2重N足振り子の運動方程式

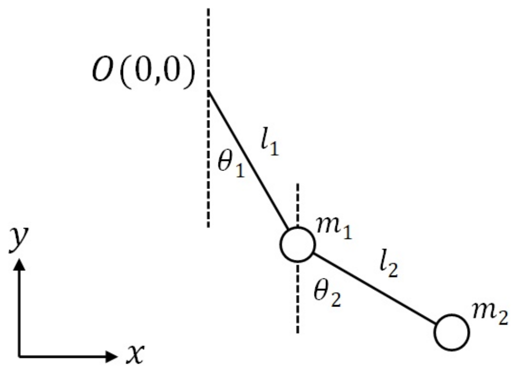
Shiki [1]

2020年9月22日
一部修正：2021年5月26日

[1]えむしーじじょう (mc2)

目 次

第1章　2重振り子



2次元の2重振り子の運動方程式と加速度 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ に関する方程式を求める。

この2重振り子は, 原点を支点とし、糸の長さを l_1, l_2, 質点の質量を m_1, m_2 とする。
糸の長さは一定で、曲がらない剛体とし、鉛直線に対する糸の角度を θ_1、θ_2 とする。
また、糸や質点同士は干渉しないものとする。

質点の位置 $\boldsymbol{x_1} = (x_1, y_1), \boldsymbol{x_2} = (x_2, y_2)$ は

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

である。
ここからラグランジアン L を得るため、速度の2乗を求める。
質点1の速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt}$ の2乗は

$$|\dot{\boldsymbol{x}}_1|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^{\,2} \tag{1.2}$$

質点2の速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{d\boldsymbol{x}_2}{dt}$ の2乗は式 (3.1) より

$$\begin{aligned} |\dot{\boldsymbol{x}}_2|^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\ &= (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)^2 \\ &= (l_1^2\dot{\theta}_1^{\,2} \cos^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^{\,2} \cos^2\theta_2) \\ &\quad + \ (l_1^2\dot{\theta}_1^{\,2} \sin^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^{\,2} \sin^2\theta_2) \\ &= l_1^2\dot{\theta}_1^{\,2} + l_2^2\dot{\theta}_2^{\,2} + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \tag{1.3}$$

となる。

これよりラグランジアン $L = T - U$ は

$$
\begin{aligned}
L =& \frac{1}{2}m_1|\dot{x_1}|^2 + m_1 g l_1 \cos\theta_1 \\
&+ \frac{1}{2}m_2|\dot{x_2}|^2 + m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \\
=& \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta_1}^2 + m_1 g l_1 \cos\theta_1 \\
&+ \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta_1}^2 + l_2^2\dot{\theta_2}^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)) + m_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2)
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

となる。
ラグランジュの運動方程式

$$
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}) = \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \tag{1.5}
$$

より、左辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2(l_2\dot{\theta}_2 + l_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2)) \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}) &= (m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1(l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) - l_2\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2)) \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}) &= m_2 l_2(l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - l_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1-\theta_2))
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

となり、右辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_1 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - m_2 g l_1 \sin\theta_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta_2
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

となる。
式 (3.6), 式 (3.7) より、

$$
\begin{aligned}
&(m_1+m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\
&= -m_1 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta_2}^2 \sin(\theta_1-\theta_2) \\
&m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) \\
&= -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta_1}^2 \sin(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

となる。
ここで、両辺に共通する定数を割ると、

$$
\begin{aligned}
&(m_1+m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\
&= -m_1 g \sin\theta_1 - m_2 g \sin\theta_1 - m_2 l_2 \dot{\theta_2}^2 \sin(\theta_1-\theta_2) \\
&m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1-\theta_2) \\
&= -m_2 g \sin\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta_1}^2 \sin(\theta_1-\theta_2)
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

となる。
これを行列の形で整理すると運動方程式は

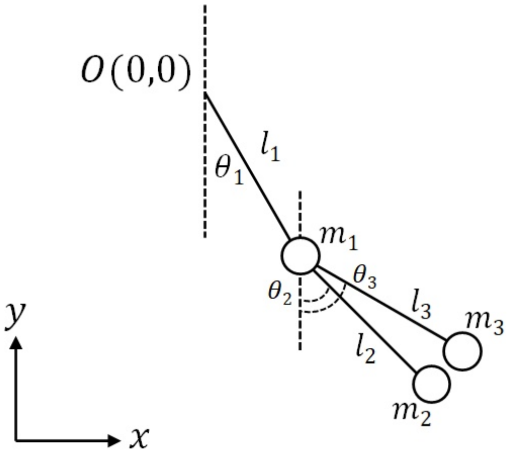
$$\begin{bmatrix} (m_1+m_2)l_1 & m_2 l_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2 l_1 \cos(\theta_1-\theta_2) & m_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2) g \sin\theta_1 & m_2 l_2 \dot{\theta}_2^{\,2} \sin(\theta_1-\theta_2) \\ m_2 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_2-\theta_1) & m_2 g \sin\theta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

となり、加速度 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ は

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)l_1 & m_2 l_2 \cos(\theta_1-\theta_2) \\ m_2 l_1 \cos(\theta_1-\theta_2) & m_2 l_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (m_1+m_2) g \sin\theta_1 & m_2 l_2 \dot{\theta}_2^{\,2} \sin(\theta_1-\theta_2) \\ m_2 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_2-\theta_1) & m_2 g \sin\theta_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

となる。

第2章　2重2足振り子



2 次元の 2 重振り子の 2 重目を 2 足の振り子にした場合の運動方程式と加速度 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3$ に関する方程式を求める。

この 2 重 2 足振り子は, 原点を支点とし、糸の長さを l_1, l_2, l_3, 質点の質量を m_1, m_2, m_3 とする。
糸の長さは一定で、曲がらない剛体とし、鉛直線に対する糸の角度を $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ とする。
また、糸や質点同士は干渉しないものとする。

質点の位置 $\boldsymbol{x_1} = (x_1, y_1), \boldsymbol{x_2} = (x_2, y_2), \boldsymbol{x_3} = (x_3, y_3)$ は

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin\theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos\theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_2 \\ x_3 &= l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_3 \\ y_3 &= -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\theta_3 \end{aligned} \tag{2.1}$$

である。
ここからラグランジアン L を得るため、速度の 2 乗を求める。
質点 1 の速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt}$ の 2 乗は

$$|\dot{\boldsymbol{x}}_1|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^{\ 2} \tag{2.2}$$

質点 21 の速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_2 = \frac{d\boldsymbol{x}_2}{dt}$ の 2 乗は式 (3.1) より

$$\begin{aligned} |\dot{\boldsymbol{x}}_2|^2 &= \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \\ &= (l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2)^2 \\ &= (l_1^2\dot{\theta}_1{}^2 \cos^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos\theta_1\cos\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2{}^2 \cos^2\theta_2) \\ &\quad + \ (l_1^2\dot{\theta}_1{}^2 \sin^2\theta_1 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin\theta_1\sin\theta_2 + l_2^2\dot{\theta}_2{}^2 \sin^2\theta_2) \\ &= l_1^2\dot{\theta}_1{}^2 + l_2^2\dot{\theta}_2{}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \tag{2.3}$$

同様にして

$$\begin{aligned} |\dot{\boldsymbol{x}}_3|^2 &= \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 \\ &= l_1^2\dot{\theta}_1{}^2 + l_3^2\dot{\theta}_3{}^2 + 2l_1l_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる。
これよりラグランジアン $L = T - U$ は

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m_1|\dot{x_1}|^2 + m_1gl_1\cos\theta_1 \\ &\quad + \ \frac{1}{2}m_2|\dot{x_2}|^2 + m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \\ &\quad + \ \frac{1}{2}m_3|\dot{x_3}|^2 + m_3g(l_1\cos\theta_1 + l_3\cos\theta_3) \\ &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1{}^2 + m_1gl_1\cos\theta_1 \\ &\quad + \ \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1{}^2 + l_2^2\dot{\theta}_2{}^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)) + m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \\ &\quad + \ \frac{1}{2}m_3(l_1^2\dot{\theta}_1{}^2 + l_3^2\dot{\theta}_3{}^2 + 2l_1l_3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3\cos(\theta_1 - \theta_3)) + m_3g(l_1\cos\theta_1 + l_3\cos\theta_3) \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる。
ラグランジュの運動方程式

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}) = \frac{\partial L}{\partial\theta_i} \tag{2.6}$$

より、左辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 \\
&\quad + m_2 l_1 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\
&\quad + m_3 l_1 (l_1 \dot{\theta}_1 + l_3 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2 (l_2 \dot{\theta}_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} &= m_3 l_3 (l_3 \dot{\theta}_3 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_3)) \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}) &= (m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + m_2 l_1 (l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_2 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\
&\quad + m_3 l_1 (l_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_3 \dot{\theta}_3 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_1 - \theta_3)) \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}) &= m_2 l_2 (l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)) \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3}) &= m_3 l_3 (l_3 \ddot{\theta}_3 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) - l_1 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_1 - \theta_3))
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

となり、右辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_1 g l_1 \sin\theta_1 \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_1 \sin\theta_1 \\
&\quad - m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) - m_3 g l_1 \sin\theta_1 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta_2 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_3} &= m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_1 - \theta_3) - m_3 g l_3 \sin\theta_3
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

となる。
式 (3.6), 式 (3.7) より、

$$
\begin{aligned}
&(m_1 + m_2 + m_3) l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\
&+ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_3 l_1 l_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\
&= -m_1 g l_1 \sin\theta_1 \\
&\quad - m_2 g l_1 \sin\theta_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - m_3 g l_1 \sin\theta_1 - m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_3{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_3) \\
&m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&= -m_2 g l_2 \sin\theta_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&m_3 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_3 l_1 l_3 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\
&= -m_3 g l_3 \sin\theta_3 + m_3 l_1 l_3 \dot{\theta}_1{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_3)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

となる。

ここで、両辺に共通する定数で割ると、

$$
\begin{aligned}
&(m_1 + m_2 + m_3) l_1 \ddot{\theta}_1 \\
&\quad + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + m_3 l_3 \ddot{\theta}_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\
&\quad = -m_1 g \sin\theta_1 \\
&\qquad - m_2 g \sin\theta_1 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\qquad - m_3 g \sin\theta_1 - m_3 l_3 \dot{\theta}_3^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_3) \\
&m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad = -m_2 g \sin\theta_2 + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&m_3 l_3 \ddot{\theta}_3 + m_3 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\
&\quad = -m_3 g \sin\theta_3 + m_3 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_3)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

となる。
これを行列の形で整理すると運動方程式は

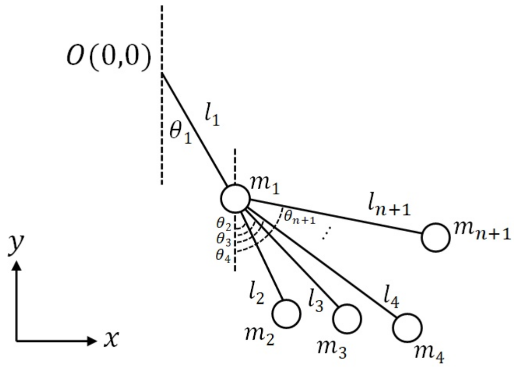
$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) l_1 & m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_3 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ m_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2 & 0 \\ m_3 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) & 0 & m_3 l_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) g \sin\theta_1 & m_2 l_2 \dot{\theta}_2^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_2) & m_3 l_3 \dot{\theta}_3^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ m_2 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_2 - \theta_1) & m_2 g \sin\theta_2 & 0 \\ m_3 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_3 - \theta_1) & 0 & m_3 g \sin\theta_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

となり、加速度 $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2$ は

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) l_1 & m_2 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_3 l_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) \\ m_2 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & m_2 l_2 & 0 \\ m_3 l_1 \cos(\theta_1 - \theta_3) & 0 & m_3 l_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \\
&\begin{bmatrix} (m_1 + m_2 + m_3) g \sin\theta_1 & m_2 l_2 \dot{\theta}_2^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_2) & m_3 l_3 \dot{\theta}_3^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_3) \\ m_2 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_2 - \theta_1) & m_2 g \sin\theta_2 & 0 \\ m_3 l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_3 - \theta_1) & 0 & m_3 g \sin\theta_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

となる。

第3章　2重N足振り子



2次元の2重振り子の2重目をN足の振り子にした場合の運動方程式と加速度 $\ddot{\theta}_i$ に関する方程式を求める。

この2重N足振り子は, 原点を支点とし、糸の長さを l_i, 質点の質量を m_i とする。
糸の長さは一定で、曲がらない剛体とし、鉛直線に対する糸の角度を θ_i とする。
また、糸や質点同士は干渉しないものとする。

質点の位置 $\boldsymbol{x_i} = (x_i, y_i)$ は

$$
\begin{aligned}
&i = 1 \\
&\quad x_1 = l_1 \sin\theta_1 \\
&\quad y_1 = -l_1 \cos\theta_1 \\
&i \neq 1 \\
&\quad x_i = l_1 \sin\theta_1 + l_i \sin\theta_i \\
&\quad y_i = -l_1 \cos\theta_1 - l_i \cos\theta_i
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

である。
ここからラグランジアン L を得るため、速度の2乗を求める。
質点1の速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{d\boldsymbol{x}_1}{dt}$ の2乗は

$$
|\dot{\boldsymbol{x}}_1|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^{\,2} \tag{3.2}
$$

質点 $i \neq 1$ の速度 $\dot{\boldsymbol{x}}_i = \frac{d\boldsymbol{x}_i}{dt}$ の2乗は章2と同様にして、式(3.1)より

$$
\begin{aligned}
|\dot{\boldsymbol{x}}_i|^2 &= \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 \\
&= l_1^2 \dot{\theta}_1^{\,2} + l_i^2 \dot{\theta}_i^{\,2} + 2 l_1 l_i \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_i \cos(\theta_1 - \theta_i)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

となる。

これよりラグランジアン $L=T-U$ は

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m_1|\dot{x_1}|^2 + m_1 g l_1 \cos\theta_1 \\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}(\frac{1}{2}m_i|\dot{x_i}|^2 + m_i g(l_1\cos\theta_1 + l_i\cos\theta_i)) \\
&= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot{\theta_1}^2 + m_1 g l_1\cos\theta_1 \\
&+ \sum_{i=2}^{n+1}(\frac{1}{2}m_i(l_1^2\dot{\theta_1}^2 + l_i^2\dot{\theta_i}^2 + 2l_1 l_i\dot{\theta}_1\dot{\theta}_i\cos(\theta_1-\theta_i)) + m_i g(l_1\cos\theta_1 + l_i\cos\theta_i))
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

となる。
ラグランジュの運動方程式

$$
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}) = \frac{\partial L}{\partial\theta_i} \tag{3.5}
$$

より、左辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1} &= m_1 l_1^2\dot{\theta}_1 \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n+1}(m_i l_1(l_1\dot{\theta}_1 + l_i\dot{\theta}_i\cos(\theta_1-\theta_i))) \\
\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i} &= m_i l_i(l_i\dot{\theta}_i + l_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_i)) \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_1}) &= (\sum_{i=1}^{n+1}m_i)l_1^2\ddot{\theta}_1 \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n+1}(m_i l_1(l_i\ddot{\theta}_i\cos(\theta_1-\theta_i) - l_i\dot{\theta}_i(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_i)\sin(\theta_1-\theta_i))) \\
\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}_i}) &= m_i l_i(l_i\ddot{\theta}_i + l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_i) - l_1\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_i)\sin(\theta_1-\theta_i))
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

となり、右辺は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\theta_1} &= -m_1 g l_1\sin\theta_1 \\
&\quad - \sum_{i=2}^{n+1}(m_i l_1 l_i\dot{\theta}_1\dot{\theta}_i\sin(\theta_1-\theta_i) + m_i g l_1\sin\theta_1) \\
\frac{\partial L}{\partial\theta_i} &= m_i l_1 l_i\dot{\theta}_1\dot{\theta}_i\sin(\theta_1-\theta_i) - m_i g l_i\sin\theta_i
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

となる。

式 (3.6), 式 (3.7) より、

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{n+1} m_i) l_1^2 \ddot{\theta}_1 \\
&+ \sum_{i=2}^{n+1} (m_i l_1 l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_1 - \theta_i)) \\
&= -m_1 g l_1 \sin\theta_1 \\
&\quad - \sum_{i=2}^{n+1} (m_i g l_1 \sin\theta_1 + m_i l_1 l_i \dot{\theta}_i{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_i)) \\
&m_i l_i^2 \ddot{\theta}_i + m_i l_1 l_i \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_i) \\
&= -m_i g l_i \sin\theta_i + m_i l_1 l_i \dot{\theta}_1{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_i)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

となる。
ここで、両辺に共通する定数で割ると、

$$
\begin{aligned}
&(\sum_{i=1}^{n+1} m_i) l_1 \ddot{\theta}_1 \\
&+ \sum_{i=2}^{n+1} (m_i l_i \ddot{\theta}_i \cos(\theta_1 - \theta_i)) \\
&= -\sum_{i=1}^{n+1} (m_i g \sin\theta_1 + m_i l_i \dot{\theta}_i{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_i)) \\
&m_i l_i \ddot{\theta}_i + m_i l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_i) \\
&= -m_i g \sin\theta_i + m_i l_1 \dot{\theta}_1{}^2 \sin(\theta_1 - \theta_i)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

となる。
式 (3.9) から、運動方程式と加速度 $\ddot{\theta}_i (i = 1, 2, \cdots, n+1)$ は

$$
\begin{aligned}
\text{運動方程式} \quad & \boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{B}\boldsymbol{e} \\
\text{加速度} \quad & \ddot{\boldsymbol{\theta}} = -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

ここでベクトル $\ddot{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{e}$ は

$$
\begin{aligned}
(\ddot{\boldsymbol{\theta}})_i &= \ddot{\theta}_i \\
(\boldsymbol{e})_i &= e_i
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の各要素 A_{ij}, B_{ij} は、

$$
\begin{aligned}
&A_{11} = (\sum_{k=1}^{n+1} m_k) l_1 \\
&i \neq 1 \text{ のとき} \\
&A_{ii} = m_i l_i \\
&A_{1i} = m_i l_i \cos(\theta_1 - \theta_i) \\
&A_{i1} = m_i l_1 \cos(\theta_1 - \theta_i) \\
&i, j > 1 \cap i \neq j \text{ のとき} \\
&A_{ij} = 0 \\
&B_{11} = (\sum_{k=1}^{n+1} m_k) g \sin(\theta_1) \\
&i \neq 1 \text{ のとき} \\
&B_{ii} = m_i g \sin(\theta_i) \\
&B_{1i} = m_i l_i \dot{\theta}_i^{\,2} \sin(\theta_1 - \theta_i) \\
&B_{i1} = m_i l_1 \dot{\theta}_1^{\,2} \sin(\theta_i - \theta_1) \\
&i, j > 1 \cap i \neq j \text{ のとき} \\
&B_{ij} = 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

となる。
以上により、2 重 N 足振り子の運動方程式及び加速度に関する式が求まった。この式 (3.10),(3.11),(3.12) を用いてコンピューター上で 2 重 N 足振り子の質点 i の運動を計算することができる。

参考書

宮下精二「解析力学」裳華房