関数(数学)

白　清水

平成 30 年 5 月 6 日

数学における関数（かんすう、英: *function*、仏: *application*、独: *Funktion*、羅: *functio*、函数とも）とは、かつては、ある変数に依存して決まる値あるいはその対応を表す式の事であった。この言葉はライプニッツによって導入された。その後定義が一般化されて行き、現代的には数の集合に値をとる写像の一種であると理解される。

第1章　表記の歴史

日本語としての関数はもともと「**関数**」(旧字体では函数)t と書く。函数という語は中国語から輸入されたものであり、中国での初出は1859年に出版された李善蘭の『代微積拾級』といわれる。
微積分について日本語で書かれた最初の本、花井静校・福田半編『筆算微積入門』(1880年) では「函数」が用いられている [1][2]。それに続く長澤亀之助訳『微分学』(1881年)、岡本則録訳『査氏微分積分学』(1883年) のいずれも用語を『代微積拾級』、『微積遡源』(1874年) などによっている [2]。明治初期に東京數學會社で数学用語の日本語訳を検討する譯語會が毎月開催され、その結果が『東京數學會社雑誌』で逐次報告されている。この報告に function の訳語は第62号 (1884年) の「原數」[3] と第64号 (1884年) の「三角法函數」[4] の二種類が登場する。一方、同誌の本文では61号 (1884年) や63号 (1884年) で「函數」が用いられている [5]。
「函」が漢字制限による当用漢字に含まれなかったことから、1950年代以降同音の「関」へと書き換えがすすめられた [6]。この他、「干数」案もあった [7]。学習指導要領に「関数」が登場するのは中学校で1958年、高等学校で1960年であり、それまでは「函数」が用いられている [8]。「関数」表記は1985年頃までには日本の初等教育の段階でほぼ定着した [9]。
「函数」の中国語における発音は (ピン音: *hanshu*) であり、志賀浩二や小松勇作によればこれはfunctionの音訳であるという [9][10]。一方、『代微積拾級』には「凡此變數中函彼變數則此為彼之函數」[11] とあり、また変数に天、地などの文字を用いて「天 = 函 (地)」という表記もある。片野善一郎によれば、「函」の字義はつつむ、つつみこむであるから、「天 = 函 (地)」という表現は「天は地を函む」ようにみえ [1]、従属変数（の表現）に独立変数が容れられている [2] という意味であるという。
なお、現代の初等教育の場においてはしばしば関数をブラックボックスのたとえで説明することがある [2][12][13]。この説明では、「函」を「はこ」と読むことと関連付けて説明されることもあるが、「函数」の語の初出は1859年なのに対し、「ブラックボックス」の語の初出は1945年ごろとされることに注意を要する。

第2章　定義

二つの変数 x と y があり、入力 x に対して、出力 y の値を決定する規則 x に特定の値を代入するごとに y の値が確定する）が与えられているとき、変数 y を「x を**独立変数** (independent variable) とする**関数**」或いは簡単に「x の関数」という。対応規則を明示するときは、適当な文字列（特に何か理由がなければ、function の頭文字から f が選ばれることが多い）を使って

$$y = f(x) \tag{2.1}$$

のように対応規則に名前を付与する。x の関数 y を $f(x)$ と書いて、$x = a$ を代入したときに決まる関数の値を $f(a)$ と表すのである。
しかしここで、定数関数の例に示されるように、個々の y の値について対応する x の値が一つに決まるとは限らないことに注意しなければならない。この $f(x)$ という表記法は 18 世紀の数学者オイラーによるものである。オイラー自身は、変数や定数を組み合わせてできた数式の事を関数と定義していたが、コーシーは上に述べたように、 y と言う変数を関数と定義した。
y が x の関数であることの別の表現として、変数 y は変数 x に**従属**するとも言い、y を**従属変数** (dependent variable) と言い表す。独立変数が取り得る値の全体 (変域) を、この関数の**定義域** (domain) と言い、独立変数が定義域のあらゆる値を取るときに、従属変数が取り得る値 (変域) を、この関数の**値域** (range) という。
関数の終域は実数 $\mathbf{R}$ や複素数 $\mathbf{C}$ の部分集合であることが多い。終域が実数の集合となる関数を**実数値関数** (real valued function) といい、終域が複素数の集合となる関数を**複素数値関数** (complex valued function) という。それぞれ定義域がどのような集合であるかは問わないが、定義域も終域も実数の集合であるような関数を**実関数** (real function) といい、定義域も終域も複素数の集合であるような関数を**複素関数** (complex function) という。

第3章　現代的解釈

ディリクレは、 x と f(x) の対応関係に対して一定の法則性を持たせる必要は無いとした。つまり、個々の独立変数と従属変数の対応そのものが関数であり、その対応は数式などで表す必要はないという、オイラーとは異なる立場をとっている。集合論的立場に立つ現代数学では、ディリクレのように関数を対応規則 f のことであると解釈する。それは二項関係の特別の場合として関数を定義するということであり、関数を集合から「数」のつくる集合への写像であると捉えると言う事である [14]。[要追加記述] よって、写像に用いる言葉をそのまま流用する事がある。

- 合成 (合成関数)
- 全射、単射 (一対一ともいう)、全単射 (双剣、一対一対応とも言う)
- 逆 (逆関数)

などを挙げることができる。一方で、「数」に値を取る関数は一般の写像とは異なる性質を持つ。たとえば、像を用いて値毎の演算と呼ばれる函数同士の演算が定義できること：x を任意として、

- $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$,
- $(f+g)(x) := f(x) - g(x)$,
- $(fg)(x) := f(x)g(x)$,
- $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$,

などが挙げられる。

第4章　ブラックボックスモデルによる説明

とくに教育において関数はブラックボックスで説明されることがあると前に述べたが関数は入力と出力が定義されたブラックボックスとして説明される [12]。集合論的立場に立つ現代数学では、ディリクレのように関数を対応規則 f のことであると解釈する。それは二項関係の特別の場合として関数を定義するということであり、関数を集合から「数」のつくる集合への写像であると捉えると言う事である [14]。[要追加記述] よって、写像に用いる言葉をそのまま流用する事がある。

第5章　関数の例

- 一次関数：$f(x) = ax + b(a, b$ は定数$, a \neq 0)$
  - とくに、b=0 のとき線形写像, a=1 かつ b=0 のとき**恒等関数** (恒等写像、identity) になる
- 二次関数：$f(x) = ax^2 + bx + c(a, b, c$ は定数で$, a \neq 0)$
- 指示関数：

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A). \end{cases} \tag{5.1}$$

いかに代表的な関数とその具体例の一覧表を掲げる [12][15]。すべての物を網羅しているわけではないことに注意されたい。

<table>
<tr><th colspan="4">関数</th><th>具体例</th></tr>
<tr><td rowspan="6">代数関数</td><td rowspan="5">有理関数</td><td rowspan="4">定数関数</td><td>多項式関数</td><td>$f(x) = a$</td></tr>
<tr><td>一次関数</td><td>$f(x) = ax + b$</td></tr>
<tr><td>二次関数</td><td>$f(x) = ax^2 + bx + c$</td></tr>
<tr><td>三次関数</td><td>$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$</td></tr>
<tr><td colspan="2">分数関数</td><td>$f(x) = \frac{a}{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">無理関数</td><td>$f(x) = \sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">初等関数</td><td colspan="3">指数関数</td><td>$a^x, e^x, 2^x$</td></tr>
<tr><td colspan="3">対数関数</td><td>$log(x), in(x), log_a(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">三角関数</td><td>$sin(x), cos(x), tan(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">逆三角関数</td><td>$sin^-1(x), cos^-1(x), tan^-1(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">双曲線関数</td><td>$sinh(x), cosh(x), tanH(x)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">特殊関数</td><td colspan="3">ガンマ関数</td><td>$\Gamma(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">ベータ関数</td><td>$B(x, y)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">誤差関数</td><td>$erf(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">テータ関数</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">ゼータ関数</td><td>$\zeta(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">マチウ関数</td><td></td></tr>
</table>