3　可解環、冪零環、エンゲルの定理

今回はリー環の中で特に可解環、冪零環と呼ばれるものについて説明する。これは群論における可解群、冪零群に対応する概念であり、リー群とリー環の対応を考えると、実際、可解リー群、冪零リー群はそれぞれ可解リー環、冪零リー環に対応している。

3.1　可解リー環の定義

Definition 3.1 『列』

$\mathfrak{g}$ を実数体 $\mathbb{R}$ 上のリー環とする。

$$D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, y_i] \middle| x_i, y_i \in \mathfrak{g}, m \geq 1 \right\}$$

とおけば、これは $\mathfrak{g}$ の一つのイデアルになり、商環 $\mathfrak{g}/D\mathfrak{g}$ は可換なリー環になる。そこで帰納的に

$$D^k\mathfrak{g} = D\bigl(D^{k-1}\mathfrak{g}\bigr) \qquad (k = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

(ただし $D^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ とおく) と定義すれば

$$\mathfrak{g}(= D^0\mathfrak{g}) \supset D\mathfrak{g} \supset D^2\mathfrak{g} \supset \cdots$$

という部分リー環の**列** (sequence) が得られる。

Remark. $D^k\mathfrak{g}$ の $D^{k-1}\mathfrak{g}$ に対する関係は $D\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}$ に対する関係と全く同じだから、$D^k\mathfrak{g}$ は $D^{k-1}\mathfrak{g}$ のイデアルで、商 $D^{k-1}\mathfrak{g}/D^k\mathfrak{g}$ は可換なリー環である。