信号処理 II フルレポート (1)

2022531047
中山 涼太

2025 年 11 月 27 日

課題 1

重み付き最小自乗法による最適なフィルタ係数の導出式を求めよ。

最小自乗法は自乗誤差が最小となるパラメータを求める問題であり、式 (1) で表される計算で処理される。

$$\min_{a} E = \int_{-\pi}^{\pi} |W(\omega)(H(\omega) - D(\omega))|^2 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{j2\omega} + \cdots + a_N e^{-jN\omega} \\ D(\omega)&\text{: 所望周波数特性} \\ W(\omega)&\text{: 重み関数} \\ E&\text{: 評価関数} \end{aligned}$$

ここで、$H(\omega_k)$ を次のように行列表現する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_N \end{bmatrix}^t \\ \boldsymbol{q_k} &= \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega_k} & e^{j2\omega_k} & \cdots e^{jN\omega_k} \end{bmatrix}^t \\ H(\omega_k) &= \boldsymbol{q_k}^t \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}$ はフィルタ係数を並べたベクトル、$\boldsymbol{q_k}$ は周波数点 ω_k の値を並べたベクトルである。さらに $\boldsymbol{q_k}$ を並べたベクトルを $\boldsymbol{Q}$ とすると、

式 (1) を次のように行列表現する。

$$E'' = \sum_{k=0}^{L-1} |W(\omega_k)(H(\omega_k) - D(\omega_k))|^2 \tag{2}$$

ここで、$\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}W(\omega_k), \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{W(Qa - d)}$ より、

$$E'' = (\boldsymbol{Qa} - \boldsymbol{d})^t \boldsymbol{W}^t \boldsymbol{W} (\boldsymbol{Qa} - \boldsymbol{d}) \tag{3}$$

ここで、$\boldsymbol{W} = \mathrm{diag}W(\omega_k)$ は対角行列のため、$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^t$ である。したがって、

$$E'' = (\boldsymbol{Qa} - \boldsymbol{d})^t \boldsymbol{W}^2 (\boldsymbol{Qa} - \boldsymbol{d}) \tag{4}$$

$$= \boldsymbol{a}^t \boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Qa} - 2\boldsymbol{a}^t \boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{d} + \boldsymbol{d}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{d} \tag{5}$$

と整理できる。$\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Q}$ が常に対称行列であることより、評価関数を $\boldsymbol{a}$ で偏微分すると、次の式が得られる。

$$\frac{\partial E''}{\partial \boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E''(\boldsymbol{a})}{\partial a_0} & \frac{\partial E''(\boldsymbol{a})}{\partial a_1} & \cdots \frac{\partial E''(\boldsymbol{a})}{\partial a_N} \end{bmatrix}^t = 2\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Qa} - 2\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{d} \tag{6}$$

これが 0 となる $\boldsymbol{a}$ が最小自乗解であるので、

$$2\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Qa} - 2\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{d} = 0 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Qa} - \boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{d} = 0 \tag{8}$$

$$(\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Q})^{-1} \boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Qa} = (\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Q})^{-1} \boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{d} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{Q})^{-1} \boldsymbol{Q}^t \boldsymbol{W}^2 \boldsymbol{d} \tag{10}$$

と $\boldsymbol{a}$ が求められる。

課題 2

重み付き最小自乗法によるローパスフィルタの設計プログラムを完成させよ。

課題 1 で導出した $\boldsymbol{a}$ を用いたローパスフィルタのプログラムが以下のプログラム 1 である。

プログラム 1: Weighted Least Squares Lowpass Filter

```
N = 24; % Number of filter coefficients (filter length 2N-2)
L = 1024; % Number of frequency samples
dw = pi / (L-1);
wp = 0.25; % Passband edge
ws = 0.29; % Stopband edge

pe = ceil(wp * L);
se = ceil(ws * L);

d = [ones(pe, 1); zeros(L-pe, 1)]; % Desired frequency response
Q = [ones(L, 1) cos((0:L-1)' * (1:(N-1)) * dw)]; % Matrix of specified frequency components

pm = 0.1; % Passband weight
sm = 1.0; % Stopband weight
w = [pm*ones(pe, 1); zeros(se - pe, 1); sm*ones(L - se, 1)]; % Weight vector
W = diag(w); % Diagonal matrix from weight vector

a = (Q' * W^2 * Q) \ (Q' * W^2 * d); % Estimate filter coefficients using weighted least squares

coef = [flipud(a(2:end))/2; a(1); a(2:end)/2]; % Symmetric filter coefficients, length 2N-2

H = fft(coef, 2*L); % Frequency response of the designed filter
figure(1); plot(1:length(H(1:L)), abs(H(1:L)), 1:length(H(1:L)), d)
```

課題 3

最小自乗法によるローパスフィルタと、重み付き最小自乗法によるローパスフィルタの結果を比較し、その違いについて報告せよ。また、なぜ設計結果に違いが生じるのか考察せよ。ただし、各フィルタは下記の設定で設計すること。

- フィルタ係数の数：$N = 24$
- 周波数サンプル数：$L = 1024$
- 通過域のエッジ：$\omega_p = 0.25\pi$
- 阻止域のエッジ：$\omega_s = \{0.29\pi, 0.32\pi, 0.35\pi\}$

重み付き最小自乗法による設計のみ、阻止域のエッジを変えたときの結果も報告すること。

与えられた条件で作成した最小自乗法によるローパスフィルタ（図 1）、重み付き最小自乗法によるローパスフィルタ（図 2（a,b,c)）の周波数特性を示したグラフをそれぞれ下に示す。

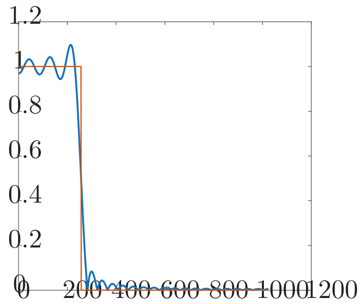
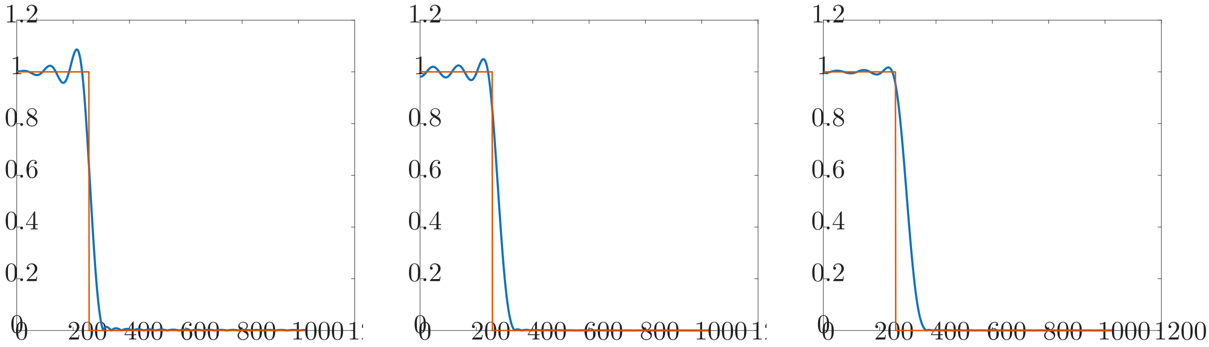


図 1: 最小自乗法によるローパスフィルタ



(a) $\omega_s = 0.29$　**(b)** $\omega_s = 0.32$　**(c)** $\omega_s = 0.35$

図 2: 重み付き最小自乗法によるローパスフィルタ
$\alpha = 0.1, \beta = 1.0$

課題 4

応用課題