

Dynamic Technology Lab 在线笔试题

声明：

1. 请勿对任何第三方机构或者个人泄漏本次考试题目；
2. 请勿使用纸笔以外的任何工具辅助答题，可以使用电脑录入答题结果，但不可用于辅助计算；
3. 请写出详细的解题思路和答题步骤，只有答案的将不记分。

1. (10p) 对一张无限大的棋盘（含有无数个方格）的每个方格用红黑两种颜色染色（每种颜色的方格至少存在一个），棋盘上面现在趴了两只跳蚤，一只在红色的方格内（称为R），一只在黑色的方格内（称为B），R只能跳到同行或者同列另外一个红色的方格内，B只能跳到同行或者同列另外一个黑色的方格内（不考虑跳跃的距离），请问n最小为几，可以保证在任意情况下，两只跳蚤加起来最多跳n次，便可相遇（当两只跳蚤处在同行或者同列相邻的两个棋盘格子里时，称为相遇），并证明你的结论。

2. (10p) $0 \leq x, y, z \leq 1$ ，试计算 $\sqrt[n]{|x-y|} + \sqrt[n]{|y-z|} + \sqrt[n]{|z-x|}$ 的最大值（n为正整数）。

3. (12p) 是否存在这样的十位正整数，它的各位数字（从左至右）分别表示此数中出现的0, 1, 2, ..., 9的个数？如果存在，请列出所有的这样的数；如果不存在，请证明。

4. (12p) 考虑如下简化的选举：一个国家有3个选区，每个选区有3个选民代表，每个选区的选民代表选出本选区的一个选区代表（在本区选民代表中产生），然后所有的选区代表选出总统（在选区代表中产生），每次选举过半数即可当选。假设这9个选民代表分成两个派别，4个属于少数派，5个属于多数派，派别内部没有分歧（总能够达成一致意见）。请问在选民代表随机均匀分布的情况下，少数派当选总统的概率是多少？

(提示：n个人分成3组，每组分别有a、b、c个人($n=a+b+c$)的分法共有 $C(n,a)C(n-a,b)/K$ 种，abc互不相同， $K=1$ ；完全相同时， $K=3!=6$ ；其余情况 $K=2!=2$ ；这里 $C(n,m)$ 表示n个人中取m个的组合数)

5. (12p) A,B,C三个人玩一个游戏，每个人背上会被贴上一张写有数字0或者1的纸条，每个人可以看到其余人背上的纸条，但是看不到自己的。每个人都有两种选择：猜自己背上纸条的数字或者直接弃权；如果至少有一个人选择猜数字，并且选择猜数字的人全部猜对，则三个人可以得到总共一万美元的奖励；否则什么也得不到。三个人背上的数字独立随机产生；一旦游戏开始进行，三个人彼此之间不能进行任何沟通交流，并且需要同一时间作出选择；但是事前他们可以进行交流并产生三个人都同意执行的策略。请你给三个人制定一个策略，让他们的期望收益最大化，并计算这个期望收益。

6. (14p) 一堆外观完全相同但是重量各不相同的砝码，由于某些原因，它们标称重量可能错乱了（比如1g的砝码被标成了2g），但是标称重量的集合与实际重量的集合是完全相同的（比如1/2/3g的砝码有可能被标记成2/1/3g，但不会被标记成2/1/4g）。假定你无法通过触摸感知砝码的重量，现在给你一架只可以判断左边重、右边重或者两边一样重的天平，试问：

- a) (7p) 如果已知砝码的实际重量集合是 $\{1g, 2g, 3g, 4g, 5g\}$ ，如何仅通过两次称量判断是否所有的砝码标称完全正确；
- b) (7p) 如果已知砝码的实际重量集合是 $\{1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6g\}$ ，如何仅通过两次称量判断是否所有的砝码标称完全正确。

7. (15p) 将 $1, 2, 3, \dots, n^2$ 随机填充到 $n \times n$ 的棋盘格里，每个格子里一个数，没有重复，现在有两种选数字的方案，

- a) 首先选取每行的最大数字，然后从这些最大数字里选取最小数字，记为A；
- b) 首先选取每列的最小数字，然后从这些最小数字里选取最大数字，记为B；
- 求 $P(A > B)$ 。

8. (15p) 现有若干条打了结的绳子（每条绳子上的结点数目可以不同），A和B两个人玩这样一个游戏：他们轮流从任意选取的绳子上截取若干连续的结点，比如一条有4个结点的绳子a-b-c-d,可以截取b或者b-c或者b-c-d或者a-b-c-d，但是不能同时只取得a和c；同时，如果只取了b结点的话，这条绳子就被截断成两条绳子a和c-d，可以在后面的轮次中备选。每个人每一轮只能选择一条绳子，并至少截取一个节点；取到最后一个节点的玩家将被判负；游戏从玩家A开始进行。在A、B玩家都足够聪明的情况下，请问在什么情况下A必赢，什么情况下B必赢？