「リー環の話」（著: 佐武一郎） について

大橋良伊[*1]

[*1] 名古屋大学大学院工学研究科応用物理学専攻

目次

1 リー環の定義

この本はリー環の定義から出発して半単純リー環の構造、分類の理論まで基本的な理論の筋道を紹介している。リー環は元来リー群を代数的に取り扱うための道具として導入されたものであるから、リー群と並行して考えなければ、その本当の面白さ、有難さはわからない。しかし最初にリー環の代数的理論を学んで、それからリー群論や微分幾何に入ってゆくのもひとつの勉強法であるし、代数的なリー環論だけでも十分興味が湧くだろう。

1.1 環と代数

Definition 1.1 『環』

集合 A に 2 つの演算"加法"と"乗法"が定義されていて、次の条件 (I),(II) が成立するとき、A は**環** (ring) であるという.

(I) (加法に関する可換律) 任意の $x, y, z \in A$ に対し

$$x + y = y + x, \tag{1.1}$$
$$(x + y) + z = x + (y + z); \tag{1.2}$$

0 と呼ばれる特定の元があって、すべての $x \in A$ に対し

$$x + 0 = x; \tag{1.3}$$

任意の $x \in A$ に対し,"逆元"$-x$ があって

$$x + (-x) = 0. \tag{1.4}$$

(II) (分配律) 任意の $x, y, z \in A$ に対し

$$(x + y)z = xz + yz, \tag{1.5}$$
$$z(x + y) = zx + zy. \tag{1.6}$$

Remark. 条件 (II) は積を定義する写像

$$\begin{aligned} A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned} \tag{1}$$

が x についても y についても"加法的"になっていることを示している。

Named. 環 A が乗法に関して以下の式が成立するとき、"可換な環"または"可換環"という。

任意の $x, y, z \in A$ に対し

$$xy = yx \qquad \text{(可換律)} \tag{2}$$
$$(xy)z = x(yz) \qquad \text{(結合律)} \tag{3}$$

Named. 実数環 $\mathbb{R}$ について 0 以外の元の集合 $\mathbb{R}^\times = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq 0\}$ は乗法に関して可換群になっている。このような環 $\mathbb{R}$ のことを"実数体"という。

Named. n 行 n 列の実行列全体の集合を $M_n(\mathbb{R})$ と書く。

Definition 1.2 『代数』

集合 A に 3 つの演算、加法、乗法、(実数による) スカラー乗法が定義されていて次の条件 (I′)(II′) が成立するとき、A を(実数体 $\mathbb{R}$ 上の)**代数** (algebra) という。

(I′) A は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である。すなわち、加法に関しては条件 (I) が成立し、さらにスカラー倍に関して ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$、$x, y \in A$、1 は実数の 1 とする)

$$\begin{aligned} \alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y, \\ (\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x, \\ (\alpha\beta)x &= \alpha(\beta x), \\ 1x &= x \end{aligned}$$

等が成立する。

(II′) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$、$x, y, z \in A$ に対し

$$\begin{aligned} (x + y)z &= xz + yz, \\ z(x + y) &= zx + zy, \\ (\alpha x)z &= \alpha(xz), \\ z(\alpha x) &= \alpha(zx) \end{aligned}$$

等が成立する。

Remark. (II′) は (1) の写像 $(x, y) \mapsto xy$ が x についても y についても"両線形"(bilinear) であることを示している。

Named. $A = M_n(\mathbb{R})$ は結合律 (3) も満たす代数である。このような代数を"結合代数"(または多元環) という。

Named. V を $\mathbb{R}$ 上の(任意の)ベクトル空間とし、V における積をすべての $x, y \in V$ に対し

$$xy = 0 \tag{4}$$

と定義すれば、明らかに (II′) の条件が成立し、(結合) 代数となる。→ ベクトル空間 V から定義される**トリビアルな代数**とよぶ。

1.2 リー環の定義

Definition 1.3 『リー環』

集合 $\mathfrak{g}$ に 3 つの演算 (和、スカラー倍、括弧積) が定義さ

れていて、次の条件 (I′)(II′) が成立するとき、$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ 上の**リー環** (Lie ring) という。

(I′) $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{R}$ 上の（有限次元）ベクトル空間になる。

(II′) 括弧積は両線形で、任意の $x, y, z \in \mathfrak{g}$ に対し次の (5)(6) を満たす。

$$[x, x] = 0, \tag{5}$$
$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0. \tag{6}$$

Named. (6) は**ヤコビの等式** (Jacobi Identity) と呼ばれる。また、括弧積 $[x, y]$ は**リー積**とも呼ぶ。

Remark. $\mathfrak{g}$ が標数 2 でなければ、(5) は

$$[x, y] = -[y, x] \tag{5′}$$

と同値である。

Named. 条件 (5) が成立することを、積 $[x, y]$ は”交代的”(alternating) であるという。また、条件 (5′) が成立することを”反対称的”(skew-symmetric) であるという。

Remark. (5) と (6) は次のような関係にある。

$f(x, y, z) = [[x, y], z]$ と置き、この式の x, y, z にすべての置換を施して得られる式の和を作ってみると

$$\begin{aligned} &f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y) \\ &+f(y, x, z) + f(z, y, x) + f(x, z, y) \end{aligned} \tag{$*$}$$

となる。一方 (5′) より

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= [[x, y], z] = [-[y, x], z] \\ &= -f(y, x, z) \end{aligned}$$

であるから、$(*)$ は 0 に等しくなる。
また (6) の左辺を $F(x, y, z)$ と置くと、$(*)$ は

$$F(x, y, z) + F(y, x, z) = 0$$

と書き直すことができるが、条件 (6) はこれより強い制約

$$F(x, y, z) = 0$$

であることがわかる。
$\longrightarrow$ 一般に (5) から (6) は導かれない。(反例として Ex.1.3 参照)

1.3 リー環の例

Example 1.

$M_n(\mathbb{R})$ は行列の演算に関して結合代数になるが、$n \geq 2$ ならば可換ではない。そこで以下のような”交代積”を定義する。

Definition 1.4 『**交代積**』
”交代積”を次のように定義する。

$$[x, y] = xy - yx \qquad (x, y \in M_n(\mathbb{R})) \tag{7}$$

Remark. (6) について

$$\begin{aligned} [[x, y], z] &= (xy - yx)z - z(xy - yx) \\ &= (xyz + zyx) - (yxz + zxy) \\ [[y, z], x] &= (yzx + xzy) - (zyx + xyz) \\ [[z, x], y] &= (zxy + yxz) - (xzy + yzx) \end{aligned}$$

より差し引いて 0 となる。

Named. $M_n(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上のリー環とみたとき、それを $gl_n(\mathbb{R})$ または $gl(n, \mathbb{R})$ とかく。(gl は general linear の略)

Remark. $gl_n(\mathbb{R})$ はベクトル空間としては n^2 次元で、その標準的な基底として

$$e_{ij} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right) i \end{array} \quad (1 \leq i, j \leq n) \tag{1.7}$$

$$\left(\begin{array}{c} (i, j) \text{ 成分は 1 で他の成分は} \\ \text{すべて 0 であるような行列} \end{array} \right)$$

を取ることができる。この底を使って交代積を計算すると

$$\begin{aligned} [e_{ij}, e_{kl}] &= e_{ij}e_{kl} - e_{kl}e_{ij} \\ &= \begin{cases} e_{il} & (j = k, i \neq l) \\ -e_{kj} & (i = l, j \neq k) \\ e_{ii} - e_{jj} & (j = k, i = l, i \neq j) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

となる。

Named. 一般に、A を $\mathbb{R}$ 上の結合環 (結合代数) とすれば、(7) によってリー積を定義することにより、A に $\mathbb{R}$ 上のリー環の構造を入れることができる。これを仮に $(A)_{\text{Lie}}$ とかくこととする。例えば、

$$(M_n(\mathbb{R}))_{\text{Lie}} = gl_n(\mathbb{R})$$

Example 2.

Remark. V を任意の (有限次元) ベクトル空間とし、それから定義される”トリビアルな代数”もまた V で表すことにすれば、$\mathfrak{g} = (V)_{\text{Lie}}$ もトリビアルな代数で、すべての $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$[x, y] = 0$$

が成立する。

Named. 以下の Thm. 1.1 に従うトリビアルなリー環を**可換なリー環**という。

Theorem 1.1 (可換なリー環)

一般に、A を (Def. 1.1 の意味の) 結合環とすれば、$(A)_{\mathrm{Lie}}$ がトリビアルなリー環になるためには、A が可換なことが必要十分である。

Example 3.

Theorem 1.2

一般に、有限次元ベクトル空間 V にリー環の構造を定義するためには、V の一つの基底 $e_1, \cdots, e_n$ $(n = \dim V)$ をとり、$[e_i, e_j](1 \leq i, j \leq n)$ を定めれば十分である。

Proof: $\mathfrak{g} = V$ とすると、任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ は

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$$

と書けるから、リー積が両線形なことから

$$[x, y] = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j [e_i, e_j]$$

となり、$[e_i, e_j]$ が定まれば、$[x, y]$ も定まる。 ∎

Remark. 実際に $[e_i, e_j]$ についてリー環の条件 (5),(6) を確認してみる。

- Eqs. (5) and (5′) については

  $$[y, x] = -\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j [e_j, e_i]$$

  が常に成立する、つまり

  $$[e_i, e_i] = 0, \quad [e_i, e_j] = -[e_j, e_i] \quad (i < j) \tag{5''}$$

  が成立する必要がある。よって、$[e_i, e_j]$ だけを定めればよい。
- Eq. (6) が成立するためにはすべての i, j, k に対し

  $$[[e_i, e_j], e_k] + [[e_j, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_j] = 0 \tag{6'}$$

  でなければならない。ここでもし i, j, k の中に等しいものがあれば、(6′) は (5″) を用いて (例えば $i = j$ とすると)

  $$\begin{aligned}&[[e_i, e_i], e_k] + [[e_i, e_k], e_i] + [[e_k, e_i], e_i] \\ =&[[e_i, e_k], e_i] + [-[e_i, e_k], e_i] \\ =&0\end{aligned}$$

  となり成立する。よって、(6′) は $i < j < k$ である場合に成立すれば十分であり、$n \leq 2$ ならば条件 (6′) は不要である。

Remark. n が小さい範囲で具体例をみてみると

- $n = 1$ のとき、$\mathfrak{g} = \{e_1\}_{\mathbb{R}}$($e_1$ によって張られる 1 次元ベクトル空間) をリー環にする仕方は唯 1 通りで、$[e_1, e_1] = 0$ によって定義される可換なリー環である。
- $n = 2$ のとき、$[e_1, e_2]$ の値を任意に与えるだけで $\mathfrak{g} = \{e_1, e_2\}_{\mathbb{R}}$ にリー環の構造を定義することができる。
- $n = 3$ のとき、(6′) は唯 1 つの条件式

  $$[[e_1, e_2], e_3] + [[e_2, e_3], e_1] + [[e_3, e_1], e_2] = 0 \tag{6''}$$

  となる。したがって、$[e_1, e_2]$、$[e_1, e_3]$、$[e_2, e_3]$ をこの式が成立するように与えれば、3 次元のリー環 $\mathfrak{g} = \{e_1, e_2, e_3\}_{\mathbb{R}}$ ができる。

  ✓ 例えば

  $$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_2$$

  とすれば (6″) は

  $$\begin{aligned}&[[e_1, e_2], e_3] + [[e_2, e_3], e_1] + [[e_3, e_1], e_2] \\ =&[e_3, e_3] + [e_2, e_1] + [e_2, e_2] \\ =&0\end{aligned}$$

  として成立するため、$\mathfrak{g}$ はリー環になる。

  ✗ 例えば

  $$[e_1, e_2] = e_1, \quad [e_1, e_3] = e_3, \quad [e_2, e_3] = 0$$

  として置いてみると、(6″) の左辺は

  $$\begin{aligned}&[[e_1, e_2], e_3] + [[e_2, e_3], e_1] + [[e_3, e_1], e_2] \\ =&[e_1, e_3] + [0, e_1] + [-e_3, e_2] \\ =&[e_1, e_3] - [e_3, e_2] = e_3 \neq 0\end{aligned}$$

  となるため (6″)(すなわち (6)) は成立しない。したがってこの定義される積に関しては $\mathfrak{g}$ はリー環にはならない。

Example 4.

Definition 1.5 『微分』

A を $\mathbb{R}$ 上の任意の環 (代数) とする。A から自分自身への一次写像 D が A の積に関して

$$D(xy) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y) \qquad (x, y \in A) \tag{9}$$

をみたすとき、D を A の**微分**であるという。

Remark. Def. 1.5 は微分演算 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ の性質の抽象化である。

Remark. D,D' が A の微分であるとき、その和 $D + D'$ やスカラー倍 αD を通常のように

$$\begin{aligned}&(D + D')(x) = D(x) + D'(x), \\ &(\alpha D)(x) = \alpha D(x)\end{aligned}$$

によって定義すれば、$D + D'$ や αD がまた A の微分になることは

$$(D + D')(xy) =(D + D')(x) \cdot y + x \cdot (D + D')(y)$$

$$
\begin{aligned}
&=\{D(x)+D'(x)\}\cdot y+x\cdot\{D(x)+D'(x)\}\\
&=D(x)\cdot y+D'(x)\cdot y+x\cdot D(x)+x\cdot D'(x)\\
&=D(xy)+D'(xy)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha D)(xy)=&(\alpha D)(x)\cdot y+x\cdot(\alpha D)(x)\\
=&\alpha\{D(x)\cdot y+x\cdot D(x)\}\\
=&\alpha D(xy)
\end{aligned}
$$

として (9) が成立することから確認できる。

一方で積 (合成写像)DD' を計算してみると

$$
\begin{aligned}
(DD')(xy)=&D(D'(xy))\\
=&D(D'(x)\cdot y+x\cdot D'(y))\\
=&D(D'(x)\cdot y)+D(x\cdot D'(y))\\
=&D(D'(x))\cdot y+D'(x)\cdot D(y)\\
&+D(x)\cdot D'(y)+x\cdot D(D'(y))\\
=&(DD')(x)\cdot y+D'(x)\cdot D(y)\\
&+D(x)\cdot D'(y)+x\cdot(DD)'(y)
\end{aligned}
$$

となり、微分にはならない。

Remark. 微分の"交代積"$[D,D']=DD'-D'D$ について確認してみると

$$
\begin{aligned}
[D,D'](xy)=&(DD')(xy)-(D'D)(xy)\\
=&(DD')(x)\cdot y+x\cdot(DD')(y)\\
&-(D'D)(x)\cdot y-x\cdot(D'D)(y)\\
=&\{(DD')(x)-(D'D)(x)\}\cdot y\\
&+x\cdot\{(DD')(y)-(D'D)(y)\}\\
=&([D,D'](x))\cdot y+x\cdot([D,D'](y))
\end{aligned}
$$

となるため、$[D,D']$ は一つの微分になる。

Definition 1.6 『微分環』
A の微分全体の集合を $\mathrm{Der}(A)$ とかけば、$\mathrm{Der}(A)$ は交代積に関して閉じており、リー環となる。この $\mathrm{Der}(A)$ を A の**微分環** (derivation algebra) という。

Remark. A が有限次元なら、$\mathrm{Der}(A)$ も有限次元である。

2　部分環、イデアル、準同形

この章ではリー環論を進める上で基礎になるいくつかの概念を説明する。これらは他の代数系 (群、結合環、etc.) についても同様に定義されるもので、いわば「抽象代数」全体に共通するものである。

2.1　部分環

$\mathfrak{g}$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上のリー環とする

Definition 2.1 『部分リー環』

$\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{h}$ が次の二つの条件を満たすとき、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の**部分（リー）環** ((Lie) subalgebra) であるという。

(i) $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の線形部分空間である。すなわち

$$x, y \in \mathfrak{h},\ \lambda \in \mathbb{R}\ \Rightarrow\ x + y \in \mathfrak{h},\ \lambda x \in \mathfrak{h}.$$

(ii) $x, y \in \mathfrak{h} \Rightarrow [x, y] \in \mathfrak{h}.$

Remark. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の演算 (加法、乗法、スカラー乗法) に関して閉じているため、$\mathfrak{h}$ もまた一つの環 (代数) になる。

Remark. リー環の条件 (I′)(II′) も、$\mathfrak{g}$ 全体で成立しているから、もちろん $\mathfrak{h}$ の中でも成立する。したがって、$\mathfrak{h}$ はそれ自身一つのリー環になる。

Example 1.

Remark. $\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{R})$ とし

$$\mathfrak{h} = \{x \in gl_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\} \tag{2.1}$$

とおく。すなわち $x = (\xi_{ij})$ に対して $\mathrm{tr}(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ii}$ は 1 次方程式 $\mathrm{tr}(x) = 0$ の解空間であるから、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の線形部分空間である。

また $x, y \in \mathfrak{h}$、$x = (\xi_{ij})$、$y = (\eta_{ij})$ に対し

$$\mathrm{tr}(xy) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_{ij}\eta_{ji},$$
$$\mathrm{tr}(yx) = \sum_{i,j=1}^{n} \eta_{ij}\xi_{ji}$$

であるから、$\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$。したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}([x, y]) &= \mathrm{tr}(xy - yx)\\ &= \mathrm{tr}(xy) - \mathrm{tr}(yx) = 0\end{aligned} \tag{3}$$

となり、$[x, y] \in \mathfrak{h}$。よって $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー環である。

Named. (2.1) で表される $\mathfrak{h}$ を $sl_n(\mathbb{R})$ または $sl(n, \mathbb{R})$ と書く。(sl は special linear の略。)

Remark. この場合、実際には元に対して (2.1) の制限は必要ではなく、任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し $[x, y] \in \mathfrak{h}$ が成立する。

Example 2.

Definition 2.2 『実対称 · 実交代行列』

n 次実対称行列の全体を以下のように置く。

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{x \in gl_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x = x\}.$$

n 次実交代行列の全体を以下のように置く。

$$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) = \{x \in gl_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x = -x\}.$$

(t は転置行列を表す)

Remark. Def. 2.2 は明らかに $gl_n(\mathbb{R})$ の線形部分空間になる。

Theorem 2.1

$\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ は部分リー環である。$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ の方は部分リー環にはならない。

Proof:　一般に $x, y \in gl_n(\mathbb{R})$ に対し

$$\begin{aligned}{}^t[x, y] &= {}^t(xy - yx)\\ &= {}^t y\,{}^t x - {}^t x\,{}^t y\\ &= -\left[{}^t x, {}^t y\right]\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} x, y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) & \Rightarrow [x, y] \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})\\ x \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), y \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) & \Rightarrow [x, y] \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})\\ x, y \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) & \Rightarrow [x, y] \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{4}$$

よって $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ のみ部分リー環となる。 ■

Named. $\mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ を $o_n(\mathbb{R})$ または $o(n)$ ともかく。

Remark.

$$o(n) \subset sl_n(\mathbb{R}) \subset gl_n(\mathbb{R}) \tag{5}$$

であるから、$o(n)$ はまた $sl_n(\mathbb{R})$ の部分リー環でもある。($o(n) = \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ は自然に (2.1) の条件を満たしている。)

Example 3.

Theorem 2.2

(a) A を単に ($\mathbb{R}$ 上の) ベクトル空間とみなし、その 1 次変換 (A から A の中への一次写像) 全体の集合を $gl(A)$ と書くことにすれば、これも一つの ($\mathbb{R}$ 上の) リー環である。

(b) $\mathrm{Der}(A)$ は $gl(A)$ の部分リー環になる。

Remark. (a) について、$\dim A = n$ とし A の $\mathbb{R}$ 上の一つの底をとって考えれば、$gl(A)$ は $gl_n(\mathbb{R})$ と同じものである。

Proof: (b) について A がトリビアルな代数ならば、$x, y \in A$、$D \in \mathrm{Der}(A)$ として微分の条件 (9) を確認すると

$$\begin{aligned} &D(xy) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y) \\ \Leftrightarrow\ &D(0) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y) && \because xy = 0 \quad \text{from } (4) \\ \Leftrightarrow\ &0 = 0 + 0 && \because D(x), D(y) \in A \end{aligned}$$

となり常に成立する。よって $\mathrm{Der}(A) = gl(A)$ となる。 ■

2.2 イデアル

Definition 2.3 『イデアル』
$\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{h}$ が次の 2 つの条件を満たすとき、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の**イデアル** (ideal) であるという。

(i)′ $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の線形部分空間である。
(ii)′ すべての $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}$ に対し、$[x, y] \in \mathfrak{h}$。

Remark. 明らかに (ii)′⇒(ii) である。したがってイデアルはすべて部分リー環だが、逆は必ずしも成立しない。

Theorem 2.3

(a) $sl_n(R)$ は $gl_n(R)$ のイデアル。
(b) $o(n)$ は $gl_n(R)$ の (部分リー環であるが) イデアルではない

Proof: Thm. 2.3(a) については、Section 1(3) より自明。 ■

Proof: Thm. 2.3(b) について、$x \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \subset gl_n(\mathbb{R})$、$y \in \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R})$ とすると ($\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ は $gl_n(\mathbb{R})$ の部分リー環ではないが部分集合ではある。)、(4) の 2 式より

$$\begin{aligned} &[x, y] \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \quad [x, y] \notin \mathrm{Alt}_n(\mathbb{R}) \\ &\therefore [x, y] \notin o(n) \end{aligned}$$

となるため、(ii)′ が成立しない。 ■

Remark. リー環論では (つねに (5′) より $[x, y] = -[y, x]$ であるため)"右イデアル"と"左イデアル"は区別の必要がない。

Named. $\mathfrak{g}$ の線形部分空間 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ に対し $[x, y] (x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b})$ によって生成される部分空間を $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ で表す。したがって $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ は

$$\sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i], \quad x_i \in \mathfrak{a}, y_i \in \mathfrak{b}, m \geq 1$$

の形の有限和全体の集合である。$[x_i, y_j]$ ではない？

Remark. $[x, y]$ の形の元全体の集合は必ずしも線形部分空間にはならない。

Lemma 2.1

$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば、$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ も $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

Proof: $x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{a}, z \in \mathfrak{b}$ のとき、$[x, [y, z]]$ が $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ に含まれていることをいえばよい。(5)、(6) により

$$\begin{aligned} (6) \Leftrightarrow &[[x, y], z] - [x, [y, z]] - [y, -[x, z]] = 0 \\ \Leftrightarrow &[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \end{aligned} \tag{6}$$

が成立する。$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルだから、$[x, y] \in \mathfrak{a}$、よって $[[x, y], z] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$。また、$\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルだから、$[x, z] \in \mathfrak{b}$、よって $[y, [x, z]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$。よって $[x, [y, z]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$。 ■

Definition 2.4 『導イデアル』
Lem. 2.1 により、$\mathfrak{g}$ 自身 $\mathfrak{g}$ のイデアルだから、$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ もイデアルである。これを $D\mathfrak{g}$ とかき、$\mathfrak{g}$ の**導イデアル** (derived ideal) という。

Remark. Def. 2.4 よりさらに

$$\begin{aligned} D^2\mathfrak{g} =& D(D\mathfrak{g}) = [[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \\ \mathfrak{g}^3 =& [\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]], \cdots \end{aligned}$$

等のイデアルが作られる。

Probrem 2.1

$\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{R})$ のとき、$D\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{R})$ となることを示せ。(回答)

2.3 準同型

$\mathfrak{g}$、$\mathfrak{g}'$ を ($\mathbb{R}$ 上の) リー環とする。

Definition 2.5 『準同型写像』
$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ の中への写像 φ が次の条件を満たすとき、φ は (リー環の) **準同型写像** (homomorphism) という。

(i) φ は $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}'$ への線形写像である。
(ii) 任意の $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \tag{7}$$

が成立する。

つまり、リー環の準同型写像とはリー環の演算 (加法、乗法、スカラー乗法) を保存する写像のことである。

Theorem 2.4 (合成写像)

$\mathfrak{g}''$ を第三のリー環、φ' を $\mathfrak{g}'$ から $\mathfrak{g}''$ の中への準同型写像とすれば、合成写像 $\varphi' \circ \varphi \colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}''$ も準同型写像になる。

Proof: (ii) の条件を調べてみると

$$\begin{aligned} (\varphi' \circ \varphi)([x, y]) =& \varphi'(\varphi([x, y])) \\ =& \varphi'([\varphi(x), \varphi(y)]) \\ =& [\varphi'(\varphi(x)), \varphi'(\varphi(y))] \end{aligned}$$

$$=[\varphi' \circ \varphi(x), \varphi' \circ \varphi(y)]$$

から確かに成立する。同様に $\varphi' \circ \varphi$ は (i) も満たす。 ■

Theorem 2.5 (逆写像の準同型写像)

準同型写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ が 1 対 1(単射) かつ $\mathfrak{g}'$ の上への写像 (全射) であるときには φ の逆写像 φ^{-1} が存在する。そのとき、φ^{-1} は $\mathfrak{g}'$ から $\mathfrak{g}$(の上) への準同型写像になる。

Proof: 条件 (ii) を調べるために $x', y' \in \mathfrak{g}'$ をとり $x = \varphi^{-1}(x'), y = \varphi^{-1}(y')$ とすれば、$\varphi(x) = x', \varphi(y) = y'$。よって

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [x', y'].$$

であり、両辺を φ^{-1} で移すと (都合で右辺と左辺を入れ替える)

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}[x', y'] =& \left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)([x, y]) \\ =& [x, y] \\ =& [\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(y')]\end{aligned}$$

となるため、(ii) が成立する。同様に φ^{-1} は (i) も満たす。 ■

Named. 1 対 1、上への写像であるような準同型写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ を (リー環の) **同型写像** (isomorphism) という。

Remark. 上述のように φ が同型写像なら $\varphi^{-1}\colon \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}$ も同型写像である。また $\varphi'\colon \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathfrak{g}''$ も同型写像ならば、明らかに $\varphi' \circ \varphi$ も同型写像である。

Definition 2.6 『リー環の同型』

二つのリー環 $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ の間に同型写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ が存在するとき、$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ は**同型** (isomorphic) であるといい、$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}'$、$\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}'$ とかく。

Remark. Def. 2.6 はリー環の集合に一つの同値関係を定義する。

Definition 2.7 『核と像』

準同型写像 $\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$ が与えられたとき

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\varphi =& \{x \in \mathfrak{g} \mid \varphi(x) = 0\} \\ \operatorname{Im}\varphi =& \{\varphi(x) \mid x \in \mathfrak{g}\}\end{aligned}$$

とおき、それぞれ φ の**核** (kernel)、**像** (image) という。

Remark. $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0)$、$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(\mathfrak{g})$ ともかく。

Theorem 2.6

$\operatorname{Ker}\varphi$ は $\mathfrak{g}$ のイデアル、$\operatorname{Im}\varphi$ は $\mathfrak{g}'$ の部分リー環になる。

Proof:

- $\operatorname{Ker}\varphi$ については、$x \in \mathfrak{g}, y \in \operatorname{Ker}\varphi$ とするとき、条件 (i)$'$ は明らか。(ii)$'$ について

  $$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] = [\varphi, 0] = 0$$

  であるから、$[x, y] \in \operatorname{Ker}\varphi$ となり成立する。よって $\operatorname{Ker}\varphi$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルである。

- $\operatorname{Im}\varphi$ については、$x, y \in \operatorname{Im}\varphi$ とするとき、条件 (i) は明らか。(ii) について、$\varphi(x), \varphi(y) \in \mathfrak{g}'$ とおくと

  $$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y])$$

  となるが、$[x, y] \in \mathfrak{g}$ であるので $\varphi([x, y]) \in \mathfrak{g}'$ が成立する。よって、$\operatorname{Im}\varphi$ は $\mathfrak{g}'$ の部分リー環である。

■

Example 4.

Definition 2.8 『表現』

一般にリー環 $\mathfrak{g}$ からあるベクトル空間 V の一次変換の作るリー環 $gl(V)$ の中への準同型写像 ρ を $\mathfrak{g}$ の V における”**表現**”(representation) という。

Definition 2.9 『随伴表現』

$\mathfrak{g}$ を任意のリー環とし、$x \in \mathfrak{g}$ の左乗によって定義される $\mathfrak{g}$ の一次変換

$$y \mapsto [x, y] \qquad (y \in \mathfrak{g})$$

を $\operatorname{ad}(x)$ とかく。これは $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ 自身における表現である。これを $\mathfrak{g}$ の**随伴表現** (adjoint representation) という。

Remark. 具体的には $(\operatorname{ad}(x))(y) = [x, y]$。

Theorem 2.7

$\operatorname{ad}(x)$ は $gl(\mathfrak{g})$ の元であり、$\operatorname{ad}(x) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ である。

Proof: $\operatorname{ad}(x)$ が $gl(\mathfrak{g})$ の元であることは Thm. 2.2(a) より明らか。また

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad}(x))([y, z]) =& [x, [y, z]] \\ =& [[x, y], z] + [y, [x, z]] \qquad \because \text{from } (6) \\ =& [(\operatorname{ad}(x))(y), z] + [y, (\operatorname{ad}(x))(z)]\end{aligned}$$

となるため、微分の条件 (9) が成立している。よって $\operatorname{ad}(x) \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ ■

2.4 商環と標準的準同型

Theorem 2.8 (同値関係)

$\mathfrak{g}$ をリー環、$\mathfrak{a}$ をそのイデアルとする。$x, y \in \mathfrak{g}$ に対し、合同関係を

$$x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{a} \tag{9}$$

によって定義すると、これは一つの同値関係になっている。すなわち、次の三つの条件 1),2),3) が成立する。

1) すべての $x \in \mathfrak{g}$ に対し $x \equiv x \pmod{\mathfrak{a}}$.
2) $x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow y \equiv x \pmod{\mathfrak{a}}$.

3) $x \equiv y,\ y \equiv z \pmod{\mathfrak{a}} \Leftrightarrow x \equiv z \pmod{\mathfrak{a}}$.

Proof: 1)$x - x = 0 \in \mathfrak{a}$ だから。2) 仮定により $x - y \in \mathfrak{a}$ だから。3) 仮定により $x - y \in \mathfrak{a}, y - z \in \mathfrak{a}$。よって $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathfrak{a}$ となるから。 ■

Remark. (9) の合同が同値関係になることは、上の証明より $\mathfrak{a}$ が加法群になっていることからの結果である。

Definition 2.10 『類』
同値関係に関する同値類の集合を $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ とかく。$x \in \mathfrak{g}$ を含む"同値類"とは x と合同な元全体の集合

$$\begin{aligned} X =& \{x' \in \mathfrak{g} \mid x \equiv x' \pmod{\mathfrak{a}}\} \\ =& \{x + a \mid a \in \mathfrak{a}\} \end{aligned}$$

である。これを以下 x の**類** (クラス) といい、$\bar{x}$ または $x + \mathfrak{a}$ で表すことにする。

Theorem 2.9
同値類の集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ には自然にまた和、スカラー倍、リー積が定義できる。

Proof: ∘ 和は

$$X = \bar{x}, \quad Y = \bar{y} \quad \text{のとき} \quad X + Y = \overline{x + y} \tag{10}$$

と定義するのが自然であろう、すなわち、$X, Y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $x \in X$,$y \in Y$ であるとき、$X + Y$ を $x + y$ を含むクラスとして定義しようというのである。ここで大切なことは X, Y の"代表"x, y のとり方は幾通りもあり、したがって $x + y$ は色々であるが、そのクラス $\overline{x + y}$ は一意的に決まってしまうことである。実際、別の代表 $x' \in X, y' \in Y$ をとったとき

$$x + y \equiv x' + y' \pmod{\mathfrak{a}}$$

であることを見ればよいが、

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y')$$

で $x - x' \in \mathfrak{a}, y - y' \in \mathfrak{a}$ であるから $(x - x') + (y - y') \in \mathfrak{a}$ となり上の合同式が成立する。

∘ $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ におけるスカラー倍やリー積を

$$\begin{aligned} &X = \bar{x}, \quad Y = \bar{y} \quad \text{のとき} \\ &\lambda X = \overline{\lambda x}, \quad [X, Y] = \overline{[x, y]} \end{aligned} \tag{11}$$

によって定義する。これが実現可能なことは、上と同様、$x' \in X, \quad y' \in Y$ とするとき

$$\lambda x - \lambda x' = \lambda(x - x') \in \mathfrak{a}$$

$$\begin{aligned} &[x, y] - [x', y'] \\ =&[x, y] - [x', y] + [x', y] - [x', y'] \\ =&[x - x', y] + [x', y - y'] \in \mathfrak{a} \end{aligned}$$

であることからわかる。この最後のところで $\mathfrak{a}$ が (両側) イデアルの性質 (ii)′ を用いた。

■

Remark. 上述のように定義された演算はリー環の条件を満たす。

Proof: ヤコビの公式 (II′) が成立することは、$X, Y, Z \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $x \in X, y \in Y, z \in Z$ とするとき

$$[X, Y] \quad \text{は} \quad [x, y] \quad \text{のクラス} \quad .$$

したがって

$$[[X, Y], Z] \quad \text{は} \quad [[x, y], z] \quad \text{のクラス} \quad .$$

同様にして

$$\begin{aligned} &[[Y, Z], X], [[Z, X], Y] \quad \text{はそれぞれ} \\ &[[y, z], x], [[z, x], y] \quad \text{のクラス} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} &[[X, Y], Z], [[Y, Z], X], [[Z, X], Y] \quad \text{は} \\ &[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] (= 0) \quad \text{のクラス} \end{aligned}$$

となる。 ■

Definition 2.11 『商環』
同値類の集合 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ にリー環の構造を入れたものを**剰余環**または**商環**という。

※群論においてイデアルに対応するのは"正規部分群"で、上記と同様にして"商群"の概念が定義される。

Definition 2.12 『標準的準同型』
もとのリー環 $\mathfrak{g}$ から商環 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の上への写像

$$\varphi\colon \mathfrak{g} \ni x \mapsto \bar{x} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \quad (\bar{x} \text{ は } x \text{ のクラス}) \tag{12}$$

が定義でき、(10),(11) から準同型写像である。この (12) の写像を**標準的準同型写像** (canonical homomorphism) という。

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash] & \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \arrow[d, dash] \\ \mathfrak{h} \arrow[r] \arrow[d, dash] & \mathfrak{h}/\mathfrak{a} = \varphi(\mathfrak{h}) \arrow[d, dash] \\ \mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, dash] & \{0\} \\ \{0\} & \end{tikzcd}$$

Remark. 今、$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{h} \supset \mathfrak{a}$ となるような部分リー環があれば、φ による $\mathfrak{h}$ の像 $\varphi(\mathfrak{h}) = \{\bar{x} \mid x \in \mathfrak{h}\}$ は明らかに $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の部分リー環で、それ自身商環 $\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ と考えられる。

逆に $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の部分リー環 $\mathfrak{h}'$ があれば、その逆像

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{h}') = \{x \in \mathfrak{g} \mid \bar{x} \in \mathfrak{h}'\}$$

は明らかに $\mathfrak{g}$ の部分リー環で $\mathfrak{a}$ を含む。さらにこれらについて

$$\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h})) = \mathfrak{h}, \quad \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{h}')) = \mathfrak{h}'$$

となることは容易に確かめられる。よって対応 $\mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ により $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ を含む部分リー環と、$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の部分リー環とが 1 対 1 に対応していることがわかる。特に $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g}$ のイデアルならば、$\mathfrak{h}/\mathfrak{a}$ も $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ のイデアルであり、その逆も言える。

Probrem 2.2

上記最後に述べたことを証明せよ。(回答)

Example 6.

Remark. $\mathfrak{a} = D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ とすれば、$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ において、$X = \bar{x}, Y = \bar{y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ならば (教科書は $\in \bar{\mathfrak{g}}$ と定義されていない記法を用いている)

$$[X, Y] = [\bar{x}, \bar{y}] = \overline{[x, y]} = 0 \quad ([x, y] \in \mathfrak{a} \text{ だから})$$

よって $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ は可換なリー環になる。逆にあるイデアル $\mathfrak{a}$ に対し $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可換なリー環ならば、すべての $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\begin{aligned} &\overline{[x, y]} = [\bar{x}, \bar{y}] = 0, \\ &\therefore\ [x, y] \in \mathfrak{a} \end{aligned}$$

となるから、$D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ である。よって、$D\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ が可換であるようなイデアル $\mathfrak{a}$ のうち最小なもの (? Def. 3.1 等は更に小さいイデアルにはならない?) として特徴づけられる。(この場合には $D\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ となるような任意の線形部分空間 $\mathfrak{a}$ はイデアルになることに注意)

Theorem 2.10

一般に準同型写像

$$\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}'$$

があるとき、$\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\varphi$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルであるが (Thm. 2.6)、$x \in \mathfrak{g}$ の mod $\mathfrak{a}$ のクラス $\bar{x}$ と $\varphi(x)$ とを対応させることにより $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ と $\varphi(\mathfrak{g})$ の間の 1 対 1 対応が得られ、それは明らかにリー環の同型になる:

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{a} \cong \varphi(\mathfrak{g}) \tag{13}$$

Proof: $x, y \in \mathfrak{g}$ に対し

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(y) &\Leftrightarrow \varphi(x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y \in \mathfrak{a} \\ &\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{\mathfrak{a}}, \\ &\quad i.e. \bar{x} = \bar{y} \end{aligned}$$

■

Remark. 例として、$\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{h}$、$\mathfrak{g}$ のイデアル $\mathfrak{a}$、および標準的準同型写像

$$\varphi\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$$

を考える。φ の $\mathfrak{h}$ への"制限"

$$\varphi \mid \mathfrak{g}\colon \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$$

を考えれば

$$\operatorname{Ker}(\varphi \mid \mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \cap (\operatorname{Ker}\varphi) = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}$$

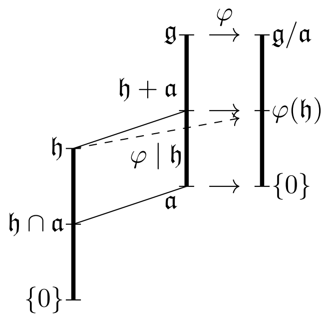
は $\mathfrak{h}$ のイデアルであり、一方

$$\operatorname{Im}(\varphi \mid \mathfrak{h}) = \{\varphi(x) \mid x \in \mathfrak{h}\} = \varphi(\mathfrak{h})$$

は $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ の部分リー環であるが (Thm. 2.6)、$\varphi^{-1}(\varphi(x)) = x + \mathfrak{a}$ であるから

$$\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{h})) = \bigcup_{x \in \mathfrak{h}} (x + \mathfrak{a}) = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$$

となる。



Remark. 上記のように $\mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ を含む部分リー環で $\varphi(\mathfrak{h})$ を $(\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$ と同一視することができる。よって、(13) を $\varphi \mid \mathfrak{h}$ に適用して

$$\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{a}) \cong (\mathfrak{h} + \mathfrak{a})/\mathfrak{a}$$

という基本的な同型定理が得られる。

3　可解環、冪零環、エンゲルの定理

今回はリー環の中で特に可解環、冪零環と呼ばれるものについて説明する。これは群論における可解群、冪零群に対応する概念であり、リー群とリー環の対応を考えると、実際、可解リー群、冪零リー群はそれぞれ可解リー環、冪零リー環に対応している。

3.1　可解リー環の定義

Definition 3.1 『列』

$\mathfrak{g}$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上のリー環とする。

$$D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i] \,\middle|\, x_i, y_i \in \mathfrak{g}, m \geq 1 \right\}$$

とおけば、これは $\mathfrak{g}$ の一つのイデアルになり、商環 $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$ は可換なリー環になる。そこで帰納的に

$$D^k\mathfrak{g} = D\bigl(D^{k-1}\mathfrak{g}\bigr) \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

(ただし $D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ とおく) と定義すれば

$$\mathfrak{g}(= D^0\mathfrak{g}) \supset D\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots$$

という部分リー環の**列** (sequence) が得られる。

Remark. $D^k\mathfrak{g}$ の $D^{k-1}\mathfrak{g}$ に対する関係は $D\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ に対する関係と全く同じだから、$D^k\mathfrak{g}$ は $D^{k-1}\mathfrak{g}$ のイデアルで、商 $D^{k-1}\mathfrak{g}/D^k\mathfrak{g}$ は可換なリー環である。

問題回答

Solution 2.1. (問題文)
$\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ とする。左辺 $D\mathfrak{g}$ について

$$D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad \text{from Def. 2.4}$$

$x, y \in \mathfrak{g}$ において、$sl_n(\mathbb{R})$ であることを示すには (2.1) より $\mathrm{tr}\{[x, y]\} = 0$ であることを示せばよい。(2.1) に倣って $x = (\xi_{ij}), y = (\eta_{ij})$ とおくと

$$(xy)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik}\eta_{kj}, \quad (yx)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}\xi_{kj}$$

より

$$([x, y])_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\xi_{ik}\eta_{kj} - \eta_{ik}\xi_{kj})$$

トレースを取ると

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\{[x, y]\} =& \sum_{i=1}^{n} ([x, y])_{ii} \\
=& \sum_{i,k=1}^{n} (\xi_{ik}\eta_{ki} - \eta_{ik}\xi_{ki}) \\
=& 0
\end{aligned}$$

よって $D\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{R})$ である。

Solution 2.2. (問題文)