Merton problem 期权定价假设

假设了只有一个风险资产的情况下的SDE

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad S_0 = S$$

即现在有2种资产： bond, stock ，其中 bond 无风险

现在假设bond中：

$$db_t = r b_t dt$$

现在有财富 W_t，由 π_t 的 stock 和 $(1-\pi_t)$ 的 bond 组成，其中

π_t 指代百分比，比如 π_t 可以为 40%，那么 $(1-\pi_t)$ 就为 60%。

此外，我们定义一个效用函数 U。

现在 Merton 的问题是求下列公式

$$H(w) = \max_{\pi} E_w[U(W_T^{\pi})]$$

目标：在成熟期T到达时，最大化财富，基于其中的π是投资到stock的。说白了就是想问π是多少时在T处能最大化财富，注意的是这个π可能为动态值

在随机控制过程中，我们发现

π_t 为 control，又叫控制变量

W_t^{π} 为 status，又叫状态变量，即 W_t^{π} 受 π_t 影响、

其中 $W_t^\pi = \underbrace{\pi_t W_t^\pi}_{\text{stock}} + \underbrace{(1-\pi_t) W_t^\pi}_{\text{bond}}$

$\Rightarrow \quad dW_t^\pi = d\pi_t W_t^\pi + d(1-\pi_t) W_t^\pi$

根据上面的 bond 公式：$db_t = rb_t dt$，此时将 b_t 看作 $(1-\pi_t)W_t^\pi$

$\Rightarrow \quad dW_t^\pi = d\pi_t W_t^\pi + r(1-\pi_t) W_t^\pi dt$

又根据上面 stock公式：$S_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$，$S_t$ 看作 $\pi_t W_t^\pi$

$\Rightarrow \quad dW_t^\pi = \mu \pi_t W_t^\pi dt + \sigma \pi_t W_t^\pi dB_t + r(1-\pi_t) W_t^\pi dt$

合并同类项

$$\begin{aligned} \Rightarrow dW_t^\pi &= (\mu\pi_t + r - r\pi_t) W_t^\pi dt + \sigma \pi_t W_t^\pi dB_t \\ &= [(\mu - r)\pi_t + r] W_t^\pi dt + \sigma \pi_t W_t^\pi dB_t . \end{aligned}$$

从式中可知，π_t 直接影响 W_t^π，

我们根据HJB方程

$$\partial_t H(t,x) + \sup\left[\mu(t,x,u)\,\partial_x H(t,x) + \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x,u)\,\partial_{xx} H(t,x) + F(s,x,u)\right] = 0$$

t：时间，x：status

重写一下

t：时间，x：status，u：control

$$\underbrace{H_t + \sup\left[\mu(t,x,u) H_x + \tfrac{1}{2}\sigma^2(t,x,u) H_{xx}\right.}_{\text{收益}} + \underbrace{F(s,x,u)}_{\text{手续费}}\left.\right] = 0 .$$

通过将上面 dW_t^π 的值代入

$$\begin{cases} \mu(t,x,u) = [(\mu - r)\pi_t + r] W_t^\pi \\ \sigma(t,x,u) = \sigma \pi_t W_t^\pi \end{cases}$$

又因为此时的 $H(t,x) \Rightarrow H(t,W_t^{\pi})$，且 merton 问题中无手续费

$$H_t + \sup_{\pi}\left[((\mu-r)\pi_t + r)W_t^{\pi}H_w + \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2 W_t^{\pi 2} H_{ww} + 0\right] = 0.$$

$$\Rightarrow H_t + \sup_{\pi}\left[\mu\pi_t W_t H_w - r\pi_t W_t H_w + rW_t H_w + \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2 W_t^2 H_{ww}\right] = 0.$$

将与 π 无关的拆出去得

$$H_t + rW_tH_w + \sup_{\pi}\left[(\mu-r)\pi_t W_t H_w + \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2 W_t^2 H_{ww}\right] = 0. \quad ①$$

现转换为求极限问题，对关于 π 的项来说，极值则为一阶导为0，得.

令 $f(\pi_t) = (\mu-r)\pi_t W_t H_w + \frac{1}{2}\sigma^2\pi_t^2 W_t^2 H_{ww}$

求导得 $f'(\pi_t) = (\mu-r)W_tH_w + \sigma^2\pi_t W_t^2 H_{ww} = 0$

解得 $\pi_t = -\frac{(\mu-r)\cancel{W_t}H_w}{\sigma^2 W_t^{\cancel{2}} H_{ww}} = -\frac{(\mu-r)H_w}{\sigma^2 W_t H_{ww}}$ ⑥

令 $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma}$ 得 $\pi_t = -\frac{\lambda H_w}{\sigma W_t H_{ww}}$ ②

将 π_t ② 的值代入 HJB 方程 ① 得

$$H_t + rW_tH_w + \sup_{\pi}\left[-\frac{(\mu-r)\lambda H_w^2 \cancel{W_t}}{\sigma \cancel{W_t} H_{ww}} + \frac{1}{2}\cancel{\sigma^2}\frac{\lambda^2 H_w^2}{\cancel{\sigma^2}\cancel{W_t^2}H_{ww}^{\cancel{2}}}\cancel{W_t^2}\cancel{H_{ww}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow H_t + rW_tH_w + \sup_{\pi}\left[-\frac{\lambda^2 H_w^2}{H_{ww}} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 H_w^2}{H_{ww}}\right] = 0.$$

$$\Rightarrow H_t + rW_tH_w + \sup_{\pi}\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2 H_w^2}{H_{ww}}\right] = 0 \quad ③$$

又根据 merton 的问题 $H(w) = \max_{\pi} E_w[U(W_T^{\pi})]$

得到 $H(T,w) = U(w)$

现在假设 $V(w) = \ln(w)$

可得 $H(t,w) = \ln(w) + h(t)$ ④

假设函数，如不存在这项，那 H_t 无解

所以可得
$$\begin{cases} H_t = h'(t) \\ H_w = \frac{1}{w} \quad ⑦ \\ H_{ww} = -\frac{1}{w^2} \end{cases}$$

③+⑦：

$$h'(t) + rW_t \cdot \frac{1}{W_t} + \sup_{\pi}\left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2 \cdot \frac{1}{W^2}}{-\frac{1}{W^2}}\right]$$

$$= h'(t) + r + \frac{\lambda^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow h'(t) = -r - \frac{1}{2}\lambda^2$$

其中，$H(T) = 0$

对 $h'(t)$ 积分，得 $\int h'(t) = \int -r - \frac{1}{2}\lambda^2 dt = -(r + \frac{1}{2}\lambda^2)t + C$

将 $H(T)=0$ 代入得 $-(r+\frac{1}{2}\lambda^2)T + C = 0$

解得 $C = (r + \frac{1}{2}\lambda^2)T$

得 $h(t) = -(r+\frac{1}{2}\lambda^2)t + (r+\frac{1}{2}\lambda^2)T = (r+\frac{1}{2}\lambda^2)(T-t)$

代入 ④ 得 $H(t,w) = \ln(w) + (r + \frac{1}{2}\lambda^2)(T-t)$

optimal value function.

利用 ⑥ ⑦

$$\pi_t = \frac{-(\mu-r)H_w}{\sigma^2 W_t H_{ww}} = -\frac{(\mu-r)\frac{1}{W_t}}{\sigma^2 W_t \cdot -\frac{1}{W_t^2}} = \frac{\mu-r}{\sigma^2}$$