u \cong \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}}^u (\mathcal{K}\langle T^{1/p^i} \rangle / (T - T)) = \mathcal{A} \hat{\otimes}_{\mathcal{K}\langle T \rangle}^u \mathcal{K}\langle T^{1/p^i} \rangle = \mathcal{A}\langle g^{1/p^i} \rangle \quad (2.91)$$

となる。すなわち、

$$\mathcal{A}\langle g^{1/p^i} \rangle \cong (\mathcal{A}\langle T^{1/p^i} \rangle / (T - g))^u \quad (2.92)$$

という同型がある。

- (3) 任意の一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{B}$  は被約アフィノイド  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{B}_\alpha$  からなる filtered uniform colimit になり、通常の代数の colimit からの射  $\varinjlim \mathcal{B}_\alpha \rightarrow \mathcal{B}$  が全単射になるように次のように構成できる。 $\mathcal{B}$  における有限部分集合  $\alpha \subset \mathcal{B}^\circ$  に対して、 $\mathcal{B}_\alpha$  を自由対象  $\mathcal{K}\langle T_s \rangle_{s \in \alpha}$  から  $\mathcal{B}$  への像によって得られる被約アフィノイド  $\mathcal{K}$  代数とする。<sup>\*47</sup> このとき通常の代数の colimit から得られる射  $\varinjlim \mathcal{B}_\alpha^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  は明らかに全射。さらに  $\mathcal{B}_\alpha \subset \mathcal{B}$  から  $\mathcal{B}_\alpha^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  は単射であることと合わせて  $\varinjlim \mathcal{B}_\alpha^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  は全単射になる。これに対して  $\varpi$  の逆元を添加すれば良い。このことから  $\mathcal{B} = \text{ucolim} \mathcal{B}_\alpha$  にもなっている。
- (4) 半径  $|\varpi|^i$  の”閉円板”上の解析的関数からなる代数  $\mathcal{K}\langle T/\varpi^i \rangle$  は一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の帰納系を為す。通常の代数の colimit をとると、これは原点における解析的関数の germ からなる代数になる。この上の極限半ノルムは  $|\sum a_j T^j| := \lim_{i \rightarrow \infty} \max_j |a_j \varpi^{ij}| = |a_0|$  となる (十分大きい  $i \gg 0$  で  $\max_j$  は最初に  $a_j \neq 0$  となる  $j$  によって実現される)。一方 uniform colimit は  $\mathcal{K}$  になり、射  $\mathcal{K}\langle T/\varpi^i \rangle \rightarrow \mathcal{K}$  は 0 の代入によって定義される。

<sup>\*47</sup> 定義からこの被約アフィノイド  $\mathcal{K}$  代数は位相的有限表示型  $\mathcal{K}$  代数になっている。しかし  $\mathcal{K}$ -uBan において (圏論的な) 有限表示性を持たない。すなわち、関手  $\text{Hom}_{\mathcal{K}\text{-uBan}}(\mathcal{B}_\alpha, -)$  が filtered colimit との可換性が無い。これは  $\mathcal{K}\langle T \rangle$  であっても成り立っていない。実際、 $\varinjlim (\text{Hom}(\mathcal{K}\langle T \rangle, \mathcal{B}_\alpha)) = \varinjlim \mathcal{B}_\alpha^\circ$  であるが、 $\text{Hom}(\mathcal{K}\langle T \rangle, \text{ucolim} \mathcal{B}_\alpha) = (\text{colim} \mathcal{B}_\alpha^\circ)_*$  となっている。

最後の例は次の??の特別な場合である。このことは他の箇所でも用いることはないが、後の??で扱われる、colimit と limit の違いに関係している。すなわち、 $f = 0$  の管状近傍と  $g = 0$  の管状近傍の補集合の違いである。(section 2.8.2(2) と section 2.9.3(4) の違いはその上の解析的関数の代数の形と limit か colimit かの違いである)。

**補題 2.9.2.**  $\mathcal{B}$  を一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数として、 $f \in \mathcal{B}^\circ$  を取る。このとき標準的な同型射

$$\text{ucolim} \left( \mathcal{B} \left\{ \frac{f}{\varpi^i} \right\} \right)^u \xrightarrow{\cong} (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u \quad (2.93)$$

が取れる。

**証明.**  $f \in \mathcal{B}^\circ$  の  $(\mathcal{B}\{f/\varpi^i\})^u$  への像のノルムは、 $f/\varpi^i \in ((\mathcal{B}\{f/\varpi^i\})^u)^\circ$  であり、これはスペクトラルであったから、 $|f/\varpi^i| \leq 1$  ゆえ、 $|f| \leq |\varpi|^i$  になる。したがって  $\text{ucolim}(\mathcal{B}\{f/\varpi^i\})$  に関する section 2.9.1 の定義より  $|f| = \lim_i |f|_{sp} = 0$  から、 $f = 0$  となる。よって  $\mathcal{B}/f\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B}\{f/\varpi^i\})^u$  から  $(\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u \rightarrow (\mathcal{B}\{f/\varpi^i\})^u$  が  $i$  について適合的に取れるので、 $(\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u \rightarrow \text{ucolim}(\mathcal{B}\{f/\varpi^i\})^u$  が得られる。一方で、 $\varpi^i$  は  $\mathcal{A}$  で可逆であることから  $\mathcal{B}\langle U \rangle$  のイデアルとして  $(\varpi^i U - f) = (U - \varpi^{-1}f)$  となっていて、補題 2.6.1 と同様に [Mih] prop.2.3 より  $(U - \varpi^{-1}f)$  は  $\mathcal{B}\langle U \rangle$  で閉である。ゆえに

$$\mathcal{B}\{f/\varpi^i\}/(f) = (\mathcal{B}\langle U \rangle/(\varpi^i U - f))/(f) = \mathcal{B}\langle U \rangle/(f, \varpi^i U - f) = \mathcal{B}\langle U \rangle/(U, f) = \mathcal{B}/f\mathcal{B} \quad (2.94)$$

となる。よって  $\mathcal{B}\{f/\varpi^i\} \rightarrow \mathcal{B}\{f/\varpi^i\}/(f) = \mathcal{B}/f\mathcal{B}$  より、一様化を取った後、colimit の普遍性から  $\text{ucolim}(\mathcal{B}\{f/\varpi^i\})^u \rightarrow (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u$  が取れる。すなわち、二つの可換な三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \text{ucolim} \left( \mathcal{B} \left\{ \frac{f}{\varpi^i} \right\} \right)^u & \xrightleftharpoons{\quad} & (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u \end{array}$$

が存在する。この下の二つの射が互いに逆射になっていることを示すためには  $\mathcal{B}$  から出ている二つの射が共に epi 射なら良い。 $\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B}/f\mathcal{B})^u$  に関しては構成から明らか (epi 射は必ずしも全射でなくても良い)。 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}\{f/\varpi^i\}$  についても section 2.6.2 で述べたとおり epi 射になっている。colimit は epi 射を保つことから  $\mathcal{B} \rightarrow \text{ucolim}(\mathcal{B}\{f/\varpi^i\})^u$  も epi 射になるので示された。□

**系 2.9.3.**  $\mathcal{A}$  を一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数とし、 $g \in \mathcal{A}^\circ$  と定義する。このとき標準的な同型射

$$\text{ucolim}_i \left( \mathcal{A}\langle T^{1/p^\infty} \rangle \left\{ \frac{T-g}{\varpi^i} \right\} \right)^u \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}\langle g^{1/p^\infty} \rangle \quad (2.95)$$

$$\left( \widehat{\lim_i} \left( \mathcal{A}\langle T^{1/p^\infty} \rangle \left\{ \frac{T-g}{\varpi^i} \right\} \right)^\circ \right)_* \xrightarrow{\cong} (\mathcal{A}\langle g^{1/p^\infty} \rangle)^\circ \quad (2.96)$$

が得られる。

**証明.** (2.92) と (2.93) から、 $j \geq 0$  について

$$\operatorname{ucolim}_i \left( \mathcal{A}\langle T^{1/p^j} \rangle \left\{ \frac{T-g}{\varpi^i} \right\} \right)^u \cong \left( (\mathcal{A}\langle T^{1/p^j} \rangle) / (T-g) \right)^u \cong \mathcal{A}\langle g^{1/p^j} \rangle \quad (2.97)$$

となる。この両辺を  $j$  について uniform colimit を取れば一つ目の同型が得られる。そして両辺の  $(-)^{\circ}$  を取れば section 2.9.1 の議論から二つ目の同型も得られる。□

### 3 La categorie bicomplete des algebres perfectoides

一様 Banach 代数  $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{A}^{\circ}$  を  $p$  で剰余を取った上での Frobenius 自己準同型が全射であるとする。このような代数に関する tilting や finite étale extension の保持などを含む一般的な性質について見る。とくに limit や colimit を持ち、perfectoid algebra の圏を一様 Banach 代数の圏へと移す関手が右随伴を持つことを見る。colimit は uniform colimit で良いが、limit は一般には uniform limit にはならない。

$F$  によって標数  $p$  の可換環上の Frobenius 準同型  $x \mapsto x^p$  を表すこととする。

#### 3.1 Corps perfectoides

##### 3.1.1

$\mathcal{K}$  を非アルキメデス的かつ非離散的な絶対値 (乗法付値) をもつ完備体とし、その剰余体  $k$  が標数  $p > 0$  を持つとする。[Sch] section 3 の通りに、 $\mathcal{K}$  が perfectoid field であるとは、さらに以下の同値な条件を満たすことである。

- (i)  $\mathcal{K}^{\circ}/p \xrightarrow{F} \mathcal{K}^{\circ}/p$  は全射。
- (ii) 任意の  $\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus \{0\}$  であって  $p\mathcal{K}^{\circ} \subset \varpi\mathcal{K}^{\circ}$  となるものについて  $\mathcal{K}^{\circ}/\varpi \xrightarrow{F} \mathcal{K}^{\circ}/\varpi$  は全射。
- (iii)  $|\varpi|^{1/p}$  をノルムとして与える任意の  $\varpi_{1/p}$  に対して  $\sigma: \mathcal{K}^{\circ}/\varpi_{1/p} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{K}^{\circ}/\varpi$  は全単射。

$\mathcal{K}^{\circ}$  の位相は命題 2.3.1(1) から  $\varpi$  進位相になる。この  $\varpi$  に関する値群  $\Gamma^{*48}$  は  $p$ -divisible である (さらに  $\mathbb{R}$  で稠密)。また、 $k$  は完全である。もし  $\mathcal{K}$  が標数  $p$  の perfectoid であれば完全体になる。

##### 3.1.2 Examples

$\widehat{K}_{\infty}$  を cyclotomic perfectoid field といい、以下のように定義する。

- (1)  $K_0$  を完全体  $k$  の Witt 環  $W(k)$  の商体とする。とくにこれは  $p$  を一意化係数とする完備離散付値環である。この代数閉包を一つ固定し、その中での整合的な 1 の原始  $p$  冪乗根  $(\zeta_{p^i})_{i \geq 1}$  を一つ固定する ( $p^i$  乗根からなる巡回群を  $\mu_{p^i}$  とおくと  $\mathbb{Z}_p \cong \varprojlim_i \mu_{p^i}$  となっている)。このとき円分拡大の列

$$K_i := K_0(\zeta_{p^i}) = K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^i}) \quad (3.1)$$

を取る。すると、 $K_i^{\circ} = W(k)[\zeta_{p^i}]$  であり、一意化係数を  $\zeta_{p^i} - 1$  として持つ。また、 $p$  による剰余をとったとき Frobenius 射によって  $K_i^{\circ}/p \cong (K_{i+1}^{\circ})^p/p$  となる。 $K_{\infty} := \cup_i K_i$  の完備化を  $\widehat{K}_{\infty}$  と書き、これは perfectoid field になる。この値群は  $1/(p-1) \cdot \mathbb{Z}[1/p]$  となる。

- (2)  $\pi$  を  $K_0$  の一意化係数とすると、 $K_0(\pi^{1/p^i})^{\circ} = W(k)[\pi^{1/p^i}]$  になり、 $p$  による剰余をとったとき Frobenius 射によって  $(K_0(\pi^{1/p^i}))^{\circ}/p \cong ((K_0(\pi^{1/p^{i+1}}))^{\circ})^p/p$  という同型がある。 $K_0(\pi^{1/p^{\infty}}) :=$

<sup>\*48</sup>  $|\mathcal{K}| = |\varpi|^{\Gamma}$  となるもののこと。

$\cup K_0(\pi^{1/p^i})$  の完備化も perfectoid field になる。

**命題 3.1.1 ([GR] prop.6.6.6).**  $\mathcal{K}$  が非アルキメデス的な非離散的絶対値について完備な体であるとする。 $\mathcal{K}^s$  を  $\mathcal{K}$  の分離閉包とする。このとき  $\mathcal{K}$  が perfectoid field であること ( $\mathcal{K}^\circ/p$  上で  $F$  が全射) と、deeply ramified であること ( $\Omega_{(\mathcal{K}^s)^\circ/\mathcal{K}^\circ}$  が  $\mathcal{K}^{\circ\circ}$  で消える ([GR] Def.6.6.1, Prop.6.6.2)) は同値。

**系 3.1.2.** perfectoid field の任意の代数拡大体の完備化  $\mathcal{L}$  は perfectoid field になる。

## 3.2 Algebres perfectoides

### 3.2.1

[Sch] section 3 と同様にして、perfectoid field  $\mathcal{K}$  上 ( $\varpi$  を一つ固定しておく) の一様 Banach 代数  $\mathcal{A}$  が perfectoid  $\mathcal{K}$  代数であるとは、次の同値な条件を満たすことである。<sup>\*49</sup>

- (1)  $\mathcal{A}^\circ/p \xrightarrow{F} \mathcal{A}^\circ/p$  は全射。
- (2)  $\mathcal{A}^\circ/p \xrightarrow{F} \mathcal{A}^\circ/p$  が  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  を cadre としたときに almost surjective。
- (3)  $\mathcal{A}^\circ/\varpi \xrightarrow{F} \mathcal{A}^\circ/\varpi$  は全射。
- (4)  $\mathcal{A}^\circ/\varpi_{1/p} \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathcal{A}^\circ/\varpi$  は全単射 (section 2.3.3(1) から単射性はいつでも成り立つ)。
- (5) Frobenius 射によって  $\mathcal{K}^\circ$  代数の同型 (もしくは cadre  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  に関する almost isomorphism )

$$\mathcal{A}^\circ/\varpi_{1/p} \otimes_{\mathcal{K}^\circ/\varpi_{1/p}, \sigma} \mathcal{K}^\circ/\varpi = \mathcal{A}^\circ/\varpi \otimes_{\mathcal{K}^\circ/\varpi, F} \mathcal{K}^\circ/\varpi \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}^\circ/\varpi \quad (3.2)$$

$$\alpha \otimes x \mapsto x\alpha^p \quad (3.3)$$

が誘導される (テンソルを取っているのは  $\mathcal{K}^\circ/\varpi$  代数としての構造射  $\mathcal{K}^\circ/\varpi \rightarrow \mathcal{A}^\circ/\varpi$  を  $p$  冪で取るように変えているからである。すなわちこの左辺はスカラーを変化させた  $(\mathcal{A}^\circ/\varpi)^{[F]}$  のこと。<sup>\*50</sup>以降でもこのような同型が出てくることに注意する (定理 3.3.2 など))。

perfectoid  $\mathcal{K}$  代数の間の射を連続な  $\mathcal{K}$  代数の射のこととすることで、perfectoid  $\mathcal{K}$  代数の圏 ( $\mathcal{K}\text{-Perf}$ ) を perfectoid  $\mathcal{K}$  代数からなる  $\mathcal{K}\text{-uBan}$  の充満部分圏とする。とくに始対象  $\mathcal{K}$  と終対象  $0$  を持つ。

Banach  $\mathcal{K}$  代数を一つ固定し、perfectoid  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{B}$  と射  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  を perfectoid  $\mathcal{A}$  代数という。これらから明らかな構成によって圏  $\mathcal{A}\text{-Perf}$  が得られる。

また、[Sch] Def.5.1 のようにして次が定義できる。

(a)  $\varpi$  進完備かつ flat な  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  代数  $A$  であって、Frobenius 射が (almost での) 同型  $A/\varpi_{1/p} \xrightarrow{F} A/\varpi$  を

<sup>\*49</sup>  $\varpi \in \mathcal{K}^{\circ\circ}$  が  $p\mathcal{K}^\circ \subset \varpi\mathcal{K}^\circ$  であることと  $\varpi^b \in \mathcal{K}^{b\circ} \cong \varinjlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{K}^\circ$  が取れていること (section 3.3.1) から  $\varpi^{1/p} \in \mathcal{K}^\circ$  を考えることで一様 Banach であることと合わせて、この定義は (perfectoid field 上において)[Mor] Def.V.1.1.1 と同値であることがわかる。

<sup>\*49</sup> 一様 Banach 代数  $\mathcal{A}$  の  $\mathcal{A}^\circ$  は系 2.3.2 から  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat であることがわかっているため、この定義は  $\mathcal{A}^\circ$  が下記の (a) で定義された perfectoid  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  代数の条件を満たしていることに等しい

<sup>\*50</sup> 命題 3.4.2 の証明で用いる  $F^*$  は cadre からの射を  $F$  に取り変えているが、ここでの  $[F]$  は cadre からとは限らない構造射を変化させているときに用いることとする。ただし、ここでは  $(\mathcal{K}^\circ/\varpi, \mathcal{K}^{\circ\circ}/\varpi)$  を cadre とみなすことが出来るので  $F^*(\mathcal{A}^\circ/\varpi)$  と  $(\mathcal{A}^\circ/\varpi)^{[F]}$  は同じものであることに注意する。

誘導するものを perfectoid  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  代数という。これを対象として持ち、射は  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  代数の射を持つ圏を  $(\mathcal{K}^\circ)^a\text{-Perf}$  と表す。

- (b) flat な  $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi$  代数  $\bar{A}$  であって、Frobenius 射が (almost での) 同型  $A/\varpi_{1/p} \xrightarrow{F} A/\varpi$  を誘導するものを perfectoid  $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi$  代数という。これを対象として持ち、射は  $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi$  代数の射を持つ圏を  $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi\text{-Perf}$  と書く。

### 3.2.2 Remark

- (1)  $\mathcal{A}$  を乗法的 perfectoid  $\mathcal{K}$  代数とする (とくに整域になる)。この商体の完備化は perfectoid field になる。
- (2)  $\mathcal{K}$  の標数が  $p > 0$  であったとする。まず、一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  が perfectoid であることと完全であること ( $\mathcal{A}$  上で  $F$  が全単射) は同値。
- さらに、Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  が一様であることと、被約かつ  $\mathcal{A}^p$  が  $\mathcal{A}$  で閉集合であることは同値 ([Gun] lem.3.5)。\*51 言い換えれば、 $\mathcal{A}$  上の Frobenius 射が単射かつ像が閉集合になることである。ゆえに、(一様とは限らない) Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  が perfectoid であることと、完全であることは同値 (一様性は  $F$  の全射性から従うから)。

**命題 3.2.1.**  $\mathcal{K}$  が標数  $p > 0$  であるとする。perfectoid  $\mathcal{K}$  代数の圏から一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の圏への包含関手は左随伴を次のようにして持つ。\*52

$$\mathcal{K}\text{-uBan} \longrightarrow \mathcal{K}\text{-Perf} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{A} \longmapsto \text{ucolim}_i \mathcal{A}^{1/p^i} = \text{ucolim}_F \mathcal{A} \quad (3.5)$$

によって与える (これは  $p$ -root closure の完備化のことである)。さらにこの関手は右随伴として

$$\mathcal{K}\text{-Perf} \longrightarrow \mathcal{K}\text{-uBan} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{A} \longmapsto \text{ulim}_F \mathcal{A} \quad (3.7)$$

を持つ。

さらにこの  $\mathcal{K}$  の標数が  $p > 0$  のとき系 2.3.2 について、定義域を制限することで、 $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^\circ$  によって、perfectoid  $\mathcal{K}$  代数の圏と  $\mathcal{K}^\circ$  代数  $A$  であって完全、flat、 $\varpi$  進完備、 $A = A_*$  となるものからなる圏の間に圏同値がある。

任意標数のときは [Sch] Lem.5.6 をもとにした次の結果がある。

**補題 3.2.2.** 関手  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^\circ$  が、perfectoid  $\mathcal{K}$  代数の圏から、 $\mathcal{K}^\circ$  代数  $A$  であって flat、 $\varpi$  進完備、 $A = A_*$ 、 $A/\varpi_{1/p} \xrightarrow{x \mapsto x^p} A/\varpi$  が全単射になるものからなる圏への圏同値を与える。

**証明.** 系 2.3.2 を踏まえれば、まず perfectoid  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  について、 $\mathcal{A}^\circ$  はとくに section 3.2.1 の定義と合わ

\*51 [Gun] lem.3.5 では被約性を課していないが、 $a \mapsto \inf_i |a^i|^{1/i}$  がノルムであることの証明に必要である。

\*52  $F$  を  $\mathcal{A}$  上に定義するために標数が  $p > 0$  であることが必要。

せて、上記の条件を満たす。逆にその条件を満たす  $A$  について、まず仮定から  $A[1/\varpi]$  を命題 2.3.1 のように定義できる。 $\mathcal{K}$  が離散的でないことから  $|\mathcal{K}|$  が  $\mathbb{R}_+$  で稠密であることに注意すると、まず命題 2.3.1(b) と  $A$  の仮定から  $(A[1/\varpi])_{\leq 1} = A_* = A$  であり、命題 2.3.1(5) と  $A$  の仮定から  $A[1/\varpi]$  はスペクトラルになる。ゆえにとくに一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数になるので、 $A[1/\varpi]^\circ = (A[1/\varpi])_{\leq 1} = A_* = A$  と  $A$  の仮定と合わせて確かに  $A[1/\varpi]$  は perfectoid  $\mathcal{K}$  代数になる。□

### 3.2.3 Examples

- (1) 基本的な例は  $\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle$  である。これは  $\cup \mathcal{K}\langle T^{1/p^i} \rangle$  の完備化であり、 $\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle = \text{ucolim } \mathcal{K}[T^{1/p^i}]$  で、 $(\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle)^\circ = \mathcal{K}^\circ\langle T^{1/p^\infty} \rangle$  となり、これは  $\cup \mathcal{K}^\circ\langle T^{1/p^i} \rangle$  の  $\varpi$  進完備化に等しい。より一般的に、perfectoid  $\mathcal{A}$  に対して、同じように完備化によって  $\mathcal{A}\langle T^{1/p^\infty} \rangle$  を定義できる。組  $(\mathcal{A}\langle T^{1/p^\infty} \rangle, (T^{1/p^\infty}))$  は、perfectoid  $\mathcal{A}$  代数  $\mathcal{B}$  と  $g \in \mathcal{B}^\circ$  に関する整合的な  $p$  冪乗根  $(g^{1/p^\infty})$  の組  $(\mathcal{B}, (g^{1/p^\infty}))$  に関して普遍的である。
- (2) section 3.1.2(1) で定義した  $\hat{K}_\infty$  に対して、perfectoid  $\hat{K}_\infty$  代数  $\hat{A}_\infty$  を次のように構成する。section 3.1.2(1) の記号を用いて

$$A_i := K_i^\circ[T_1^{1/p^i}, \dots, T_n^{1/p^i}] \otimes_{(K_i)^\circ} K_i \quad (3.8)$$

と定義すると、これは係数が  $K_i$  であって有界な形式的冪級数からなる環であり、ノルムとして係数のノルムの上限を取るもの (Gauss ノルム) を与えると、Banach  $K_i$  代数になる (さらに乗法的かつ位相が (Huber ring の意味での)  $\varpi$  進位相と一致する)。 $i \in \mathbb{Z}^+$  を動かすことで一様 Banach  $K_0$  代数からなる帰納系を為し、それらの間の射 (transition map) は isometric になっている。

section 3.1.2 の  $K_i^\circ = W(k)[\zeta_{p^i}]$  とノルムの定義から  $A := A_0^\circ = W(k)[[T_1, \dots, T_n]]$  となり、任意の  $i \geq 1$  で  $A_i^\circ = K_i^\circ[[T_1^{1/p^i}, \dots, T_n^{1/p^i}]]$  となり、これらは次元  $n+1$  の完備 Noether 正則局所環になる。 $A_i^\circ$  の  $p$  を含むただ一つの素イデアルは  $\zeta_{p^i} - 1$  によって生成されるものである。さらに Frobenius 射によって  $A_i^\circ/p \cong (A_{i+1}^\circ)^p/p$  という同型がある。

$A_\infty := \cup_i A_i$  の完備化  $\hat{A}_\infty := \text{ucolim } A_i$  は perfectoid  $\hat{K}_\infty$  代数になり、この中の有界な元は  $(\hat{K}_\infty)^\circ[[T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}]]$  に含まれる ( $\sum_{n \geq 0} \varpi_{1/p^n} T^n$  は  $\hat{A}_\infty$  に含まれないので一致はしない)。実際、次の標準的な同型

$$(\hat{A}_\infty)^\circ \cong W(k[[T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}]]) \hat{\otimes}_{W(k)} (\hat{K}_\infty)^\circ \quad (3.9)$$

が得られる。これは、 $p$  進完備かつ  $p$ -torsion free な  $W(k)$  加群の間の標準的な射

$$W(k[[T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}]]) \hat{\otimes}_{W(k)} (\hat{K}_\infty)^\circ \rightarrow (\hat{A}_\infty)^\circ \quad (3.10)$$

であって、 $p$  による剰余で同型になるものがとれることからわかる。

## 3.3 Basculement

### 3.3.1

$\mathcal{K}$  の標数が 0 であるとする。[Sch] Lem.3.4 の通り、乗法的写像

$$\varinjlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{K}^\circ \longrightarrow \varinjlim_F \mathcal{K}^\circ / \varpi \quad (3.11)$$

$$(x_i) \longmapsto (\overline{x_i}) \quad (3.12)$$

は同相写像になり、この全単射を通じて、乗法的連続写像

$$\# : \varinjlim_F \mathcal{K}^\circ / \varpi \longrightarrow \mathcal{K}^\circ \quad (3.13)$$

$$x = (\overline{x_i}) \longmapsto \#(x) := \lim_{i \rightarrow \infty} x_i^{p^i} \quad (3.14)$$

が得られる。とくに、ある  $\varpi^b \in \varinjlim_F \mathcal{K}^\circ / \varpi$  であって  $|\#(\varpi^b)| = |\varpi|$  となるものが存在する ([Sch] Lem.3.4(ii))。とくに (3.12) と合わせて  $\varpi$  の整合的な  $p$  冪乗根  $(\varpi^{1/p^n}) \subset \mathcal{K}^\circ$  が存在する (とくに  $\varpi_{1/p}$  として  $\varpi^{1/p}$  が取れる)。 $\mathcal{K}^{b\circ} := \varinjlim_F \mathcal{K}^\circ / \varpi$  とする。すると、

$$\mathcal{K}^b := \left( \varinjlim_F \mathcal{K}^\circ / \varpi \right) [1/\varpi^b] \quad (3.15)$$

と、 $\mathcal{K}^{b\circ}$  にノルムとして

$$|x^b| := |\#(x^b)| \quad (3.16)$$

を入れて命題 2.3.1(2) から得られるノルムを入れると、これは標数  $p$  の perfectoid field になり、 $\mathcal{K}^{b\circ}$  はこの付値環になる (すなわち  $\mathcal{K}^{b\circ} = (\mathcal{K}^b)^\circ$  となる)。さらに  $\# : \mathcal{K}^{b\circ} \rightarrow \mathcal{K}^\circ$  は同型  $\mathcal{K}^{b\circ} / \varpi \cong \mathcal{K}^\circ / \varpi$  を誘導する。

### 3.3.2

$\mathcal{A}$  を一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数とする ( $\mathcal{K}$  は perfectoid field として取っている)。乗法的写像  $\varinjlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{A}^\circ \rightarrow \varinjlim_F \mathcal{A}^\circ / \varpi$  は同相写像になる。このことから乗法的連続写像

$$\# : \varinjlim_F \mathcal{A}^\circ / \varpi \longrightarrow \mathcal{A}^\circ \quad (3.17)$$

$$a = (\overline{a_i}) \longmapsto \#(a) := \lim_{i \rightarrow \infty} a_i^{p^i} \quad (3.18)$$

が定義できる。とくにこの  $\#$  と標準的な全射  $\mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{A}^\circ / \varpi$  の合成は第一成分の射影  $(\overline{a_i}) \mapsto a_0$  に等しい。さらに  $\varinjlim_F \mathcal{A}^\circ / \varpi$  は自然に  $\varpi^b$  進完備かつ完全な  $\mathcal{K}^{b\circ}$  代数になる。この上のノルムは

$$|a^b| := |\#(a^b)| \quad (3.19)$$

に他ならない。このことから、 $\mathcal{A}$  の tilt(basculée) と呼ばれる perfectoid Banach  $\mathcal{K}^b$  代数が

$$\mathcal{A}^b := \left( \varinjlim_F \mathcal{A}^\circ / \varpi \right) [1/\varpi^b] \quad (3.20)$$

に命題 2.3.1(2) から得られるノルムを入れることで定義される。 $\mathcal{K}$  のときと同様にして  $\mathcal{A}^{b\circ} := \varinjlim_F \mathcal{A}^\circ / \varpi$  とすると  $\mathcal{A}^{b\circ} = (\mathcal{A}^b)^\circ$  を満たす ([Mor] Prop.V.1.2.1(ii))。また、 $\#(\varpi^b) = \varpi$  と  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ [1/\varpi]$  に注意すると、自然に乗法的写像  $\# : \mathcal{A}^b \rightarrow \mathcal{A}$  が構成できる。一様 Banach 代数の間の射の性質から、 $\mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  を誘導できることより、 $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^b$  は関手的である。すなわち、関手



$$\flat: \mathcal{K}\text{-uBan} \longrightarrow \mathcal{K}^b\text{-Perf} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{A} \longmapsto \mathcal{A}^b \quad (3.22)$$

が得られる。誤解のない範囲において、定義域を制限したものも同様に  $\flat: \mathcal{K}\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{K}^b\text{-Perf}$  と表す。

一方で  $\mathcal{A}$  が一様であることから、(スペクトラル (半) ノルムで置き換えて) 命題 2.3.1(f) から、 $\mathcal{A}^\circ/\varpi$  上の Frobenius 射の  $n$  回合成  $F^n$  の核は  $\varpi^{1/p^n}(\mathcal{A}/\varpi^\circ)$  となる。このとき、(3.18) の後に述べたとおり、 $\# : \varinjlim_F \mathcal{A}^\circ/\varpi \rightarrow \mathcal{A}^\circ$  から環準同型  $\varinjlim_F \mathcal{A}^\circ/\varpi \rightarrow \mathcal{A}^\circ/\varpi$  が誘導され、この核は  $\varinjlim_F \varpi^{1/p^n}(\mathcal{A}^\circ/\varpi) = \varpi^b \varinjlim_F (\mathcal{A}^\circ/\varpi)$  になる ( $\varpi^{1/p^n} a_n$  は  $a_n$  を決定しないが、 $F$  によって移すことでわかる)。このことから次が従う。

**命題 3.3.1.** 一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  について  $\mathcal{A}^b$  は確かに perfectoid  $\mathcal{K}^b$  代数であり、 $\# : \mathcal{A}^{b^\circ} \rightarrow \mathcal{A}^\circ$  によって、単射準同型

$$\mathcal{A}^{b^\circ}/\varpi^b \hookrightarrow \mathcal{A}^\circ/\varpi \quad (3.23)$$

が得られる。これが同型であることと  $\mathcal{A}$  が perfectoid であることは同値。

**証明.**  $\mathcal{A}^b$  が perfectoid  $\mathcal{K}^b$  代数であることは section 3.2.2(2) と  $\mathcal{A}^{b^\circ}$  の完全性から従う。 $\mathcal{A}$  が perfectoid であれば  $\mathcal{A}^\circ/\varpi \xrightarrow{F} \mathcal{A}^\circ/\varpi$  の全射性からわかる。逆に同型であれば全射性が定義域側の第一成分を見ればわかる。□

### 3.3.3 Example

- (1)  $(\mathcal{K}\langle T^{1/p^\infty} \rangle)^b$  と  $\mathcal{K}^b\langle T^{1/p^\infty} \rangle$  は自然に同型になる ( $\#$  で  $T$  同士が移り合う)。
- (2) perfectoid  $\widehat{K}_\infty^b$  代数  $A_\infty^b$  が次のように定義される。section 3.1.2 と section 3.2.3(2) の記号を用いる。まず  $\varpi^b := \zeta_{p^i} - 1 \in K_i^\circ$  を取る。すると、 $\widehat{K}_\infty^{b^\circ} (= (\widehat{K}_\infty)^{b^\circ})$  は  $k[[\varpi^b]]$  の  $p$ -root closure の  $\varpi^b$  進完備化と同一視され、 $\widehat{A}_\infty^{b^\circ} (= (\widehat{A}_\infty)^{b^\circ})$  は  $k[[\varpi^b, T_1, \dots, T_n]]$  の  $p$ -root closure の  $\varpi^b$  進完備化と同一視される ( $\varpi^b$  による剰余を取ることで示される)。 $\widehat{A}_\infty^b$  と  $\widehat{A}_\infty$  それぞれの  $T_i$  は  $\#$  で移り合う。

### 3.3.4 Remark

- (1)  $\mathcal{A}$  が perfectoid であるとき、 $\#(\mathcal{A}^{b^\circ}) \subset \mathcal{A}^\circ$  が生成する  $\mathcal{K}^\circ$  加群 (代数) は  $\mathcal{A}^\circ$  で稠密である。実際、 $A \subset \mathcal{A}^\circ$  をその生成された部分  $\mathcal{K}^\circ$  加群の閉包とする。包含写像と標準的な全射と命題 3.3.1 から得られる可換図式

$$\begin{array}{ccccc} A := \overline{\#(\mathcal{A}^{b^\circ})} & \hookrightarrow & \mathcal{A}^\circ & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}^\circ/\varpi \\ \uparrow & & \uparrow \# & & \uparrow \cong \\ \#(\mathcal{A}^{b^\circ}) & \xleftarrow{\#} & \mathcal{A}^{b^\circ} & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}^{b^\circ}/\varpi^b \end{array}$$

を考えれば、 $A \rightarrow \mathcal{A}^\circ/\varpi$  は全射になる。ゆえに二つの  $\varpi$  進完備な  $\mathcal{K}^\circ$  加群  $A$  と  $\mathcal{A}^\circ$  の間の包含写像  $A \hookrightarrow \mathcal{A}^\circ$  に対して中山の補題 (section 1.3) を用いれば、 $A = \mathcal{A}^\circ$  になる。

- (2) 一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  が整域ならば  $\mathcal{A}^b$  も整域になる。実際、 $a^b, b^b \in \mathcal{A}^b$  が  $a^b b^b = 0$  となったとす。このとき  $\#$  の乗法性から  $\#(a^b)\#(b^b) = \#(a^b b^b) = 0 \in \mathcal{A}$  となるから、 $\mathcal{A}$  が整域であることから

$\#(a^b) = 0$  または  $\#(b^b) = 0$  となる。(3.19) がノルムになっていることから、これは  $a^b = 0$  または  $b^b = 0$  に等しいので  $\mathcal{A}^b$  は整域になる。

- (3)  $\mathcal{A}$  のノルムが乗法的であるとする、 $\mathcal{A}^b$  のノルムも乗法的になる。 $\mathcal{A}$  が perfectoid であればこの逆も成り立つ。?実際、(1) からわかる。もしくは  $\mathcal{A}^b$  の一様性からスペクトラル (半) ノルムに取り替えて、これらがスペクトラルであるとする、 $\mathcal{A}^b$  に関してはそのノルムも乗法性を持つため、 $\mathcal{A}^{b\circ}/\mathcal{A}^{b\circ\circ}$  は整域になる。 $\mathcal{A}$  もスペクトラルであるとしてよく、 $\mathcal{A}$  が perfectoid より [Mor] Rem.V.1.2.4 から同型  $\mathcal{A}^{b\circ}/\mathcal{A}^{b\circ\circ} \cong \mathcal{A}^\circ/\mathcal{A}^{\circ\circ}$  がある。section 2.2.1 の最後に書いてあることとスペクトラル性から  $\mathcal{A}$  は乗法的である。
- (4)  $\mathcal{A}$  の冪等元全体と  $\mathcal{A}^\circ/\varpi$  の冪等元全体と  $\mathcal{A}^b$  の冪等元全体は互いに全単射で移り合う ( $e = e^2 \in \mathcal{A} \mapsto \bar{e} \in \mathcal{A}^\circ/\varpi \mapsto e^b := (\dots, e, e) \in \mathcal{A}^{b\circ} \mapsto \#(e^b) = e \in \mathcal{A}$  と移り合う)。
- (5) perfectoid  $\mathcal{K}$  代数の間の射  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  が isometric であることと、 $\varphi^b: \mathcal{A}^b \rightarrow \mathcal{B}^b$  が isometric であることは同値。実際、まず一様性からスペクトラルであるとしてよく、このとき isometric 性は  $\varphi^\circ: \mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  の  $\varpi$  による剰余を取った後の射  $\bar{\varphi}: \mathcal{A}^\circ/\varpi \rightarrow \mathcal{B}^\circ/\varpi$  の単射性と同値であり (命題 2.3.1(2)(c))、命題 3.3.1 からこれは  $\varphi^{b\circ}: \mathcal{A}^{b\circ} \rightarrow \mathcal{B}^{b\circ}$  の単射性と同値であり、同様にして  $\varphi^b: \mathcal{A}^b \rightarrow \mathcal{B}^b$  が isometric であることと同値になる。

### 3.3.5

以下では cadre として  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  を取る。perfectoid の基礎的な定理を記載しておく ([Sch] Theo.5.2, Rem.5.18, Theo.3.7 および [Bha] Theo.6.2.5, Cor.6.2.6)。

**定理 3.3.2.** (1) tilting  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^b$  は  $((\varpi, \varpi^b) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}^b$  のとり方によらずに) perfectoid  $\mathcal{K}$  代数の圏と perfectoid  $\mathcal{K}^b$  代数の圏の間の圏同値を与える。

(2)  $\mathcal{K}$  と  $\mathcal{K}^b$  それぞれの上の perfectoid について  $(-)^{\circ}$  を作用させてからそれぞれ  $\varpi$  と  $\varpi^b$  で剰余を取ったものとも上の二つの同値な圏は圏同値になる。また、(almost の意味で) flat な  $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi$  代数  $\bar{A}$  であって、Frobeniusu 射によって同型  $(\bar{A}/\varpi_{1/p})^{[F]} = \bar{A}/\varpi_{1/p} \otimes_{\mathcal{K}^\circ/\varpi_{1/p}, \sigma} \mathcal{K}^\circ/\varpi \xrightarrow{\cong} \bar{A}$  を持つもの\*53とも圏同値になる。

[Fon] Theo.1.2, Theo.3.2 において J.-M. Fontaine は  $p$  進 Hodge 理論でよく知られている構成によって直接この圏同値を示した。それは次のようなものである。まず、 $\mathcal{K}^\circ$  は  $W(\mathcal{K}^{b\circ})$  の商になり、perfectoid  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  の tilt  $\mathcal{A}^b$  に対して、記号  $\sharp^\circ$  と  $\sharp$  を

$$(\mathcal{A}^b)^{\sharp^\circ} := W(\mathcal{A}^{b\circ}) \otimes_{W(\mathcal{K}^{b\circ})} \mathcal{K}^\circ \quad (3.24)$$

$$(\mathcal{A}^b)^\sharp := (\mathcal{A}^b)^{\sharp^\circ}[1/\varpi] \quad (3.25)$$

と定義すると、これは tilt 関手  $b: \mathcal{K}\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{K}^b\text{-Perf}$  の準逆関手

$$\sharp: \mathcal{K}^b\text{-Perf} \longrightarrow \mathcal{K}\text{-Perf} \quad (3.26)$$

$$\mathcal{B} \longmapsto (\mathcal{B})^\sharp := \mathcal{B}^{\sharp^\circ}[1/\varpi] = (W(\mathcal{B}) \otimes_{W(\mathcal{K}^{b\circ})} \mathcal{K}^\circ)[1/\varpi] \quad (3.27)$$

\*53 section 3.2.1??で定義された、[Sch] Def.5.1 で言うところの perfectoid  $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi$  代数のこと。

を誘導する。さらに  $(-)^{\circ}$  を取ったあとにそれぞれ  $\varpi$  と  $\varpi^b$  で剰余を取る関手の準逆関手として、それぞれ

$$A \mapsto \left( \varinjlim_F \overline{A} \right)^{\sharp^{\circ}} \quad (3.28)$$

$$A \mapsto \varinjlim_{F^{\dagger}} \overline{A} \quad (3.29)$$

が取れることから従う。

perfectoid  $\mathcal{A}$  を一つ固定すると、定理 3.3.2(1) の結果から tilt 関手が perfectoid  $\mathcal{A}$  代数の圏と perfectoid  $\mathcal{A}^b$  代数の圏の間の圏同値を与える。とくに section 3.2.3(1) で構成した  $\mathcal{A} = K\langle T^{1/p^{\infty}} \rangle$  を取ることが多い。

### 3.3.6

そもそも section 3.3.2 で定義したように、任意の一樣 Banach  $K$  代数  $\mathcal{A}$  に対して tilt によって、perfectoid  $\mathcal{A}^b$  代数  $\mathcal{A}^b$  と section 3.3.1 から  $\sharp$  によって単射  $\mathcal{A}^{b^{\circ}}/\varpi \hookrightarrow \mathcal{A}/\varpi$  が関手的に取れた。ここで、次のような関手

$$\natural := \sharp \circ \flat: K\text{-uBan} \longrightarrow K\text{-Perf} \quad (3.30)$$

$$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{\natural} = (\mathcal{A}^b)^{\sharp} = (\mathcal{A}^b)^{\sharp^{\circ}}[1/\varpi] = (W(\mathcal{A}^{b^{\circ}}) \otimes_{W(K^{b^{\circ}})} K^{\circ})[1/\varpi] \quad (3.31)$$

が定義できる。

**命題 3.3.3.** (1) 関手  $\natural: K\text{-uBan} \rightarrow K\text{-Perf}$  は包含関手  $\iota: K\text{-Perf} \rightarrow K\text{-uBan}$  の右随伴になる。さらに  $\mathcal{A} \in K\text{-uBan}$  はスペクトラル (半) ノルムに関して余単位随伴  $\iota(\mathcal{A}^{\natural}) = \mathcal{A}^{\natural} \rightarrow \mathcal{A}$  は isometric になり、これが同型射であることと  $\mathcal{A}$  が perfectoid であることは同値。

(2) 関手  $\flat: K\text{-uBan} \rightarrow K^b\text{-Perf}$  は関手  $\iota \circ \sharp: K^b\text{-Perf} \rightarrow K\text{-uBan}$  の右随伴になる。

圏論の言葉で言えば、(1) は  $K\text{-Perf}$  が  $K\text{-uBan}$  の coreflective な (充満) 部分圏であるということである (すなわち、包含関手が右随伴を持つ充満部分圏である)。

**証明.** (1)  $\flat$  随伴性を示す。  $K\text{-Perf}$  上で  $\sharp$  が  $\flat$  の準逆関手になっていること ((3.27)) から  $\natural \circ \iota = \sharp \circ \flat \circ \iota \cong \text{id}_{K\text{-Perf}}$  となる。  $\mathcal{A} \in K\text{-Perf}$  と  $\mathcal{B} \in K\text{-uBan}$  について、

$$\text{Hom}_{K\text{-Perf}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}^{\natural}) \cong \text{Hom}_{K\text{-Perf}}((\iota(\mathcal{A}))^{\natural}, \mathcal{B}^{\natural}) = \text{Hom}_{K\text{-Perf}}((\mathcal{A}^b)^{\sharp}, (\mathcal{B}^b)^{\sharp}) \quad (3.32)$$

$$\cong \text{Hom}_{K^b\text{-Perf}}(\mathcal{A}^b, \mathcal{B}^b) = \text{Hom}_{K^b\text{-uBan}}(\mathcal{A}^b, \mathcal{B}^b) \cong \quad (3.33)$$

となる。ここで、一つ目の同型は  $\natural \circ \iota = \sharp \circ \flat \circ \iota \cong \text{id}_{K\text{-Perf}}$  から、二つ目と四つ目の等号はそれぞれの定義、三つ目の同型は  $\sharp: K^b\text{-Perf} \rightarrow K\text{-Perf}$  が圏同値であることからわかる。

余単位随伴  $\mathcal{A}^{b^{\circ}} \rightarrow \mathcal{A}^{\circ}$  が isometric であることは、まず  $\mathcal{A} \in K\text{-uBan}$  からスペクトラル (半) ノルムを入れれば  $\mathcal{A}_{\leq 1} = \mathcal{A}^{\circ}$  から命題 2.3.1(2)(c) を  $\mathcal{A}^{b^{\circ}} \rightarrow \mathcal{A}^{\circ}$  に適用すれば  $\mathcal{A}^{b^{\circ}}/\varpi \rightarrow \mathcal{A}^{\circ}/\varpi$  の単射性から言える。ここで命題 3.3.1 の単射性からわかる。同型であれば  $\mathcal{A}^{\natural} \in K\text{-Perf}$  であることから  $\mathcal{A}$  も perfectoid になる。

(2)  $\flat|_{K\text{-Perf}} \circ \sharp \cong \text{id}_{K^b\text{-Perf}}$  であることに注意すると、 $\flat \cong \flat|_{K\text{-Perf}} \circ \sharp \circ \flat = \flat|_{K\text{-Perf}} \circ \natural$  である。したがって、 $\mathcal{A} \in K^b\text{-Perf}$  と  $\mathcal{B} \in K\text{-uBan}$  について

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b\text{-Perf}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}^b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b\text{-Perf}}(\mathcal{A}, (\mathcal{B}^b)^b|_{\mathcal{K}\text{-Perf}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\text{-Perf}}(\mathcal{A}^\sharp, ((\mathcal{B}^b)^b|_{\mathcal{K}\text{-Perf}})^\sharp) \quad (3.34)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\text{-Perf}}(\mathcal{A}^\sharp, \mathcal{B}^\sharp) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}\text{-uBan}}(\iota(\mathcal{A}^\sharp), \mathcal{B}) \quad (3.35)$$

となる。ここで、一つ目と三つ目の同型は  $b|_{\mathcal{K}\text{-Perf}} \circ \sharp \cong \mathrm{id}_{\mathcal{K}^b\text{-Perf}}$  から、二つ目の同型は  $\sharp: \mathcal{K}^b\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{K}\text{-Perf}$  が圏同値であることから、四つ目の同型は (1) の随伴性から従う。  $\square$

### 3.3.7

tilting の重要な応用として perfectoid の圏におけるテンソル積が挙げられる。

**命題 3.3.4.**  $\mathcal{K}$  を perfectoid field とし、 $\mathcal{A}$  を perfectoid  $\mathcal{K}$  代数とする。 $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{C}$  が perfectoid  $\mathcal{A}$  代数であるとき、perfectoid  $\mathcal{K}$  代数の push-out が存在し、これは一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数の push-out  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}$  (section 2.2.5) と等しくなる。標準的な射<sup>\*54</sup>

$$(\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* \longrightarrow (\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C})^\circ \quad (3.36)$$

は同型になる。とくに  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  がスペクトラルノルムを持っていたとすると  $\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C} = \mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$  となり、単位円板は  $(\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_*$  となる。

**証明.** まず存在性を示す。補題 3.2.2 から圏同値で移した先で考えれば良いので  $\mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{B}^\circ$  と  $\mathcal{A}^\circ \rightarrow \mathcal{C}^\circ$  に関して push-out を持てば良い。 $\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  がその push-out になることを示す。そのためにはこの  $\mathcal{K}^\circ$  代数が補題 3.2.2 の  $\mathcal{A}$  の四つの条件をすべて満たすことを示せば良い。完備性は構成から明らかに満たされる。Frobeniusu 射  $(\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)/\varpi_{1/p} \rightarrow (\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)/\varpi$  の全射性は  $\mathcal{B}$  と  $\mathcal{C}$  が perfectoid であることから従う。単射性は、まず命題 2.3.1(1) から  $\mathcal{B}^\circ \otimes_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  が  $\varpi$  進 ( $\varpi_{1/p}$  進) 位相を持つから、

$$(\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)/\varpi \cong (\mathcal{B}^\circ \otimes_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)/\varpi \cong \mathcal{B}^\circ \otimes_{\mathcal{A}^\circ} (\mathcal{C}^\circ \otimes_{\mathcal{A}^\circ} (\mathcal{A}^\circ/\varpi)) \cong \mathcal{B}^\circ \otimes_{\mathcal{A}^\circ} (\mathcal{C}^\circ/\varpi) \quad (3.37)$$

であり、?単射性が分かる。

$\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ = (\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_*$  を示す。

$\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  の  $\mathcal{K}^\circ$  上の flat 性を示す。すなわち  $\varpi$ -torsion free であることを示せば良い。まず  $\mathcal{K}$  の標数が  $p > 0$  のとき、 $\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  が完全であることから分かる。 $\mathcal{K}$  の標数が 0 のとき、定理 3.3.2(2) の圏同値から  $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi\text{-Perf}$  に移した  $(\mathcal{B}^\circ)^a \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi} (\mathcal{C}^\circ)^a/\varpi$  が  $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi$  上 flat なら良い。 $(\mathcal{K}^\circ)^a/\varpi\text{-Perf}$  と  $((\mathcal{K}^b)^\circ)^a/\varpi^b\text{-Perf}$  の間の tilt による圏同値 (定理 3.3.2(2)) と  $((\mathcal{K}^b)^\circ)^a/\varpi^b\text{-Perf}$  と  $\mathcal{K}^b\text{-Perf}$  の間の圏同値 (定理 3.3.2(2)) から標数  $p > 0$  で考えれば良いことが分かり、すでに示したため、flat であることがわかった。

以上より、 $\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  が補題 3.2.2 の条件を満たすから、 $?( \mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ ) [1/\varpi] = \mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}}^u \mathcal{C}$  は  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  と  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  に関する push-out になる。

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  がスペクトラルであるとする、上で示したように  $\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  が  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat であり、すなわち  $\varpi$ -torsion free であるため、命題 2.3.1(e) から

$$(\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C})_{\leq 1} = (\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* \quad (3.38)$$

<sup>\*54</sup>  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  の一様性と命題 2.3.1(e) から得られる射  $(\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* \rightarrow ((\mathcal{B}^\circ \hat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)/(\varpi^\infty\text{-torsion}))_* = (\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C})_{\leq 1} \hookrightarrow (\mathcal{B} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{C})^\circ$  のこと。

となる。ここで  $\mathcal{K}$  が perfectoid より、 $\varpi^{1/p^n} \in \mathcal{K}^{\circ\circ}$  が取れていることと、 $\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  の  $\mathcal{K}^\circ$  上の flat 性から命題 2.3.1(2) の仮定を満たしているので命題 2.3.1(2)(b) の通り、

$$(\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* = \bigcap_{n \geq 0} \varpi^{-1/p^n} (\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ) \quad (3.39)$$

となっている。補題 2.5.1(1) の証明の最後の図式は  $g = \varpi$  として取っても成り立つから、

$$(\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* = \bigcap_{n \geq 0} \varpi^{-1/p^n} (\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ) = \varprojlim_{\varpi^{1/p^m-1/p^{m+1}}} (\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ) \quad (3.40)$$

となる。したがって補題 2.5.1(3) の証明を見れば今の場合でも成り立つため、

$$(\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* / \varpi \longrightarrow ((\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ) / \varpi)_* \quad (3.41)$$

が単射になる。これは  $\varpi$  を  $\varpi_{1/p}$  に変えても  $\varpi_{1/p} \in \mathcal{K}^{\circ\circ} \setminus \{0\}$  なので成り立っている。上で示した Frobeniusu 射  $(\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ) / \varpi_{1/p} \rightarrow (\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ) / \varpi$  の単射性と  $(-)_* = \text{Hom}_{\mathcal{K}^\circ}(\mathcal{K}^{\circ\circ}, -)$  の左完全性と、(3.41) から、可換図式

$$\begin{array}{ccc} ((\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ) / \varpi_{1/p})_* & \xleftarrow{F} & ((\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ) / \varpi)_* \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* / \varpi_{1/p} & \xrightarrow{F} & (\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* / \varpi \end{array}$$

が取れて、三辺の単射性から下の水平方向の射も単射になる。ゆえに (3.38) と命題 2.3.1(5) の同値性から  $\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  はスペクトラルになる。とくに一樣であるため  $\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ}^u \mathcal{C}^\circ = \mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ$  となり、(3.38) から単位円板は  $(\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_*$  になる。□

以上命題 3.3.4 から、perfectoid 代数の圏は finite colimit を持ち、これは section 2.2.5 で定義した一樣 Banach 代数の圏で計算した push-out に等しい (さらに??で詳しく扱う)。この操作は定理 3.3.2(1) の圏同値から tilt を取る操作と可換であることに注意する。

さらにこの命題 3.3.4 から関手  $-\widehat{\otimes}_{\mathcal{K}} \mathcal{A}: \mathcal{K}\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{A}\text{-Perf}$  は忘却関手  $\mathcal{A}\text{-Perf} \rightarrow \mathcal{K}\text{-Perf}$  の左随伴になる。

## 3.4 Extensions étalefinies d'algebres perfectoides

### 3.4.1

$\mathcal{K}$  を perfectoid field とし、section 3.3.5 からここまでと同様に cadre として  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  を取る。perfectoid の二つ目の基礎的な定理を記載しておく ([Sch] Theo.7.9)。これは Faltings の "purity theorem" の一般化になっていて、さらにこれを後に??で一般化する。

**定理 3.4.1.**  $\mathcal{K}$  を perfectoid field とし、 $\mathcal{A}$  が perfectoid  $\mathcal{K}$  代数であるとする。

(1) 圏同値

$$\{\text{finite étale } (\mathcal{A}^\circ)^a \text{ 代数}\} \xrightarrow{\cong} \{\text{finite étale perfectoid } \mathcal{A} \text{ 代数}\} \xrightarrow{\cong} \{\text{finite étale } \mathcal{A} \text{ 代数}\} \quad (3.42)$$

がある。ここで、一つ目の関手は  $1/\varpi$  を添加する関手であり、二つ目の関手はノルム (および位相) を忘れる忘却関手である。

(2) 上記 (1) の圏同値は tilt 関手と整合性的である。

とくに  $\mathcal{A}$  上 finite étale な  $\mathcal{B}$  は perfectoid になる。ここで  $\mathcal{B}$  のスペクトラル半ノルムは唯一つの完備なスペクトラルノルムである (section 2.2.4)。さらに finite projective  $\mathcal{A}$  加群  $\mathcal{B}$  としての canonical topology と同じ位相を定めるただ一つの完備かつスペクトラルなノルムでもある。とくにこの canonical topology の性質から  $\mathcal{B}$  から位相  $\mathcal{A}$  加群への  $\mathcal{A}$  加群としての準同型はすべて連続になる ([Hen] Theo.1.17)。また、 $\mathcal{A}$  を固定する  $\mathcal{B}$  の  $\mathcal{K}$  自己準同型は連続であり、そのスペクトラルノルムに関して isometric になる。

### 3.4.2 Example prophylatique

定理 3.4.1(1) の "étale" を外すことはできないことが次の例から分かる。すなわち、perfectoid 代数上 perfectoid ではないものが存在する。まず section 3.2.3(2) の例  $\hat{A}_\infty$  を  $n = 1, p = 2$  として取る。とくに section 3.1.2(1) で定義した  $\hat{K}_\infty$  を取っていて、原始  $2^2$  乗根を取ればこれは  $-1$  の二乗根でもあるので、 $\sqrt{-1} = \zeta_2 \in K_2^\circ \subset \hat{K}_\infty$  が取れる。とくに  $\hat{K}_\infty$  は perfectoid field であり、その構成から  $\varpi := 2 \in \hat{K}_\infty$  として取れる。

$g := T + 4 \in W(k)[[T_1^{1/2^i}]] = A_i^\circ \subset \hat{A}_\infty$  を取り、(乗法的ノルム) Banach  $\hat{K}_\infty$  代数  $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}]$  を取る。これは perfectoid にならない。? 実際、 $(\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ$  の任意の元  $a_1 + a_2\sqrt{g}$  について、トレースとノルムを計算すると  $2a_1, 2a_2, a_1^2 - a_2^2g \in (\hat{A}_\infty)^\circ$  となり、とくに最後の条件から  $a_1(0) \in \mathcal{K}^\circ$  となる。ここで、

$$f := \frac{\sqrt{-1}+1}{2}(\sqrt{T+4} + T^{1/2}) = \frac{\sqrt{-1}+1}{2}T^{1/2} + \frac{\sqrt{-1}+1}{2}g \in \hat{A}_\infty[\sqrt{g}] \quad (3.43)$$

を取る。二乗を計算すると、

$$f^2 = \frac{(\sqrt{-1}+1)^2}{4}(T+4 - T - \sqrt{T+4}T^{1/2}) = \frac{\sqrt{-1}}{2}(4 - \sqrt{T+4}T^{1/2}) = 2\sqrt{-1} - \frac{\sqrt{-1}}{2}T^{1/2}\sqrt{T+4} \quad (3.44)$$

であり、 $\sqrt{-1}, \sqrt{T+4} = g \in (\hat{A}_\infty)^\circ$  とノルムの乗法性より  $|f|^2 = |f^2| \leq \max\{|2\sqrt{-1}|, |\sqrt{-1}/2||T^{1/2}||g|\} \leq 1$  から  $f \in \hat{A}_\infty[\sqrt{g}]^\circ$  が分かる。ここで  $f$  は  $(\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ$  の 2 による剰余を取った  $(\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ / 2(\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ$  において二乗根を持たないことが示される。実際、もし  $e = a_1 + a_2\sqrt{g} \in (\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ$  が  $e^2 - f \in 2(\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ \subset (\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ$  を満たしたとすると、

$$e^2 - f = (a_1 + a_2\sqrt{g})^2 - \left( \frac{\sqrt{-1}+1}{2}T^{1/2} + \frac{\sqrt{-1}+1}{2}\sqrt{g} \right) \quad (3.45)$$

$$= \left( a_1^2 + a_2^2g - \frac{\sqrt{-1}+1}{2}T^{1/2} \right) + \left( 2a_1a_2 - \frac{\sqrt{-1}+1}{2} \right) \sqrt{g} \in (\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ \quad (3.46)$$

よって、最初に述べたことからその  $\sqrt{g}$  の係数について  $2a_1a_2 - (\sqrt{-1}+1)/2 \in (\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ$  となる。?  $|a_1(0)a_2(0)| = 2^{-3/2}$  となるが、これは  $a_1(0), 2a_2(0) \in \mathcal{K}^\circ$  に矛盾する。よって  $f \in (\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ$  を取ることで  $(\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ / 2(\hat{A}_\infty[\sqrt{g}])^\circ$  の  $p = 2$  での Frobenius 射が全射で無いことが分かるため、 $\hat{A}_\infty[\sqrt{g}]$  は perfectoid にならない。

正標数の場合は section 2.4.2(1) が同様に反例になる。

### 3.4.3

定理 3.4.1(1) で考えている関手はすべて忠実充満になっていることに注意する。実際、一つ目の  $1/\varpi$  を添加する関手の忠実充満性は連続性と合わせて明らかであり、二つ目の忘却関手については、定理 3.4.1 の後に述べた通り finite projective  $\mathcal{A}$  加群としての canonical topology と一致しているため、すべての  $\mathcal{A}$  代数としての準同型が連続になるから忠実充満関手である。

したがって定理 3.4.1 の証明には本質的全射性のみを示せば良い。まず一つ目の圏同値については次の命題を用いる。

- 命題 3.4.2.** (1)  $\mathcal{A}$  が perfectoid  $\mathcal{K}$  代数とすると、任意の finite étale  $(\mathcal{A}^\circ)^a$  代数  $B$  は  $1/\varpi$  を添加することで perfectoid  $\mathcal{A}$  代数  $B$  を与え、これは  $B$  にスペクトラル (半) ノルムを与えたとき関手的になり、 $(B^\circ)^a \cong B$  となる。
- (2) 逆に  $B$  が finite étale perfectoid  $\mathcal{A}$  代数 (もしくは群  $G$  に関して (通常)Galois な perfectoid  $\mathcal{A}$  代数) であるとする、 $(B^\circ)^a$  は finite étale  $(\mathcal{A}^\circ)^a$  代数 (もしくは群  $G$  に関して (almost の)Galois な  $(\mathcal{A}^\circ)^a$  代数) になる。

単純な Galois に関する議論は Robba 環を用いる議論に置き換えることも出来る ([KL])。

**証明.** (1) section 1.8 の定義から、 $B$  は  $(\mathcal{A}^\circ)^a$  上 finite projective であり、 $\mathcal{A}^\circ$  が  $\varpi$  進完備より、補題 1.7.1 から  $B$  も  $\varpi$  進完備である。finite étale の定義から  $(\mathcal{A}^\circ)^a \rightarrow B$  はとくに flat である。さらに  $\mathcal{A}^\circ$  は  $\varpi$ -torsion free であるから  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat なので  $B$  は  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  上 flat である。また、section 1.8 の通り  $(\mathcal{A}^\circ)^a \rightarrow B$  は weakly étale であり、 $(\mathcal{A}^\circ)^a \rightarrow (\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi$  によって base change した  $(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi \rightarrow B/\varpi$  は [GR] Lem.3.1.2(i) から weakly étale になる。これは  $\mathbb{F}_p$  上の cadre  $(\mathcal{K}^\circ/\varpi, \mathcal{K}^{\circ\circ}/\varpi)$  に関する almost algebra であるから [GR] 3.5.6 のように  $\mathcal{K}^\circ/\varpi \xrightarrow{F} \mathcal{K}^\circ/\varpi \rightarrow (\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi$  によって  $(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi$  を  $\mathcal{K}^\circ/\varpi$  代数とみなしたものを  $F^*((\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi)$  と表す<sup>\*55</sup>と、[GR] Theo.3.5.13(ii) より次の図式

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi & \longrightarrow & B/\varpi \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ F^*((\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi) & \longrightarrow & F^*(B/\varpi) \end{array}$$

は cocartesian になる。すなわち、 $F^*(B/\varpi) \cong B/\varpi \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi} F^*((\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi)$  となる。ここで、 $\mathcal{A}$  が perfectoid  $\mathcal{K}$  代数なので、section 3.2.1(5) から cadre  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  に関する almost isomorphism  $\mathcal{A}^\circ/\varpi_{1/p} \otimes_{\mathcal{K}^\circ/\varpi_{1/p}, \sigma} \mathcal{K}^\circ/\varpi \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}^\circ/\varpi$  が取れる。以上より、almost isomorphism

$$B/\varpi_{1/p} \otimes_{\mathcal{K}^\circ/\varpi_{1/p}, \sigma} \mathcal{K}^\circ/\varpi = B/\varpi \otimes_{\mathcal{K}^\circ/\varpi, F} \mathcal{K}^\circ/\varpi \cong B/\varpi \otimes_{\mathcal{A}^\circ/\varpi} (\mathcal{A}^\circ/\varpi \otimes_{\mathcal{K}^\circ/\varpi, F} \mathcal{K}^\circ/\varpi) \quad (3.47)$$

$$\cong B/\varpi \otimes_{\mathcal{A}^\circ/\varpi, F} \mathcal{A}^\circ/\varpi = B/\varpi \otimes_{\mathcal{A}^\circ/\varpi} F^*(\mathcal{A}^\circ/\varpi) \quad (3.48)$$

$$\cong F^*(B/\varpi) \quad (3.49)$$

が得られる。ここで、三つ目の同型は  $\mathcal{A}$  に関する  $F$  によって誘導される同型を用いているため、 $\otimes_{\mathcal{A}^\circ/\varpi, F}$  で取れる。したがって、Frobeniusu 射

<sup>\*55</sup> section 3.2.1(5) の記法に注意する。



$$B/\varpi_{1/p} \otimes_{\mathcal{K}^\circ/\varpi_{1/p}, \sigma} \mathcal{K}^\circ/\varpi \longrightarrow B/\varpi \quad (3.50)$$

$$b \otimes x \longmapsto xb^p \quad (3.51)$$

は  $((\mathcal{K}^\circ)^a\text{-Alg})$  において) 同型になる。以上のことから、finite étale  $(\mathcal{A}^\circ)^a$  代数  $B$  は perfectoid  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  代数となる (section 3.2.1(a))。ここで、 $B/\varpi_{1/p} \xrightarrow{x \mapsto x^p} B/\varpi$  は almost isomorphism になる。 $B$  が  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  上 flat かつ  $\varpi$  進完備であり、それぞれ [Sch] Lem.5.3(i)(iv) から  $B_*$  が  $\mathcal{K}^\circ$  上 flat かつ  $\varpi$  進完備になる。さらに  $B/\varpi_{1/p} \xrightarrow{F} B/\varpi$  が almost isomorphism であることから  $(B/\varpi_{1/p})_* \xrightarrow{F} (B/\varpi)_*$  は同型になる。ここで [Sch] Lem.5.3(iii) と section 1.2 の最後のところから  $B_* \rightarrow (B/\varpi)_*$  が almost surjective であることを合わせて  $B_*/\varpi_{1/p} \xrightarrow{F} B_*/\varpi$  が全単射になる。よってこの  $B_*$  に補題 3.2.2 を適用すれば  $\mathcal{B} := B_*[1/\varpi]$  は perfectoid  $\mathcal{K}$  代数になり、 $\mathcal{B}^\circ = (B_*)_* = B_*$  となる。<sup>\*56</sup>すると、 $B$  を  $\mathcal{A}^\circ$  代数とみなせば  $\mathcal{B} = B_*[1/\varpi] = B[1/\varpi]$  であり、 $(\mathcal{B}^\circ)^a = (B_*)^a \cong B$  である。

(2) Galois の場合について。  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  が通常の環に関する群  $G$  に関する Galois であることから、 $\mathcal{A} = \mathcal{B}^G$  であるのでとくに  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  という拡大になっていて、(1.10) のように取った

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \longrightarrow \prod_{\gamma \in G} \mathcal{B} \quad (3.52)$$

$$b \otimes b' \longmapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G} \quad (3.53)$$

が同型射になる。ここで、両辺を完備化した後  $(-)^{\circ}$  を取ると、命題 3.3.4 から、

$$(\mathcal{B}^\circ \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}^\circ} \mathcal{C}^\circ)_* \xrightarrow{\cong} (\mathcal{B} \widehat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B})^\circ \xrightarrow{\cong} \left( \prod_{\gamma \in G} \mathcal{B} \right)^\circ = \prod_{\gamma \in G} \mathcal{B}^\circ \quad (3.54)$$

となり、 $(-)^a$  の完全性から、

$$(\mathcal{B}^\circ)^a \widehat{\otimes}_{(\mathcal{A}^\circ)^a} (\mathcal{C}^\circ)^a \cong \prod_{\gamma \in G} (\mathcal{B}^\circ)^a \quad (3.55)$$

という同型が取れる。この両辺に対して任意の正整数  $m$  で  $\varpi^m$  による剰余を取る、すなわち  $- \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a} (\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m$  を取ると、左辺と右辺はそれぞれ

$$((\mathcal{B}^\circ)^a \widehat{\otimes}_{(\mathcal{A}^\circ)^a} (\mathcal{B}^\circ)^a)/\varpi^m \cong ((\mathcal{B}^\circ)^a \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a} (\mathcal{B}^\circ)^a)/\varpi^m \cong ((\mathcal{B}^\circ)^a \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a} (\mathcal{B}^\circ)^a) \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a} (\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m \quad (3.56)$$

$$\cong ((\mathcal{B}^\circ)^a \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a} ((\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m)) \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m} (((\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m) \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a} (\mathcal{B}^\circ)^a) \quad (3.57)$$

$$\cong ((\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m) \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m} ((\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m) \quad (3.58)$$

$$\left( \prod_{\gamma \in G} (\mathcal{B}^\circ)^a \right) / \varpi^m \cong \left( \prod_{\gamma \in G} (\mathcal{B}^\circ)^a \right) \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a} ((\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m) \quad (3.59)$$

$$\cong \prod_{\gamma \in G} ((\mathcal{B}^\circ)^a \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a} ((\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m)) \cong \prod_{\gamma \in G} (\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m \quad (3.60)$$

となっている。これによって  $(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m \rightarrow (\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m$  に対して、

$$((\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m) \otimes_{(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m} ((\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m) \longrightarrow \prod_{\gamma \in G} (\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m \quad (3.61)$$

$$b \otimes b' \longmapsto (\gamma(b)b')_{\gamma \in G} \quad (3.62)$$

<sup>\*56</sup>  $B$  が perfectoid  $(\mathcal{K}^\circ)^a$  代数となることから、[Sch] Lem.5.6 を適用しても良い。そもそも補題 3.2.2 ではこの [Sch] Lem.5.6 を参照している。

は同型になる。また、 $G$  で固定されるところを考えると、 $\mathcal{B}^G = \mathcal{A}$  であり、 $\mathcal{A}^\circ \hookrightarrow \mathcal{B}^\circ$  が一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数としての射 (とくに連続) であることから、 $\mathcal{B}^\circ \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}^\circ$  ゆえ、

$$(\mathcal{B}^\circ)^G = \mathcal{B}^G \cap \mathcal{B}^\circ = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}^\circ = \mathcal{A}^\circ \quad (3.63)$$

と、 $G$  の  $(\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m$  への作用の仕方から

$$((\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m)^G = (((\mathcal{B}^\circ))^a)^G/\varpi^m = ((\mathcal{B}^\circ)^G)^a/\varpi^m \quad (3.64)$$

より、 $((\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m)^G = (\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m$  となる。さらに  $\mathcal{A}^\circ \hookrightarrow \mathcal{B}^\circ$  の連続性から、 $\mathcal{A}^\circ \cap \varpi^m \mathcal{B}^\circ$  が  $\mathcal{A}^\circ$  で開集合より、任意の  $a \in \mathcal{A}^\circ \cap \varpi^m \mathcal{B}^\circ$  に対して、十分大きい  $N (\geq m)$  で  $a \in \varpi^N \mathcal{A}^\circ \subset \mathcal{A}^\circ \cap \varpi^m \mathcal{B}^\circ$  となるから、 $a \in$  以上より、 $(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m \rightarrow (\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m$  は  $G$  に関して (単射とは限らないが) Galois になる。すると、命題 1.9.1(1) の証明に関して、ここで  $A \rightarrow B$  の単射性は用いていないから、同様に証明することで  $(\mathcal{A}^\circ)^a/\varpi^m \rightarrow (\mathcal{B}^\circ)^a/\varpi^m$  は finite étale になる。ここで cadre  $(\mathcal{K}^\circ, \mathcal{K}^{\circ\circ})$  は  $\mathcal{K}^{\circ\circ} = \varpi^{1/p^\infty} \mathcal{K}^\circ$  となっていることから、section 1.8.2 より、 $(\mathcal{A}^\circ)^a \rightarrow (\mathcal{B}^\circ)^a$  が finite étale になる。

finite étale の場合について。  $\mathcal{A}$  上の  $\mathcal{B}$  が finite projective より、まず [SP] Lem.10.78.2 から、その rank \*57 は有限かつ連続、有界である。そして [MSE1] から  $\mathcal{A}$  を有限直積に分解することで  $\mathcal{B}$  は constant rank  $r$  とすることが出来る。\*58 とくに base change をしているだけなので  $\mathcal{B}$  の finite étale 性は保たれる。すると、 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  が補題 1.9.2 の仮定を満たすから、 $\mathfrak{S}_r$  に関する Galois 拡大  $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$  であって、 $\mathcal{B}$  を経由し、 $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}$  が  $\mathfrak{S}_{r-1}$  に関する Galois 拡大になるものが存在する。とくに  $\mathcal{C}^{\mathfrak{S}_{r-1}} = \mathcal{B}$  となる。? さらに  $\mathcal{C}$  は perfectoid  $\mathcal{A}$  代数にもなるため (section 3.4.4 で示す定理 3.4.1(1) の二つ目の圏同値を用いている)、 $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$  と  $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}$  に上で示したことを適用すれば、 $(\mathcal{A}^\circ)^a \hookrightarrow (\mathcal{C}^\circ)^a$  は  $\mathfrak{S}_r$  に関する Galois 拡大になり、 $(\mathcal{B}^\circ)^a \hookrightarrow (\mathcal{C}^\circ)^a$  は  $\mathfrak{S}_{r-1}$  に関する Galois 拡大になる。すると、命題 1.9.1(3) から  $(\mathcal{A}^\circ)^a \hookrightarrow (\mathcal{B}^\circ)^a$  は階数  $|\mathfrak{S}_r/\mathfrak{S}_{r-1}| = r$  の finite étale 射になる。  $\square$

### 3.4.4

この命題 3.4.2 から定理 3.4.1(1) の二つ目の圏同値を示すことが出来る。すなわち、perfectoid  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  に対して、命題  $(*)_{\mathcal{A}}$  を

$$(*)_{\mathcal{A}} : \Leftrightarrow \text{任意の finite étale } \mathcal{A} \text{ 代数 } \mathcal{B} \text{ は perfectoid } \mathcal{A} \text{ 代数になる。} \quad (3.65)$$

と定義し、これが成り立つことを示せば良い。とくに  $\mathcal{A}$  上 finite étale な  $\mathcal{B}$  は定義から finite projective であり、このとき section 3.4.1 の最後に書いてあるように  $\mathcal{B}$  には canonical topology と同じ位相を定めるただ一つの完備かつスペクトラルなノルムを入れている。とくに  $\mathcal{B}$  は一様 Banach  $\mathcal{A}$  代数である。

ここでは証明の概略を [KL] Theo.3.6.21 に従って述べる。ただしここではもはや almost mathematics は出てこないが、命題 3.4.2 の使用に際して、以降の記述が循環論法を引き起こしていないことを確認しなければならない。

まず  $\mathcal{K}$  の標数が  $p > 0$  のとき、section 3.2.2(2) から Banach 環において perfectoid であることと完全であることは同値であり、? 完全環上の finite étale 代数は完全であることから、 $(*)_{\mathcal{A}}$  が従う。

$\mathcal{K}$  の標数が 0 であるとし、次のように証明される。

\*57 [SE2] のように rank は関数として定義されている。

\*58 almost での finite projective に関しても [GR] Prop.4.3.27 のように同じことが言える

- (a)  $\mathcal{K}$  の任意の有限次拡大体  $\mathcal{L}$  に対して系 3.1.2 から示される。
- (b) Gelfand transformation  $\Gamma\mathcal{A}$  (section 2.7.3) が perfectoid である。実際、?? から  $\Gamma(\mathcal{A})$  は perfectoid field  $\mathcal{H}(x)$  の uniform product になっている。すると、このことと (a) から、任意の finite étale  $\mathcal{A}$  代数  $\mathcal{B}$  に対して、 $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma\mathcal{A}$  は perfectoid かつスペクトラルであることが分かる。
- (c) ?? から  $\Gamma(\mathcal{A}^b) \cong (\Gamma\mathcal{A})^b$  が分かる。perfectoid field  $\mathcal{H}(x)^b$  は  $\mathcal{A}^b$  の有理局所化  $\mathcal{A}_\alpha^b$  の uniform colimit であり、 $\mathcal{H}(x)$  は  $\mathcal{A}^b$  の有理局所化  $\mathcal{A}_\alpha$  の uniform colimit になる (??)。すると、左の垂直方向以外 は圏同値からなる可換図式

$$\begin{array}{ccc} 2 - \varinjlim (\mathcal{A}_\alpha^b - \text{Alg}^{fin.et}) & \longrightarrow & \mathcal{H}(x)^b - \text{Alg}^{fin.et} \\ \downarrow & & \downarrow \# \\ 2 - \varinjlim (\mathcal{A}_\alpha - \text{Alg}^{fin.et}) & \longrightarrow & \mathcal{H}(x) - \text{Alg}^{fin.et} \end{array}$$

が得られる。とくに垂直方向の圏同値は  $\#: \mathcal{H}(x)^b \rightarrow \mathcal{H}(x)$  によるものであり、水平方向の圏同値は "Elkik approximation" により与えられている ([Sch] Lem.7.5 と [GR] Prop.5.4.53)。ここで  $\varinjlim \mathcal{A}_\alpha^\circ$  は henselian であり、その完備化は  $\mathcal{A}^\circ$  になることを用いた。<sup>\*59</sup>

- (d)  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  のコンパクト性から、有理局所化  $\mathcal{A}_\alpha$  であって  $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_\alpha$  が perfectoid になるようなものによる有限被覆  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  が取れる。 $\mathcal{A}_\alpha$  を  $\mathcal{A}$  に移し、perfectoid 代数の性質 ([KL] Theo.3.6.21, [Sch] Theo.7.9) を用いればよい。

定理 3.4.1(2) は定理 3.4.1(1) と、定理 3.3.2(2) と、section 1.8.2 の Grothendieck の "remarkable equivalence" を用いることで、

$$(\mathcal{A}^\circ)^a - \text{Alg}^{fin.et} \cong (\mathcal{A}^\circ)^a / \varpi - \text{Alg}^{fin.et} \cong ((\mathcal{A}^b)^\circ)^a - \text{Alg}^{fin.et} \cong ((\mathcal{A}^b)^\circ)^a - \text{Alg}^{fin.et} \quad (3.66)$$

という tilt と適合した圏同値が得られる。

### 3.4.5 Remark

- (1) [Fon] の通り、perfectoid 代数は必ずしも perfectoid ではない  $p$  進体  $\mathcal{K}$  上に定義することが出来る。すなわち、一様 Banach  $\mathcal{K}$  代数  $\mathcal{A}$  であって、Frobenius 射  $F$  が  $\mathcal{A}^\circ/p$  上全射であって、 $\varpi_{1/p} \in \mathcal{A}$  であって  $\varpi_{1/p}^p \equiv p \pmod{p^2\mathcal{A}^\circ}$  となるものが存在するものと定義できる。この条件から、任意の  $s \in \mathbb{Z}[1/p]$  に対してノルムが  $|p|^s$  となるような  $\varpi_s \in \mathcal{A}$  であって  $\varpi_{-s} = \varpi_s^{-1}$  となるものが存在することが分かり、それゆえ、 $\mathcal{A}^\circ = (\mathcal{A}^\circ)^\circ$  となる。すると、この定義において定理 3.3.2 と命題 3.3.4 の類似 (それぞれ [KL] 3.6.5, 3.6.11)<sup>\*60</sup> と、定理 3.4.1 の一般化 ([KL] 3.6.21, 5.5.9) に相当するものを示すことが出来る (almost での étale は  $(\mathcal{A}^\circ, \mathcal{A}^\circ)$  を cadre と取ったとして解釈出来る)。命題 3.4.2 の Galois 拡大に関する議論を適用することで [KL] の Robba 環の議論を省くことが出来る。<sup>\*61</sup>
- (2) 任意の ramified<sup>\*62</sup> かつ混標数  $(0, p)$  の完備正則局所環  $(R, \mathfrak{m})$  で剰余体が  $k$  であるとき、 $f \in \mathfrak{m}^2$  かつ  $p$  で割り切れないものが取れて、 $R$  は  $W(k)[[T_{\leq n}]]/(p - f)$  と同型になる。unramified の場合 (例えば

<sup>\*59</sup> このために finite étale 代数の圏において対象と射が finite presentation であることを利用した。  $2 - \varinjlim$  や  $2 - \text{plim}$  の一般論ではなく応用について述べられている文献は少なく、例えば [?] Appendix A を参照。

<sup>\*60</sup> [KL] における "一様" はここではスペクトラルのことであることを注意する。

<sup>\*61</sup> 後に Gabber-Ramero と Bhatt-Morrow-Scholze によって基礎体を持たない perfectoid の理論が構築された。

<sup>\*62</sup> 局所環  $(R, \mathfrak{m})$  が ramified であるとは  $p \in \mathfrak{m}^2$  となることで、そうでないとき unramified という。

section 3.2.3(2)) と同様の議論によって、 $W(k)[[T_{\leq n}^{1/p^\infty}]]/(p-f)$  は上記 (1) の意味での perfectoid になる (この環は [Shi] における  $\widehat{R_p^\infty}$  であり、これは [Shi] Prop.4.9 と完備化を考えれば perfectoid になっていることがわかる)。

?一方で、 $\mathfrak{m}$  を生成しない正則列から  $p^{1/p^\infty}$  乗根を抜き出して ( $p$  進完備化を取ると) 必ずしも perfectoid になるとは限らない。例えばこれは  $R := \mathbb{Z}_2[[T]][\sqrt{T^2+4}]$  と  $(2, T)$  という列を取ると、この例になっている (section 3.4.2)。

### 3.4.6

次は定理 3.4.1 からの最初の帰結である。

**系 3.4.3.**  $\mathcal{A}$  を perfectoid  $\mathcal{K}$  代数とし、 $\mathcal{B}$  をその上の finite étale 拡大とする。このとき  $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{A}^\circ$  上 integral であり、さらに、 $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{B}$  における  $\mathcal{A}^\circ$  の (completely) integral closure になる。

**証明.** 定理 3.4.1(2) の証明と同様にして、 $\mathcal{B}$  の rank は  $\mathrm{Spec}(\mathcal{A})$  上連続かつ有界であるため、 $\mathcal{A}$  を有限直積に分解することで  $\mathcal{B}$  が constant rank  $r$  であるとしてよい。すると  $b \in \mathcal{B}^\circ$  について、

$$\chi_b(T) := \sum_{i=0}^r (-1)^i \mathrm{Tr}_{(\wedge^i \mathcal{B})/\mathcal{A}} \left( \bigwedge^i \cdot b \right) T^{r-i} \quad (3.67)$$

は  $b$  の特性多項式になっている ([Mor] Lem.V.3.2.2 の証明)。とくに  $\chi_b(b) = 0$  となる。さらに、定理 3.4.1(1) から  $(\mathcal{B}^\circ)^a$  が  $(\mathcal{A}^\circ)^a$  上 finite étale になり、とくに finite projective になるから、?

$$\mathrm{Tr}_{(\wedge^i \mathcal{B})/\mathcal{A}} \left( \bigwedge^i \cdot b \right) = \mathrm{Tr}_{\wedge^i (\mathcal{B}^\circ)^a / (\mathcal{A}^\circ)^a} \left( \bigwedge^i \cdot b \right) \in ((\mathcal{A}^\circ)^a)_* = \mathcal{A}^\circ \quad (3.68)$$

となる。ここで最後の等号は  $\mathcal{A}$  が perfectoid であり、補題 3.2.2 が成り立つことから従う。したがって  $b$  は  $\mathcal{A}^\circ$  上 integral であるので  $\mathcal{B}^\circ$  は  $\mathcal{A}^\circ$  上 integral になる。

また、補題 2.4.1(1) から  $\mathcal{A}^\circ$  の  $\mathcal{B}$  における completely integral closure は  $\mathcal{B}^\circ$  に含まれているため、今示したことと合わせて  $\mathcal{A}^\circ$  の (completely) integral closure は  $\mathcal{B}^\circ$  に一致する。□

## 参考文献

- [An1] Y. André, “Le lemme d’Abhyankar perfectoides,” Publ.math.IHES, vol. 127, no. 1, pp. 1-70, Jun. 2018.
- [GR] O. Gabber and L. Ramero, Almost Ring Theory. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003.
- [AM] M. F. Atiyah and G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley, 1994.
- [BGR] S. Bosch, U. Güntzer, and R. Remmert, Non-Archimedean Analysis: A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry. Springer Berlin Heidelberg, 1984.
- [DM] R. Datta and T. Murayama, “Tate algebras and Frobenius non-splitting of excellent regular rings,” arXiv:2003.13714 [math], Oct. 2021, Accessed: Dec. 27, 2021. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/2003.13714>

- [KL] K. S. Kedlaya and R. Liu, “Relative p-adic Hodge theory: Foundations,” arXiv:1301.0792 [math], May 2015, Accessed: Aug. 08, 2021. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1301.0792>
- [Ari] B. Bhatt et al, Perfectoid spaces: lectures from the 2017 Arizona Winter School. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2019.
- [Mor] S. Morel, “Adic spaces” , [Online]. Available: [http://perso.ens-lyon.fr/sophie.morel/adic\\_notes.pdf](http://perso.ens-lyon.fr/sophie.morel/adic_notes.pdf)
- [Mih] T. Mihara, “On Tate Acyclicity and Uniformity of Berkovich Spectra and Adic Spectra v1,” Isr. J. Math., vol. 216, no. 1, pp. 61 – 105, Oct. 2016, doi: 10.1007/s11856-016-1404-8.
- [Ber] V. G. Berkovich, Spectral Theory and Analytic Geometry over Non-Archimedean Fields. American Mathematical Soc., 2012.
- [Sch] P. Scholze, “Perfectoid spaces,” arXiv:1111.4914 [math], Nov. 2011, Accessed: Dec. 22, 2020. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1111.4914>
- [Gun] U. Güntzer, “The norm of uniform convergence on the  $k$ -algebraic maximal spectrum of an algebra over a non-archimedean valuation field  $k$ ,” Mém. Soc. Math. France, vol. 1, pp. 101 – 121, 1974, doi: 10.24033/msmf.164.
- [Bha] B. Bhatt, “Lecture notes for a class on perfectoid spaces” , [Online]. Available: <http://www-personal.umich.edu/~bhattb/teaching/mat679w17/lectures.pdf>
- [Fon] J.-M. Fontaine, “Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d’ après Peter Scholze),” in Astérisque, 2013, p. Exp. No. 1057, x, 509-534. Accessed: Jul. 22, 2021. [Online]. Available: <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=3087355>
- [Hen] T. Henkel, “An Open Mapping Theorem for rings which have a zero sequence of units,” arXiv:1407.5647 [math], Oct. 2014, Accessed: Jan. 18, 2022. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/1407.5647>
- [MSE1] “abstract algebra - Local rank and direct sum decomposition,” Mathematics Stack Exchange. <https://math.stackexchange.com/questions/436641/local-rank-and-direct-sum-decomposition> (accessed Jan. 19, 2022).
- [jSE2] “abstract algebra - Rank of projective module,” Mathematics Stack Exchange. <https://math.stackexchange.com/questions/133333/rank-of-projective-module> (accessed Jan. 19, 2022).
- [SP] “The Stacks project.” <https://stacks.math.columbia.edu>.
- [Was] I. Waschies, “Microlocal perverse sheaves,” arXiv:math/0209341, Sep. 2002, Accessed: Jan. 19, 2022. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/math/0209341>
- [Shi] K. Shimomoto, “An application of the almost purity theorem to the homological conjectures,” Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 220, no. 2, pp. 621 – 632, Feb. 2016, doi: 10.1016/j.jpaa.2015.07.008.