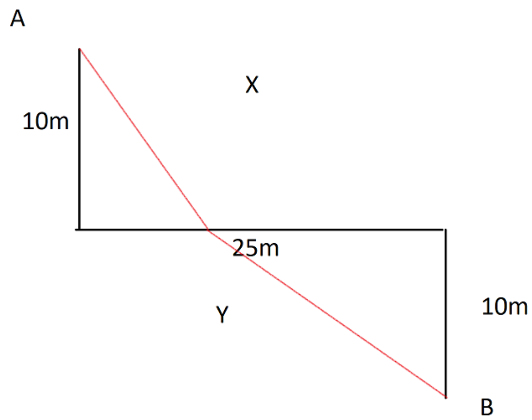
DTL **在线笔试题**

<u>注意:</u>

1. 请不要将试题泄露给任何第三方.
2. 请仅用笔和纸完成试题, 电脑仅可用于上传答案.
3. 请尽可能写出详细的计算过程, 只有答案没有步骤将不得分.

1. (6p) Jerry 从 A 点走到 B 点. 在上半区 (图中 X 区) 和下半区 (图中 Y 区),Jerry 的速度分别为 1m/min 和 2m/min. 对 Jerry 来说, 所需时间最短的路线长度为多少?



2. (10p) 证明集合 $\{0, 1, \dots, 2018\}$ 的任意元素个数大于 1009 的子集均包含 2 的幂, 或者包含两个不同的整数, 它们的和是 2 的幂.

3. (10p) 一块 $9 * 9$ 的正方形板内有 46 个方格被涂上红色. 证明板内存在一个 $2 * 2$ 的方块, 它至少包含 3 个红色方格.

4. (10p) 有这样的 13 个人, 其中男人只对男人说真话, 对女人说假话; 女人只对女人说真话, 对男人说假话. 他们站成一圈. 第一个人 (1 号) 对左边的第二个人（2 号）说:“男人人数大于女人人数”. 第二个人（2 号）对左边的第三个人（3 号）说:“女人人数大于男人人数”. 以此类推. 第十三个人（13 号）对左边的第一个人（1 号）说:“男人人数大于女人人数”. 问这些人中可能有多少个男人?

5. (12p) 请找出所有满足 $m^3 - n^3 = 2mn + 8$ 的整数对 (m, n).

6. (12p) 我们有一个 $21 * 21$ 方格的区域, 现在我们用红, 蓝, 绿三种颜色 (RBG) 填满它, 每种颜色填满其中的 147 个方格. 任意两个相邻的方格有一条共同的边. 若一条边两边的方格颜色不同, 就称这条边为 “特殊的边”.

(a) (4p) “特殊的边” 最多可能是多少? 请证明你的答案.

(b) (8p) “特殊的边” 最少可能是多少? 请证明你的答案.

7. (20p) N 个硬币, 初始全部正面朝上.

    (a) (6p) 排成一排, 第一轮从第一个开始, 每隔一个翻一下, 第二轮从第 2 个开始, 每隔两个翻一下, 以此类推, 共 N 轮. 问最终共有多少硬币正面朝下? 分别是哪些?

    (b) (7p) 围成一圈（翻的时候绕圈）, 第一轮从第一个开始, 每隔一个翻一下, 第二轮从第二个开始, 每隔两个翻一下, 以此类推, 共 N 轮, 每轮如果翻到本轮已经翻过的即停止本轮（每个硬币在一轮中至多被翻一次）. 问翻完之后多少硬币正面朝下? 分别是哪些?

    (c) (7p) 围成一圈（翻的时候绕圈）, 第一轮从第一个开始, 每隔一个翻一下, 第二轮从第二个开始, 每隔两个翻一下, 以此类推, 共 N 轮, 每轮翻 N 次. 问翻完之后多少硬币正面朝下? 分别是哪些?

8. (a) (10p) 证明对任意正整数 n, 以及任意整数 $m < 2n-1$, 且 $m >= n$, 我们总是能够构造一个包含 m 个整数 (整数可重复) 的集合, 使得其中任意 n 个整数之和不能够被 n 整除.

    (b) (10p) 证明对任意正整数 n, 对任意包含 $m = 2n-1$ 个整数 (整数可重复) 的集合, 一定存在 n 个整数的和能够被 n 整除.[提示: 可能会用到费马小定理: 若 p 是一个素数, 且 p 不能被 a 整除, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.]