高校数学の美しい物語

調和級数1+1/2+1/3...が発散することの３通りの証明

レベル: ★最難関大受験対策　極限，微分　　更新日時 2021/03/07

調和級数の発散

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

つまり，$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots$ という無限和は発散する。

目次

調和級数とは

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，つまり $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\cdots$ という無限級数のことを調和級数と言います。

調和級数は発散することが知られています。$\dfrac{1}{n}$ をどんどん足していくとどこまでも大きくなると

いうわけです。

調和級数を背景とする入試問題もたまに出題されます。以下では，調和級数が無限大に発散することの3通りの証明を紹介します。

証明1．不等式で下からおさえる方法

面白い式変形で調和級数の発散を示します。

証明

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$
$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

が成立する。

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$$
$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

も成立する。

この変形を一般化すると，以下の不等式が得られる：

$$\sum_{k=1}^{2^p}\frac{1}{k}\geq 1+\frac{p}{2}$$

$p\to\infty$ とすると右辺は発散するので左辺も発散する。

以上から調和級数が発散することが示された。

証明2．指数関数を用いる方法

指数関数の有名不等式 $e^x\geq 1+x$ を用いた方法もあります。（**→指数関数のマクローリン型不等式**）

Honsbergerによって発見された証明です。

証明

$$\begin{aligned}
&\exp\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
&=\exp(1)\exp\left(\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{3}\right)\exp\left(\frac{1}{4}\right)\cdots\exp\left(\frac{1}{n}\right)\\
&\geq(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\\
&=n+1
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\log(n+1)$

$n\to\infty$ とすると右辺は発散するので左辺も発散する。

ちなみに，証明で用いた不等式の差の極限は収束することが知られており，その収束先を **オイラー定数** といいます。

オイラー定数 γ の定義

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n+1))$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n)$$

ただし，最後の等号は

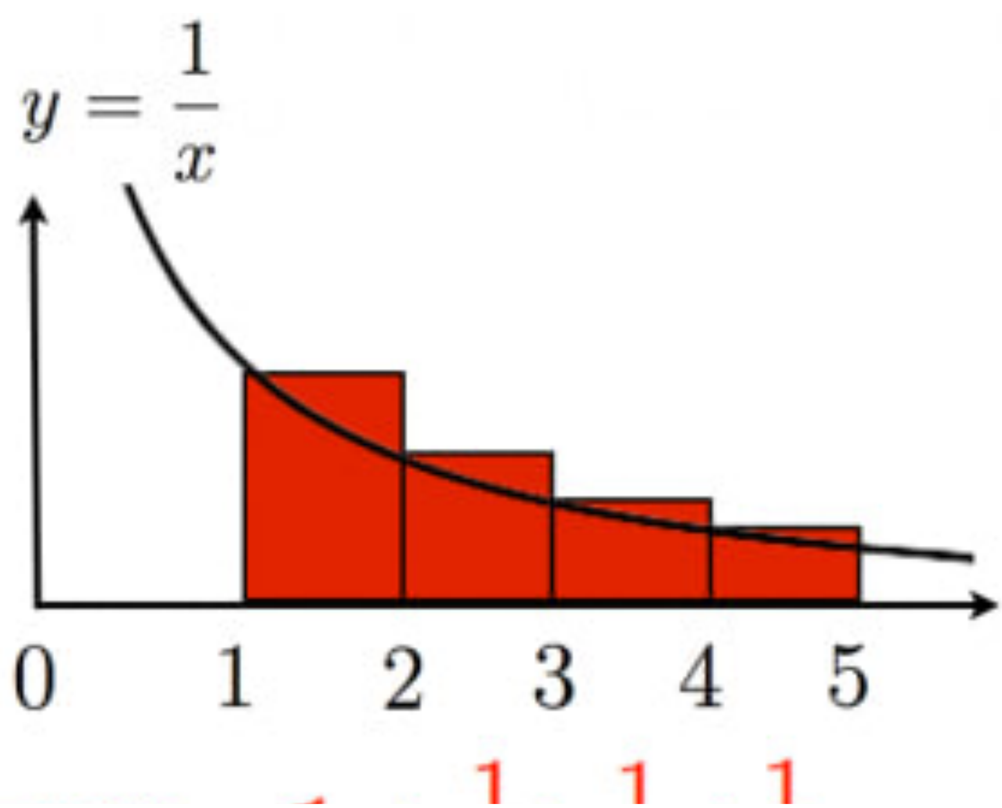
$$\lim_{n\to\infty}(\log(n+1) - \log n)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$$

より成り立つ。

証明3．積分を用いる方法

調和級数の発散を積分を使って証明してみます。

証明



図より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx = \log(n+1)$

となる。$n \to \infty$ とすると右辺は発散するので左辺も発散する。

ちなみに，図の赤い部分において $y = \dfrac{1}{x}$ よりも上側にはみ出た部分の面積を足し上げていくとオイラー定数になります。この図からオイラー定数が0.5より大きくて1よりも小さいことが分かります。

逆数の和はほぼ対数

調和級数に関連する不等式です。

定理

$$\log(n+1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 1 + \log n$$

左側の不等式は上記の証明3で示しました。右側の不等式もほとんど同様に示せます。つまり，大雑把には **n が大きいとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \fallingdotseq \log n$** と言えます。

調和級数は発散しますが，発散のスピードが対数関数と同じくらいでとても遅いです。

この事実は，アルゴリズムの計算量の見積もりや**コンプガチャに必要な回数の期待値の計算**に使えます。

調和級数に関連する級数

- 分数の足し算（調和級数）は発散しましたが，分数を交互に足し引きして $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$ としたもの（交代級数）は $\log 2$ に収束することが知られています。 **→log2に収束する交代級数の証明**
- s を正の実数とします。$\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ のことをゼータ関数と言います。$s=1$ の場合は調和級数です。実は，$s>1$ のとき $\zeta(s)$ は収束することが知られています。**→ゼータ関数の定義と基本的な話**
  つまり $s=1$ は「ギリギリ発散」と言えます。$s=2$ の場合は円周率が登場します。**→バーゼル問題の初等的な証明**

小学生でも意味が分かる奥深い問題だからこそおもしろいです。

Tag: **無限和，無限積の美しい公式まとめ**

この記事の編集者

マスオ

高校数学の美しい物語の管理人。「わかりやすいこと」と「ごまかさないこと」の両立を意識している。著書に『高校数学の美しい物語』『超ディープな算数の教科書』。

レベル: ★最難関大受験対策 極限，微分

関連記事