令和 02 年度卒業論文

相関除去アンフォールディングによる Tensor Robust PCA の性能向上

千葉工業大学　先進工学部

16C3051　小浜　貴裕

指導教員　宮田　高道　教授

提出日　令和 03 年 02 月 1 日

相関除去アンフォールディングによるTensor Robust PCAの性能向上

16C3051　小浜　貴裕

概要： Tensor Robust PCA（TRPCA）とは，低ランクであると仮定できる原テンソルにノイズテンソルが付加された観測テンソルから，原テンソルを推定する問題である．このTRPCAを実現するために，観測テンソルの第3次元方向に離散フーリエ変換を適用したのち，テンソルを行列に分解して各々の行列を低ランク行列で近似する手法が提案されている．この手法では，観測テンソルの特徴を考慮することなく，常に離散フーリエ変換が用いられているが，当該変換が原テンソルの復元において最適であるという保証はない．そこで本研究では，テンソルの第3次元方向に対する主成分分析と行列分解を組み合わせる相関除去アンフォールディングを提案する．これにより，観測テンソルに適した基底を用いることが可能となり，原テンソルの復元性能が向上すると期待される．

目次

第 1 章

序論

1.1 背景

低ランクの原テンソルにスパースノイズテンソルが付加された観測テンソルから，原テンソルを推定する問題を Tensor Robust PCA（TRPCA）とよぶ．

３階テンソルを対象として TRPCA を実現する既存手法の一つとして，T-SVD[1] が挙げられる．この手法ではまず，観測テンソルの第 3 次元に対して離散フーリエ変換 (DFT) を適用した後，テンソルを行列へと分解し，分解後の行列に対して個々に処理を行うアプローチを採用している．また，カラー自然画像など第 3 次元方向に強い相関があるテンソルを対象とする場合に，DFT に替わり離散コサイン変換 (DCT) を使用することで，TRPCA や低ランクテンソル補完問題においてより高い性能を得られることも明らかとなっている [2][3].

一方で，DCT は信号間に強い自己相関があるときの主成分分析（PCA) の近似とみなせることが知られている．そこで，提案手法では従来手法で用いられている DFT や DCT の替わりに（テンソルの第３次元に沿った方向の）PCA を適用する手法を新たに提案し，既存手法と比較して TRPCA の性能がどのように変化するかを明らかとする．

1.2 目的

前述の背景のもと，提案手法では従来手法で用いられている DFT や DCT の替わりに（テンソルの第３次元に沿った方向の）PCA を適用する手法を新たに提案し，既存手法と比較して TRPCA の性能がどのように変化するかを明らかとする．

第 2 章

既存手法

本稿では，テンソル $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ の (i,j,k) 番目の成分を $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ijk}$ と示し，さらに，その i 番目のフロンタルスライス（テンソルを第 3 次元方向に沿って切断した行列）を $\boldsymbol{A}^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ と書く．さらに，テンソル $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ の i 行 j 列目のフロンタルファイバー (n_3 次元のベクトル）を $\boldsymbol{\mathcal{A}}(i,j,:)$ と書くこととする．

TRPCA は，行列における Robust PCA をテンソルに一般化した問題である．この問題は以下のように定式化できる．

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \to \boldsymbol{\mathcal{L}}_0, \boldsymbol{\mathcal{E}}_0, \text{ s.t. } \boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{E}}_0, \tag{2.1}$$

ここで，$\boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ は観測テンソルであり，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_0, \boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ をそれぞれ真の原テンソル，真のスパースノイズテンソルとする．すなわち，TRPCA は，$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_0 + \boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ となるような観測テンソル $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ から $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0, \boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ を分離することを目的としている．

いま，$\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ が与えられたとき，当該テンソルの第 3 次元に沿った $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ の離散フーリエ変換の結果を $\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}}$ と示す．このことを，Matlab の fft コマンドを用いて表現すると以下のようになる．

$$\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \texttt{fft}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, [\,], 3). \tag{2.2}$$

さらに，$\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ が与えられるとき，テンソル核ノルム $\|\boldsymbol{\mathcal{A}}\|_*$ を以下のように定義する．

$$\|\boldsymbol{\mathcal{A}}\|_* := \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \|\bar{\boldsymbol{A}}^{(i)}\|_* \ . \tag{2.3}$$

前述のように，TRPCA は $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ から $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$，$\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ を復元することを目的としている．従来手法 [1] では，式 (2.3) に示すテンソル核ノルムを用いた下記の最適化問題を解くことにより，$\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ と $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$ の推定値 $\boldsymbol{\mathcal{L}}^*$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}^*$ を得る．ここで，$\|\cdot\|_*$ はテンソル核ノルム，$\|\cdot\|_1$ は ℓ_1 ノルムであり，λ は任意のパラメータであり，$\|\boldsymbol{\mathcal{A}}\|_1{=}\sum_{ijk}|\boldsymbol{\mathcal{A}}_{ijk}|$ である．従来手法 [1][2] では，式 (2.4) の解を求めるために交互方向乗数法（ADMM) を使用している．

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^*, \boldsymbol{\mathcal{E}}^* = \underset{\boldsymbol{\mathcal{L}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{\mathcal{L}}\|_* + \lambda\|\boldsymbol{\mathcal{E}}\|_1, \text{ s.t. } \boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}. \tag{2.4}$$

第 3 章

提案手法

本研究では，従来手法の式（2.2）で用いられていた DFT を（第 3 次元方向に対する）PCA で置き換えることを提案する．いま，対象の 3 階テンソルを $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ とする．ここで，テンソル $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ のフロンタルスライス成分の平均値ベクトルを $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n_3})^\top \in \mathbb{R}^{n_3}$ とおき，平均値 μ_k を式 (3.1) のように定める．

$$\mu_k = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{ijk}. \tag{3.1}$$

このとき，式 (3.2) のように定義される共分散行列 $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$ の単位固有ベクトルからなる変換行列 $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{n_3 \times n_3}$ を用いて，（第 3 次元方向に対する）PCA は式 (3.3) によって実現できる．

$$\boldsymbol{C}_{i,j} = \frac{1}{n_1 n_2} \mathrm{Tr}((\boldsymbol{A}^{(i)} - \boldsymbol{\mu})^\top (\boldsymbol{A}^{(j)} - \boldsymbol{\mu})). \tag{3.2}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(i, j, :) = \boldsymbol{V} \boldsymbol{\mathcal{A}}(i, j, :). \tag{3.3}$$

本研究では，この操作を相関除去アンフォールディングとよぶ．これを用いて，提案する相関除去アンフォールディングテンソル核ノルムは以下のように定義される．

$$\|\boldsymbol{\mathcal{A}}\|_s := \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \|\tilde{\boldsymbol{A}}^{(i)}\|_*. \tag{3.4}$$

本研究において提案する TRPCA を実現するための最適化問題は以下のように書ける．

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^*, \boldsymbol{\mathcal{E}}^* = \underset{\boldsymbol{\mathcal{L}}, \boldsymbol{\mathcal{E}}}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{\mathcal{L}}\|_s + \lambda \|\boldsymbol{\mathcal{E}}\|_1, \text{ s.t. } \boldsymbol{\mathcal{X}} = \boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}. \tag{3.5}$$

この最適化問題の解は，従来手法 [1][2] と同様に ADMM を適用することによって得られる．また，ADMM における行列を対象とする 1, 2 の計算の解き方および 2 の閉形式解は，すでに知られている [4]．本研究ではテンソルを対象としているため，$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{A}}}(i, j, :)$ の各フロンタルスライスに対して，[4] の計算を適用する．

Algorithm 1 Solve (3.5) by ADMM

Input: tensor data $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, parameter λ.

Initialize: $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_0 = 0$, $\rho = 1.1$,

$\mu_0 = 1\text{e}{-3}$, $\mu_{\max} = 1\text{e}10$, $\epsilon = 1\text{e}{-8}$.

while not converged **do**

1. Update $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{k+1}$ by

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{k+1} = \underset{\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\operatorname{argmin}} \|\boldsymbol{\mathcal{L}}\|_s + \frac{\mu_k}{2} \left\| \boldsymbol{\mathcal{L}} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_k - \boldsymbol{\mathcal{X}} + \frac{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_k}{\mu_k} \right\|_F^2;$$

2. Update $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{k+1}$ by

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{k+1} = \underset{\boldsymbol{\mathcal{E}}}{\operatorname{argmin}} \ \lambda \|\boldsymbol{\mathcal{E}}\|_1 + \frac{\mu_k}{2} \left\| \boldsymbol{\mathcal{L}}_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{E}} - \boldsymbol{\mathcal{X}} + \frac{\boldsymbol{\mathcal{Y}}_k}{\mu_k} \right\|_F^2;$$

3. $\boldsymbol{\mathcal{Y}}_{k+1} = \boldsymbol{\mathcal{Y}}_k + \mu_k(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{X}})$;
4. Update μ_{k+1} by $\mu_{k+1} = \min(\rho\mu_k, \mu_{\max})$;
5. Check the convergence conditions

$$\|\boldsymbol{\mathcal{L}}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{L}}_k\|_\infty \leq \epsilon, \ \|\boldsymbol{\mathcal{E}}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_k\|_\infty \leq \epsilon,$$
$$\|\boldsymbol{\mathcal{L}}_{k+1} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{k+1} - \boldsymbol{\mathcal{X}}\|_\infty \leq \epsilon.$$

end while

第 4 章

実験

4.1 実験概要

本実験に用いる原テンソル $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times 3}$ は次の 2 種類である．

(1) サイズ $256 \times 256 \times 3$ で Tucker ランクが [1,1,1] の人工低ランクテンソル（各成分が [0, 1] の一様分布に従う 3 本のファイバーのクロネッカー積）

(2) サイズ $256 \times 256 \times 3$ の標準カラー画像 12 枚（第 3 次元（RGB カラーチャンネル）の間に強い相関がある）

観測テンソル $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ は，テンソルの各成分を確率 0.3 で [0, 1] の一様分布従う乱数で置換することにより得た．観測テンソル $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ に対する直交変換手法として，DFT[1], DCT[2]，提案手法である PCA，提案手法における共分散行列 $\boldsymbol{C}$（式（3.1）で得られる）を原テンソル $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ から得る手法である PCA*を用いる．なお，PCA*は提案手法である PCA の限界性能を調べるために導入した非現実的な設定であり，実際の復元時においては原テンソル $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ は参照できないことに注意されたい．公平な比較を行うため，すべての実験において式（2.4) ならびに式（3.4) に含まれるハイパーパラメータ λ の値は復元性能が最も高くなるように設定した．

4.2 実験結果

まず，原テンソル $\boldsymbol{\mathcal{L}}_0$ を人工テンソルとしたときの復元性能を MSE（原テンソルと推定テンソルの平均二乗誤差）で評価したときの結果はそれぞれ，1.10e-17, 1.78e-17，7.18e-18（DFT，DCT，PCA）であった．続いて，原テンソルをカラー自然画像としたときの復元性能を PSNR（単位は [dB]）で評価した結果を表 4.1 に示

す．ここで，MSE は値が小さいほど，PSNR は値が大きいほど高い推定精度であることを示している．人工テンソルの復元時の MSE，ならびに表 4.1 から，提案する PCA は従来手法と比較して推定精度が高いことがわかる．その一方で，表 4.1 からは，原テンソルがカラー画像である場合には，画像によっては従来手法と比較して推定精度が低いこともあることが確認できた．

このような結果となった原因として考えられるものの一つして，提案手法では PCA のための共分散行列を観測テンソルから得ていることが挙げられる．そこで，表 4.1 で提案手法の性能が低かった 2 枚の画像について，共分散行列を原テンソルから得た理想的な手法である PCA*による結果を得た．その結果はそれぞれ 21.87（Mandrill），24.18 である（Parrots）．以上から画像のうち 1 枚においては，理想的な PCA を用いた場合であっても，既存手法の一つである DCT と比較して復元性能が高くならないことが明らかとなった．

表 4.1　カラー自然画像に対する各手法の最大 PSNR

-	DFT	DCT	PCA
Aerial	23.22	23.47	**23.61**
Airplane	23.87	23.94	**24.85**
Balloon	29.22	29.32	**29.42**
couple	27.43	27.61	**27.75**
Earth	27.07	27.16	**28.29**
Girl	26.23	26.37	**26.44**
Lenna	24.59	24.65	**25.07**
Mandrill	21.70	**21.95**	21.74
milkdrop	24.56	24.65	**24.78**
Parrots	24.03	**24.15**	24.13
Pepper	22.59	22.56	**22.85**
Sailboat	24.00	24.13	**24.99**

第 5 章

結論

本稿では，TRPCA の復元性能向上を実現するため，テンソルの第 3 次元に沿って主成分分析することで得られる新たなテンソル核ノルムを定義した．実験により，提案手法では既存手法と比較して高い推定精度が得られることが明らかとなった．ただし，画像によっては提案手法の推定精度が既存手法より低く，またその問題は（第 3 次元方向に沿った）主成分分析を理想的な状況で行った場合においても完全に解消しないことが明らかとなった．このような結果となった原因を明らかにするのが今後の課題である．

謝辞

本研究を進めるにあたり，多くの助言やご指導を賜りました宮田高道教授に深く感謝致します．また，多くの助言を頂き，研究を理解する助けとなった同研究室の皆様に深く感謝致します．

参考文献

[1] C. Lu, J. Feng, Y. Chan, W. Liu, Z. Lin, and S. Yan. Tensor Robust Principal Component Analysis:Exact Recovery of Corrupted Low-Rank Tensors via Convex Optimization. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition(CVPR)*, 2016.

[2] C. Lu, X. Peng, Y. Wei. Low-rank Tensor Completion with a New Tensor Nuclear Norm Induced by Invertible Linear Transforms. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition(CVPR)*, 2019.

[3] C. Lu, P. Zhou. Exact Recovery of Tensor Robust Principal Component Analysis. *arXiv, vol.abs/1907.0*, 2019.

[4] Z. Zhang, G. Ely, S. Aeron, N. Hao and M. Kilmer . Novel methods for multilinear data completion and de-noising based on tensor-SVD. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition(CVPR)*, 2014.