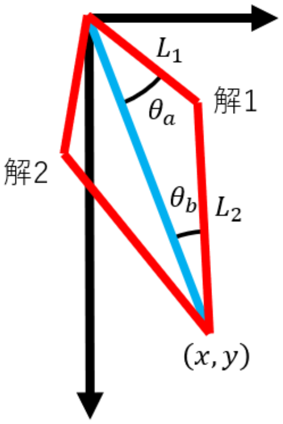
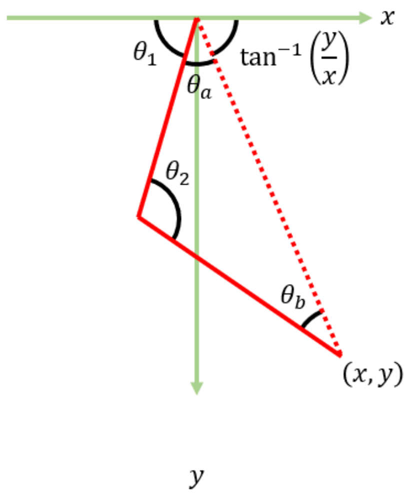
2 次元 2 リンクモデル





2 リンクモデルにおいて逆運動学を用いた際の解は 2 つある（図中の赤線）。
エンドエフェクタの座標を(x,y)とし得られるであろう 2 つの解を図示しθ_a、θ_bを設定する。
θ_aとθ_bについて、図から得られる幾何学的条件は以下の式で表される。

$$\sqrt{x^2+y^2} = L_1\cos\theta_a + L_2\cos\theta_b \tag{1}$$

$$L_1\sin\theta_a = L_2\sin\theta_b \tag{2}$$

$$0 \le \theta_a\,,\theta_b < \frac{\pi}{2} \tag{3}$$

式 2 の両辺を 2 乗し、式 1 とともに$u=\cos\theta_a$、$v=\cos\theta_b$と置き換える。

$$L_1^2\sin^2\theta_a = L_2^2\sin^2\theta_b$$

$$L_1^2(1-\cos^2\theta_a) = L_2^2(1-\cos^2\theta_b)$$

$$L_1^2\cos^2\theta_a - L_2^2\cos^2\theta_b = L_1^2 - L_2^2$$

$$L_1^2u^2 - L_2^2v^2 = L_1^2 - L_2^2 \tag{4}$$

$$L_1u + L_2v = \sqrt{x^2+y^2}\ from\ (1) \tag{5}$$

式 4 より

$$(L_1u+L_2v)(L_1u-L_2v) = L_1^2 - L_2^2$$

式 5 を代入

$$\sqrt{x^2+y^2}(L_1u-L_2v) = L_1^2 - L_2^2$$

$$L_1u - L_2v = \frac{L_1^2-L_2^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{6}$$

式 5 と式 6 を足し合わせる

$$2L_1u = \sqrt{x^2+y^2} + \frac{L_1^2-L_2^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{x^2+y^2+L_1^2-L_2^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\therefore u = \frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\therefore \cos\theta_a = \frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\therefore \theta_a = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \qquad 7$$

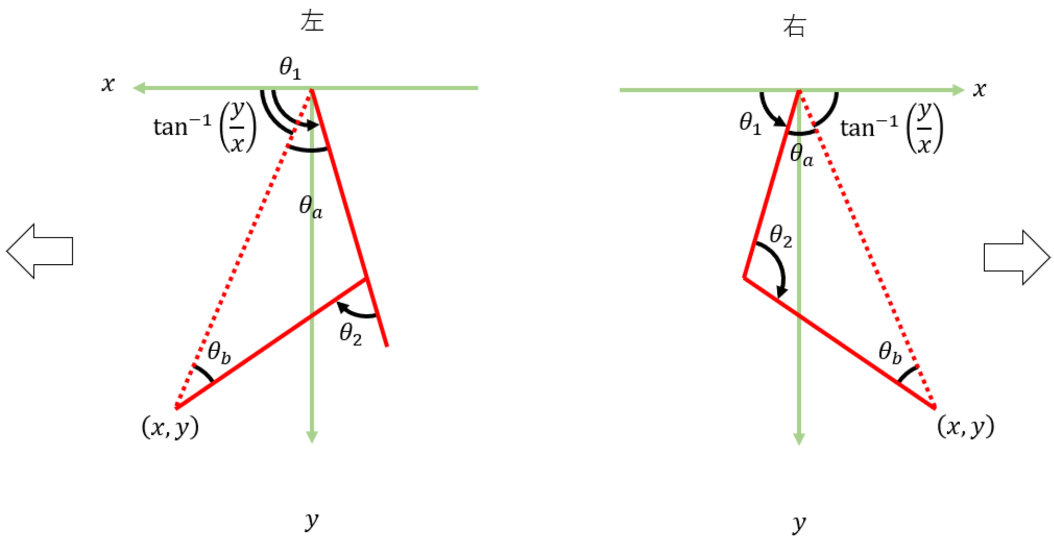
式 5 と式 6 を引き合わせる

$$2L_2 v = \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{L_1^2 - L_2^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\therefore v = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 + L_2^2}{2L_2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\therefore \theta_b = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 - L_1^2 + L_2^2}{2L_2\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \qquad 8$$

今回のロボットのサーボと方向を加味した図は以下のようになる。



この時、θ_1とθ_2は幾何学的条件によって左右で以下のように決定される。

右

$$\theta_1 = \pi - \theta_a - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta_2 = \pi - \theta_a - \theta_b$$

左

$$\theta_1 = \theta_a + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

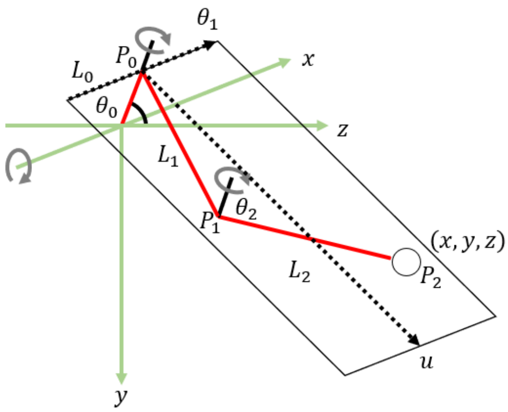
$$\theta_2 = \theta_a + \theta_b$$

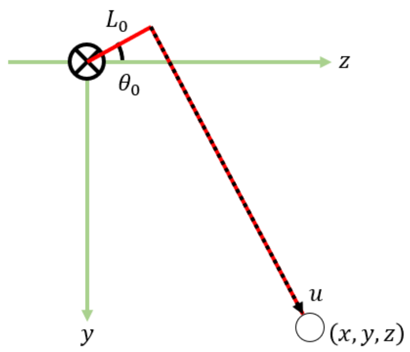
ただし、

$$\theta_a = \cos^{-1}\left(\frac{x^2+y^2+L_1^2-L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\theta_b = \cos^{-1}\left(\frac{x^2+y^2-L_1^2+L_2^2}{2L_2\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

3 次元への拡張





エンドエフェクタの座標を(x,y,z)として根元の角度θ_0について考える。
L_0から先のL_1、L_2の角度θ_1、θ_2は改めて座標平面を考え 2 リンクモデルを適用する。

原点から延びる直線L_0の傾きは$-\tan\theta_0$であるため直線L_1､L_2の傾きは$\frac{1}{\tan\theta_o}$となる｡直線L_1、L_2は 2 点$(L_0\cos\theta_0\,, -L_0\sin\theta_0), (z,y)$を通り、なす角は$\frac{1}{\tan\theta_o}$となる必要がある。

$$\frac{y+L_0\sin\theta_0}{z-L_0\cos\theta_0} = \frac{1}{\tan\theta_o}$$

$$= \frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}$$

$$(y+L_0\sin\theta_0)\sin\theta_0 = (z-L_0\cos\theta_0)\cos\theta_0$$

$$y\sin\theta_0 + L_0\sin^2\theta_0 = z\cos\theta_0 - L_0\cos^2\theta_0$$

$$y\sin\theta_0 - z\cos\theta_0 = -L_0$$

$$\sqrt{y^2+z^2}\sin\left(\theta_0 - \tan^{-1}\frac{z}{y}\right) = -L_0$$

$$\sin\left(\theta_0 - \tan^{-1}\frac{z}{y}\right) = -\frac{L_0}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$\theta_0 - \tan^{-1}\frac{z}{y} = -\sin^{-1}\left(\frac{L_0}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$
$$\therefore \theta_0 = \tan^{-1}\frac{z}{y} - \sin^{-1}\left(\frac{L_0}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$

点P_0の座標$(L_0\cos\theta_0, -L_0\sin\theta_0)$が明らかとなり、x-u 平面において前述の 2 リンクモデルを適用できる。
$x = x, u = \sqrt{(y+L_0\sin\theta_0)^2+(z-L_0\cos\theta_0)^2}$を適用。
$$\theta_a = \cos^{-1}\left(\frac{x^2+u^2+L_1^2-L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2+u^2}}\right)$$
$$\theta_b = \cos^{-1}\left(\frac{x^2+u^2-L_1^2+L_2^2}{2L_2\sqrt{x^2+u^2}}\right)$$
しかしギアの噛合いにより減速が生じるためサーボへの指示角度θ_{zero}は以下のように計算できる。
$$\theta_{zero} = \theta_0 \times \frac{38}{19}$$
まとめ
エンドエフェクタの位置を(x, y, z)とすると各リンクの角度θ_0、θ_1、θ_2は以下のようになる。
$$\theta_0 = \tan^{-1}\frac{z}{y} - \sin^{-1}\left(\frac{L_0}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)$$
犬右側足
$$\theta_1 = \pi - \theta_a - \tan^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)$$
$$\theta_2 = \pi - \theta_a - \theta_b$$
犬左側足
$$\theta_1 = \theta_a + \tan^{-1}\left(\frac{u}{x}\right)$$
$$\theta_2 = \theta_a + \theta_b$$
ただし
$$u = \sqrt{(y+L_0\sin\theta_0)^2+(z-L_0\cos\theta_0)^2}$$
$$\theta_a = \cos^{-1}\left(\frac{x^2+u^2+L_1^2-L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2+u^2}}\right)$$
$$\theta_b = \cos^{-1}\left(\frac{x^2+u^2-L_1^2+L_2^2}{2L_2\sqrt{x^2+u^2}}\right)$$