2　部分環、イデアル、準同形

この章ではリー環論を進める上で基礎になるいくつかの概念を説明する。これらは他の代数系 (群、結合環、etc.) についても同様に定義されるもので、いわば「抽象代数」全体に共通するものである。

2.1　部分環

$\mathfrak{g}$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上のリー環とする

Definition 2.1　『部分リー環』
$\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{h}$ が次の二つの条件を満たすとき、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の**部分（リー）環** ((Lie) subalgebra) であるという。

(i) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の線形部分空間である。すなわち

$$x, y \in \mathfrak{h},\ \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ x + y \in \mathfrak{h},\ \lambda x \in \mathfrak{h}.$$

(ii) $x, y \in \mathfrak{h} \Rightarrow [x, y] \in \mathfrak{h}.$

Remark. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の演算 (加法、乗法、スカラー乗法) に関して閉じているため、$\mathfrak{h}$ もまた一つの環 (代数) になる。

Remark. リー環の条件 (I′)(II′) も、$\mathfrak{g}$ 全体で成立しているから、もちろん $\mathfrak{h}$ の中でも成立する。したがって、$\mathfrak{h}$ はそれ自身一つのリー環になる。

Example 1.
Remark. $\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{R})$ とし

$$\mathfrak{h} = \{x \in gl_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\} \tag{2.1}$$

とおく。すなわち $x = (\xi_{ij})$ に対して $\mathrm{tr}(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii}$ は 1 次方程式 $\mathrm{tr}(x) = 0$ の解空間であるから、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の線形部分空間である。

また $x, y \in \mathfrak{h}$、$x = (\xi_{ij})$、$y = (\eta_{ij})$ に対し

$$\mathrm{tr}(xy) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}\eta_{ji},$$
$$\mathrm{tr}(yx) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta_{ij}\xi_{ji}$$

であるから、$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$。したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}([x, y]) &= \mathrm{tr}(xy - yx) \\ &= \mathrm{tr}(xy) - \mathrm{tr}(yx) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

となり、$[x, y] \in \mathfrak{h}$。よって $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー環である。

Named. (2.1) で表される $\mathfrak{h}$ を $sl_n(\mathbb{R})$ または $sl(n, \mathbb{R})$ と書く。(sl は special linear の略。)

Remark. この場合、実際には元に対して (2.1) の制限は必要ではなく、任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し $[x, y] \in \mathfrak{h}$ が成立する。

Example 2.

Definition 2.2　『実対称 · 実交代行列』
n 次実対称行列の全体を以下のように置く。

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \left\{x \in gl_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x = x\right\}.$$

n 次実交代行列の全体を以下のように置く。

$$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) = \left\{x \in gl_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x = -x\right\}.$$

(t は転置行列を表す)

Remark. Def. 2.2 は明らかに $gl_n(\mathbb{R})$ の線形部分空間になる。

Theorem 2.1
$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ は部分リー環である。$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ の方は部分リー環にはならない。

Proof:　一般に $x, y \in gl_n(\mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned} {}^t[x, y] &= {}^t(xy - yx) \\ &= {}^t y\, {}^t x - {}^t x\, {}^t y \\ &= -\left[{}^t x, {}^t y\right] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} x, y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) & \Rightarrow [x, y] \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) \\ x \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), y \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) & \Rightarrow [x, y] \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \\ x, y \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) & \Rightarrow [x, y] \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{4}$$

よって $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ のみ部分リー環となる。 ■

Named. $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ を $o_n(\mathbb{R})$ または $o(n)$ ともかく。

Remark.

$$o(n) \subset sl_n(\mathbb{R}) \subset gl_n(\mathbb{R}) \tag{5}$$

であるから、$o(n)$ はまた $sl_n(\mathbb{R})$ の部分リー環でもある。($o(n) = \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ は自然に (2.1) の条件を満たしている。)

Example 3.

Theorem 2.2

(a) A を単に ($\mathbb{R}$ 上の) ベクトル空間とみなし、その 1 次変換 (A から A の中への一次写像) 全体の集合を $gl(A)$ と書くことにすれば、これも一つの ($\mathbb{R}$ 上の) リー環である。

(b) $\mathrm{Der}(A)$ は $gl(A)$ の部分リー環になる。

Remark. (a) について、$\dim A = n$ とし A の $\mathbb{R}$ 上の一つの底をとって考えれば、$gl(A)$ は $gl_n(\mathbb{R})$ と同じものである。

Proof: (b) について A がトリビアルな代数ならば、$x, y \in A$、$D \in \mathrm{Der}(A)$ として微分の条件 (9) を確認すると

$$
\begin{aligned}
&D(xy) = D(x)\cdot y + x\cdot D(y) \\
\Leftrightarrow\ &D(0) = D(x)\cdot y + x\cdot D(y) && \because xy = 0 \quad \text{from (4)} \\
\Leftrightarrow\ &0 = 0 + 0 && \because D(x), D(y) \in A
\end{aligned}
$$

となり常に成立する。よって $\mathrm{Der}(A) = gl(A)$ となる。 ■

2.2 イデアル

Definition 2.3 『イデアル』
$\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{h}$ が次の 2 つの条件を満たすとき、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル (ideal) であるという。

(i)′ $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の線形部分空間である。
(ii)′ すべての $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}$ に対し、$[x, y] \in \mathfrak{h}$。

Remark. 明らかに (ii)′⇒(ii) である。したがってイデアルはすべて部分リー環だが、逆は必ずしも成立しない。

Theorem 2.3

(a) $sl_n(R)$ は $gl_n(R)$ のイデアル。
(b) $o(n)$ は $gl_n(R)$ の (部分リー環であるが) イデアルではない

Proof: Thm. 2.3(a) については、Section 1(3) より自明。 ■

Proof: Thm. 2.3(b) について、$x \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \subset gl_n(\mathbb{R})$、$y \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ とすると ($\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ は $gl_n(\mathbb{R})$ の部分リー環ではないが部分集合ではある。)、(4) の 2 式より

$$
\begin{aligned}
&[x, y] \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad [x, y] \notin \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) \\
&\therefore [x, y] \notin o(n)
\end{aligned}
$$

となるため、(ii)′ が成立しない。 ■

Remark. リー環論では (つねに (5′) より $[x, y] = -[y, x]$ であるため)”右イデアル”と”左イデアル”は区別の必要がない。

Named. $\mathfrak{g}$ の線形部分空間 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対し $[x, y](x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b})$ によって生成される部分空間を $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ で表す。したがって $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ は

$$
\sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i], \quad x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in \mathfrak{b}, m \geq 1
$$

の形の有限和全体の集合である。$[x_i, y_j]$ ではない？

Remark. $[x, y]$ の形の元全体の集合は必ずしも線形部分空間にはならない。

Lemma 2.1

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば、$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

Proof: $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{a}, z \in \mathfrak{b}$ のとき、$[x, [y, z]]$ が $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ に含まれていることをいえばよい。(5)、(6) により

$$
\begin{aligned}
(6) \Leftrightarrow &[[x, y], z] - [x, [y, z]] - [y, -[x, z]] = 0 \\
\Leftrightarrow &[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \qquad (6)
\end{aligned}
$$

が成立する。$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルだから、$[x, y] \in \mathfrak{a}$、よって $[[x, y], z] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$。また、$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルだから、$[x, z] \in \mathfrak{b}$、よって $[y, [x, z]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$。よって $[x, [y, z]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$。 ■

Definition 2.4 『導イデアル』
Lem. 2.1 により、$\mathfrak{g}$ 自身 $\mathfrak{g}$ のイデアルだから、$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ もイデアルである。これを $D\mathfrak{g}$ とかき、$\mathfrak{g}$ の**導イデアル** (derived ideal) という。

Remark. Def. 2.4 よりさらに

$$
\begin{aligned}
D^2\mathfrak{g} =&D(D\mathfrak{g}) = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \\
\mathfrak{g}^3 =&[\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]], \cdots
\end{aligned}
$$

等のイデアルが作られる。

Probrem 2.1

$\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{R})$ のとき、$D\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{R})$ となることを示せ。
(回答)

2.3 準同型

$\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}'$ を ($\mathbb{R}$ 上の) リー環とする。

Definition 2.5 『準同型写像』
$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ の中への写像 φ が次の条件を満たすとき、φ は (リー環の) **準同型写像** (homomorphism) という。

(i) φ は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ への線形写像である。
(ii) 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$
\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \qquad (7)
$$

が成立する。

つまり、リー環の準同型写像とはリー環の演算 (加法、乗法、スカラー乗法) を保存する写像のことである。

Theorem 2.4 (合成写像)

$\mathfrak{g}''$ を第三のリー環、φ' を $\mathfrak{g}'$ から $\mathfrak{g}''$ の中への準同型写像とすれば、合成写像 $\varphi' \circ \varphi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}''$ も準同型写像になる。

Proof: (ii) の条件を調べてみると

$$
\begin{aligned}
(\varphi' \circ \varphi)([x, y]) =&\varphi'(\varphi([x, y])) \\
=&\varphi'([\varphi(x), \varphi(y)]) \\
=&[\varphi'(\varphi(x)), \varphi'(\varphi(y))]
\end{aligned}
$$

$$=[\varphi' \circ \varphi(x), \varphi' \circ \varphi(y)]$$

から確かに成立する。同様に $\varphi' \circ \varphi$ は (i) も満たす。 ■

Theorem 2.5 (逆写像の準同型写像)

準同型写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ が 1 対 1(単射) かつ $\mathfrak{g}'$ の上への写像 (全射) であるときには φ の逆写像 φ^{-1} が存在する。そのとき、φ^{-1} は $\mathfrak{g}'$ から $\mathfrak{g}$(の上) への準同型写像になる。

Proof: 条件 (ii) を調べるために $x', y' \in \mathfrak{g}'$ をとり $x = \varphi^{-1}(x'), y = \varphi^{-1}(y')$ とすれば、$\varphi(x) = x', \varphi(y) = y'$。よって

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [x', y'].$$

であり、両辺を φ^{-1} で移すと (都合で右辺と左辺を入れ替える)

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}[x', y'] &= (\varphi^{-1} \circ \varphi)([x, y]) \\ &= [x, y] \\ &= [\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(y')]\end{aligned}$$

となるため、(ii) が成立する。同様に φ^{-1} は (i) も満たす。 ■

Named. 1 対 1、上への写像であるような準同型写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ を (リー環の) **同型写像** (isomorphism) という。

Remark. 上述のように φ が同型写像なら $\varphi^{-1}\colon \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}$ も同型写像である。また $\varphi'\colon \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}''$ も同型写像ならば、明らかに $\varphi' \circ \varphi$ も同型写像である。

Definition 2.6 『リー環の同型』

二つのリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の間に同型写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ が存在するとき、$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ は**同型** (isomorphic) であるといい、$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$、$\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'$ とかく。

Remark. Def. 2.6 はリー環の集合に一つの同値関係を定義する。

Definition 2.7 『核と像』

準同型写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ が与えられたとき

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\varphi &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \varphi(x) = 0\} \\ \operatorname{Im}\varphi &= \{\varphi(x) \mid x \in \mathfrak{g}\}\end{aligned}$$

とおき、それぞれ φ の**核** (kernel)、**像** (image) という。

Remark. $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0)$、$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(\mathfrak{g})$ ともかく。

Theorem 2.6

$\operatorname{Ker}\varphi$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル、$\operatorname{Im}\varphi$ は $\mathfrak{g}'$ の部分リー環になる。

Proof:

- $\operatorname{Ker}\varphi$ については、$x \in \mathfrak{g}, y \in \operatorname{Ker}\varphi$ とするとき、条件 (i)′ は明らか。(ii)′ について

  $$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi, 0] = 0$$

  であるから、$[x, y] \in \operatorname{Ker}\varphi$ となり成立する。よって $\operatorname{Ker}\varphi$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

- $\operatorname{Im}\varphi$ については、$x, y \in \operatorname{Im}\varphi$ とするとき、条件 (i) は明らか。(ii) について、$\varphi(x), \varphi(y) \in \mathfrak{g}'$ とおくと

  $$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y])$$

  となるが、$[x, y] \in \mathfrak{g}$ であるので $\varphi([x, y]) \in \mathfrak{g}'$ が成立する。よって、$\operatorname{Im}\varphi$ は $\mathfrak{g}'$ の部分リー環である。

■

Example 4.

Definition 2.8 『表現』

一般にリー環 $\mathfrak{g}$ からあるベクトル空間 V の一次変換の作るリー環 $gl(V)$ の中への準同型写像 ρ を $\mathfrak{g}$ の V における”**表現**”(representation) という。

Definition 2.9 『随伴表現』

$\mathfrak{g}$ を任意のリー環とし、$x \in \mathfrak{g}$ の左乗によって定義される $\mathfrak{g}$ の一次変換

$$y \mapsto [x, y] \qquad (y \in \mathfrak{g})$$

を $\operatorname{ad}(x)$ とかく。これは $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 自身における表現である。これを $\mathfrak{g}$ の**随伴表現** (adjoint representation) という。

Remark. 具体的には $(\operatorname{ad}(x))(y) = [x, y]$。

Theorem 2.7

$\operatorname{ad}(x)$ は $gl(\mathfrak{g})$ の元であり、$\operatorname{ad}(x) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ である。

Proof: $\operatorname{ad}(x)$ が $gl(\mathfrak{g})$ の元であることは Thm. 2.2(a) より明らか。また

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}(x))([y, z]) &= [x, [y, z]] \\ &= [[x, y], z] + [y, [x, z]] \qquad \because \text{from } (6) \\ &= [(\operatorname{ad}(x))(y), z] + [y, (\operatorname{ad}(x))(z)]\end{aligned}$$

となるため、微分の条件 (9) が成立している。よって $\operatorname{ad}(x) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ ■

2.4 商環と標準的準同型

Theorem 2.8 (同値関係)

$\mathfrak{g}$ をリー環、$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする。$x, y \in \mathfrak{g}$ に対し、合同関係を

$$x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{a} \tag{9}$$

によって定義すると、これは一つの同値関係になっている。すなわち、次の三つの条件 1),2),3) が成立する。

1) すべての $x \in \mathfrak{g}$ に対し $x \equiv x \pmod{\mathfrak{a}}$.
2) $x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow y \equiv x \pmod{\mathfrak{a}}$.

3) $x \equiv y,\ y \equiv z \pmod{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow x \equiv z \pmod{\mathfrak{a}}$.

Proof: 1)$x - x = 0 \in \mathfrak{a}$ だから。2) 仮定により $x - y \in \mathfrak{a}$ だから。3) 仮定により $x - y \in \mathfrak{a}, y - z \in \mathfrak{a}$。よって $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{a}$ となるから。 ■

Remark. (9) の合同が同値関係になることは、上の証明より $\mathfrak{a}$ が加法群になっていることからの結果である。

Definition 2.10 『**類**』
同値関係に関する同値類の集合を $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ とかく。$x \in \mathfrak{g}$ を含む"同値類"とは x と合同な元全体の集合

$$
\begin{aligned}
X =& \{x' \in \mathfrak{g} \mid x \equiv x' \pmod{\mathfrak{a}}\} \\
=& \{x + a \mid a \in \mathfrak{a}\}
\end{aligned}
$$

である。これを以下 x の**類** (クラス) といい、$\bar{x}$ または $x+\mathfrak{a}$ で表すことにする。

Theorem 2.9
同値類の集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ には自然にまた和、スカラー倍、リー積が定義できる。

Proof: ∘ 和は

$$X = \bar{x}, \quad Y = \bar{y} \quad \text{のとき} \quad X + Y = \overline{x + y} \tag{10}$$

と定義するのが自然であろう、すなわち、$X, Y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $x \in X$,$y \in Y$ であるとき、$X + Y$ を $x + y$ を含むクラスとして定義しようというのである。ここで大切なことは X, Y の"代表"x, y のとり方は幾通りもあり、したがって $x+y$ は色々であるが、そのクラス $\overline{x+y}$ は一意的に決まってしまうことである。実際、別の代表 $x' \in X, y' \in Y$ をとったとき

$$x + y \equiv x' + y' \pmod{\mathfrak{a}}$$

であることを見ればよいが、

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y')$$

で $x - x' \in \mathfrak{a}, y - y' \in \mathfrak{a}$ であるから $(x - x') + (y - y') \in \mathfrak{a}$ となり上の合同式が成立する。

∘ $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ におけるスカラー倍やリー積を

$$
\begin{aligned}
&X = \bar{x}, \quad Y = \bar{y} \quad \text{のとき} \\
&\lambda X = \overline{\lambda x}, \quad [X, Y] = \overline{[x, y]}
\end{aligned} \tag{11}
$$

によって定義する。これが実現可能なことは、上と同様、$x' \in X, \quad y' \in Y$ とするとき

$$\lambda x - \lambda x' = \lambda(x - x') \in \mathfrak{a}$$

$$
\begin{aligned}
&[x, y] - [x', y'] \\
=&[x, y] - [x', y] + [x', y] - [x', y'] \\
=&[x - x', y] + [x', y - y'] \in \mathfrak{a}
\end{aligned}
$$

であることからわかる。この最後のところで $\mathfrak{a}$ が (両側) イデアルの性質 (ii)$'$ を用いた。

■

Remark. 上述のように定義された演算はリー環の条件を満たす。

Proof: ヤコビの公式 (II$'$) が成立することは、$X, Y, Z \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $x \in X, y \in Y, z \in Z$ とするとき

$$[X, Y] \quad \text{は} \quad [x, y] \quad \text{のクラス} \quad .$$

したがって

$$[[X, Y], Z] \quad \text{は} \quad [[x, y], z] \quad \text{のクラス} \quad .$$

同様にして

$$
\begin{aligned}
&[[Y, Z], X], [[Z, X], Y] \quad \text{はそれぞれ} \\
&[[y, z], x], [[z, x], y] \quad \text{のクラス}
\end{aligned}
$$

となり、

$$
\begin{aligned}
&[[X, Y], Z], [[Y, Z], X], [[Z, X], Y] \quad \text{は} \\
&[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] (= 0) \quad \text{のクラス}
\end{aligned}
$$

となる。 ■

Definition 2.11 『**商環**』
同値類の集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ にリー環の構造を入れたものを**剰余環**または**商環**という。

※群論においてイデアルに対応するのは"正規部分群"で、上記と同様にして"商群"の概念が定義される。

Definition 2.12 『**標準的準同型**』
もとのリー環 $\mathfrak{g}$ から商環 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の上への写像

$$\varphi \colon \mathfrak{g} \ni x \mapsto \bar{x} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \quad (\bar{x} \text{ は } x \text{ のクラス}) \tag{12}$$

が定義でき、(10),(11) から準同型写像である。この (12) の写像を**標準的準同型写像** (canonical homomorphism) という。

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash] & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \arrow[d, dash] \\
\mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathfrak{h}/\mathfrak{a} = \varphi(\mathfrak{h}) \arrow[d, dash] \\
\mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, dash] & \{0\} \\
\{0\} &
\end{tikzcd}
$$

Remark. 今、$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$ となるような部分リー環があれば、φ による $\mathfrak{h}$ の像 $\varphi(\mathfrak{h}) = \{\bar{x} \mid x \in \mathfrak{h}\}$ は明らかに $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の部分リー環で、それ自身商環 $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ と考えられる。

逆に $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の部分リー環 $\mathfrak{h}'$ があれば、その逆像

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{h}') = \{x \in \mathfrak{g} \mid \bar{x} \in \mathfrak{h}'\}$$

は明らかに $\mathfrak{g}$ の部分リー環で $\mathfrak{a}$ を含む。さらにこれらについて

$$\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}, \quad \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{h}')) = \mathfrak{h}'$$

となることは容易に確かめられる。よって対応 $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ により $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ を含む部分リー環と、$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の部分リー環とが 1 対 1 に対応していることがわかる。特に $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば、$\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ も $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ のイデアルであり、その逆も言える。

Probrem 2.2

上記最後に述べたことを証明せよ。(回答)

Example 6.

Remark. $\mathfrak{a} = D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とすれば、$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ において、$X = \bar{x}, Y = \bar{y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ならば (教科書は $\in \bar{\mathfrak{g}}$ と定義されていない記法を用いている)

$$[X, Y] = [\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]} = 0 \quad ([x, y] \in \mathfrak{a} \text{ だから})$$

よって $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は可換なリー環になる。逆にあるイデアル $\mathfrak{a}$ に対し $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可換なリー環ならば、すべての $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\overline{[x, y]} = [\bar{x}, \bar{y}] = 0,$$
$$\therefore\ [x, y] \in \mathfrak{a}$$

となるから、$D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ である。よって、$D\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可換であるようなイデアル $\mathfrak{a}$ のうち最小なもの (? Def. 3.1 等は更に小さいイデアルにはならない?) として特徴づけられる。(この場合には $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ となるような任意の線形部分空間 $\mathfrak{a}$ はイデアルになることに注意)

Theorem 2.10

一般に準同型写像

$$\varphi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$$

があるとき、$\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\varphi$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであるが (Thm. 2.6)、$x \in \mathfrak{g}$ の mod $\mathfrak{a}$ のクラス $\bar{x}$ と $\varphi(x)$ とを対応させることにより $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と $\varphi(\mathfrak{g})$ の間の 1 対 1 対応が得られ、それは明らかにリー環の同型になる:

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \varphi(\mathfrak{g}) \tag{13}$$

Proof: $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(y) &\Leftrightarrow \varphi(x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{a} \\ &\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}}, \\ &\ \ i.e. \bar{x} = \bar{y}\end{aligned}$$

■

Remark. 例として、$\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{h}$、$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$、および標準的準同型写像

$$\varphi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$$

を考える。φ の $\mathfrak{h}$ への"制限"

$$\varphi \mid \mathfrak{g} \colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$$

を考えれば

$$\operatorname{Ker}(\varphi \mid \mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \cap (\operatorname{Ker}\varphi) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$$

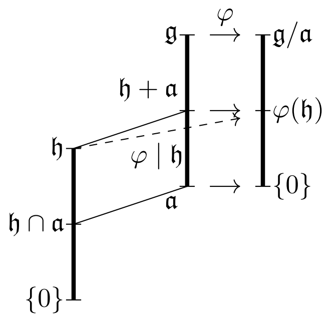
は $\mathfrak{h}$ のイデアルであり、一方

$$\operatorname{Im}(\varphi \mid \mathfrak{h}) = \{\varphi(x) \mid x \in \mathfrak{h}\} = \varphi(\mathfrak{h})$$

は $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の部分リー環であるが (Thm. 2.6)、$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x + \mathfrak{a}$ であるから

$$\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h})) = \bigcup_{x \in \mathfrak{h}} (x + \mathfrak{a}) = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$$

となる。



Remark. 上記のように $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ を含む部分リー環で $\varphi(\mathfrak{h})$ を $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ と同一視することができる。よって、(13) を $\varphi \mid \mathfrak{h}$ に適用して

$$\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) \cong (\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$$

という基本的な同型定理が得られる。