力学　中間試験 解答 2022.7.13

問 1 (1) $\mathbf{A}$ 方向の単位ベクトルは $\mathbf{e}_A=\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$. また $\mathbf{B}$ の $\mathbf{A}$ 方向の成分は, $B_p=\mathbf{B}\cdot\mathbf{e}_A$. よって $\mathbf{B}_p=B_p\mathbf{e}_A=\mathbf{B}\cdot\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|^2}\mathbf{A}$. ここで $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=2\cdot(-1)+2\cdot0+(-1)\cdot3=-5$, $|\mathbf{A}|^2=2^2+2^2+(-1)^2=9$ より $\mathbf{B}_p=-\frac{5}{9}(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})=\underline{\underline{-\frac{10}{9}\mathbf{i}-\frac{10}{9}\mathbf{j}+\frac{5}{9}\mathbf{k}}}$. (2) $\mathbf{B}_o=\mathbf{B}-\mathbf{B}_p=\underline{\underline{\frac{1}{9}\mathbf{i}+\frac{10}{9}\mathbf{j}+\frac{22}{9}\mathbf{k}}}$.

問 2 (1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k})\times(-\mathbf{i}-\mathbf{k})=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}-2\mathbf{j}\times\mathbf{i}-2\mathbf{j}\times\mathbf{k}+2\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}+2\mathbf{k}-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}=\underline{\underline{-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}}}$.

(2) △ OAB の面積 $=\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+3^2+2^2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{17}}}$.

問 3 (1) $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=\underline{\underline{Ak\cos(kt)}}$. (2) $a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\underline{\underline{-Ak^2\sin(kt)}}$.

問 4 (1) $v(t)=v(0)+\int_0^t a(t')dt'=v_0+\int_0^t Ae^{t'/k}dt'=v_0+\left[Ake^{t'/k}\right]_0^t=\underline{\underline{v_0+Ak(e^{t/k}-1)}}$.

(2) $x(t)=x(0)+\int_0^t v(t')dt'=x_0+\int_0^t\left(v_0+Ak(e^{t'/k}-1)\right)dt'=x_0+\left[(v_0-Ak)t'+Ak^2e^{t'/k}\right]_0^t$ $=\underline{\underline{x_0+(v_0-Ak)t+Ak^2(e^{t/k}-1)}}$.

問 5 (1) 物体の加速度の x, y 成分は $\ddot{x}=0,\ \ddot{y}=-g$ で与えられるので, これらを時間で積分して, 時刻 t での速度 $v_x(t)=v_x(0),\ v_y(t)=v_y(0)-gt$ および位置 $x(t)=x(0)+v_x(0)t,\ y(t)=y(0)+v_y(0)t-\frac{1}{2}gt^2$ を得る. 物体 1 について $(v_x(0),\ v_y(0))=(v_0\cos\theta, v_0\sin\theta)$ および $(x(0),\ y(0))=(0,\ 0)$ より $(x_1,\ y_1)=\underline{\underline{(v_0\cos\theta t,\ v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2)}}$. 物体 2 について $(v_x(0),\ v_y(0))=(0,\ 0)$ および $(x(0),\ y(0))=(l,\ h)$ より $(x_2,\ y_2)=\underline{\underline{(l,\ h-\frac{1}{2}gt^2)}}$. (2) $x_1=l$ より $v_0\cos\theta t_A=l$ よって $t_A=\underline{\underline{\frac{l}{v_0\cos\theta}}}\cdots$(a).

(3) $y_1(t_A)=y_2(t_A)$ から $v_0\sin\theta t_A-\frac{1}{g}t^2=h-\frac{1}{2}gt^2$ ∴ $v_0\sin\theta t_A=h\cdots$(b). これと (a) 式より $v_0\sin\theta\frac{l}{v_0\cos\theta}=h$ よって $\tan\theta=\underline{\underline{h/l}}\cdots$(c). 時刻 t_A で最高点なので $v_1(t_A)=v_0\sin\theta-gt_A=0$. これと (b) 式より $v_0^2\sin^2\theta=gh$. また (c) 式より $\sin\theta=\frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}}$. よって $v_0=\frac{\sqrt{gh}}{\sin\theta}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{g(l^2+h^2)}{h}}}}$.

問 6 板 AB が x 軸上にあり, はじめ A 端が原点に, B 端が $x=l$ にあったとする. 人および A 端の座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると, はじめ板と人は静止していたので運動量保存則より $m\dot{x}_1+M\dot{x}_2=0$. これを人が B 端に着いた時刻 t まで時間で積分して $x_1(0)=x_2(0)=0$ を用いると $mx_1(t)+Mx_2(t)=0\cdots$(a). また, このとき $x_1(t)-x_2(t)=l\cdots$(b). ここで (a) 式 − (b) 式 × m より $(m+M)x_2(t)=-ml$. ∴ $x_2(t)=-\frac{m}{m+M}l$. よって板ははじめの位置から $\underline{\underline{人と反対方向へ\frac{m}{m+M}l だけ動いている}}$.

問 7 (1) S′ 系は S 系に対して等速直線運動をしているので慣性系であり, S′ 系での物体の運動方程式は質量を m, 加速度を a' として $ma'=F=(0,\ -mg)$ である. この加速度を初期条件 $\mathbf{v}'(0)=(0,\ v_1)$ および $\mathbf{r}'(0)=(0,\ 0)$ を用いて積分し、S′ 系での速度 $\mathbf{v}'(t)=(0,\ v_1-gt)$, 位置 $\mathbf{r}'(t)=(x',\ y')=(0,\ v_1t-\frac{1}{2}gt^2)$ を得る. 一方、S′ 系の原点 O′ の位置は S 系に対して $\mathbf{r}_0(t)=(Vt,\ 0)$ である. よって物体の S 系での位置は $\mathbf{r}(t)=(x,y)=\mathbf{r}_0(t)+\mathbf{r}'(t)=(Vt,\ v_1t-\frac{1}{2}gt^2)$. この式の x 成分より $t=\frac{x}{V}$. これを y 成分に代入して、求める軌道の方程式は $\underline{\underline{y=v_1\frac{x}{V}-\frac{1}{2}g(\frac{x}{V})^2}}$.

(2) S′ 系は S 系に対して等加速度 $\mathbf{a}_0=(A,0)$ で運動をしているので、慣性力を考慮して S′ 系での物体の運動方程式は $m\mathbf{a}'=\mathbf{F}-m\mathbf{a}_0=m(-A,\ -g)$ である. この加速度を初期条件 $\mathbf{v}'=(v_2,\ 0)$ および $\mathbf{r}'(0)=(0,\ h)$ を用いて積分すると、速度 $\mathbf{v}'(t)=(v_2-At,\ -gt)$, 位置 $\mathbf{r}'(t)=(x',\ y')=(v_2t-\frac{1}{2}At^2,\ h-\frac{1}{2}gt^2)$ を得る. 物体が S′ 系の原点 O′ へ落下したとき $(0,0)=(v_2t-\frac{1}{2}At^2,\ h-\frac{1}{2}gt^2)$. この式の y 成分より落下時刻は $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. これを x 成分へ代入して $v_2=\frac{1}{2}At=\underline{\underline{A\sqrt{\frac{h}{2g}}}}$.

問 8 (1) 初速度の方向に x 軸, 鉛直上向きに y 軸を考える. 力積を加える前の運動量は $\mathbf{p}_i=(mv_0,\ 0)$. 力積を加えた後の運動量を $\mathbf{p}_f=(0,\ mv)$ とすると, 高さ h まで上ったことから, 等加速度運動の公式 $0^2-v^2=2(-g)h$ より $v=\sqrt{2gh}$. よって力積は $\mathbf{J}=\mathbf{p}_f-\mathbf{p}_i=(-mv_0,\ m\sqrt{2gh})$. その大きさは $|\mathbf{J}|=\underline{\underline{m\sqrt{v_0^2+2gh}}}$. (2) $\tan\theta=\frac{J_y}{J_x}=\underline{\underline{-\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}}}$

問 9 (1) 自然長からの伸びが x のとき, ばねのポテンシャルエネルギーは $U(x)=-\int_0^x(-kx')dx'=\frac{1}{2}kx^2$ である ($U(0)=0$ にとる). はじめ, ばねの伸びが l, 物体の速さが v であるから, 力学的全エネルギーは $E_0=\frac{1}{2}mv^2+U(l)$. ばねが l' まで伸びて物体が静止したとき, 力学的全エネルギーは $E_1=\frac{1}{2}m0^2+U(l')$. 力学的エネルギー保存則より $E_0=E_1$ であるから $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kl^2=\frac{1}{2}kl'^2$. ∴ $l'=\underline{\underline{\sqrt{l^2+\frac{m}{k}v^2}}}$.

(2) (1) の後ばねが縮んで自然長になったときの速さを v' とすると, そのときの全エネルギーは $E_2=\frac{1}{2}mv'^2+U(0)$. エネルギー保存則より $E_0=E_2$ であるから $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kl^2=\frac{1}{2}mv'^2$. ∴ $v'=\underline{\underline{\sqrt{v^2+\frac{k}{m}l^2}}}$.

問 10 (1) 力 $\mathbf{F}$ の x, y 成分はそれぞれ $F_x(x,y)=x^2+y^2$, $F_y(x,y)=-x^2-y^2$ である. 経路 C_1 について仕事は $W_1=\int_0^a F_x(x,0)dx+\int_0^b F_y(a,y)dy=\int_0^a(x^2+0^2)dx+\int_0^b(-a^2-y^2)dy=\underline{\underline{\frac{1}{3}a^3-a^2b-\frac{1}{3}b^3}}$.

(2) 経路 C_2 をパラメータ t を用いて $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))=(at,bt)$ $(0\le t\le 1)$ と表すと, 仕事は $W_2=\int_0^1\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}dt=\int_0^1(x(t)^2+y(t)^2,-x(t)^2-y(t)^2)\cdot(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})dt=\int_0^1((at)^2+(bt)^2,-(at)^2-(bt)^2)\cdot(a,b)dt=\int_0^1((a^2+b^2)at^2-(a^2+b^2)bt^2)dt=(a^2+b^2)[(a-b)\frac{1}{3}t^3]_0^1=\underline{\underline{\frac{1}{3}(a^2+b^2)(a-b)}}$.

(3) $W_1\neq W_2$ であるから, この力は $\underline{\underline{保存力ではない}}$

問 11 (1) 糸がたるまないとすると, 糸が鉛直上方となす角が θ のときのおもりの速さを v とすれば, 糸に沿った方向について, 遠心力, 張力, および重力の糸に沿った成分の釣り合いから $m\frac{v^2}{l}=T+mg\cos\theta\cdots$(a). また力学的エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2-mgl(1-\cos\theta)\cdots$(b)（ただし, 初期位置を重力のポテンシャルエネルギーの基準点にとる). (a),(b) 式より v を消去すると $T=m\frac{v_0^2}{l}+mg(2-3\cos\theta)\cdots$(c) だから θ が増える（おもりが落下する）に従って張力は大きくなる. 従って最初に $T\ge0$ であればよいので, $\theta=0$ で $T=m\frac{v_0^2}{l}-mg=0$ より $v_0=\underline{\underline{\sqrt{gl}}}$.

(2) (b) 式で $\theta=\pi$ として $v=\underline{\underline{\sqrt{v_0^2+4gl}}}$. (3) (c) 式で $\theta=\pi$ として $T=\underline{\underline{m\frac{v_0^2}{l}+5mg}}$.

問 12 (1) 車とともに動く座標系で車に働く遠心力 $m\frac{v^2}{r}$, 静止摩擦力 f, 重力 mg, および路面からの垂直抗力 N の釣り合いを考える. 水平方向について, $f=m\frac{v^2}{r}$, 鉛直方向について $N=mg$. ここで $f\le\mu N$ であるから $m\frac{v^2}{r}\le\mu mg$. よって $v\le\underline{\underline{\sqrt{\mu gr}}}$.

(2) (1) と同様の力の釣り合いから, 斜面に沿った方向について $f+mg\sin\theta=m\frac{v^2}{r}\cos\theta$. 斜面に垂直な方向について $N=mg\cos\theta+m\frac{v^2}{r}\sin\theta$. ここで $f\le\mu N$ であるから $m\frac{v^2}{r}\cos\theta-mg\sin\theta\le\mu(mg\cos\theta+m\frac{v^2}{r}\sin\theta)$. ∴ $m\frac{v^2}{r}(\cos\theta-\mu\sin\theta)\le mg(\sin\theta+\mu\cos\theta)$. ここで $\tan\theta<1/\mu$ より左辺の $()>0$ であるから $v\le\underline{\underline{\sqrt{\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}gr}}}$.

(3) 摩擦力が斜面に沿って上向きに働くことを考慮して, 斜面に沿った方向について $mg\sin\theta=f+m\frac{v^2}{r}\cos\theta$. 斜面に垂直な方向について $N=mg\cos\theta+m\frac{v^2}{r}\sin\theta$. ここで $f\le\mu N$ であるから $-m\frac{v^2}{r}\cos\theta+mg\sin\theta\le\mu(mg\cos\theta+m\frac{v^2}{r}\sin\theta)$. ∴ $m\frac{v^2}{r}(\cos\theta+\mu\sin\theta)\ge mg(\sin\theta-\mu\cos\theta)$. ここで $\tan\theta>\mu$ より右辺の $()>0$ であるから $v\ge\underline{\underline{\sqrt{\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}gr}}}$.

問 13 (1) ばね定数を k, ばねの伸びを x とすると運動方程式は $m\ddot{x}=-kx$. この式から $\ddot{x}=-\frac{k}{m}x$. これと角振動数 ω の単振動の微分方程式 $\ddot{x}=-\omega^2x$ を比較すると $\frac{k}{m}=\omega^2$. よって $k=\underline{\underline{m\omega^2}}$.
(2) ばねの伸びを Δl とすると, 鉛直方向の力の釣り合いから $mg=k\Delta l$. (1) の結果から $\Delta l=\frac{mg}{k}=\frac{mg}{m\omega^2}=\frac{g}{\omega^2}$. よってばねの長さは $l=l_0+\Delta l=\underline{\underline{l_0+\frac{g}{\omega^2}}}$.
(3) ばねの力と重力を考慮して, おもりの運動方程式は $m\ddot{z}=k(-z-l_0)-mg$. ∴ $\ddot{z}=-\omega^2(z+l_0+\frac{g}{\omega^2})\cdots$(a). ここで $y(t)=z(t)+l_0+\frac{g}{\omega^2}\cdots$(b) と $y(t)$ を定義すると, 時間で微分して $\dot{z}=\dot{y},\ddot{z}=\ddot{y}$ であるから (a) 式より $\ddot{y}=-\omega^2y$. この一般解は A, B を任意定数として $y(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t\cdots$(c) と書ける. 初期条件は, (2) の状態で $z(0)=-l_0-\frac{g}{\omega^2}$ であるから $y(0)=z(0)+l_0+\frac{g}{\omega^2}=0$. (c) 式で $y(0)=A$ だから $A=0$ と決まる. また (c) 式を t で微分すると $\dot{y}(t)=-A\omega\sin\omega t+B\omega\cos\omega t\cdots$(d). 初期条件は $\dot{y}(0)=\dot{z}(0)=v_0$. (d) 式で $\dot{y}(0)=B\omega$ だから $v_0=B\omega$ より $B=\frac{v_0}{\omega}$ と決まる. よって A と B の値を (c) 式へ代入すると, $y(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$. よって (b) 式から $z(t)=\underline{\underline{\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t-l_0-\frac{g}{\omega^2}}}$.