問題回答

Solution 2.1. (問題文)
$\mathfrak{g} = gl_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ とする。左辺 $D\mathfrak{g}$ について

$$D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \quad \text{from } \textbf{??}$$

$x, y \in \mathfrak{g}$ において、$sl_n(\mathbb{R})$ であることを示すには (**??**) より $\mathrm{tr}\{[x, y]\} = 0$ であることを示せばよい。(**??**) に倣って $x = (\xi_{ij}), y = (\eta_{ij})$ とおくと

$$(xy)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik}\eta_{kj}, \quad (yx)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \eta_{ik}\xi_{kj}$$

より

$$([x, y])_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\xi_{ik}\eta_{kj} - \eta_{ik}\xi_{kj})$$

トレースを取ると

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\{[x, y]\} =& \sum_{i=1}^{n} ([x, y])_{ii} \\ =& \sum_{i,k=1}^{n} (\xi_{ik}\eta_{ki} - \eta_{ik}\xi_{ki}) \\ =& 0 \end{aligned}$$

よって $D\mathfrak{g} = sl_n(\mathbb{R})$ である。

Solution 2.2. (問題文)