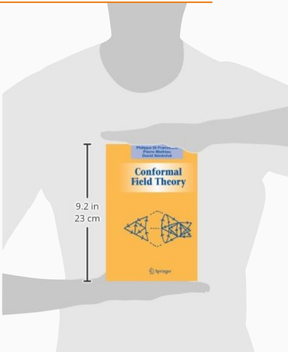
第 4 章 大域的な共形不変性

Conformal Field Theory

P. D. Francesco, P. Mathieu and D. Sènèchal

Ryoi Ohashi

Department of Applied Physics Nagoya University



Contents

大域的な共形不変性

共形群

4.1 共形群

d 次元における共形変換

共形変換

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ について、座標の可逆変換 $x \to x'$ に対してスケール不変性を持つ変換のこと。

$$g'_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{4.1}$$

無限小変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(\boldsymbol{x})$ を考えると、(4.1) の左辺は

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(\boldsymbol{x}) g_{\mu\nu} \tag{4.3}$$

$$\Leftrightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho \tag{4.4}$$

となれば、(4.1) について $\Lambda(\boldsymbol{x}) = 1 - f(\boldsymbol{x})$ となり共形変換となる。

4.1 共形群

デカルト計量 ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, \cdots, 1)$) を仮定

$f(x)$ に要求される条件式

$$(2-d)\,\partial_\nu \partial_\nu f = \eta_{\mu\nu}\partial^2 f \tag{4.7}$$

$$(d-1)\,\partial^2 f = 0 \tag{4.8}$$

(4.7)(4.8) と次元との関係

- $d = 1$ のとき
  (4.8) が自明な式になってしまうことから、f は微分可能な関数であれば、どのような場合でも共形変換となる。
- $d = 2$ のとき
  特別な代数構造が現れる $\rightarrow$ 共形場理論で一般的に扱われる次元
- $d \geq 3$ のとき
  (4.7)(4.8) の 2 式により厳しい制限を受ける。$\rightarrow$ 大域的共形変換で成立する。

4.1 共形群

$d \geq 3$ 次元における共形変換

式 (4.4): $f(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{d}\partial_\rho \epsilon^\rho$ を用いて、無限小変換量 ϵ を評価すると、($c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$ として)

無限小変換の内訳

$$\epsilon_\mu = \underbrace{a_\mu}_{\text{並進移動}} + \underbrace{b_{\mu\nu}x^\nu}_{\text{引き伸ばし・回転}} + \underbrace{c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho}_{\text{特殊共形変換}} \tag{4.10}$$

- a_μ: $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ なので並進移動を表している。
- $b_{\mu\nu}x^\nu$: $m_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}(= -b_{\nu\mu})$ とおくと引き伸ばしと回転に分解される。

$$b_{\mu\nu} = \overbrace{\alpha\eta_{\mu\nu}}^{\text{引き伸ばし}} + \overbrace{m_{\mu\nu}}^{\text{回転}} \tag{4.12}$$

- $c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho$: 特殊共形変換 (SCT) を表す。

$$x'^\mu = x^\mu + 2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b})x^\mu - b^\mu \boldsymbol{x}^2 \tag{4.14}$$

大域共形変換

(無限小に限らず) 有限の共形変換は次の 4 つで表される。

$$\begin{aligned}
\text{並進:}\quad x'^{\mu} &= x^{\mu} + a^{\mu} \\
\text{引き伸ばし:}\quad x'^{\mu} &= \alpha x^{\mu} \\
\text{回転:}\quad x'^{\mu} &= M^{\mu}_{\nu} x_{\mu} \quad M^{\mu}_{\nu} = -M^{\nu}_{\mu} \\
\text{SCT:}\quad x'^{\mu} &= \frac{x^{\mu} - b^{\mu}\boldsymbol{x}^2}{1 - 2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{x}^2}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

また (2.126) にしたがって、それぞれの無限小変換における生成子を計算すると、

大域共形変換の生成子

$$\begin{aligned} \text{並進:} \quad P_\mu =& -i\partial_\mu \\ \text{引き伸ばし:} \quad D =& -ix^\mu\partial_\mu \\ \text{回転:} \quad L_{\mu\nu} =& i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \\ \text{SCT:} \quad K_\mu =& -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - \boldsymbol{x}^2\partial_\mu) \end{aligned} \tag{4.18}$$

大域的な共形不変性

古典的場の理論における共形不変性

4.2.1 d 次元における共形群の表現

無限小変換

無限小共形変換のパラメータを ω_g とおいたときに、多成分場 $\Phi(x)$ に対して働く生成子 T_g の行列成分を調べる。

→Schur の補題により、場のスケール次元 Δ が性質を特徴づけることがわかる。

有限変換

有限な共形変換のもとでは準プライマリー場であれば上記の議論が成立する。

スピンレスな場 $\phi(\boldsymbol{x})$ を仮定したとき、共形変換 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}'$ における場の変化は次の通り。

準プライマリー場

$$\phi(\boldsymbol{x}) \to \phi'(\boldsymbol{x}') = \left|\frac{\partial \boldsymbol{x}'}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^{-\frac{\Delta}{d}} \phi(\boldsymbol{x}) \tag{4.32}$$

4.2.2 エネルギー・運動量テンソル

任意の無限小座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$ における作用 S の変化量は、
エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ を用いて次のようになる。

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^d x T^{\mu\nu}(\partial_\mu \epsilon_\mu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \tag{4.34}$$

無限小の共形変換の場合は ϵ が (4.3)(4.4) を満たすので

$$\delta S = \frac{1}{d}\int \mathrm{d}^d x T^\mu{}_\mu \partial_\rho \epsilon_\rho \tag{4.35}$$

→任意の共形変換で最小作用の原理が成立するには、トレース $T^\mu{}_\mu$ が 0 であることが要求される。

作用の不変性

共形変換 ⇒ 作用は不変になる (※逆は一般に成立しない)

大域的な共形不変性

量子場の理論における共形不変性

4.3.1 相関関数

2 点相関関数, 3 点相関関数
スケール · 並進 · 回転 ·SCT における不変性より関数型を制限することで導ける。

2 点相関関数

$$\langle \phi_1(\boldsymbol{x}_1)\phi_2(\boldsymbol{x}_2)\rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|^{2\Delta}} & \text{if } \Delta = \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0 & \text{if } \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases} \tag{4.55}$$

3 点相関関数

$$\langle \phi_1(\boldsymbol{x}_1)\phi_2(\boldsymbol{x}_2)\phi_3(\boldsymbol{x}_3)\rangle = \frac{C_{123}^{(abc)}}{x_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} x_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} x_{31}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}} \tag{4.61}$$

但し、$x_{ij} = |\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|$

4 点相関関数

4 点以上ではスケール · 並進 · 回転 ·SCT では一意に形は決まらない。→ 4 点の場合では 2 つの交差比が許され、任意性が生まれる。

4 点相関関数

$$\langle \phi_1(\boldsymbol{x}_1)\phi_2(\boldsymbol{x}_2)\phi_3(\boldsymbol{x}_3)\phi_4(\boldsymbol{x}_4)\rangle = f\left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{14}x_{23}}\right)\prod_{i<j}^{4} x_{ij}^{\frac{\Delta}{3}-\Delta_i-\Delta_j} \tag{4.62}$$

$$\text{但し、}\Delta = \sum_{i=1}^{4}\Delta_i$$

4.3.2 Ward 恒等式

Ward 恒等式 (2.157) が共形変換の下ではどのように表せるのか

並進不変

$$\partial_\mu \left\langle T^\mu{}_\nu X \right\rangle = \sum_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \frac{\partial}{\partial x_i^\nu} \langle X \rangle \tag{4.63}$$

ローレンツ (回転) 不変

$$\langle (T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho}) X \rangle = -i \sum_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) S^{\nu\rho} \langle X \rangle \tag{4.66}$$

スケール不変

$$\left\langle T^\mu{}_\mu X \right\rangle = -\sum_i \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i) \Delta_i \langle X \rangle \tag{4.68}$$

4.3.3 2次元における零トレース

Schwinger 関数と呼ばれる関数を定義する。

Schwinger 関数

$$S_{\mu\nu\rho\sigma}(\boldsymbol{x}) = \langle T_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) T_{\rho\sigma}(\boldsymbol{0}) \rangle \tag{4.69}$$

この関数は共形不変性および保存則 $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ によって関数が決定する。

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu\rho\sigma}(\boldsymbol{x}) = & \frac{A}{(\boldsymbol{x}^2)^4} \left\{ (3 g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho})(\boldsymbol{x}^2)^2 \right. \\ & \left. -4\boldsymbol{x}^2 (g_{\mu\nu} x_\rho x_\sigma + g_{\rho\sigma} x_\mu x_\nu) + 8 x_\mu x_\nu x_\rho x_\sigma \right\} \end{aligned} \tag{4.77}$$

(4.77) を用いてトレースを計算すると

トレースレス

$$S^{\mu}{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \left\langle T^{\mu}{}_{\mu}(\boldsymbol{x}) T^{\sigma}{}_{\sigma}(\boldsymbol{0}) \right\rangle = 0 \tag{4.78}$$

→期待値および標準偏差はゼロとなる