微分積分学第一 中間試験

Jクラス

2018年5月12日

1.2 (1)

$$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi 5}{6}$$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

(2) $\arccos x = \arcsin \frac{3}{5}$ を満たす x を求める。

$\theta = \arcsin \frac{3}{5}$ と置くと

arcsin と arccos の定義から $\sin\theta = \frac{3}{5}, x = \cos\theta$ となるので $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ から $\cos\theta > 0$ であることより $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$ なので代入すると

$x = \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$ となる。

(3)

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x + \arccos x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

なので $\arcsin x + \arccos x$ は定数関数であることがわかる。

よって $x = 0$ を代入すると

$$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2}$$

となるため x によらず

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

が示された。

(4)

$$\int \arctan x \, dx$$

を求める。(ただし積分定数を C とする)

$x = \tan\theta$ と置換すると逆関数であることを考えれば定義域は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$\arctan(\tan\theta) = \theta$$

となるので部分積分を用いて、 $\theta = \arctan x$ を代入すれば

$$\begin{aligned}
\int \arctan x \, dx &= \int \theta \frac{1}{\cos^2\theta} \, d\theta \\
&= \theta\tan\theta - \int \tan\theta \, d\theta \\
&= \theta\tan\theta + \log|\cos\theta| + C \\
&= \arctan x \times x + \log|\cos(\arctan x)| + C
\end{aligned}$$

ここで $\cos(\arctan x)$ は定義域から正の値をとるので $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ を用いれば

$$\begin{aligned}
\cos(\arctan x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

となるため $\arctan x$ の原始関数は

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$$

である。

2. (1) $y = (\tan x)^{\sin 2x}$ を微分する。(ただし $0 < x < \frac{\pi}{2}$) $\tan x > 0$ から、両辺の log をとると

$$\log y = \sin 2x \log(\tan x)$$

となるため対数微分法により両辺微分すると

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} &= 2\cos 2x \log(\tan x) + \sin 2x \frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2 x} \\
&= 2\cos 2x \log(\tan x) + 2\sin x \cos x \times \frac{1}{\sin x \cos x}
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$y' = 2(\tan x)^{\sin 2x}(\cos 2x \log(\tan x) + 1)$$

となる。

(2) r, θ を xy 平面上の極座標としたとき、ヤコビアン $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ を求める。

極座標であることから $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ なので

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \quad , \frac{\partial y}{\partial \theta} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \, , \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

であるのでヤコビアンは

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} &= \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\ &= r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta) \\ &= r\end{aligned}$$

となる。

(3) 曲線 C が $x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$ とパラメーター表示されているとき $\frac{dy}{dx}$ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める。ただし $0 < t < \frac{\pi}{2}$ であり a と b は正定数。まず $\frac{dy}{dx}$ は

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} \\ &= b\cos t\frac{1}{-a\sin t} \\ &= -\frac{b}{a\tan t}\end{aligned}$$

である。 $\frac{d^2y}{dx^2}$ は

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\frac{dx}{dt}}\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{-a\sin t}\left(-\frac{b}{a}\frac{-1}{\sin^2 t}\right) \\ &= -\frac{b}{a^2\sin^3 x}\end{aligned}$$

である。

3. (1) 定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ を求める。

$1 + x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$ より a, b, c を用いて恒等式

$$\frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2}$$

を考えると

$$a = \frac{1}{3}\, , b = -\frac{1}{3}\, , c = \frac{2}{3}$$

となるため

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x} + \frac{-x+2}{1-x+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{2x-1}{1-x+x^2} + \frac{\frac{3}{2}}{1-x+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1-x+x^2)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\log 2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

ここで上の式の第二項の積分を考える。$x - \frac{1}{2} = t$ と置くと $dx = dt$ で、

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$-\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$

であるから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \\ &= \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left\{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} \\ &= \frac{2\sqrt{3}\pi}{9}\end{aligned}$$

となるため結果として

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\log 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$$

となる。

(2) 広義積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)}$ を求める。

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x(x+1)} &= \int_1^\infty \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,dx \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \left[\log x - \log(1+x)\right]_1^\beta \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \left\{\log\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right) + \log 2\right\} \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \left\{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{\beta}+1}\right) + \log 2\right\} \\ &= \log 2\end{aligned}$$

(3) 広義積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$ を求める。

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x^2+1)} &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \left[-x^{-1} - \arctan x\right]_1^\beta \\ &= \lim_{\beta\to\infty} \left\{-\frac{1}{\beta} + 1 - \arctan\beta + \frac{\pi}{4}\right\}\end{aligned}$$

$\lim_{\beta\to\infty} \arctan\beta = 1$ から

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \frac{\pi}{4}$$

(4) 広義積分 $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ が収束するか発散するかを求める。

$x>1$ において $1+x^4 > x^4 > 1$ よりルートをとると $\sqrt{1+x^4} > x^2 > 1$ が成り立つので

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right| < \frac{1}{x^2}$$

であり

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{\beta\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^\beta \\ &= 1\end{aligned}$$

となり優関数の広義積分が収束するため $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ も収束する。

4. (1) $z = \arctan\frac{y}{x}$ としたとき $z_{xx} + z_{yy}$ を求める。

$$\begin{aligned}z_x &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) \\ &= \frac{-y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

なので

$$z_{xx} = -y\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

また

$$\begin{aligned}z_y &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

なので

$$z_{yy} = x\frac{2y}{x^2+y^2}$$

よって

$$z_{xx} + z_{yy} = 0$$

である。

(2),(3) 左辺を計算するだけ。
飽きた。