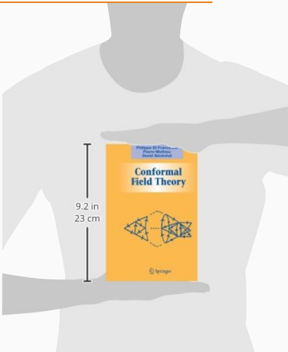
第 5 章 2 次元における共形不変性

Conformal Field Theory

P. D. Francesco, P. Mathieu and D. Sènèchal

Ryoi Ohashi

Department of Applied Physics Nagoya University



Contents

2 次元における共形不変性

2 次元における共形群

5.1.1　共形写像

平面座標 $\boldsymbol{x} = (z^0, z^1)$ に対して、$w : z^\mu \mapsto w^\mu(\boldsymbol{x})$ とする。

$$g^{\mu\nu} \mapsto \left(\frac{\partial w^\mu}{\partial z^\alpha}\right)\left(\frac{\partial w^\nu}{\partial z^\beta}\right) g^{\alpha\beta} \tag{5.1}$$

この写像が共形変換となるために、$g'_{\mu\nu}(\boldsymbol{w}) \propto g_{\mu\nu}(\boldsymbol{z})$ を満たすように条件を整理すると、

2 次元における共形写像の条件式

$$\frac{\partial w^1}{\partial z^0} = \frac{\partial w^0}{\partial z^1}, \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = -\frac{\partial w^1}{\partial z^1} \tag{5.4}$$

または

$$\frac{\partial w^1}{\partial z^0} = -\frac{\partial w^0}{\partial z^1}, \quad \frac{\partial w^0}{\partial z^0} = \frac{\partial w^1}{\partial z^1} \tag{5.5}$$

→コーシーリーマンの関係式さえ成立していればよい！

5.1.1 共形写像

座標を複素平面で表せば、もっと簡単な条件式で書けるのでは...？

複素平面への写像

$$\begin{aligned} z &= z^0 + iz^1 & z^0 &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) & \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1) & \partial_0 &= \partial_z + \partial_{\bar{z}} \\ \bar{z} &= z^0 - iz^1 & z^1 &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) & \partial_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1) & \partial_1 &= i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \end{aligned} \tag{5.6}$$

この表記を使うとコーシー－リーマンの関係式は簡潔な形で表現できる！

2 次元における共形写像の条件式 (複素平面 Ver.)

$$\partial_{\bar{z}} w(z, \bar{z}) = 0 \tag{5.9}$$

$\longrightarrow$ 複素平面座標の正則写像であれば、必ず共形写像となる！

5.1.2　大域共形変換

大域共形変換は次の写像で閉じている。

特殊共形群

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C} \tag{5.12}$$

$\to SL(2,\mathbb{C})$ と同型。

5.1.3　共形生成子

無限小座標変換は一般に

$$z' = z + \epsilon(z), \quad \epsilon(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1} \tag{5.15}$$

すると、スピンレス&スケール次元 0 の場 ϕ は共形変換の下で次のように変化する。

$$\delta\phi = \sum_n \left\{ c_n l_n \phi(z, \bar{z}) + \bar{c}_n \bar{l}_n \bar{\phi}(z, \bar{z}) \right\} \tag{5.17}$$

ここで、以下のように生成子を定義した。

生成子

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z, \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}} \tag{5.19}$$

5.1.3 共形生成子

この 2 つの生成子は Witt 代数に従う。

Witt 代数

$$\begin{aligned}[l_n, l_m] =& (n-m)l_{n+m} \\ [\bar{l}_n, \bar{l}_m] =& (n-m)\bar{l}_{n+m} \\ [l_n, \bar{l}_m] =& 0\end{aligned} \tag{5.19}$$

このうち $n = 0, \pm 1$ は大域共形変換を表している。

大域共形変換との関係

$$\begin{aligned} l_{-1} &= -\partial_z && : \quad \text{(複素平面上での) 並進} \\ l_0 &= -z\partial_z && : \quad \text{スケール変換と回転} \\ l_1 &= -z^2\partial_z && : \quad \text{特殊共形変換} \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.1.4 プライマリー場

共形変換の下ではスケール次元と同時に場のスピンまでも考慮する必要がある。

共形次元

場がスケール次元:Δ、スピン:s を持つときの、共形次元 $h, \bar{h}$ は

$$h = \frac{1}{2}(\Delta + s), \quad \bar{h} = \frac{1}{2}(\Delta - s) \tag{5.21}$$

場が次のような変換則に従うときをプライマリー場と呼んでいる。

プライマリー場

$$\phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^{-h} \left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \tag{5.22}$$

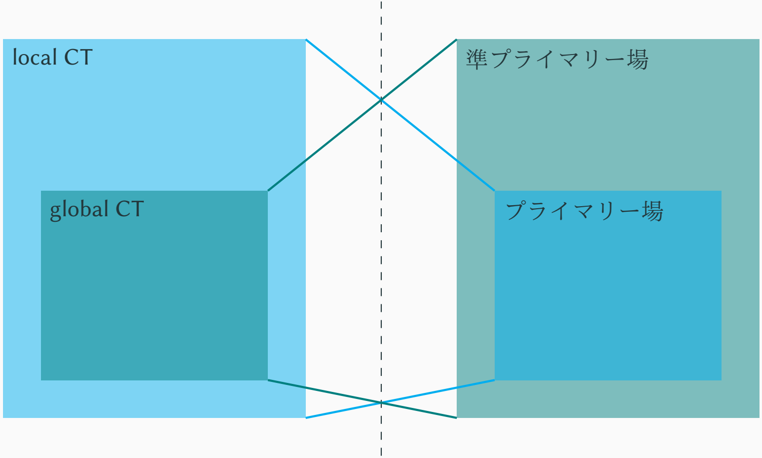
または無限小変換 $w = z + \epsilon(z)$、$\bar{w} = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}?)$ に対して

$$\begin{aligned} \delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}}\phi :=& \phi'(z, \bar{z}) - \phi(z, \bar{z}) \\ =& -(h\phi\partial_z\epsilon + \epsilon\partial_z\phi) - (\bar{h}\phi\partial_{\bar{z}}\bar{\epsilon} + \bar{\epsilon}\partial_{\bar{z}}\phi) \end{aligned} \tag{5.23}$$

5.1.4　プライマリー場

準プライマリー場:　大域共形変換 (global CT) を満たす場

プライマリー場:　局所共形変換 (local　CT) を満たす場



5.1.5 相関関数

(2.149) よりプライマリー場の共形変換における相関関数の関係は

相関関数の共形変換

$$\langle \phi_1(w_1,\bar{w}_1)\cdots\phi_n(w_n,\bar{w}_n)\rangle = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)_{w=w_i}^{-h_i}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}\bar{z}}\right)_{\bar{w}=\bar{w}_i}^{-\bar{h}_i}\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle \tag{5.24}$$

4.3.1 で行った大域共形変換の場合の議論と同様に行っていく

- Δ は $h,\bar{h}$ に置き換える (場のスピンも考慮している)
- 2 点間の距離 x_{ij} は $\sqrt{z_{ij}\bar{z}_{ij}}$ に置き換える

5.1.5 相関関数

2 点相関関数

$$\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \frac{C_{12}}{(z_1-z_2)^{2h}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^{2\bar{h}}}, \quad \begin{cases} h_1 = h_2 = h \\ \bar{h}_1 = \bar{h}_2 = \bar{h} \end{cases} \tag{5.25}$$

3 点相関関数

$$\begin{aligned}\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\rangle =& C_{123}\frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3}z_{23}^{h_2+h_3-h_1}z_{13}^{h_1+h_3-h_2}} \\ &\times\frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}\bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1}\bar{z}_{13}^{\bar{h}_1+\bar{h}_3-\bar{h}_2}}\end{aligned} \tag{5.26}$$

5.1.5 相関関数

4 点相関関数

$$\langle \phi_1(x_1)\cdots\phi_4(x_4)\rangle = f\left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{14}x_{23}}\right)\prod_{i<j}^{4} z_{ij}^{h/3-h_i-h_j}\,\bar{z}_{ij}^{\bar{h}/3-\bar{h}_i-\bar{h}_j}$$

但し、$h=\sum_{i=1}^4 h_i$、$\bar{h}=\sum_{i=1}^4 \bar{h}_i$

ここで、2 次元においては複比同士に関係が生じる。

$$\eta = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{13}z_{24}}, \quad 1-\eta = \frac{z_{14}z_{23}}{z_{13}z_{24}}, \quad \frac{\eta}{1-\eta} = \frac{z_{12}z_{34}}{z_{14}z_{23}} \tag{5.27}$$

なので、上式の f はもう少し簡潔にかけて、

4 点相関関数

$$\langle \phi_1(x_1)\cdots\phi_4(x_4)\rangle = f(\eta,\bar{\eta})\prod_{i<j}^{4} z_{ij}^{h/3-h_i-h_j}\,\bar{z}_{ij}^{\bar{h}/3-\bar{h}_i-\bar{h}_j} \tag{5.28}$$

2 次元における共形不変性

Ward 恒等式

5.2.1 Ward 恒等式の正則型

4.3.2 で議論した大域共形変換における Ward 恒等式を複素数表示してみる

大域共形変換における Ward 恒等式

$$
\begin{aligned}
2\pi\partial_z \langle T_{\bar{z}z}X\rangle + 2\pi\partial_{\bar{z}} \langle T_{zz}X\rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i} \langle X\rangle \ldots \text{並進} \\
2\pi\partial_z \langle T_{\bar{z}\bar{z}}X\rangle + 2\pi\partial_{\bar{z}} \langle T_{\bar{z}z}X\rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \partial_{z} \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\partial_{\bar{w}_i} \langle X\rangle \ldots \text{並進} \\
2\langle T_{z\bar{z}}X\rangle + 2\langle T_{\bar{z}z}X\rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)\Delta_i \langle X\rangle \ \ldots \text{ひきのばし} \\
-2\langle T_{z\bar{z}}X\rangle + 2\langle T_{\bar{z}z}X\rangle &= -\sum_{i=1}^{n} \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i)s_i \langle X\rangle \quad \ldots \text{ローレンツ (回転)}
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

5.2.1 Ward 恒等式の正則型

(5.37) は次の 2 式にまとめられる。

大域共形変換における Ward 恒等式

$$
\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}\left\{\langle T(z,\bar{z})X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\langle X\rangle + \frac{h_i}{(z-w_i)^2}\langle X\rangle\right]\right\} =& 0\\
\partial_{z}\left\{\langle \bar{T}(z,\bar{z})X\rangle - \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}_i}\partial_{\bar{w}_i}\langle X\rangle + \frac{\bar{h}_i}{(\bar{z}-\bar{w}_i)^2}\langle X\rangle\right]\right\} =& 0
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

但し、$T = -2\pi T_{zz} \quad \bar{T} = -2\pi T_{\bar{z}\bar{z}}$ とおいた。

つまりこれらは正則・反正則な式であることから $T(z,\bar{z}) = T(z)$ であり、

大域共形変換における Ward 恒等式 (Ver.2)

$$
\langle T(z)X\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{z-w_i}\partial_{w_i}\langle X\rangle + \frac{h_i}{(z-w_i)^2}\langle X\rangle\right\} + \text{reg.} \tag{5.41}
$$

但し、$z = w_i$ で正則な成分を reg. と表している。

5.2.2 共形 Ward 恒等式

共形 Ward 恒等式

$$\delta_{\epsilon,\bar{\epsilon}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz \epsilon(z) \langle T(z) X \rangle + \frac{1}{2\pi i}\oint_C d\bar{z}\bar{\epsilon}(\bar{z}) \langle \bar{T}(\bar{z}) X \rangle \tag{5.46}$$

但し C は X を囲んでいるような閉経路である。

大域的共形変換の範囲では次の関係性が現れる。

大域的共形変換での (共形)Ward 恒等式

$$\begin{cases} \sum_i \partial_{w_i} \langle \Phi(w_1)\cdots\Phi(w_i)\cdots\Phi(w_n)\rangle & = 0 \\ \sum_i (w_i\partial_{w_i} + h_i) \langle \Phi(w_1)\cdots\Phi(w_i)\cdots\Phi(w_n)\rangle & = 0 \\ \sum_i \left(w_i^2\partial_{w_i} + 2w_i h_i\right) \langle \Phi(w_1)\cdots\Phi(w_i)\cdots\Phi(w_n)\rangle & = 0 \end{cases} \tag{5.51}$$

↑もちろん 2,3,4 点相関関数 (5.25),(5.26),(5.51) は上式が成立する。

5.2.3 Ward 恒等式の他の導出方法

editing...

2 次元における共形不変性

自由場と演算子積展開

2 つの場 A、B が積の形で現れたとき、それらを一つの和の形で表す方法を演算子積展開 (OPE) という。

演算子積展開 (OPE)

$$A(z)B(w) = \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \tag{5.72}$$

2 点 z と w が十分近いときには相関関数の形から発散項をみることで、OPE を行うことが可能になる。

エネルギー・運動量テンソルの OPE

ϕ をプライマリー場とすると (5.41) の Ward 恒等式から

$$T(z)\phi(w,\bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w,\bar{w}) \tag{5.71}$$

5.3.1 自由ボゾン系

質量のない自由ボゾン場 φ について考えてみる。

自由ボゾン場の作用

$$S = \frac{1}{2}g \int d^2x \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \tag{5.73}$$

g は規格化因子

以下、各種の OPE を掲載。

$\partial\varphi$ 同士の OPE

$$\partial\varphi(z)\partial\varphi(w) \sim -\frac{1}{4\pi g}\frac{1}{(z-w)^2} \tag{5.77}$$

5.3.1 自由ボゾン系

T と $\partial\varphi$ の OPE

$$T(z)\partial\varphi(w) \sim \frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w^2\varphi(w)}{z-w} \tag{5.82}$$

これより $\partial\varphi$ は (5.71) と比較して、共形次元 $h = 1$ のプライマリー場であることがわかる。

T 同士の OPE

$$T(z)T(w) \sim \boxed{\frac{1/2}{(z-w)^4}} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{5.83}$$

(5.83) と (5.71) を比較すると、$\frac{1}{2}/(z-w)^4$ だけズレが生じてる。

5.3.2 自由フェルミオン系

自由フェルミオン場 φ について考えてみる。

自由ボゾン場の作用

$$S = g \int d^2x (\bar{\psi}\partial\bar{\psi} + \psi\bar{\partial}\psi) \tag{5.88}$$

g は規格化因子

以下、各種の OPE を掲載。

ψ 同士の OPE

$$\psi(z)\psi(w) \sim \frac{1}{2\pi g}\frac{1}{z-w} \tag{5.95}$$

5.3.2　自由フェルミオン系

T と ψ の OPE

$$T(z)\psi(w) \sim \frac{\frac{1}{2}\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\psi(w)}{z-w} \tag{5.99}$$

これより ψ は (5.71) と比較して、共形次元 $h = 1/2$ のプライマリー場であることがわかる。

T 同士の OPE

$$T(z)T(w) \sim \boxed{\frac{1/4}{(z-w)^4}} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{5.100}$$

(5.100) と (5.71) を比較すると、$\dfrac{1}{4}/(z-w)^4$ だけズレが生じてる。

5.3.3　ゴースト系

editing...

2 次元における共形不変性

中心電荷

5.4.1 エネルギー・運動量テンソルの変換則

共形 Ward 恒等式 (5.46) を微小共形変換の定義とする。このとき、エネルギー・運動量テンソルの変化は次の通り。

エネルギー・運動量テンソルの変化量

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon T(w) &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}z\,\epsilon(z)T(z)T(w) \\ &= -\frac{1}{12}\partial_w^3\epsilon(w) - 2T(w)\partial_w\epsilon(w) - \epsilon(w)\partial_w T(w)\end{aligned} \tag{5.123}$$

また、有限共形変換も上の議論から導ける。

エネルギー一運動量テンソルの有限共形変換

$$T'(w) = \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right)^{-2}\left[T(z) - \frac{c}{12}\{w;z\}\right] \tag{5.124}$$

5.4.2 c の物理的解釈

- エネルギー・運動量テンソルの期待値
  円筒座標 $z \to w = \frac{L}{2\pi} \ln z$ へ射影した際のエネルギー運動テンソルの真空期待値を評価してみると

$$\langle T_{\mathrm{cyl.}}(w) \rangle = -\frac{c\pi^2}{6L^2}$$

  →円筒の周期境界から現れる Casimir エネルギーの割合に c が現れる。

- 自由エネルギー密度
  円筒座標では自由エネルギーにも、円周 L とのトレードオフの形で c が現れる。

$$F_L = f_0 L + \frac{\pi c}{6L} \tag{5.143}$$

- トレース · アノマリー
  曲がった 2 次元多様体上ではトレース · アノマリーとして現れる。

$$\left\langle T^{\mu}{}_{\mu} \right\rangle_g = \frac{c}{24\pi} R(\boldsymbol{x}) \tag{5.144}$$