

A1 2013 前期
ミューオンの寿命測定・ g 因子の測定

木村 燎平 佐伯 一帆 高木 亮一 向井 大智 山本 修平

1 実験の目的

陽子や He を主成分とする宇宙線 (一次宇宙線) が地球大気内で崩壊することで生じる宇宙線 (二次宇宙線) の中でも地表で安定して測定可能である μ 粒子の寿命を測定する。さらに、 μ 粒子のスピン角運動量とそれによる磁気モーメントを関係付ける g 因子を測定する。

2 理論

$c = \hbar = 1$ の単位系を用いる。

2.1 ミューオンの崩壊

大気圏内で生成された μ 粒子は 2 種類あり、次の式に従い崩壊する。

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (1)$$

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (2)$$

μ^- は負電荷を持ち、物質中 (この実験では銅) の原子核に捕獲され、K 殻の電子と入れ替わることでミュオン原子を作る。この時

$$\mu^- + p \rightarrow \nu_\mu + n \quad (3)$$

という反応で μ^- が吸収され、見かけ上寿命が短くなる。この変化は粒子を受け止める物質によって異なり、今回の測定で用いる銅では、 $\tau = 0.16 \mu\text{s}$ 程度になる。

2.2 粒子の崩壊

一般に、粒子の崩壊は次の方程式に従う。

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (4)$$

ただし、 $\lambda [1/\text{s}]$ は定数である。この方程式を解くと

$$N = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (5)$$

となる。ただし、 A は次元を持たない定数で、 $\tau[\text{s}]$ を寿命という。

2.3 非相対論的 Dirac 方程式と g 因子

スピン 1/2、電荷 q の粒子の g 因子を非相対論的近似で求める。

電磁場 $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ 中の粒子 (電荷 q 、質量 m) に対する Dirac 方程式は次で与えられる。

$$(\gamma^\mu (p_\mu - qA_\mu) - m)\psi = 0 \quad (6)$$

ただし、 γ^μ は Dirac のガンマ行列で、ここでは Dirac-Pauli 表現

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

を用いる。 I は 2×2 の単位行列、 $\gamma^i (i = 1, 2, 3)$ は Pauli 行列の第 i 成分である。 ψ を二成分スピノール $\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$ で分解し、非相対論近似 ($E \simeq m$) と弱い場 ($|q\phi| \ll m$) を考慮すると、

$$E + m - q\phi \simeq 2m \quad (8)$$

ψ_B を消去することで

$$\left(\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}))^2}{2m} + q\phi + m \right) \psi_A = E\psi_A \quad (9)$$

となる。また、 $\mathbf{p} = -i\nabla$ より、演算子として

$$\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p} = -i\nabla \times \mathbf{A} = -i\mathbf{B} \quad (10)$$

が成り立つので、結局、

$$\left(\frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + q\phi + m \right) \psi_A = E\psi_A \quad (11)$$

となる。これより、スピン 1/2 の粒子は磁場内で磁気モーメント

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} \boldsymbol{\sigma} = g \frac{q}{2m} \mathbf{S} \quad (12)$$

を持ち、非相対論的近似では g 因子が 2 であることがわかる。

2.4 スピンの歳差運動

粒子の持つスピンによる磁気モーメントが外部磁場の影響で歳差運動を起こすことを見ていく。

磁場とスピンの相互作用の Hamiltonian は (6) 式より

$$\hat{\mathcal{H}} = -g \frac{q}{2m} \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B} \quad (13)$$

で与えられる。磁場の方向に z 軸をとると ($\mathbf{B} = (0, 0, B)$)、

$$\hat{\mathcal{H}} = -g \frac{q}{2m} \hat{S}_z B \equiv \omega \hat{S}_z \quad (14)$$

となる。これより、時刻 t のスピン状態ベクトルを $|\varphi(t)\rangle$ としてスピンの各方向の期待値 $\langle S_i(t) \rangle$ は、時間発展演算子 $\exp(-i\hat{\mathcal{H}}t)$ を用いて、

$$\langle \varphi(t) | \hat{S}_i | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(0) | e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{S}_i e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} | \varphi(0) \rangle \quad (15)$$

となる ($i=1,2,3$)。 z 成分については、時間発展演算子とスピン演算子が可換なので

$$\langle S_z(t) \rangle = \langle S_z(0) \rangle \quad (16)$$

となり、時間依存しない。 x 成分については、スピン各成分の交換関係

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \epsilon_{ijk} i\hat{S}_k \quad (17)$$

と Baker-Hausdorff の補助定理

$$e^{\hat{A}t} \hat{B} e^{-\hat{A}t} = \hat{B} + t[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{t^2}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (18)$$

を用いて

$$\begin{aligned} \langle S_x(t) \rangle &= \langle \varphi(0) | e^{i\omega \hat{S}_z t} \hat{S}_x e^{-i\omega \hat{S}_z t} | \varphi(0) \rangle \\ &= \langle \varphi(0) | \hat{S}_x + i\omega t [\hat{S}_z, \hat{S}_x] + \frac{(i\omega t)^2}{2!} [\hat{S}_z, [\hat{S}_z, \hat{S}_x]] + \dots | \varphi(0) \rangle \\ &= \langle S_x(0) \rangle \cos \omega t - \langle S_y(0) \rangle \sin \omega t \end{aligned} \quad (19)$$

となり、期待値が角振動数 ω で振動していることがわかる。 y 方向についても同様である。よって、計測により B と ω が求まれば、

$$g = \frac{2m\omega}{|q|B} \quad (20)$$

と求めることができる。

2.5 歳差運動による方程式の補正

スピンの方向によって電子が飛びやすい方向が異なり、スピンの歳差運動している状況で、粒子の崩壊の方程式は

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{\lambda}{2}N(1 + \cos \omega t) \quad (21)$$

と修正できる。この方程式を解くと

$$N = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\omega\tau} \sin \omega t\right) \quad (22)$$

となる。ただし、 A は次元を持たない定数である。

3 実験のセットアップ

3.1 セットアップ・及び実験原理

μ を検出しアナログ信号に変えるために用いた装置は以下のものからなっている。

- プラスチックシンチレータ (100 cm × 48 cm × 1 cm) 2 枚
- プラスチックシンチレータ (50 cm × 5 cm × 1 cm) 7 枚
- 光電子増倍管 (PMT) 2 本
- コイル (詳細は後述) 1 つ
- 銅板 (50 cm × 48 cm × 1 cm) 1 つ
- MPPC 及びそのための基盤 (詳細は後述) 7 つ
- 光ファイバー 7 本

以上の装置を次の図のように μ の寿命測定 (以下実験 a)、 μ の g 因子測定 (以下実験 b) それぞれ配置した。

3.1.1 実験 a

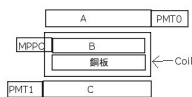


図 1 μ の寿命測定

3.1.2 実験 b

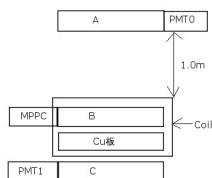


図 2 μ の g 因子測定装置

ここで、A,B,C はいずれもプラスチックシンチレータである。上記の装置で μ は、以下のような振る舞いを行う。1. μ がどこからか降って来て、A と B を突き抜け、銅板にたどり着く。2. 銅板にたどり着いた μ はエネルギーが高い場合突き抜け、C までたどり着くが、あるエネルギー程度の μ は Cu 板で止まる。3.2 で銅板で止まった μ は時間が経過すると弱い相互作用によって崩壊する。4.3 で生じた陽電子が B、または C にたどり着く。

なお、実験 a と b のそれぞれのセットアップで MPPC と PMT0 の距離を変えたのは、a では μ のカウント数をなるべく増やして統計誤差を減らすために狭く設定したが、b ではシンチレータに対してスピンの方向

が垂直な向きであることを仮定しているので、あまり上のシンチレータと銅板との間隔が狭いと斜めからの μ が入り込んでしまうことも考慮して、a より広く間隔を設定した。

3.2 実験の回路図

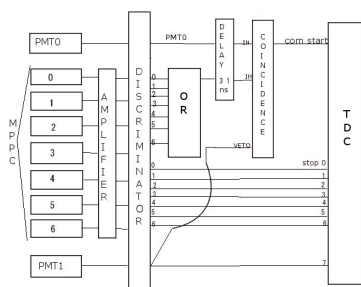


図 3 実験回路図

また、この回路図で delay31ns を組んでいるのは、MPPC と PMT0、PMT1 の信号を COINCIDENCE でタイミングを合わせるためである。この回路を論理記号を用いて表すと、

- Start 信号 $(PMT0 \wedge MPPC) \rightarrow PMT1$
- Stop 信号 0 6 $MPPC0 \ 6$
- Stop 信号 7 $MPPC1$

となる。

3.3 コイル

本実験の g 因子測定において、磁場をコイルから発生させた。コイルは 2004 年度 P1 の課題研究用に作成されたものを使用した。このコイルは Main コイルとして 4 つのコイルを並列でつないだものを並べ、さらに 2 つの Sub コイルを用いたものを使用した。Main コイルには 31.0V で 19.0A、sub1 コイルには 3.5V で 0.80A、sub2 コイルには 3.6V で 0.80A の電流を流した。磁場の測定では、コイルに電流を流してから 24 時間経過して磁場が安定したあと、測定位置を銅板が入っている部分を銅板の大きさが縦 50cm 横 48cm なので、上図のように 16 のセクションに分け、それぞれの場所においての磁場を計 3 回測定した。その測定結果を下表に記す。

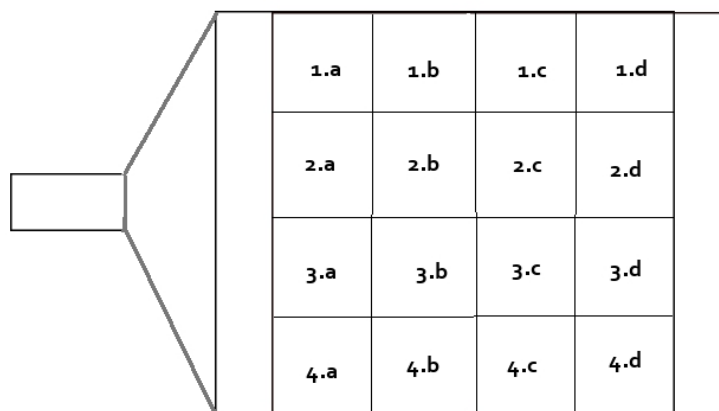


図 4 coil.tex

セクション	1 回目 [Gauss]	2 回目 [Gauss]	3 回目 [Gauss]	3 回の平均 [Gauss]
1.a	51.0	47.0	49.4	
1.b	53.0	50.1	53.6	
1.c	51.6	50.4	50.2	
1.d	49.6	49.7	49.6	
2.a	54.7	49.2	52.0	
2.b	55.2	49.5	50.2	
2.c	53.2	49.0	48.7	
2.d	50.2	49.8	49.9	
3.a	51.2	48.8	49.4	
3.b	50.2	48.9	49.2	
3.c	49.8	48.3	50.5	
3.d	49.6	47.7	48.9	
4.a	50.6	48.0	49.3	
4.b	49.2	49.4	49.8	
4.c	51.5	47.4	48.0	
4.d	49.8	48.4	49.3	
ave.	51.3	48.9	49.5	

この測定結果から磁場を計算すると、

3.4 TDC の較正

本実験では、寿命を TDC モジュールを用いて測定したので、TDC の 1count が何 ns か、clock generator を用いて調べた。その結果を下の表にまとめる。

channel	ns / tdc count
ch0	$7.68 \times 10^{-4} \pm 6.30 \times 10^{-7}$
ch1	$7.68 \times 10^{-4} \pm 7.41 \times 10^{-7}$
ch2	$7.69 \times 10^{-4} \pm 5.41 \times 10^{-7}$
ch3	$7.68 \times 10^{-4} \pm 6.50 \times 10^{-7}$
ch4	$7.64 \times 10^{-4} \pm 1.62 \times 10^{-6}$
ch5	$7.63 \times 10^{-4} \pm 8.63 \times 10^{-7}$
ch6	$7.63 \times 10^{-4} \pm 1.04 \times 10^{-6}$
ch7	$7.63 \times 10^{-4} \pm 8.64 \times 10^{-7}$

3.5 PMT(光電子増倍管)・及び Discriminator の設定

ここで、 μ の寿命測定及び g 因子測定で用いた PMT の電圧・及び Discriminator の設定の過程を述べる。

3.5.1 Discriminator の閾値設定

まず、本実験で用いた Discriminator の閾値の設定方法について述べる。この閾値をうまく設けることで PMT 及び MPPC からの信号のうちバックグラウンドのイベントをシャットアウトし、検出したい μ の信号のみを検出することができる。本実験では、まず最初に、まず最初に MPPC と PMT 両方の Discriminator の閾値を 30mV に設定し、他のノイズをシャットアウトできるように、また gain が揃うようにそれぞれ 1700V、1750V として測定を開始した。しかし、この測定結果のグラフを見たところ、これは Discriminator の閾値が低く、 μ 以外のバックグラウンドも検出していると判断し、Discriminator の閾値を決めるために、今度は MPPC の μ の信号をそれぞれオシロスコープで見たところ、ほぼ 60mV でそろっていたので、Discriminator の閾値を 59mV で設定しなおした。また、Stop 信号が MPPC、PMT1 それぞれにきている割合を見ると、PMT1 にほとんど信号が来ていなかったのも、これは PMT の電圧設定が低すぎて μ の信号が検出できてないことが原因と判断し、PMT の電圧設定を高くし、PMT0、PMT1 それぞれ 1949V、1998V と設定しなおし、バックグラウンドをシャットアウトするために、Discriminator の閾値を 59mV に上げた。

4 解析

4.1 フィッティングの範囲指定

今回の測定で得られたデータを μ 粒子が崩壊してできた電子のシンチレータへの到達時間 [ns] を横軸に、各到達時間のイベント数を縦軸に示してフィッティングをするが、 μ^- は μ^+ より非常に短い寿命を持つことから 1000ns 以下では μ^- に対応する減衰曲線が無視できないと判断して 1000ns 以降からのデータを用いてフィッティングすることにした。

4.2 寿命の解析

実験 a で得られたデータを 1000ns から 20000ns の範囲をビン数 300 でヒストグラムにし、それに対して関数

$$F(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + B \quad (23)$$

でフィッティングを行う。ただし、 A, B は定数、 τ は寿命である。

その結果を図 5 に示す。

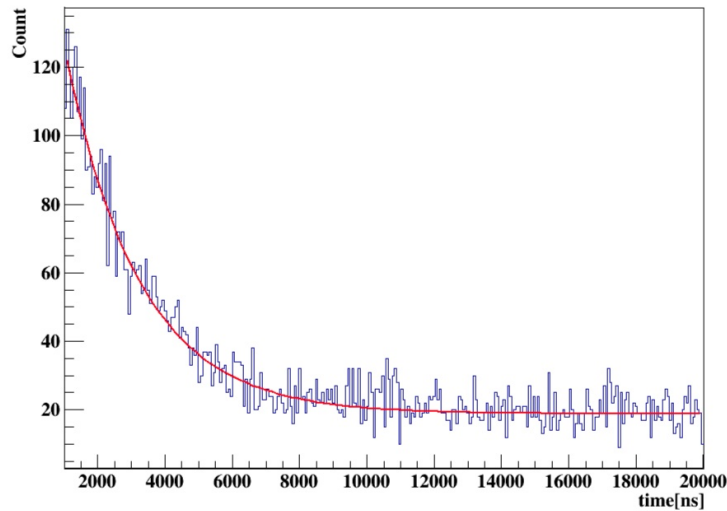


図 5 μ の寿命曲線

この結果、

$$\begin{aligned} A &= 170 \pm 7 \\ B &= 18.8 \pm 0.4 \\ \tau &= 2.19 \pm 0.08 \mu\text{s} \end{aligned}$$

を得た。このフィッティングにおける χ^2/ndf は 1.00231 であった。

4.3 g 因子の解析

実験 b で得られたデータを 1000ns から 20000ns の範囲をビン数 100 でヒストグラムにし、関数

$$G(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(\frac{1}{2\omega\tau} \sin(\omega(t - t_0))\right) + C \quad (24)$$

でフィッティングを行う。ただし、 A, B, C は定数、 τ は寿命、 ω はスピンの歳差運動の振動数、 t_0 は初期位相を考慮した定数である。

この結果、

$$A =, B =, C =, \tau =, \omega =, t_0 = \quad (25)$$

を得た。

5 考察

5.1 寿命について

求まった寿命 $\tau = 2.19 \pm 0.08 \mu\text{s}$ は文献値とよく一致している。このフィットの χ^2/ndf も十分 1 に近く、精度よく実験できたと考えられる。

5.2 g 因子について

本実験において得られたデータでは、正確な g 因子の値を求めるにはデータ数が不足していると考えられる。ここではその理由について説明する。

5.2.1 ビン数の問題

1000ns から 20000ns をいくつかのビンに分けるかを考える。

ビンの数を多くするにつれ、各ビンに属するデータの数はいくつ少なくなる。本実験の実験 b では 1000ns から 20000ns に、MPPC で 1930 カウント、PMT1 で 1435 カウントしかなかった。例えばビン数を 100 にすると、1000ns 付近のビンでも 100 カウントほどのイベントしかない。24 におけるスピン歳差運動による”寿命のゆらぎ”は、文献値の g 因子と、測定した磁場の値から予想される ω を使って計算すると全体のイベント数の 10% 以下になることがわかるが、これは先の例だと数カウントほどしかヒストグラムに影響されないことになる。ヒストグラムをみてわかるように、スピン歳差運動に起因するものではないと考えらるゆれが多くあるので、これをフィットするのは難しい。

一方、 $\omega = 4.0 \times 10^{-3} \text{ 1/ns}$ ほどのオーダーであることを考慮すると、24 の”ゆらぎ”の周期はおおよそ 1500ns ほどとなる。再びビン数を 100 にすると、このとき一つのビンの幅は 190ns になり、このとき一周期はおおよそ 8 つのビンで表されることになるが、この数で一周期を表現するには、多くのデータが必要である。

以上より、ビンの数を多くしようとしても、少なくしようとしてもフィットに困難が生じる。

5.2.2 実際のフィット

実際にビンの数を 100 にして、24 を用いてフィットしてみると、

$$A = 150 \pm 11 \quad (26)$$

$$\tau = 2.100 \pm 0.12 \mu\text{s} \quad (27)$$

$$\omega = (3.97 \pm 0.23) \times 10^{-3} \text{ 1/ns} \quad (28)$$

$$t_0 = -3974 \pm 320 \text{ ns} \quad (29)$$

$$B = 7.73 \pm 0.40 \quad (30)$$

のようになった。この ω から求められる g 因子は 1.88 ± 0.17 となる。文献値 2.002 を誤差の範囲で含むものの、これは予想される ω の値をフィットの初期条件に選んだことによる可能性が高い。

5.3 反省:MPPC について

例年の測定では PMT のみを使った測定だったが、今回は PMT と MPPC とを併用した測定となった。初めての試みだったのでいくつかの反省点、今期以降使う方への留意点を上げていく。

- セッティング

MPPC はダイオードであるので、取り付ける向きを間違えると大電流が流れ、壊れる原因になってしまう。今回の測定でも一つ向きを間違えてしまったのが見つかったが、取り替えをせず向きを訂正して使用してしまった。また、素子が回路から外れやすく、遮光等のセッティングの際にも注意すべきである。

- Breakdown 電圧の調整

MPPC の型番によって Breakdown 電圧に差があり、各 MPPC に対するデータはあるにしろ、基盤によって変化してしまうこともあり揃えるのに非常に時間がかかってしまった。また、温度が上がると Breakdown 電圧が上がるという温度依存性も考慮する必要がある、細心の注意を払わなければならない。

謝辞

今回の実験を行うにあたって、南野先生、TA の前田さん、石山さんには様々な助言、ご指導頂きました。
A1 一同、この場を借りて皆様にお礼申し上げます。半年間ありがとうございました。

参考文献

- [1] 戸塚洋二 『素粒子物理学』(岩波書店)
- [2] F. ハルツェン、A.D. マーチン(著) 小林郎、広瀬立成(訳) 『クォークとレプトンー現代素粒子物理学入門』(培風館)