可換環論

安藤 遼哉（@ryoya9826）

2020 年 3 月 14 日

はじめに

代数幾何学を学ぶには，多様な前提知識が必要になる．特に可換環論，スキーム論，複素多様体（Riemann 面）論が大切である．そこで，筆者のこれらの分野の学習ノートという形も兼ねて各分野についての PDF を作成することにした．これはそのうち可換環論についての分冊である．とはいえ，最低限の基礎的なこと，環の定義などを圧縮したものを第 0 章として，またテンソル積や中山の補題などについてを第 1 章にまとめておくことにする．また，このノートでは環といえば単位元を持つ可換環のこととする.

最終更新日 . . . 2020 年 3 月 14 日

記号

$\mathbb{N}$ . . . . 自然数全体の集合（本書では 0 を含む).

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ . . . . . それぞれ整数，有理数，実数，複素数全体の集合.

$\mathbb{Z}_+$ . . . . 正の整数全体の集合．$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ などに対しても同様.

$\#A$ . . . . 集合 A に対し，A の元の個数またはその濃度.

$\subset$ . . . . 本書では等号の可能性を除外しない．真の包含関係は $\subsetneq$ を用いる.

また，写像 $f : A \to B$ が全射のとき $f : A \twoheadrightarrow B$ とかくことがある．また，単射のときは $f : A \hookrightarrow B$ とすることがある.

目次

第0章　環の基礎（かけあし）

—Definition of Ring and more...

§1　環の定義

環について，非常に圧縮してではあるが基礎事項を説明しておこう．本書では**環に可換性を仮定する**．可換でない環は**非可換環**と呼ばれ，これは**作用素環** (operator algebra) などが有名で，こちらも活発な研究が行われている．

定義 *0.1.1*（環）

集合 R に対し 2 つの演算 $x+y, x*y$ が備わっていて，次の性質を満たすとき，代数構造 $(R,+,*)$ を**環** (ring) という．

(R1) R は $+$ について Abel 群である．
(R2) 任意の $x,y,z \in R$ に対し $x*(y*z) = (x*y)*z$ が成立する．
(R3) ある $1 \in R$ が存在して，任意の $x \in R$ に対し $x*1 = 1*x = x$ が成立する．
(R4) 任意の $x,y,z \in R$ に対し $x*(y+z) = x*y + x*z, (x+y)*z = x*z + y*z$ が成立する．

このとき，演算 $+$ を加法，$*$ を乗法という．乗法の記号はよく省略される．ここでは乗法の可換性を仮定していないことに注意しよう．乗法が可換な環は**可換環** (commutative ring) と呼ばれ，本ノートの主題である．これ以後**環の乗法は可換である**（すなわち $x*y = y*x$ が常に成り立つ）**とする**[*1]．環の定義では R を記号として使用していたが，以後は可換環のみを取り扱うという気持ちで，また Bourbaki に敬意を評して[*2]，フランス語で環を表す Anneau の頭文字をとって A で表すことにする．環の定義における (R2) を**結合法則** (associative property)，(R4) を**分配法則** (distributive property) という．

加法の単位元を 0 で表し**零元** (zero element)，1 を単に**単位元** (identity element) という．$0,1$ は一意的に存在する．また同様に，任意の $x \in A$ について $-x$（加法逆元）も一意的に存在する．零元，単位元については実数などで馴染み深い次の性質；

$$\text{任意の } x \in A \text{ に対し } 0x = 0, (-1)x = -x \text{ が成立する．}$$

が成り立っている（示せ）．$x \in A$ が**単元** (unit) であるとは，ある $x^{-1} \in A$ が存在して $x^{-1}x = 1$ が成立することをいう．x^{-1} を x の（乗法）**逆元** (inverse element) という．単元のことを**可逆元** (invertible element) ともいう（意味からはこの名称のほうが直感的である）．その意味で，x が単元であることを**可逆である**と表現することもある．A の単元全体は群になり，$A^\times$ とかく．これを**単元群** (group of units)，または**乗法群**という．どれくらい A が単元を持つかというのは大切な問題であって，単元になりえない 0 以外がすべて単元である環を体という．

[*1] 非可換環に対するイデアルの定義などは，必要なら適宜環の入門書を見てほしい．

[*2] ７０００ページ以上に及ぶ「数学原論」(éléments de mathématique) を出版し，数学の公理的基礎づけを行った．今使われている記号，概念の多く — 例えば単射，全射 — は Bourbaki が導入したものである．

定義 *0.1.2*（体）

環 A の 0 以外の元がすべて単元であるとき，A を**体** (field) という．

体という日本語はドイツ語の Köper に由来し，体はよく K でかかれる．体でない環の例として $\mathbb{Z}$ を，体の例として $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ を挙げておこう．

環の間の写像の中で代数構造と整合性があるもの，すなわち次の構造を持つものを重要視する．

定義 *0.1.3*（環準同型）

A，B を環とし，f を $f : A \to B$ なる写像とする．以下の条件；

(RH1) 任意の $x, y \in A$ に対し，$f(x + y) = f(x) + f(y), f(xy) = f(x)f(y)$ が成立する．
(RH2) 単位元について $f(1) = 1$ が成立する．

を満たすとき，f を**環準同型** (ring homomorphism) であるという．

さらに f が全単射であるとき A と B は**同型** (isomophic) であるといい， $A \cong B$ で表す．環準同型写像 f について；

(i) 零元について $f(0) = 0$.
(ii) 任意の $x \in A$ に対し $f(-x) = -f(x)$ である．
(iii) 任意の $x \in A$ に対し，もし $x^{-1} \in A$ が存在するならば $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ である．

が成り立つ．

A を環とし，集合として $A' \subset A$ とする．A' が A の単位元を含み，和，積，逆元をとる操作で閉じているとき，A' を A の**部分環** (sub ring) であるという．環準同型 $f : A \to B$ があるとき；

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

は B の部分環になる．これを f の**像** (image) という．もう 1 つ部分集合に定義する構造で，部分環と同じくらい（それ以上？）に大切なものにイデアルがある．

定義 *0.1.4*（イデアル）

A の部分集合 I が次の条件；

(I1) I は空でない．
(I2) 任意の $x, y \in I$ に対し $x + y \in I$ である．
(I3) 任意の $x \in I$ と $a \in A$ に対し $ax \in I$ である．

をみたすとき，I を A の**イデアル** (ideal) という．

$\{0\}, A$ は明らかに A のイデアルをなす．$\{0\}$ を**零イデアル** (zero ideal, null ideal) といい，A と零イデアルを A の**自明なイデアル** (trivial ideal) という．A と異なるイデアルを**真のイデアル**という．環 A が自明なイデアルしかイデアルを持たないことと，A が体であることは同値である（次に述べる性質から従う）．

イデアルの簡単な性質をまとめておく．

(i) $0 \in I$ である．
(ii) $x \in I$ ならば $-x \in I$ である．

(iii) $1 \in I$ であることと $I = A$ であることは同値．特に I は可逆元を含むなら $I = A$ である．

イデアルの中でも，次に与えられる**有限生成**なイデアルが扱いやすいだけでなく大切な役割を果たす．

定義 *0.1.5*（有限生成イデアル）

$x_1, \dots, x_n \in A$ について；

$$(x_1, \dots, x_m) = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n \mid a_i \in A\}$$

とおくと，$(x_1, \dots, x_n)$ は A のイデアルになる．

この記号のもとに自明なイデアルは $(0), (1)$ とかかれる．特に 1 つの元 x で生成されるイデアル (x) を**単項イデアル** (principal ideal) ないし**主イデアル**という（主イデアルは古い用語）．有限生成イデアルを $Ax_1 + \dots + Ax_n$ とかくこともある．イデアル I について $a_1, \dots, a_n \in I$ なら $(a_1, \dots, a_n) \subset I$ である．また単項イデアル (x)，(y) について，$(x) \subset (y)$ であることと，ある $a \in A$ が存在して $x = ay$ であることは同値．有限生成イデアル $(a_1, \dots, a_n)$ について，u を A の単元とすると $(a_1, \dots, a_r) = (ua_1, \dots, ua_n)$ が成り立つ．

いくつかのイデアルについて，和と積を次のように定義できる．

定義 *0.1.6*（イデアルの和，積）

I，J を A のイデアルとする．次の定義により，イデアルの和と積が定まる．

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

$$IJ = \left\{ \sum_{\text{有限和}} x_i y_i \;\middle|\; x_i \in I, y_j \in I \right\}$$

また，イデアルの族 $\{I_\lambda\}$ について，共通部分 $\bigcap I_\lambda$ もまたイデアルとなる．集合としては；

$$IJ \subset I \cap J \subset I, J \subset I + J$$

となる．$I \cup J$ はイデアルとは限らないことに注意しよう．$I + J = A$ となるとき I, J は**互いに素** (coprime) であるという．

問 1.

これまでに述べたことについて，環 $\mathbb{Z}$ において例を挙げてみよ．

いままでの数学において，**多項式** (polymonial) は身近な対象であったと思う．環 A の元を係数にもつ多項式全体を考えると，これは環になる．この環はただの例にとどまらず，環論全体において非常に大切な存在である．

定義 *0.1.7*（多項式環）

A を環とする．A の元を係数とする（変数 X の）多項式；

$$f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \quad (n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0)$$

全体のなす集合 $A[X]$ は自然な演算によって環になる．これを A の（1 変数）**多項式環**という．

誤解の恐れがない場合，変数はよく省略されて多項式は単に f とかかれる．多項式についての用語をいくつか定義しておこう．a_i を f の i 次の**係数** (coeffieient) といい，a_0 を**定数項** (constant term) という．$a_n \neq 0$ と

なる最大の n を f の次数 (degree) といい，$\deg f$ で表す．多項式 f について，最高次の係数が 1，すなわち $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ となっているとき f はモニック (monic) であるという．次数については明らかに；

$$\deg(f + g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$$

が成り立つ．

多変数多項式についても同様に考えることができ，２変数多項式環 $A[X, Y]$ とは $A[X]$ を係数とする変数 Y の多項式環，すなわち $A[X, Y] = A[X][Y]$ のことである．帰納的に $A[X_1, \ldots, X_n]$ は１変数多項式環をとる操作を繰り返して得られる．ここから，任意の $f \in A[X_1, \ldots, X_n]$ は単項式 $X_1^{k_1} \ldots X_n^{k_n} (k_i \geq 0)$ の A 係数の線形和である（いままでの数学で考えてきた２変数多項式の全体は $A[X, Y]$ とこの定義のもとで一致する）．

多項式環の強力さはだんだん学習が進むにつれ身にしみてくることであろうから，次の定義に進もう．通常の計算で当たり前のように用いる $ab = 0$ なら $a = 0$ または $b = 0$ は，一般の環では成り立たない．

問 2.

その理由を考えよ（$\mathbb{C}$ で $ab = 0$ なら $a = 0$ または $b = 0$ であることの証明を考えてみよ）．

一般の環については次のような定義ができ，いわゆる “悪い元” の代表格である．

定義 *0.1.8*（零因子）

環 A について，ある $x, y \in A$ が存在して $xy = 0$ かつ $x, y \neq 0$ となるとき x, y を零因子 (zero divisor) という．

逆に，通常の計算のような零因子を持たない環には特別な名前がついている．

定義 *0.1.9*（整域）

可換環 A が零因子を持たないとき，整域 (integral domain) であるという．

明らかに体は整域である．また整域の部分環も整域である．よく知られた環 $\mathbb{Z}$ はもちろん整域であり，$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ も体なのでそうである．

A が整域であるとき，$(x) = (y)$ であることと，A の単元 a が存在して $x = ay$ となることが同値である．一般の環において，x, y に対して A の単元 a が存在して $x = ay$ となることは同値関係となる．このことを x, y は同伴 (associated) であるという．同伴関係と単項イデアルが一致することはすべての環で同値になるわけではないが，整域だけでなく例えば半局所環で成り立つことが知られている（定義 0.2.11，命題 1.10.3）．

多項式環については次が成り立つ．

命題 *0.1.10*

A が整域なら，$f, g \in A[X]$ について；

(i) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ である．
(ii) $A[X]$ は整域である．
(iii) $A[X]$ の単元全体は $A^\times$ である．

証明は難しくない．(iii) の整域でない環の反例については，環 A がある $n \in \mathbb{Z}_+$ によって $a^n = 0$ となる元 $a \in A$ を持つ（このような a を冪零 (nilpotent) であるという）とすると $A[X]$ において $(1 - aX)(a^{n-1}X^{n-1} + \cdots + aX - 1) = 1$ となる．

多項式環，整域といったこれらの概念をより彩らせるために，環をイデアルにより “割る” ということが必要である．次節ではそれを説明することにしよう．

§2　剰余環

環 A とそのイデアル I を考える．$x, y \in A$ に対し $x - y \in I$ となることを $x \equiv y \pmod I$ とかくと，これは同値関係になる．整数 $\mathbb{Z}$ における**合同式**を思い出そう．n を法とする合同式は，イデアル $n\mathbb{Z}$ による同値関係と対応している．その意味でこれは合同式の一般化である．とすると，次の演算も自然だろう．$x \equiv x', y \equiv y' \pmod I$ なら；

$$x + y \equiv x' + y' \pmod I, \quad xy \equiv x'y' \pmod I$$

が成り立つ．

これにより，A を I が定める同値関係で割った商集合 A/I に次の演算を入れることができる．

定義 *0.2.1*（剰余環）

A/I の元 $\bar{x}$ すなわち x の同値類を $x + I$ と表す．演算を；

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I, \quad (x + I)(y + I) = xy + I$$

と定義すると A/I は環になる．これを A の I による**剰余環** (residue ring) という．

$A/(0) = A, A/A = 0$ であることを簡単に確かめられる．

剰余環を用いると，整域でない簡単な例を与えることができる．$\mathbb{Z}$ と $n \in \mathbb{Z}$ を考える．剰余環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は，n が素数のときに限り整域になり，そうでないとき $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ は非整域になる．例えば $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ において $2 * 2 = 4 = 0$ である．

問 1.

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の演算表をかけ．

p が素数のとき $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は整域だけでなく体になる．この体を特に $\mathbb{F}_p$ とかく．またに $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ が体であることと n が素数であることは同値である．

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の例からわかるように，剰余環 A/I は I の元を 0 とみなしてできる環である．例えば $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{0, 1, 2\}$ であるが，これは一般の $n \in \mathbb{Z}$ が $n = a + 3b$ $(a = 0, 1, 2, b \in \mathbb{Z})$ とかけるので，$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ では $3b = 0$ となるからである．

これと同様の考えで，たとえば $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ を考えると，$\mathbb{R}[X]$ のなかで $X^2 = 1 = 0$ とみなす環なので $X^2 = -1$ すなわち X は i と同一視できる．よって標準的な同型 $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ がある．

次に環準同型について着目していこう．A, B の間の環準同型 $f : A \to B$ を考える．集合；

$$\ker f = \{x \in A \mid f(x) = 0\}$$

を f の**核** (kernel) という．$\ker f$ は A のイデアルをなすことが簡単に確かめられる．よって剰余環 $A \ker f$ が定義できる．これが $\mathrm{Im}\, f$ と同型になるというのが**準同型定理**であり，息をするように用いる．

定理 *0.2.2*（準同型定理）

A，B を環とし，準同型 $f : A \to B$ を考えると，同型 $A/\ker f \cong \mathrm{Im}\, f$ が存在する．

証明.

剰余環に誘導される準同型；

$$f' : A/\ker f \to \operatorname{Im} f; x + \ker f \mapsto f(x)$$

が環同型を与える.

Step 1. well-definedness.

$x + \ker f = y + \ker f$ とすると $x - y \in \ker f$ であるので，$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$ すなわち $f(x) = f(y)$ である.

Step 2. 単射性.

$f'(x + \ker f) = 0$ とすると，$f(x) = 0$ すなわち $x \in \ker f$ である．よって $x + \ker f = 0$ である.

Step 3. 全射性.

任意の $y \in \operatorname{Im} f$ をとると，定義からある $x \in A$ が存在して $f(x) = y$ である．よって $f'(x + \ker f) = y$ である.

（証明終）

先に挙げた $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ は，準同型 $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}; f(X) \mapsto f(i)$ の核が $(X^2 + 1)$ であることから証明できる.

準同型については次の単射判定法が大切である.

命題 *0.2.3*

環準同型 $f : A \to B$ について，f が単射であることと $\ker f = 0$ であることが同値である.

問 2.

上の命題を示せ.

体の特徴づけについて，イデアルが自明なものしかない環ということを述べた．この命題から，体 K からの 0 でない準同型 $f : K \to A$ は必ず単射に限ることがわかる.

もともとの環と剰余環の間にはイデアルの対応関係がある.

命題 *0.2.4*（環の対応定理）

A を環とし，I を A のイデアルとする．次の２つの集合；

$$X = \left\{ J : A \text{ のイデアル} \;\middle|\; I \subset J \right\}, \quad Y = \{ A/I \text{ のイデアル} \}$$

の間には 1 対 1 の対応がある.

証明.

$\pi : A \to A/I; x \mapsto x + I$ を自然な全射とする．J を I を含む A のイデアルとすると，$\pi(J)$ は A/I のイデアルになることを確かめることができる．よって；

$$\varphi : X \to Y; J \mapsto \pi(J)$$

が全単射であることを示せば良い.

Step 1. 単射性.

$\pi(J) = \pi(J')$ であるとする．任意の $x \in J$ をとる．このとき $\pi(x) \in \pi(J) = \pi(J')$ であるので，ある $x' \in J'$ が存在して $x - x' \in I$ となる．すると $I \subset J'$ であるので $x' \in J'$ となる．ゆえに $J \subset J'$ であり，逆も同様.

Step 2. 全射性.

A/I のイデアル $\overline{J}$ をとる．$J = \pi^{-1}(\overline{J})$ とおく．$\pi^{-1}(0) = I$ であるので $I \subset J$ は明らか．J が A のイデアルをなすことも確かめられる．π が全射なので，これにより $\pi(J) = \overline{J}$ となる.

（証明終）

特別なイデアルについて，次のような定義をする.

定義 *0.2.5*（素イデアル）

環 A の真のイデアル P について，任意の $x, y \in A$ に対して $xy \in P$ ならば，$x \in P$ または $y \in P$ が成り立つとき，P を素イデアル (prime ideal) という.

環 A の素イデアル全体を $\operatorname{Spec} A$ とかく．例えば $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} = \{(p) \mid p = 0 \text{ または } p \text{ は素数}\}$ である．素イデアルという言葉を用いると，環 A が整域であることと (0) が素イデアルであることは同値である.

定義 *0.2.6*（極大イデアル）

環 A の真のイデアル $\mathfrak{m}$ について，$\mathfrak{m} \subset I \subset A$ となる真のイデアル I は $\mathfrak{m}$ に限るとき，$\mathfrak{m}$ を極大イデアル (maximal ideal) という.

環 A の極大イデアル全体を $\operatorname{Spm} A$ とかく.

問 3.

$\operatorname{Spm}\mathbb{Z}$ を決定せよ.

環の対応定理により，次の特徴づけが得られる.

命題 *0.2.7*

A を環とする.

(i) P が A の素イデアルであることと，A/P が整域であることは同値.
(ii) $\mathfrak{m}$ が A の極大イデアルであることと，$A/\mathfrak{m}$ が体であることは同値.

問 4.

対応定理（命題 0.2.4) を用いてこれを示せ.

体は整域であるので，次の系が導かれる.

系 *0.2.8*

極大イデアルは素イデアルである.

環の対応定理は素イデアルに限っても成り立つ．環 A のイデアル I について，I を含む素イデアル全体を $V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset P\}$ とかく（V は Vanish に由来し，幾何的な意味を持つ).

命題 *0.2.9*（素イデアルの対応定理）

A を環とし，I を A のイデアルとする．$V(I)$ と $\operatorname{Spec} A/I$ の間には 1 対 1 対応がある．

証明.

対応定理と同様に自然な全射 $\pi : A \to A/I$ が対応を与える．

Step 1. $\pi(P)$ が A/I の素イデアルであること．

$(x+I)(y+I) \in \pi(P)$ とする．ある $z \in P$ が存在して $xy - z \in I \subset P$ であるので，$xy \in P$ である．P は素イデアルだから $x \in P$ または $y \in P$ すなわち $x + I \in \pi(P)$ または $y + I \in \pi(P)$ である．

Step 2. $\pi^{-1}(\overline{P})$ が素イデアルであること．

$xy \in \pi^{-1}(\overline{P})$ とすると，$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \in \overline{P}$ なので $\pi(x) \in \overline{P}$ または $\pi(y) \in \overline{P}$ である．すなわち $x \in \pi^{-1}(\overline{P})$ または $y \in \pi^{-1}(\overline{P})$ となる．

（証明終）

この証明と全く同様の方法で，一般の準同型 $f : A \to B$ について $P \in \operatorname{Spec} B$ に対して $f^{-1}(P) \in \operatorname{Spec} A$ を示すことができる．しかし，極大イデアルの引き戻しが極大とは限らない．例えば $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ の (0) の引き戻しを考えよ．

選択公理（Zorn の補題）を認めることで，すべてのイデアルに対してそれを含む極大イデアル（素イデアル）の存在を保証できる．

定理 *0.2.10*（Krull の極大イデアル存在定理）

環 A の真のイデアル I について，I を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．

証明.

次の集合；

$$\Sigma = \left\{ J : A \text{ の真のイデアル} \;\middle|\; I \subset J \right\}$$

は I を含むので空ではない．Σ は包含関係で帰納的順序集合をなす．実際 X を Σ の全順序部分集合とすると，$\mathfrak{m}_0 = \bigcup_{\mathfrak{m} \in X} \mathfrak{m}$ が A の真のイデアルをなし，X の極大元となる．よって Zorn の補題より Σ は極大元をもち，それが I を含む極大イデアルとなる．（証明終）

この定理により，環は少なくとも 1 つは極大イデアルを持つ．

定義 *0.2.11*（局所環）

環 A が極大イデアル $\mathfrak{m}$ をただ 1 つしかもたないとき，A を**局所環** (local ring) という．少し広く A が極大イデアルを有限個しか持たないとき A を**半局所環** (semi local ring) という．

局所環は環論全体で重要であり，次の判定条件は有用である．

命題 *0.2.12*

$(A,\ \mathfrak{m})$ が局所環であることと，$A - A^{\times}$ がイデアルであることは同値．特に $\mathfrak{m} = A - A^{\times}$ となる．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$\mathfrak{m}_0 = A - A^\times$ とおく．$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_0$ は明らかなので，逆を示す．任意の $x \in \mathfrak{m}_0$ をとる．すると，$x \notin A^\times$ より $(x) \subsetneq A$ である．(x) を含む極大イデアルが存在するが，A は局所環なのでそれは $\mathfrak{m}$ に一致する．すなわち $(x) \subset \mathfrak{m}$ となり，$x \in \mathfrak{m}_0$ である．よって $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{m}$ である．よって $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}$ となる．

$(\Longleftarrow)$

任意の真のイデアル I を考えると，$I \cap A^\times = \emptyset$ より $I \subset A - A^\times$ となり，$A - A^\times$ が唯一の極大イデアルである．

（証明終）

次に，環の**標数**と呼ばれる概念について説明しよう．一般の環についても，元 $x \in A$ の整数倍を x を何回足したかどうかによって定義することができる．例えば $3x = x + x + x, -5x = -(x + x + x + x + x)$ である．これを用いて次の定義を行う．

定義 *0.2.13*（標数）

A を環とする．単位元 1 について，$n1 = 0$ となる $n \in \mathbb{Z}_+$ が存在するとき，そのような n で最小のものを A の**標数** (characteristic number) であるといい，$\mathrm{Char}(A) = n$ とかく．そのような n が存在しない場合 $\mathrm{Char}(A) = 0$ という．

例えば $\mathrm{Char}\,\mathbb{Z} = 0$, $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n$ である．

整域については次のような結果がある．

命題 *0.2.14*

A を整域とすると，A の標数は 0 か素数 p に限る．

証明.

次の準同型；

$$f : \mathbb{Z} \to A; n \mapsto n1$$

を考える．準同型定理から $\mathbb{Z}/\ker f$ は A の部分環 $\mathrm{Im}\, f$ に同型であり，A は整域なので $\mathbb{Z}/\ker f$ は整域．よって $\ker f$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアルなので (0) か (p) でなければならない．標数は $\ker f$ の生成元にほかならないので，0 または素数 p である．　（証明終）

任意の環 A について，$\mathbb{Z}$ からの準同型は $n \mapsto n1$ に限ることに注意しよう．

先にも少し述べたが，零因子のなかで自分自身のいくつかの積が 0 になってしまうようなものを**冪零元** (nilpotent element) という．

定義 *0.2.15*（被約環）

環 A が 0 以外の冪零元をもたないとき，A を**被約環** (reduced ring) という．

整域は明らかに被約である．一般に環 A の冪零元全体を $\mathrm{nil}(A)$ とおくと，これはイデアルとなる（２項定理を用いる）．

定義 *0.2.16*（冪零根基）

環 A の冪零元全体がなすイデアル $\mathrm{nil}(A)$ を，A の**冪零根基** (nilradical) という．

環 A について $A/\mathrm{nil}(A)$ は必ず被約になる．ここで一般的なイデアルの根基について説明する．

定義 *0.2.17*（根基）

環 A のイデアル I について；

$$\sqrt{I} = \left\{ x \in A \,\middle|\, \text{ある } n \text{ が存在して}, x^n = I \right\}$$

はイデアルをなす．これをイデアル I の**根基** (radical) という．

この記法により $\mathrm{nil}(A) = \sqrt{(0)}$ とかけることに注意しよう．環 A の素イデアル全体を $\mathrm{Spec}\,A$，イデアル I を含む素イデアル全体を $V(I)$ と書くことを思い出そう．一般に次が成り立つ．

命題 *0.2.18*

環 A のイデアル I について，$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$ が成り立つ．

系 *0.2.19*

環 A について，冪零根基 $\mathrm{nil}(A)$ は A のすべての素イデアルの共通部分である．

この命題の証明は積閉集合と局所化という考え方を用いた簡明なものがある（命題 1.6.2）ので，そちらを見よ（ここまでの道具で証明する方法もあるが，選択公理（Zorn の補題）を用いるスマートでない証明しか筆者は知らない）．

冪零根基が素イデアルの共通部分であるので，極大イデアルの共通部分についても考えてみよう．

定義 *0.2.20*（Jacobson 根基）

環 A のすべての極大イデアルの共通部分を **Jacobson 根基** (Jacobson radical) といい，$\mathrm{rad}(A)$ で表す．

すなわち $\mathrm{rad}(A) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\,A} \mathfrak{m}$ である．極大イデアルは素イデアルであるから，$\mathrm{nil}(A) \subset \mathrm{rad}(A)$ となっている．Jacobson 根基については次の特徴づけがある．

命題 *0.2.21*

任意の $y \in A$ に対し，$1 - xy$ が可逆となるような x 全体の集合を $\mathfrak{A}$ とすると，これは $\mathrm{rad}(A)$ と一致する．

証明.

1°) 任意の $x \in \mathfrak{A}$ を 1 つとる．背理法で示す．ある極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在して $x \notin \mathfrak{m}$ であると仮定しよう．すると $\mathfrak{m} + Ax = A$ であるから，ある $m \in \mathfrak{m}$ と $y \in A$ とが存在して $m + xy = 1$ とできる．すると $1 - xy = m$ となるが，これは可逆でない．よって $x \in \mathfrak{A}$ に矛盾する．よって x は任意の極大イデアルに含まれるので，$x \in \mathrm{rad}(A)$ である．

2°) 任意の $x \in \mathrm{rad}(A)$ を 1 つとる．背理法で示す．ある $y \in A$ が存在して，$1 - xy$ が非可逆であると仮定しよう．ここで $1 - xy \in \mathfrak{m}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する．一方 $x \in \mathrm{rad}(A) \subset \mathfrak{m}$ より $xy \in \mathfrak{m}$ である．よって $(1 - xy) + xy = 1 \in \mathfrak{m}$ となり，矛盾する．

（証明終）

§3　ED,PID,UFD

整数環 $\mathbb{Z}$ の持つ性質を一般の環に抽象化することで，ED, PID, UFD などの良い性質が得られる．本節ではそれについて説明する．

定義 *0.3.1*（PID）

環 A のすべてのイデアルが単項イデアルであるとき，A を**単項イデアル環**，**主環**[*3](principal ring) という．特に A が整域のとき，**単項イデアル整域** (principal ideal domain) という．頭文字をとって PID と略する．

$\mathbb{Z}$ は PID である．実際，任意のイデアル I について，$n \in I$ を I の元でもっとも絶対値が小さいものとする．イデアルの定義から $n \in \mathbb{N}$ としてよい．このとき，除法の原理から任意の $x \in I$ は $x = qn + r$ $(q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n)$ と一意にかける．すると $r = x - qn \in I$ であり，n の最小性から $r = 0$ となり $m \in n\mathbb{Z}$ である．よって $I = n\mathbb{Z}$ である．この証明で本質的なのは**除法の原理**である．これを一般化することで PID の判定条件を 1 つ与えよう．

定義 *0.3.2*（Euclid 整域）

A を整域とする．写像 $\rho : A \to \mathbb{N}$ で，次の条件；

(EF1) 任意の 0 でない $x \in A$ について，$\rho(0) < \rho(x)$ が成り立つ．
(EF2) 任意の $x, y \in A$ について，$x \neq 0$ のときある $q, r \in A$ が存在して；

$$y = xq + r, \quad \rho(r) < \rho(x)$$

となる．

を満たすものが存在するとき，ρ を **Eulcid 関数** (Euclid function)，A を **Euclid 整域**，**ED** (Euclid domain) という．

除法の原理によって，絶対値を与える関数 $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ が Euclid 関数となり $\mathbb{Z}$ は ED である．

問 1.
体 K 上の多項式環 $K[X]$ は，次数を与える写像によって ED となることを示せ．

先に述べた通り，ED ならば PID である．

定理 *0.3.3*

ED は PID である．

証明.
A を ED とし，$\rho : A \to \mathbb{N}$ を Euclid 関数とする．任意のイデアル I をとる．$I - \{0\}$ の ρ による像；

$$I' = \{\rho(x) \mid 0 \neq x \in I\}$$

を考える．$I' \subset \mathbb{N}$ であり，$\mathbb{N}$ は整列集合なので最小元 $m' = \min I'$ が存在する．$m' \in I'$ より，ある $0 \neq m \in I$

[*3] 主環は古い単語．

が存在して $\rho(m) = m'$ である．$I = Am$ を示そう．任意の $x \in I$ をとる．A は ED なので，$m \neq 0$ だからある q，$r \in A$ が存在して；

$$x = qm + r, \quad \rho(r) < \rho(m) = m'$$

とかける．ここで $r = x - qm \in I$ であり，$\rho(r) < m'$ であるから $\rho(r) \notin I'$ である．ゆえに $r = 0$ でなければならない．よって $x \in Am$ である．ゆえに $I = Am$ が示された．（証明終）

よって $K[X]$ が PID であることがわかる．PID は 1 変数特有の現象で，２変数以上では PID にならない（例えば (X, Y) が単項ではない）．

PID の素イデアルについては次の命題が知られている．

命題 *0.3.4*

A を PIP とする．P を A の素イデアルとすると，P は (0) または極大イデアルである．

証明.

$P = (p)$ とする．$p = 0$ なら示すことはない．$p \neq 0$ としよう．もし $(p) \subset (x)$ となる $x \in A$ が存在したとする．$p = ax$ とかける．すると $ax \in (p)$ より $a \in (p)$ または $x \in (p)$ である． $x \in (p)$ なら $(x) = (p)$ である．また $a \in (p)$ とすると，$a = a'p$ となる $a' \in A$ が存在する．よって $p = aa'p$ となり，$p \neq 0$ より $aa' = 1$ である．よって p と x は同伴であり $(p) = (x)$ である．以上より (p) は極大である．（証明終）

PID は $\mathbb{Z}$ における最大公約数の議論を行えるように抽象化した環になっている．もちろん一般の環でも約数，倍数といった概念は定義できるが，PID では嬉しい性質があることを見ていこう．

定義 *0.3.5*（約元，倍元）

A を環とする．$x, y \in A$ について，ある $a \in A$ が存在して $x = ya$ となるとき x は y の**約元** (divisor)，y は x の**倍元** (multiple) であるという．

$z \in A$ が x, y の共通の約元であるとき z は x, y の**公約元** (common divisor) であるといい，g が x, y の公約元であって，任意の x, y の公約元の倍元であるとき g を x, y の**最大公約元** (greatest common divisor) であるという．$\mathbb{Z}$ ですら最大公約元は一意に決まらない（例えば 12 と 18 の最大公約数は $6, -6$）し，一般の整域では存在するかもわからない．最大公約元が必ず存在する整域を GCD 整域という（定義 1.9.1）．

命題 *0.3.6*

A が PID であるとき，任意の $x, y \in A$ について最大公約元 g が少なくとも 1 つ存在する．

証明.

イデアル (x, y) を考えると，A は PID なので $(x, y) = (g)$ となる $g \in A$ が存在する．この g が x, y の最大公約元になる．公約元になることは $x, y \in (g)$ からわかる．次に z を x, y の公約元とすると，定義から $x, y \in (z)$ なので $(g) = (x, y) \subset (z)$ である．ゆえに z は g の約元である．（証明終）

このアイデアから次の強力な定理を証明できる．

定理 *0.3.7*

A を PID とし，$a, b \in A$ を 0 でない元とする．a, b の最大公約元を g とすると，２変数１次方程式；

$$ax + by = g$$

の解 (x, y) が A の中に見つかる．

証明.

g, g' が a, b の最大公約元であるとする．このとき g, g' はともに 0 でなく，お互いの約元である．よって $u, t \in A$ が存在して $g = g't, g' = gu$ とかける．すると $g(1 - ut) = 0$ であるが，A が整域なので $g \neq 0$ より $ut = 1$ である．ゆえに g, g' は互いの単元倍である．すると，$(a, b) = (d)$ となる $d \in A$ をとると先の命題より d は a, b の最大公約元であって，g の単元倍であるので $(a, b) = (d) = (g)$ が従う．よって $g \in (a, b)$ であるから主張が従う．（証明終）

約数の一般化として約元を定義したのと同様に，素数の一般化を考えてみよう．

定義 *0.3.8*（既約元）

A を環とし，$x \in A$ を単元でないとする．ここで $a, b \in A$ を用いて $x = ab$ とかけるとき，必ず a または b が単元であるとき，x を**既約** (irreducible) であるという．

$\mathbb{Z}$ の単元は $1, -1$ のみであるので，$\mathbb{Z}$ の既約元はまさに素数（の単元倍）である．$\mathbb{Z}$ においては，単元倍を除いて一意的に素因数分解できる．一般の整域では既約元分解は必ずできるが，一意性は成り立つとは限らない．例えば $\mathbb{Z}[X]$ に $\sqrt{-5}$ を代入して得られる（$\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 5)$ と表現してもよい）；

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \left\{ a + b\sqrt{-5} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

を考えると，次の等式；

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$$

が成り立つ．また $2, 3, 1 - \sqrt{-5}, 1 + \sqrt{-5}$ が $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ の既約元であることを確かめることができる（代数的整数論の本を参照せよ）．このようなことが起こりえない，すなわち任意の元を一意的に既約元に分解できる環を UFD という．

定義 *0.3.9*（UFD）

整域 A の 0 と単元以外のすべての元が既約元に（単元倍を除いて）一意的に分解できるとき，A を**一意分解整域**，UFD (unique factorization domain) という．

UFD の例を与えるために，UFD の性質をいくつか見ていく必要がある．まず UFD では f が既約元であるかどうかを次のように判定できることを示そう．

命題 *0.3.10*

A を UFD とする．このとき $f \neq 0$ が既約元であることと (f) が素イデアルであることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$xy \in (f)$ とする．定義よりある $a \in A$ が存在して $xy = af$ となる．ここで x, y, a を既約分解して；

$$x = ux_1 \dots x_n, y = ty_1 \dots y_m,\ a = sa_1 \dots a_l\ (u, t, s \text{ は } A \text{ の単元 })$$

としよう．このとき；

$$utx_1 \dots x_n y_1 \dots y_m = sa_1 \dots a_l f$$

において，両辺はともに既約分解になっているので，f は $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ のどれかの単元倍である．よって $x \in (f)$ または $y \in (f)$ が成り立つ．

$(\Longleftarrow)$

(f) が素イデアルとすると，もし $xy = f$ とかけたなら $x \in (f)$ または $y \in (f)$ である．$x \in (f)$ であるとすると $x = af$ とかけるので，$f(1 - ay) = 0$ である．$f \neq 0$ より $1 = ay$ であり，y は単元である．$y \in (f)$ なら同様に x が単元となるので，f は既約元である．

（証明終）

$(\Longleftarrow)$ は一般の整域でも成り立つ．整域において，(f) が素イデアルとなるような f のことを素元 (prime element) という．素元は既約元であるが，既約元は素元とは限らない．たとえば $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ において 2 は既約元だが，$1 + \sqrt{-5}, 1 - \sqrt{-5}$ かつ $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 6 \in (2)$ が成り立つ．

実は次が成り立つ．

命題 *0.3.11*

A を整域とする．$x \in A$ が素元の２通りの積；

$$x = up_1 \dots p_n = tp'_1 \dots p'_m\ (u, t \in A^{\times})$$

にかけたとすると，$n = m$ であり適当に並べ替えると $(p_i) = (p'_i)$ が必ず成立する（p'_i は p_i の単元倍である）．

証明.

$p'_1 \dots p'_m \in (p_1)$ であるので，$p'_1 \in (p_1)$ または $p'_2 \dots p'_m \in (p_1)$ である．これを続けることで，ある p'_i について $p'_i \in (p_1)$ とできる．それを並び替えて p'_1 としよう．ここで p_1 も p'_1 も既約であるから，単元 $u \in A$ が存在して $p'_1 = p_1 u$ である．すなわち $p_2 p_3 \dots p_n = up'_2 \dots p'_m$ である．同様の操作を繰り返すことで $n = m$ であり，p'_i は p_i の単元倍すなわち $(p'_i) = (p_i)$ であることを得る．（証明終）

一般に素元は既約元であったから，この命題より素元に分解できることを確かめさえすれば一意的な既約分解が得られることになる．これを用いて次を示そう．

定理 *0.3.12*

PID は UFD である．

証明.

A を PID とし，$x \neq 0$ を単元でないとする．このとき真のイデアル (x) を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在する（Krull の極大イデアル存在定理を使ってもよいが，PID は Noether 環と呼ばれる環（定義 1.1.1）であることに注意すると，選択公理は不要である）．A は PID なので，$\mathfrak{m} = (p_1)$ となる $p_1 \in A$ が存在する．$x \in (p_1)$ であるから $x = a_1 p_1$ となる $a_1 \in A$ が存在する．a_1 が単元ならば x は素元であり証明が終了する．a_1 が単元で

ないならば，同様の操作により $x = a_2 p_1 p_2$ となる素元 p_2 が見つかる．この操作が有限回で終了することを示そう．この操作が無限回続いたとすると，無限に続く非単元の族 $\{a_i\}$ で，$(a_i) \subsetneq (a_{i+1})$ となるものがとれる．すると；

$$I = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i)$$

もまた A のイデアルになる．すると A は PID なので $I = (a_\infty)$ となる $a_\infty \in A$ が存在する．構成より $a_\infty \in (a_n)$ となる n が存在するが，これは $I = (a_n) = (a_{n+1}) = \cdots$ を導くので矛盾．よってこの操作は有限回で終了する．（証明終）

操作が有限回で終了する，というところは本質的にはすべてのイデアルが有限生成である，ということから来ている（Noether 性について勉強したときにわかるだろう）．

これにより $\mathbb{Z}$ や体係数の多項式環 $K[X]$ は UFD である．ED もあわせて考えると，次のような流れになっている．

$$\text{体} \Longrightarrow \text{ED} \Longrightarrow \text{PID} \Longrightarrow \text{UFD} \Longrightarrow \text{整域} \Longrightarrow \text{環}$$

体上の多変数多項式は PID ではなかったが，UFD であることを示すことができる（系 1.9.7）．これは UFD だが PID でない例を与える．

§4　体の拡大

この節では，体の拡大（例えば $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$）について，代数的数や超越数などに触れながら概説しよう．

体 L の部分環 K がまた体になっているとき，K を L の**部分体** (sub field) であるという．このとき，自然な単射 $K \hookrightarrow L$ を体の**拡大** (extension) という．このとき L/K とかく．

整域 A があったとき，ちょうど整数 $\mathbb{Z}$ から有理数 $\mathbb{Q}$ を作ることと全く同じように，体を作る自然な方法がある．直積 $A \times (A - \{0\})$ に；

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad - bc = 0$$

のような同値関係を入れよう．(a, b) を $a/b, (c, d)$ を c/d とみなせば，$a/b = c/d$ は $ad = bc$ と同値だから，この定義は整数における分数の定義を一般の整域に拡張したものとなる．直積 $A \times (A - \{0\})$ をこの同値関係で割った商集合を $\mathrm{Frac}(A)$ とかく．$\mathrm{Frac}(A)$ は分数と同様の演算で体になる．

定義 *0.4.1*（商体）

整域 A について，$\mathrm{Frac}(A)$ の元 (x, s) を x/s とかき；

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt + ys}{st}, \quad \frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{xy}{st}$$

と定めると体となる．これを A の**商体** (field of quotients)，**分数体** (field of fractions) という．

次の命題の証明からもわかることだが，整域 A の商体 $\mathrm{Frac}(A)$ は A を含む最小の体となる（ある体 K について $A \subset K$ ならば $\mathrm{Frac}(A) \subset K$ となる）．

命題 *0.4.2*

K を体とする．K の標数が 0 であることと，K が $\mathbb{Q}$（と同型な体）を部分体として含むことは同値．K の標数が $p \neq 0$ であることは K が $\mathbb{F}_p$ を部分体として含むことと同値．

証明.

1°) $\operatorname{Char} K = 0$ について．

($\Longrightarrow$)

　$\mathbb{Z}$ からの自然な準同型 φ の核が 0 であるので，K は $\mathbb{Z}$ と同型な環 $\operatorname{Im}\varphi$ を部分環にもつ．このとき $\operatorname{Frac}(\operatorname{Im}\varphi) \cong \mathbb{Q}$ である．さて任意の $a, b \in \operatorname{Im}\varphi$ について $b \neq 0$ とすると，$b \in K^\times$ である．ゆえに $ab^{-1} \in K$ となるので，$a/b \in \operatorname{Frac}(\operatorname{Im}\varphi)$ を ab^{-1} と同一視して，$\operatorname{Frac}(\operatorname{Im}\varphi) \cong \mathbb{Q}$ は K の部分体である．

($\Longleftarrow$)

　$\varphi : \mathbb{Z} \to K; n \to n1$ は $\mathbb{Q}$ を経由する準同型に分解する．すなわち $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$（単射）と自然な単射 $\iota : \mathbb{Q} \to K$ を考えると，2 つの準同型 $\varphi, \iota \circ \psi : \mathbb{Z} \to K$ が定まる．しかし，$\mathbb{Z}$ からの準同型は φ に限るので，$\varphi = \iota \circ \psi$ となる．よって φ は単射ある．

2°) $\operatorname{Char} K = p$ なら $\mathbb{Z}/\ker\varphi = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ が K の部分環になる．また，$\mathbb{F}_p$ が部分環ならば $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p; \iota : \mathbb{F}_p \to K$ の合成 $\iota \circ \psi : \mathbb{Z} \to K$ が定まる．K が $\mathbb{Q}$ を部分体として含む場合と同様にして，$\iota \circ \psi : \mathbb{Z} \to K$ の核が (p) であるから $\operatorname{Char} K = p$ である．

（証明終）

この命題より，すべての体は $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$ のいずれかを含む．

定義 *0.4.3*（素体）

体 $\mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$ をそれぞれ標数 $0, p$ の素体 (prime field) という．

ここから体の拡大について見ていく．例えば体 $\mathbb{C}$ について，拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ は $\mathbb{C}/\mathbb{R}, \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ に分解する．このように体の拡大 L/K について，ある体 M が存在して $L/M, M/K$ が体の拡大になっているとき，M を拡大 L/K の中間体 (intermediate field) という．一般に M_1, M_2 が L/K の中間体なら体 $M_1 \cap M_2$ も L/K の中間体になる．拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ の中間体は $\mathbb{R}$ 以外にも $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ などがある（これが体であることを示せ）．

E. Artin により導入された次の捉え方により，線形代数的な手法で体の拡大について考えることができるようになった．

命題 *0.4.4*

体の拡大 L/K について，L は K 上のベクトル空間とみなすことができる．

証明.

L はそれ自身の演算により Abel 群である．また，任意の $x \in L$ について，K の元 y によるスカラー倍を，L の情報によって xy と考えることで L は K ベクトル空間になる．（証明終）

例えば，拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ について $\mathbb{C}$ は基底 $\{1, i\}$ をもつ 2 次元の $\mathbb{R}$ ベクトル空間になる．

定義 *0.4.5*（拡大次数）

体の拡大 L/K について，$\dim_K L$ を L/K の**拡大次数** (extension degree) といい，$[L : K]$ とかく．

$[L : K]$ が有限のとき L/K を有限次拡大，無限次拡大という．有限次拡大 L/K の中間体 M について，$L/M, M/K$ も有限次拡大になる．ここから次の結果が従う（証明は線形代数なので省略する）．

命題 *0.4.6*

L/K を有限次拡大とし，M をその中間体とする．このとき $[L : K] = [L : M][M : K]$ となる．

次に，体の拡大について "代数的" とはどういうことであるかについて考察する．まず，体に元を添加することについて述べよう．体の拡大 L/K について，$\alpha \in L$ に対して；

$$K(\alpha) = \left\{ \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \in L \;\middle|\; f, g \in K[X], g(\alpha) \neq 0 \right\}$$

とおく．これを K に α を**添加** (adjunction) した体という．$K(\alpha)$ は L/K の中間体となり，また M が L/K の中間体で $\alpha \in M$ を満たすなら $K(\alpha) \subset M$ となる．さらに $\beta \in L$ を $K(\alpha)$ に添加した体 $(K(\alpha))(\beta)$ を $K(\alpha, \beta)$ とかく．

一般に K に異なる元 $\alpha, \beta \in L$ を添加したとしても $K(\alpha) = K(\beta)$ となることがあるので注意が必要である．例えば $i, 1 + i$ を $\mathbb{Q}$ に添加した体を考えてみよ（$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ である）．

いくつか例を見てみよう．$\mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$ であり $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ である（基底は $\{1, i\}$）．また；

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \left\{ a + b\sqrt{3} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \right\} = \left\{ x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} + w\sqrt{6} \;\middle|\; x, y, z, w \in \mathbb{Q} \right\}$$

であり $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$ である（一次独立を確かめよ）．

既約元の定義（定義 0.3.8）を思い出そう．体 K 上の定数でない多項式 $f \in K[X]$ で，$f = gh (g, h \in K[X])$ なら g, h のどちらかは定数であるようなもの（定数でない多項式の積に分解できないもの）を**既約多項式** (irreducible polymonial) という．例えば $\mathbb{R}[X]$ において $X^2 + 1$ は既約であり，$\mathbb{C}[X]$ では $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ となり既約ではない．このように体を拡大すると多項式が既約でなくなることがある．逆に，ある既約多項式を分解できるように体を拡大することを考えよう．$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ の例をみると，$\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ となっている．これは $\mathbb{R}$ に $X^2 + 1$ の "根" を添加するように拡大したと考えることができる．しかし，定義を見ればわかるように根を添加するには，$\mathbb{R}$ の拡大体 L で $f(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in L$ が見つかっていなければならない（この例では $\mathbb{C}$ という $X^2 + 1$ の根の居場所がわかっているので問題がない）． そこで $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ であったことを思い出そう．ここから類推できるのは $K[X]$ を既約元で割ることで，根を添加したような拡大体が作れないか？ということである．

命題 *0.4.7*

体 K 上の多項式環 $K[X]$ について，f が既約多項式であることと $K[X]/(f)$ が体であることは同値．

証明.

f が既約であることと (f) が極大イデアルであることが同値なことを示せばよい．

$(\Longrightarrow)$

$(f) \subset I$ となるイデアル I があるとする．$K[X]$ は PID なので，$I = (g)$ となる $g \in K[X]$ がある．すると $f = hg (h \in K[X])$ とかけるが，f が既約なので g, h のどちらかは定数である．もし g が定数なら $(g) = K[X]$ であり，h が定数なら f, g は同伴なので $(f) = (g)$ となる．よって (f) は極大である．

($\Longleftarrow$)

$f = gh$ としよう．g が定数でないとすると，$(f) \subset (g) \neq K[X]$ であるので $(f) = (g)$ となり f と g は同伴．よって h は定数であり f は既約.

（証明終）

よって $f \in K[X]$ が既約なら $L = K[X]/(f)$ は K の拡大体となる．ここで；

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

とおいておく．g の L における像を $[g]$ とかくことにすると，$[g] = 0$ であることと $g \in (f)$ であることは同値である．すると L において；

$$a_n [x]^n + a_{n-1} [x]^{n-1} + \cdots + a_0 = [a_n X^n + \cdots + a_0] = [f] = 0$$

であるので，f を L 上の多項式とみなしたとき，$[x] = \alpha$ とおくと $f(\alpha) = 0$ が言えることになる（$\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ で考えてみよ．i は $[X]$ に対応する元であった）．$L = K[X]/(f) = K(\alpha)$ が成り立つことを示そう．

命題 *0.4.8*

$f \in K[X]$ が K 上既約であり，$\deg f = n$ とする．$L = K[X]/(f), \alpha = [X] \in L$ とおくと，$[L : K] = n$ であり，その基底は $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ である．

証明.

$\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ が一次独立であることを示す．$a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ をとり $a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha_{n-1} = 0$ と仮定する．これは $g = a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ とおくと $g \in (f)$ を意味する．よって g は f の定数倍または定数だが，$\deg g < \deg f$ なので g は定数でなければならない．よって $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ となる．すると a_i たちの定義から $a_0 = 0$ でなければならず，一次独立であることが従う．（証明終）

この系として $L = K(\alpha)$ が従う．$f(\alpha) = 0$ となる α を添加することで K から拡大体 L を作ることを見たので，次は $\alpha \in L$ について $f(\alpha) = 0$ となる $f \in K[X]$ があるかどうかを考えよう．

定義 *0.4.9*（代数的）

L/K を体の拡大とする．$\alpha \in L$ で，ある $f \in K[X]$ が存在して $f(\alpha) = 0$ となるとき α は K 上**代数的** (algebraic) であるという．そのような f が存在しないときは α は K 上**超越的** (transcendental) であるという．

拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ における代数的な元を**代数的数**，超越的な元を**超越数**という．有名な超越数では $e, \pi, \pi + e^\pi$ がある（$e + \pi$ が超越的かは未解決）．一方で $\sqrt[4]{2}$ や i などは代数的数である．

定義 *0.4.10*（最小多項式）

α を K 上代数的とする．このとき $f \in K[X]$ であって，$f(\alpha) = 0$ かつ f はモニックなものが存在し，かつ次数が最小なものは一意的である．これを α の K 上の**最小多項式** (minimal polymonial) といい，F_α で表す．

存在し，一意なことを示そう．

証明.

Step 1. 存在すること．

α は代数的なので，ある $f \in K[X]$ がとれて $f(\alpha) = 0$ となる．f の最高次の係数が a_n であるとすると $1/a_n \cdot f$ は α を根にもつ K 上のモニック多項式であるので，存在することがわかる．

Step 2. 次数最小のものが一意的であること．

$f \neq g$ が条件を満たすとする．定義から $\deg f = \deg g$ で，どちらもモニックなので $f - g \neq 0$ は f より次数が真に小さくなる．明らかに $f(\alpha) - g(\alpha) = 0$ なので，これを最高次の係数で割ったものも α を根にもつモニック多項式だが，これは次数の最小性に矛盾．

（証明終）

体（整域）上の最小多項式は次数の最小性から既約である．また，$f \in K[X]$ について $f(\alpha) = 0$ であることと f が F_α で割り切れることは同値であり，更に f がモニックで既約なら $f = F_\alpha$ であることが簡単にわかる（演習問題とする）．

体の拡大 L/K において $\alpha, \beta \in L$ はどちらも K 上代数的であるとする．$F_\alpha = F_\beta$ となっているとき，α と β は K 上共役 (conjugate) であるという．この定義は複素数の共役の拡張になっていることを確かめよ（$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ を考えよ）．

定義 *0.4.11*（代数拡大，超越拡大）

L/K を体の拡大とする．任意の $\alpha \in L$ に対し α が K 上代数的であるとき L/K は**代数拡大** (algebraic extension) といい，そうでないとき**超越拡大** (transcendental extension) という．

命題 *0.4.12*

L/K を体の拡大とする．$\alpha \in L$ が K 上代数的であることと，$K(\alpha)/K$ が有限次であることは同値．

証明.

($\Longrightarrow$)

α の最小多項式 F_α は既約である．$L = K[X]/(F_\alpha)$ は体であり，命題 0.4.8 より L/K は有限次拡大，また $L = K(\alpha)$ であるので題意が従う．

($\Longleftarrow$)

$[K(\alpha) : K] = n$ とすると，$\{1, \alpha, \dots, \alpha^n\}$ は一次独立ではない．よって；

$$a_n\alpha^n + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

となる $a_i \in K$ について，少なくとも 1 つは 0 でない．よって $f(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ とおけば f は α を根にもつ K 上の多項式となる．

（証明終）

系として $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が K 上代数的なら $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/K$ は代数拡大．また L/K が有限次なら代数拡大である．これまでの結果から，代数的数の（有限個の）和，積，商はすべて代数的である．

K を係数とする既約多項式の根を K に添加することで体を拡大する手法をみたが，これは K 内で「解けない」多項式の存在を仮定するものだった．具体的には X^2+1 は $\mathbb{R}$ では解けないが，$\mathbb{C}$ では $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ と解くことができる．では，$\mathbb{C}[X]$ には解けない多項式は存在しない（すべての多項式は 1 次式の積に分解できる．代数学の基本定理）．このような体を更に代数拡大することはできるのだろうか？答えは No である．

定義 *0.4.13*（代数閉体）

体 K であって，$K[X]$ の既約多項式がすべて 1 次であるとき K を**代数閉体** (algebraically closed field) であるという．

$\mathbb{C}$ は代数閉体である．定義から K が代数閉体のとき，任意の $f \in K[X]$ に対し $\deg f \geq 1$ ならばある $\alpha \in K$ が存在して $f(\alpha) = 0$ となる．逆に体 K でこの条件が成り立つとき，$f(X) = (X - \alpha)f_1(X)$ と分解され（因数定理），f_1 に同様の操作を繰り返すことで K が代数閉体であることを示すことができる．よって K が代数閉であることと，任意の 1 次以上の多項式が K 内に根を持つことは同値である．

命題 *0.4.14*

体 K が代数閉体であることと，L/K が体の代数拡大ならば $L = K$ となることは同値.

証明.

($\Longrightarrow$)

L/K を代数拡大とする．任意の $\alpha \in L$ について α は K 上代数的なので $f(\alpha) = 0$ となる $f \in K[X]$ が存在する．仮定から $f = g_1 g_2 \dots g_n (\deg g_i = 1)$ と既約分解できる．このときある i について $g_i(\alpha) = 0$ となる（体は整域）．そこで $g_i(X) = aX + B(a,\ b \in K, a \neq 0)$ とおくと，$a\alpha + b = 0$ より $\alpha = -b/a \in K$ である．よって $L = K$ となる．

($\Longleftarrow$)

任意の $f \in K[X], \deg f \geq 1$ をとる．g を f を割り切る既約多項式とすると，$K[X]/(g)$ は K の拡大体となり，ある $\alpha \in K[X]/(g)$ が存在して $K[X]/(g) = K(\alpha), K(\alpha)/K$ は代数拡大となる．すると $K(\alpha) = K$ なので $\alpha \in K$ だから f は K 内に根を持つ．よって K は代数閉体である．

（証明終）

明らかに素体は代数閉体ではない．どんな体についても，それを含むような代数閉体が存在する．

定義 *0.4.15*（代数閉包）

K を体とすると，代数閉体 L が存在して L/K が代数拡大となる．このとき L を K の**代数閉包** (algebraic closure) という．

存在することの証明.

K の代数拡大全体のなす族を Σ とすると，Σ は包含関係によって帰納的順序集合をなす．Zorn の補題により極大元が存在し，それが K の代数閉包になる．（証明終）

第1章　準備

—Preliminaries

この章では可換環論における基礎的なこと，すなわち Noether 環，加群の定義，テンソル積，局所化，射影，入射加群などを集める．第２章以降に学習を続けていくにつれて，本書で展開される議論はこの章でおこなった準備に根付いていることがわかるだろう．

§1　Noether 環と Hilbert の基底定理

一般の環ではその構造が抽象的なため扱いが難しいことが多々あるが，ある種の "有限性" を持つ環はそれを手がかりにいろいろな考察が進められている．そのなかで最も頻出するものが次に述べる Noether 環である．

定義 *1.1.1*（Noether 環）

環 A の任意のイデアルが有限生成であるとき，A を Noether 環という．

Noether 環は次の同値条件を持つので，どれを定義にしても良い．

命題 *1.1.2*

次は同値である．

(i) A は Noether 環である．
(ii) A のイデアルの任意の増大列は有限個で停止する（昇鎖条件）．
(iii) A のイデアルの空でない任意の族は極大元を持つ（極大条件）．

証明.

(i)⟹(ii)

A のイデアルの増大列を；

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_i \subset \cdots$$

とする．ここで $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ とおくと，これはイデアルである．仮定から有限生成であるので，$I = (x_1, \ldots, x_r)$ とおく．任意の $1 \leq i \leq r$ に対して，定義からある n_i が存在して $x_i \in I_{n_i}$ である．よって，n を $n_1, \ldots, n_r$ の最大値とすればすべての i について $x_i \in I_n$ すなわち $I \subset I_n$ となる．これは $n \leq k$ に対して $I_n = I_k$ であることにほかならない．

(ii)⟹(iii)

$I_{\lambda(\lambda \in \Lambda)}$ を A のイデアルの空でない族とする．これが極大元を持たないとすると，任意の $\lambda_1 \in \Lambda$ に対して，ある $\lambda_2 \in \Lambda$ が存在して $I_{\lambda_1} \subsetneq I_{\lambda_2}$ となる．以下同様に，真の増大列

$$I_{\lambda_1} \subsetneq I_{\lambda_2} \subsetneq \cdots \subsetneq I_{\lambda_i} \subsetneq \cdots$$

がとれて，これは (ii) に矛盾．

(iii)⟹(i)

I を A のイデアルとする．I の有限部分集合が生成する A のイデアル全体の集合を $\mathfrak{I}$ とする．$0 \in \mathfrak{I}$ より

$\mathfrak{I} \neq \emptyset$ であるので，これは極大元 I_0 を持つ．ここで，$I \neq I_0$ とすると $x \in I \setminus I_0$ に対し $I_0 \subsetneq I_0 + (x) \in \mathfrak{I}$ となり，極大性に反する．よって $I_0 = I$ である．よって (i) が言える．

（証明終）

増大列（昇鎖）を減少列（降鎖）に置き換えて包含関係を逆にしたものが Artin 性と呼ばれるものである．

定義 *1.1.3*（Artin 環）

次の同値な条件；

(i) A のイデアルの任意の減少列は有限個で停止する（降鎖条件）．
(ii) A のイデアルの空でない任意の族は極小元を持つ（極小条件）．

を満たす環を Artin 環という．

昇鎖条件，降鎖条件はそれぞれ ACC (Ascending Chain Condition), DCC (Dscending Chain Condition) と略される．

命題 *1.1.4*

A が Noether (Artin) なら，任意のイデアル I について A/I も Noether (Artin) である．

証明.
イデアルの対応を考えればわかる．（証明終）

Noether 環の部分環が必ずしも Noether ではないことに注意しよう．例えば，Noether でない整域は商体に含まれる（定義 1.5.3 をみよ）．

次の定理から，有限生成を確かめるのは素イデアルだけでよいことがわかる．

定理 *1.1.5*（I.S.Cohen）

A の素イデアルが有限生成なら，A は Noether 環である．

証明.
A のイデアルで，有限生成でないもの全体を Σ とする．$\Sigma \neq \emptyset$ と仮定すると，Zorn の補題から極大元 I が存在する．仮定から I は素イデアルでないので，$x, y \in A$ で $xy \in I, x, y \notin I$ を満たすものが存在する．すると，$I + Ax$ は I より真に大きいから，有限生成で，ある $u_1, \ldots, u_n \in I$ を；

$$I + Ax = (u_1, \ldots, u_n, x)$$

となるようにとれる．$(I : x) = \{a \in A \mid ax \in I\}$ とおく（この記号はイデアル商，定義 1.2.14 と整合性がある）と，これは A のイデアルをなす．$y \in (I : x)$ より $I \subsetneq (I : x)$ だからこれも有限生成で，$(I : x) = (v_1, \ldots, v_m)$ とできる．

よって，$I = (u_1, \ldots, u_n, v_1 x, \ldots, v_m x)$ となり，$I \in \Sigma$ に矛盾．よって $\Sigma = \emptyset$ である．（証明終）

定義 *1.1.6*（A 代数）

環 A，B に対し，環準同型 $f : A \to B$ が定まっているとき B は A 代数 (algebra) であるという．

このとき B は $a \cdot b = f(a)b$ により A 加群とみなせる．

定義 *1.1.7*（有限型）

ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，全射準同型 $\varphi : A[X_1, \ldots, X_n] \to B$ が存在するとき，φ は有限型 (finite type) であるという．

このとき，$S = \{\varphi(X_1), \ldots, \varphi(X_n)\}$ を B の A 代数としての生成元といい，B は A 代数として有限生成 (finitely generated as A algebla) であるという．X_i の B における像を α_i としたとき，$B = A[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ とかく．B が A 加群として有限生成であることとは異なる定義であるので，注意が必要である．なお，注意として単に finite A-algebra と書かれた場合，これは finite type を意味しない． これは A 代数として自然に入る加群構造で有限生成であることを意味する．

Hilbert の基底定理について述べておこう．

定理 *1.1.8*（Hilbert の基底定理）

Noether 環上の有限生成代数は Noether 環である．

証明.

A が Noether 環のとき，$A[X]$ が Noether 環なら帰納的に $A[X_1, \ldots, X_n]$ が Noether 環となり，その剰余環である有限生成代数 B は Noether 環である．

よって，$A[X]$ が Noether であることを示せば良い．$I \neq 0$ を $A[X]$ のイデアルとする．これが有限生成であることを示す．$f_1 \neq 0$ を，I の最小次数の多項式とする．$(f_1) \subsetneq I$ ならば，f_2 を $I \setminus (f_1)$ の最小次数の元とする．同様に $(f_1, \ldots, f_i) \subsetneq I$ ならば，f_{i+1} を $I \setminus (f_1, \ldots, f_i)$ の最小次数の多項式とする．ここで，各 f_i に対し，f_i の先頭項を $a_i X^{r_i}$ とし，A のイデアルの増大列；

$$(a_1) \subset (a_1, a_2) \subset \cdots \subset (a_1, \ldots, a_i) \subset \cdots$$

を考えると，A は Noether 環なのでこれは停まる．すなわち，ある n があって，$j \geq n$ に対して $a_j \in (a_1, \ldots, a_n)$ となる．この n に対して $(f_1, \ldots, f_n) = I$ であることを示す．

背理法を用いる．$I \setminus (f_1, \ldots, f_n) \neq \emptyset$ とすると，f_{n+1} を次数最小のものとしてとれる．さて，$a_{n+1} \in (a_1, \ldots, a_n)$ より，$a_{n+1} = \sum_{i=1}^n c_i a_i$ $(c_i \in A)$ とかける．いま $\deg f_i = r_i$ であり，作り方から $r_i \leq r_{n+1}$ なので

$$g = f_{n+1} - \sum c_i X^{r_{n+1} - r_i} f_i$$

とおくと，$\deg g < r_{n+1}$ である．f の次数最小性より $g \notin I \setminus (f_1, \ldots, f_n)$ すなわち $g \in (f_1, \ldots, f_n)$ となり，$f_{n+1} \in (f_1, \ldots, f_n)$ が従うが，これは矛盾．よって $(f_1, \ldots, f_n) = I$ である．（証明終）

系 *1.1.9*

A が Noether 環ならば $A[X]$ は Noether 環である．

問 1.

$A[X]$ が Noether のとき，A は Noether となるか？

定義 *1.1.10*（次数付き環）

S_0 は環，$d > 0$ について S_d は S_0 加群になっているとする．$s = \bigoplus_{i=0}^{\infty} S_i$ に積が定義でき，S_0 の元による積はスカラーの作用と一致し，かつ $S_n S_m \subset S_{n+m}$ が成立するとき S を次数付き環 (graded ring) という．

S_d の元を S の斉次元という．わかりやすい例として，多項式環は次数付き環である．1 変数多項式環 $A[X]$ は $S_d = AX^d$ とすればよく，n 変数については d 次元斉次多項式，すなわち各項をなす単項式の総次数がすべて等しいもの（たとえば $X^2 + 2XY + Y^2$）全体を S_d とすると次数付き環になる．また，$S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$ は S のイデアルとなる．これを S の無縁イデアル (irrelevant ideal) という．

§2　加群の定義

線形空間の拡張として**加群**というものを考えると，環 A の構造だけを観るのではなく加群も合わせて考えることで表現論的な考察が可能になる．

定義 *1.2.1*（加群）

A を環とし，M を Abel 群とする．A の作用 $A \times M \to M; (a, x) \mapsto ax$ が存在して；

(M1) $1x = x$
(M2) $a(bx) = (ab)x$
(M3) $(a + b)x = ax + bx$
(M4) $a(x + y) = ax + ay$

をみたすとき，M（と作用の組）を A **加群** (module) という．

環 R が非可換の時，作用が左（右）作用のとき左（右）加群という．A が可換のときは単に A 加群という．右加群では (M2) の代わりに

$$(\mathrm{M2})' \quad a(bx) = b(ax)$$

を要請する必要がある（最初に注意しておいたとおり，以後すべて A は可換環として進める）．また，A が体のときは線形空間に他ならない．A の作用のことをスカラー (scalar) ということもある．

以後線形代数の模倣としていくつかの性質と定義を述べる．例えば任意の $a \in A$ と $x \in M$ に対して；

$$a0 = 0, 0x = 0, (-a)x = -ax$$

が成り立つ．

定義 *1.2.2*（準同型）

M, N を A 加群とする．$\varphi : M \to N$ が，任意の $a, b \in A$ と $x, y \in M$ に対し；

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$$

を満たす時，φ を A 準同型という．

もちろん，φ が全単射の時 A 同型という．

定義 *1.2.3*（部分加群）

A 加群 M の部分集合 N が Abel 群として M の部分群であり，任意の $a \in A$ と $x \in N$ に対して $ax \in N$，すなわち A の作用で閉じているとき N を部分加群であるという．

A 自身を，環の積を作用として A 加群とみなすとき，A の部分加群とはまさに A のイデアルにほかならない．このとき，A 準同型は環の準同型とは異なることに注意しよう（単位元の行き先を定めることと A 準同

型を定めることは同値）．

定義 *1.2.4*（剰余加群）

M を A 加群とし，N をその部分加群とする．次の M 上の同値関係；

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in N$$

による M の商集合を M/N とし，その代表元を $x + N$ と表す．そこに A の作用を $a(x + N) = ax + N$ で定めるとこれは A 加群になる．これを M の N による**剰余加群** (residue module) という．

定義から $x + N = 0$ と $x \in N$ は同値である．剰余環と同様に準同型定理とよばれる定理が成り立つ．

定理 *1.2.5*（準同型定理）

$\varphi : M \to N$ を A 加群の A 準同型とすると，$\ker\varphi, \operatorname{Im}\varphi$ はそれぞれ M, N の部分加群で，同型；

$$M/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$$

が成立する．

証明は環の場合を適切に拡張すれば良いから省略する．加群の分解に関する文脈（幾何で言う既約分解に対応する）で，部分加群の既約性が大切となるのでここで紹介しておく．

定義 *1.2.6*

A 加群 M の部分加群 N について，N_1，N_2 を M の部分加群として $N = N_1 \cap N_2$ ならば $N = N_1$ または $N = N_2$ が成り立つとき，N を**既約**といい，そうでないときに**可約**という．

定義 *1.2.7*（加群の直積，直和）

A 加群の族 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，直積 $\prod M_\lambda$ に A の作用を；

$$a(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} = (ax_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

と定めると $\prod M_\lambda$ は A 加群になる．同様の作用によって；

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \left\{ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod M_\lambda \;\middle|\; \text{有限個の}\lambda\text{を除いて } x_\lambda = 0 \text{ である．} \right\}$$

も A 加群になる．特に Λ が有限のとき $\prod M_\lambda$ と一致する．これらをそれぞれ $\{M_\lambda\}$ の**直積** (direct product)，**直和** (direct sum) という．

線形空間の “基底” に対応して，加群の基底について触れる．以下，M を A 加群とし，$(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$（しばしば略して (u_λ) とかく）を M の元の族とする．また，Λ が無限集合である場合，Λ を走る和 $\sum_{\lambda\in\Lambda} u_\lambda$ は次の条件；

$$\text{有限個の}\lambda\text{を除いて } u_\lambda\text{が } 0 \text{ である．} \tag{$*$}$$

を満たす場合に限って定義される．

定義 *1.2.8*（生成系）

M の任意の元が $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda u_\lambda$ $(a_\lambda \in A)$ とかけるとき，(u_λ) を M の**生成系** system of generator という．

定義 *1.2.9*（一次独立）

$\sum a_\lambda u_\lambda = 0$ なら，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $a_\lambda = 0$ となるとき，(u_λ) は**一次独立** (linearly independent) であるという．(x_λ) について $(*)$ を満たさない場合，(x_λ) の任意の有限部分集合が一次独立のとき (x_λ) が一次独立であるという．

定義 *1.2.10*（基底）

M の任意の元が $\sum a_\lambda u_\lambda$ の形に一意に書けるとき，(u_λ) は M の**基底** (basis) であるという．

それぞれ，準同型；

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} A \to M; (a_\lambda) \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda u_\lambda$$

が，全射，単射，全単射であることとそれぞれ同値．特に，(u_λ) が基底であることは (u_λ) が一次独立な生成系であることと同値．また，A 加群 M について，有限個の A の直和からの全射が存在するとき，M は**有限生成** (finitely generated) であるという．

定義 *1.2.11*（自由加群）

M が基底を持つとき，M を**自由加群** (free module) という．

線形代数の復習として，線形空間基底の存在は保証されていること，その濃度は一意的であることを思い出そう（証明はしない）．

定理 *1.2.12*

体 K 上の加群 V は自由加群であり，その基底の濃度は一定である．

可換環上の自由加群についても，濃度は一定である（非可換環については，基底が有限なとき一般には成立しない）．

定理 *1.2.13*

可換環上の自由加群の基底の濃度は一定である．

証明.

A を可換環とし，M を A 上の自由加群とする．その基底を $\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{v_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ とする．すると

$$M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Au_\lambda = \bigoplus_{\omega\in\Omega} Av_\omega$$

とかける．Krull の定理より，A は極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ．また，$K = A/\mathfrak{m}$ は体である．ここで；

$$\mathfrak{m}M = \left\{ \sum_{\text{有限和}} a_k x_k \;\middle|\; a_k \in \mathfrak{m}, x_k \in M \right\}$$

とすると，これは M の部分加群で，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M の基底なので；

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}M &= \left\{ \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda u_\lambda \;\middle|\; c_i \in \mathfrak{m} \text{ は有限個を除いて } 0 \right\} \\ &= \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{m}u_\lambda \end{aligned}$$

となる．よって $M/\mathfrak{m}M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Au_\lambda/\mathfrak{m}u_\lambda$ となる．また $Au_\lambda/\mathfrak{m}u_\lambda$ の元を考えると，$au_\lambda - bu_\lambda \in \mathfrak{m}u_\lambda$ であることは $a-b\in\mathfrak{m}$ であることと同値だから，$Au_\lambda/\mathfrak{m}u_\lambda = (A/\mathfrak{m})u_\lambda$ とかける．ここで $M/\mathfrak{m}M$ は K 上の加群，すなわち K 線形空間とみなすことができる．実際，作用；

$$K\times M/\mathfrak{m}\to M/\mathfrak{m}M; (a+\mathfrak{m}, x+\mathfrak{m}M)\mapsto ax+\mathfrak{m}M$$

は well-defined である（確かめよ）．以上より K 線形空間として；

$$M/\mathfrak{m}M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(A/\mathfrak{m})u_\lambda$$

となり，$\{u_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を K 線形空間として基底に持つことがわかる．同様に $\{v_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ も $M/\mathfrak{m}M$ の基底となっていて，線形空間の基底の濃度は一定であるので $\#\Lambda = \#\Omega$ である．（証明終）

定義 *1.2.14*（イデアル商）

M を A 加群，L, N をその部分加群とする．

$$(L:N) = \{a\in A \mid aN\subset L\}$$

は A のイデアルになり，これを L と N のイデアル商 (ideal quotient) という．

また，イデアル $(0:M) = \{a\in A \mid aM=0\}$ を M の零化イデアル (anihilator) といい $\mathrm{Ann}(M)$ とかく．$\mathrm{Ann}(M)=0$ となる加群を忠実 (faithful) であるという．A の部分加群はイデアルであるから，これはイデアルについて考えることもできる．イデアル商の計算は次が基本的である（証明は簡単なので省略する）．

命題 *1.2.15*

I, J, K を A のイデアルとし，L, N は A 加群 M の部分加群であるとすると，次が成り立つ．

(i) $I\subset (I:J)$
(ii) $(I:J)J\subset I$
(iii) $((I:J):K) = (I:JK) = ((I:K):J)$
(iv) $(\bigcap_\lambda I_\lambda : J) = \bigcap_\lambda (I_\lambda : J)$
(v) $(I:\sum_\lambda J_\lambda) = \bigcap_\lambda (I:J_\lambda)$
(vi) $\mathrm{Ann}(N+L) = \mathrm{Ann}(N)\cap\mathrm{Ann}(L)$
(vii) $(L:N) = \mathrm{Ann}((L+N)/L)$

線形代数で習った Cayley–Hamilton の定理を加群に対して拡張できる（行列式のトリックとも呼ばれる）．

定理 *1.2.16*（Cayley–Hamilton）

M を n 個の元で生成される有限生成な A 加群とし，$\varphi\in\mathrm{End}_A(M)$ が，ある A のイデアル I に対して $\varphi(M)\subset IM$ であると仮定する．このとき，$a_1,\dots,a_n\in I$ が存在して

$$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1}+\cdots+a_n = 0$$

を満たす．

証明.

M の生成系を $\{u_1, \ldots, u_n\}$ とすると，$\varphi(M) \subset IM$ より

$$\varphi(u_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \quad (a_{ij} \in I)$$

とできる．よって Kronecker のデルタ δ_{ij} を用いると $\sum_j (\delta_{ij}\varphi - a_{ij})u_j = 0$ である．行列 $(\delta_{ij}\varphi - a_{ij})_{i,\ j}$ に対し余因子行列をかけて，$\det(\delta_{ij}\varphi - a_{ij})$ は M の自己準同型となるが，これはすべての x_i を消すので零射にほかならない．行列式を展開すれば求める式が得られる．（証明終）

これを利用して，**中山の補題**と呼ばれる強力な定理を証明できる．

定理 *1.2.17*（中山の補題）

M を有限生成 A 加群，I を A のイデアルとする．$M = IM$ であるとき，$aM = 0$ かつ $a \equiv 1 \pmod{I}$ を満たす $a \in A$ が存在する．とくに $I \subset \mathrm{rad}(A)$ ならば $M = 0$ である．

証明.

Cayley–Hamilton の定理で $\varphi = \mathrm{id}_M$ とすれば

$$a = 1 + a_1 + \ldots a_n$$

がそれを満たす．また $I \subset \mathrm{rad}(A)$ ならば，a は可逆なので $M = 0$ である．（証明終）

系 *1.2.18*

I を $\mathrm{rad}(A)$ に含まれるイデアルとする．A 加群 M と，その部分加群 N について M/N が有限生成かつ $M = N + IM$ であるとすると，$M = N$ である．

証明.

$M/N \cong I(M/N)$ より $M/N = 0$ である．（証明終）

$(A, \mathfrak{m})$ を局所環とする．剰余環 $K = A/\mathfrak{m}$ は体になる．A 加群 $\mathfrak{m}$ について $M/\mathfrak{m}M$ は自然な演算（定理 1.2.13 の証明中で定義したもの）で K 加群になる．M が有限生成 A 加群なら中山の補題を使うことで次が言える．

命題 *1.2.19*

$(A, \mathfrak{m})$ を局所環とし，M を有限生成 A 加群とする．$\dim_k M/\mathfrak{m}M = r$ ならば M は r 個の元で生成される．

証明.

$x_1, \ldots, x_r \in M$ を $M/\mathfrak{m}M$ での像が k 線形空間としての基底になる元とする．ここで $x_1, \ldots, x_r$ が生成する A 加群を N とおくと，N は M の部分加群であって $N + \mathfrak{m}M = M$ が成り立つ．よって系 1.2.18 より $N = M$ である．（証明終）

§3　準同型と普遍性

代数学（加群の理論）においては，いろいろな概念についてその構成に自然に付随する準同型が重要な働きをする．まずは準同型そのものに関連する定義について紹介しておこう．

定義 *1.3.1*（Hom 加群）

環 A 上の加群 M，N において；

$$\mathrm{Hom}_A(M,\ N) = \left\{\varphi : M \to N \,\middle|\, \varphi : \text{準同型}\right\}$$

は $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ に対し $f + g$ を $x \mapsto f(x) + g(x)$ で定めることで Abel 群をなす．また，A によるスカラーを $af : x \mapsto f(ax)$ となる準同型として定めることで A 加群となる．

例えば，自然に $\mathrm{Hom}_A(A, M) \cong M$ である．加群の間の準同型を考えることで，圏論的に言えば関手的な取り扱いが可能になる．とはいえ，この節では圏論の知識を仮定せずとも良いように配慮した．圏論を学んでから，具体例として検討してもらいたい．その手助けとなるように，断った上で圏論的記述を加えたところもある．

準同型を考えると，自然に出てくるものが完全列である．これについて復習しておこう．

定義 *1.3.2*（完全列）

M_i を加群とし，$\varphi_i : M_i \to M_{i+1}$ を準同型とする．そのとき，列；

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

は任意の i に対し $\mathrm{Im}\,\varphi_{i-1} = \ker\varphi_i$ となるとき**完全列** (exact sequence) であるという．

特に；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

が完全であることと，φ が単射，ψ が全射であることは同値である．この完全列を特に**短完全列** (short exact sequence) という．

また，次の完全列；

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

はそれぞれ（短）右完全列，左完全列という．

さて，自然に付随する準同型とはどういうものかを説明しよう．まず A 加群 M とその部分加群 N について，剰余加群 M/N を考えよう．このとき，次が成り立つ．

命題 *1.3.3*（剰余加群の普遍性）

自然な全射 $\varphi : M \to M/N$ と，包含 $\iota : N \to M$ が存在する．このとき，任意の A 加群 L について，準同型 $\psi : M \to L$ で $N \subset \ker\psi$ となるものに対し，$f : M/N \to L$ で $f \circ \varphi = \psi$ となるものが一意的に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend left, "0"] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"] & L \\
& M/N \arrow[ur, dashed, "f"] &
\end{tikzcd}
$$

Figure.1　剰余加群の普遍性

このように，自然な準同型 φ について，ある条件を満たした準同型（この例では ψ）に対して可換になるような f が一意に存在するという性質を普遍性 (universality) という．以後紹介していくテンソル積や極限といった概念では，普遍性が重要な働きをする．それどころか圏論では普遍性に完全に依存した議論をすることも珍しくない．具体的には準同型（射）の一意性が大切である．そこに着目した上で，ある概念の普遍性を満たすものをそれ自身と定義するという特徴づけを考える．具体的に説明しよう．ある対象が普遍性を持つことがわかっている（あるいは持ってほしい）場合は，次のように定義するのである．

定義 *1.3.4*（普遍性による剰余加群の定義）

A 加群 M とその部分加群 N に対して，ある A 加群 K と $\varphi : M \to K$ で $N \subset \ker\varphi$ となるものが存在して，任意の A 加群 L と準同型 $\psi : M \to L$ で $N \subset \ker\psi$ となるものについて $f : K \to L$ が一意に存在するとき，(K, φ) を M の N による剰余加群といい，M/N とかく．

普遍性から K は（同型を除いて）一意的に定まることが保証されるので，実際に普遍性をみたす $M/N = \{x + N \mid x \in M\}$ という加群で K を表すことが正当化されている．一意に定まることを見よう．剰余加群の普遍性を満たす K, K' を考える．次の図式のように，それぞれの普遍性から $f : M \to K', f' : M \to K$ が存在する（ι と合成すると 0 になることを表す 0 は省略した）；

$$
\begin{tikzcd}
& K & \\
N \arrow[r] & M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi'"] & K' \arrow[ul, dashed, "f'"'] \\
& K \arrow[ur, dashed, "f"'] \arrow[uu, bend left=60, "\mathrm{id}_K"] &
\end{tikzcd}
$$

Figure.2

このとき，$f' \circ f = \mathrm{id}_K$ となり，準同型の一意性から $f' \circ f = \mathrm{id}_K$ となる．同様に $f \circ f' = \mathrm{id}_{K'}$ が確かめられ，f, f' によって K と K' は同型である．

この議論の本質は，準同型の一意性から普遍性で得られる準同型の合成と恒等写像が等しくなる、というところにある．よって，まったく同様の証明で普遍性を持つ対象は必ず（同型を除いて）一意に定まることがわかる．このようにある概念を普遍性を満たすもの，と定義して実際にこの加群（対象）が普遍性を満たす，という主張をすることで well-defined に定義を行うことができる．

定義 1.2.7 で定義した直積，直和についても普遍性を用いた定義が可能である．

定義 *1.3.5*（普遍性を用いた直積の定義）

A 加群の族 $\{M_\lambda\}$ について，ある加群 L と準同型の族 $p_\lambda : L \to M_\lambda$ が存在して，任意の A 加群 N と準同型の族 $q_\lambda : N \to M_\lambda$ に対し，$f : N \to L$ で $p_\lambda \circ f = q_\lambda$ となるものが一意的に存在するとき，(L, p_λ) を $\{M_\lambda\}$ の直積といい，$\prod_\lambda M_\lambda$ とかく．

定義 *1.3.6*（普遍性を用いた直和の定義）

A 加群の族 $\{M_\lambda\}$ について，ある加群 L と準同型の族 $\iota_\lambda : M_\lambda \to L$ が存在して，任意の A 加群 N と準同型の族 $\kappa_\lambda : M_\lambda \to N$ に対し，$f : L \to N$ で $f \circ \iota_\lambda = \kappa_\lambda$ となるものが一意的に存在するとき，(L, ι_λ) を $\{M_\lambda\}$ の直和といい，$\bigoplus_\lambda M_\lambda$ とかく．

$$
\begin{tikzcd}
 & \prod M_\lambda \arrow[dr, "p_\lambda"] & \\
N \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[rr, "q_\lambda"] & & M_\lambda
\end{tikzcd}
$$

Figure.3　直積の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
 & \bigoplus M_\lambda \arrow[dr, dashed, "f"] & \\
M_\lambda \arrow[ur, "\iota_\lambda"] \arrow[rr, "\kappa_\lambda"] & & N
\end{tikzcd}
$$

Figure.4　直和の普遍性

誤解の恐れがない限り添字が省略されることはいつもと同じである．また p_λ は標準的射影，ι_λ は標準的単射と呼ばれる．

問 1.

定義 1.2.7 で定義された加群たちがそれぞれ直積，直和の普遍性を満たすことを確認せよ．また，普遍性の標準的な結果から同型を除いて一意的に定まることも確かめよ．

早速次節では普遍性を使ってテンソル積を定義していこう．

§4　テンソル積

定義 *1.4.1*（双線型写像）

M, N, L を A 加群とする．$\varphi : M \times N \to L$ が次の 3 つ；

(BM1) $\varphi(x_1 + x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \varphi(x_2, y)$

(BM2) $\varphi(x, y_1 + y_2) = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$

(BM3) $\varphi(ax, y) = \varphi(x, ay) = a\varphi(x, y)$

を満たすとき，φ を A 双線型写像という．

双線型写像 $M \times N \to L$ の全体を $\mathrm{Bil}_A(M, N; L)$ で表すとすると，ある A 加群 K と $\tau \in \mathrm{Bil}_A(M, N; L)$ が存在して $\mathrm{Hom}_A(K, L) \to \mathrm{Bil}_A(M, N; L); f \mapsto f \circ \tau$ を同型となるようにできることが知られている．この K と τ を，N と M の A 上のテンソル積という．

定義 *1.4.2*（テンソル積）

M，N を A 加群とする．ある A 加群 K と $\tau \in \mathrm{Bil}_A(M,N;K)$ が存在して，任意の A 加群 L と $\varphi \in \mathrm{Bil}(M,N;L)$ に対して $f \circ \tau = \varphi$ となる f が一意的に存在する．(K,τ) を $M \otimes_A N$ とかき，M, N の A 上のテンソル積 (tonsor product) という．

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau"] & L \\ M \otimes_A N \arrow[ur, dashed, "f"] & \end{tikzcd}$$

Figure.5　テンソル積の普遍性

テンソル積の存在証明.

直積 $M \times N$ が生成する A 加群；

$$\mathcal{T} = \left\{ \sum_{\text{有限和}} a_i(x_i,\ y_i) \ \middle|\ a_i \in A, (x_i, y_i) \in M \times N \right\}$$

を考える．ここで，$a \in A, x, x_1, x_2 \in M, y, y_1, y_2 \in N$ として，次の形の元；

$$(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y), \quad (x, y_1 + y_2) - (x, y_1) - (x, y_2)$$

$$(ax, y) - a(x, y), \quad (x, ay) - a(x, y)$$

で生成される $\mathcal{T}$ の部分加群を $\mathcal{I}$ とする．すると，$\mathcal{T}/\mathcal{I}$ が $\tau : M \times N \to \mathcal{T}/\mathcal{I}; (x, y) \mapsto (x, y) + \mathcal{I}$ によりテンソル積となる．実際，$\varphi : M \times N \to L$ に対し；

$$\widetilde{\varphi} : \mathcal{T} \to L; \sum a_i(x_i, y_i) \mapsto \sum a_i\varphi(x_i, y_i)$$

を考えると，φ の双線形性より $\mathcal{I} \subset \ker\widetilde{\varphi}$ がわかる．よって；

$$\mathcal{T}/\mathcal{I} \to \mathcal{T}/\ker\widetilde{\varphi}; (x, y) + \mathcal{I} \mapsto (x, y) + \ker\widetilde{\varphi}$$

が well-defined であることがわかるので，同型 $\mathcal{T}/\ker\widetilde{\varphi} \to L$ と合成して，準同型；

$$f : \mathcal{T}/\mathcal{I} \to L; (x, y) + \mathcal{I} \mapsto \varphi(x, y)$$

を得る．これは τ の全射性から一意に定まる．

同型を除いて一意であることは普遍性の標準的な結果である．

（証明終）

$x \in M, y \in N$ に対し $\tau(x, y) = x \otimes y$ ともかき，これを元のテンソル積という．テンソル積は $M \otimes_A N$ は $x \otimes y$ を生成元とし；

$$(x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y$$

$$x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2$$

$$(ax) \otimes y = x \otimes (ay) = a(x \otimes y)$$

を満たす A 加群と解釈できる．また，ここから任意の $M\otimes N$ の元は $x\otimes y$ $(x\in M, y\in N)$ の有限和でかけることもわかる．

これらのことが頭に入っていれば，煩雑な構成の証明は忘れても構わないが，いくつかの注意が必要である．ここで，$x\otimes y$ という表示はどの加群のテンソル積かを決定しないと意味がないことに注意しておこう．例えば $\mathbb{Z}$ 加群で考えると $\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ において $2\otimes\overline{1}=1\otimes\overline{2}=1\otimes\overline{0}=0$ だが，$\mathbb{Z}$ の部分加群 $2\mathbb{Z}$ を考えると $2\mathbb{Z}\otimes\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ において $2\otimes\overline{1}\neq 0$ である．

しかし，次の事実はテンソル積の構成から即座に従うもので，有用である．

命題 *1.4.3*

A 加群 M,N について，$0=\sum x_i\otimes y_i\in M\otimes N$ とする．このとき，それぞれ有限生成な部分 A 加群 M_0,N_0 が存在して，$M_0\otimes N_0$ において $\sum x_i\otimes y_i=0$ である．

証明.

構成の証明中の記号を用いる．$\sum x_i\otimes y_i\in\mathcal{I}$ なので，これは $\mathcal{I}$ の生成系の有限和である．それらの各項を $x_j\otimes y_j$ とし，x_i,x_j で生成される M の有限生成部分加群を M_0, y_i,y_j で生成される N の部分加群を N_0 とすればよい．（証明終）

次に準同型のテンソルについて定義しておく．

命題 *1.4.4*

$f\in\mathrm{Hom}(M,M')$ と $g\in\mathrm{Hom}(N,N')$ に対し，準同型 $f\otimes g: M\otimes N\to M'\otimes N'$ で，$(f\otimes g)(x\otimes y)=f(x)\otimes g(x)$ を満たすものが一意的に存在する．

証明.

直積の間の準同型 $f\times g: M\times N\to M'\times N'$ と $\tau': M'\times N'\to M'\otimes N'$ の合成 $(x,y)\mapsto f(x)\otimes g(x)$ に対し，$M\otimes N$ の普遍性から $(f\otimes g)\circ\tau=\tau'\circ(f\times g)$ となる $f\otimes g$ が一意に定まる．このとき，$f\otimes g: x\otimes y\mapsto f(x)\otimes g(x)$ であるから，$f\otimes g$ は求める準同型であり，一意性は普遍性から従う．（証明終）

これは $f\times g: M\times N\to M'\times N'; (x,y)\mapsto(f(x),g(x))$ をテンソル積に誘導したものにほかならない．

テンソル積を演算と見ると次が基本的である．

命題 *1.4.5*

テンソル積は可換なモノイドをなす．つまり次の 3 つが成り立つ．

$$A\otimes M\cong M, M\otimes N\cong N\otimes M, (M\otimes N)\otimes L\cong M\otimes(N\otimes L)$$

また，テンソル積は直和と可換である．すなわち；

$$\left(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda\right)\otimes N\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M_\lambda\otimes N)$$

である．

証明.

Step 1. モノイドをなすこと．

(i) $A \otimes M \to M; a \otimes x \mapsto ax$ と，$M \to A \otimes M; x \mapsto 1 \otimes x$ が互いに逆の関係となる．

(ii) $\varphi : M \times N \to N \otimes M; (x, y) \mapsto y \otimes x$ に対し，$f : M \otimes N \to N \otimes M; x \otimes y \mapsto y \otimes x$ がとれる．同様に $\psi : N \times M \to M \otimes N; (y, x) \mapsto x \otimes y$ に対して $g : N \otimes M \to M \otimes N; y \otimes x \mapsto x \otimes y$ とでき，これが f の逆となる．

(iii) 各 $\mathrm{z} \in L$ について，$\varphi_{\mathrm{z}} : M \times N \to M \otimes (N \otimes L); (x, y) \mapsto x \otimes (y \otimes \mathrm{z})$ と定義することで，普遍性から $f_{\mathrm{z}} : M \otimes N \to M \otimes (N \otimes L); x \otimes y \mapsto x \otimes (y \otimes \mathrm{z})$ が定まる．これを用いて，双線形写像 $\psi : (M \otimes N) \times L \to M \otimes (N \otimes L); (x \otimes y, \mathrm{z}) \mapsto f_z(x \otimes y)$ が定義できる．これをさらにテンソル積に落とすことで；

$$f : (x \otimes y) \otimes \mathrm{z} \mapsto x \otimes (y \otimes \mathrm{z})$$

とできる．同様に；

$$g : x \otimes (y \otimes \mathrm{z}) \mapsto (x \otimes y) \otimes \mathrm{z}$$

がとれて，f と g は逆の関係である．

Step 2. 直和と可換であること．

1°)

$$\varphi : \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \times N \to \bigoplus_{\lambda} (M_\lambda \otimes N); ((x_\lambda)_\lambda, y) \mapsto (x_\lambda \otimes y)_\lambda$$

に対し，テンソル積の普遍性から；

$$f : \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \otimes N \to \bigoplus_{\lambda} (M_\lambda \otimes N); (x_\lambda)_\lambda \otimes y \mapsto (x_\lambda \otimes y)_\lambda$$

が存在する．

2°) 任意の $\lambda' \in \Lambda$ に対し；

$$\psi'_\lambda : M'_\lambda \times N \to \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \otimes N; (x'_\lambda, y) \mapsto (\tilde{x}_\lambda)_\lambda \otimes y$$

を，$\lambda = \lambda'$ のとき $\tilde{x}_\lambda = x'_\lambda, \lambda \neq \lambda'$ のとき $\tilde{x}_\lambda = 0$ として定める．テンソル積の普遍性から；

$$g'_\lambda : M'_\lambda \otimes N \to \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \otimes N; (x'_\lambda \otimes y \mapsto (\tilde{x}_\lambda)_\lambda \otimes y$$

がとれて，直和の普遍性から；

$$g : \bigoplus_{\lambda} M_\lambda \otimes N \to \left(\bigoplus_{\lambda} M_\lambda\right) \otimes N; (x_\lambda \otimes y)_\lambda \to (x_\lambda)_\lambda \otimes y$$

とできる．作り方から f と g は逆の関係である．

（証明終）

ある加群からある加群を作り出す “操作”（圏論では関手 (functor) 的であるという）があるときには，完全列にどのような影響を与えるかをみることは常套手段である．

命題 *1.4.6*（テンソル積の右完全性）

A 加群の完全列；

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

に対し，任意の A 加群 N は；

$$M_1 \otimes N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_N} M_2 \otimes N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}_N} M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

を完全にする．

証明.

$g \otimes \mathrm{id}_N$ の全射性は明らか．$\mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_N) = \ker(g \otimes \mathrm{id}_N)$ を示そう．$\subset$ は明らかなので $\supset$ を示す．任意の $\sum_i x_i \otimes y_i \in \ker(g \otimes \mathrm{id}_N)$ をとる．$M_3 \cong M_2/f(M_1)$ より

$$\varphi : M_3 \times N \to (M_2 \otimes N)/(f(M_1) \otimes N); (g(x), y) \mapsto x \otimes y + f(M_1) \otimes N$$

は well-defined である．実際 $g(x) = g(x')$ とすると $x - x' \in \ker g = \mathrm{Im}\, f$ より $x \otimes y \in f(M_1) \otimes N$ となる．よって，φ は普遍性から；

$$h : M_3 \otimes N \to (M_2 \otimes N)/(f(M_1) \otimes N)$$

を引き起こす．さて $g \otimes \mathrm{id}_N (\sum x_i \otimes y_i) = \sum g(x_i) \otimes y_i = 0$ より $0 = h(\sum g(x_i) \otimes y_i) = \sum \varphi(g(x_i), y_i) = \sum x_i \otimes y_i + f(M_1) \otimes N$ であるので，$\sum x_i \otimes y_i \in \mathrm{Im}(f \otimes \mathrm{id}_N)$ である．（証明終）

もちろん短完全列に対してこの命題を適用すると，右完全列が得られる．この状況は，圏論的には関手 $- \otimes N$ は右完全である，ということになる．これが完全関手になるような N のことを平坦であるという．

定義 *1.4.7*（平坦加群）

任意の短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

に対して；

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes N \longrightarrow M_2 \otimes N \longrightarrow M_3 \otimes N \longrightarrow 0$$

が完全であるとき，N を平坦 (flat) な加群であるという．

これは単射な $\eta : M_1 \to M_2$ に対して，$\eta \otimes \mathrm{id}_N$ もまた単射になることと同値である．

平坦性を確かめるには，実は有限生成な加群についてのみ確かめればよい．

命題 *1.4.8*

A 加群 N が平坦であることと，$f : M_1 \to M_2$ が単射で M_1, M_2 が有限生成ならば $f \otimes \mathrm{id}$ が単射になることは同値である．

証明.

前者から後者が従うことは明らかである．M_1, M_2 を（有限生成とは限らない）A 加群とし，単射 $f : M_1 \to M_2$ を考える．$u = \sum_{i=1}^s x_i \otimes y_i \in \ker(f \otimes \mathrm{id})$ をとる．$u = 0$ を示せばよい．M_1' を $x_1, \ldots, x_s$ によって生成される M_1 の部分加群とする．u' を $M_1' \otimes N$ における $\sum x_i \otimes y_i$ を表すものとする．ここで $0 = \sum f(x_i) \otimes y_i \in M_2 \otimes N$

であり，命題 1.4.3 により有限生成部分加群 M_2' が存在して，$M_2' \otimes N$ において $\sum f(x_i) \otimes y_i = 0$ である．また，M_1' の構成から $f(M_1') \subset M_2'$ である．すると，f の M_1' への制限 $f' : M_1' \to M_2'$ が定義され，先の議論からこの記号のもとで $f' \otimes \mathrm{id}(u') = 0$ である．仮定から $f' \otimes \mathrm{id}$ は単射なので $u' = 0$ であり，これは $u = 0$ を導く．（証明終）

実際の平坦な加群の例は，次節以降紹介する**局所化**や**射影加群**が与える．

§5　局所化と素イデアル

定義 *1.5.1*（積閉集合）

環 A の部分集合 S について $1 \in S, x, y \in S$ ならば $xy \in S$ が成り立つとき，S は**積閉** (multiplicatively closed) であるという．

定義 *1.5.2*（局所化）

A を環とし，S を A の積閉な部分集合とする．S の元を分母に許すような環 $S^{-1}A$ を，A の S による**局所化** (localization) または**分数環** (fractional ring) という．

$S^{-1}A$ の正確な定義を与えておこう．直積 $A \times S$ に次の関係を入れる．

$$(a, s) \sim (a', s') \iff t(sa' - s'a) = 0 \text{ となる } t \in S \text{ が存在する．}$$

これによる同値類を a/s とかき，その集合に自然な加法と乗法を定めたものを $S^{-1}A$ とかく．写像 $\varphi : A \to S^{-1}A; a \mapsto a/1$ により，$S^{-1}A$ には自然な A 代数としての構造が入る．また；

$$\ker \varphi = \left\{ a \in A \;\middle|\; sa = 0 \text{ となる } s \in S \text{ がある} \right\}$$

であるから，S が零因子を持たなければ φ が単射となり，A を $S^{-1}A$ に埋め込める．

定義 *1.5.3*（全商環）

S を A の非零因子全体の集合とすると，上の φ は単射であって，$S^{-1}A$ を A の**全商環** (total fractional ring) という．

A が整域のとき，これは商体にほかならない．

命題 *1.5.4*（分数環の普遍性）

S を A の積閉集合とする．このとき $f : A \to B$ で $f(S) \subset B^{\times}$ となる A 代数 B に対し，準同型 $g : S^{-1}A \to B$ で $g \circ \varphi = f$ となるものが同型を除いて一意的に存在する．

証明.

$g : S^{-1}A \to B; x/s \mapsto f(x)f(s)^{-1}$ により与えられる．（証明終）

次の命題は実際の計算によく用いられる．

命題 *1.5.5*

S を環 A の積閉集合とする．$S^{-1}A$ の素イデアルは $P \cap S = \emptyset$ となる $P \in \operatorname{Spec} A$ と 1 対 1 に対応する．特に，$S^{-1}A$ の素イデアルは；

$$S^{-1}P = \{a/s \mid a \in P, s \in S\}$$

という形をしている．

証明.

$P \in \operatorname{Spec} A$ について，$S^{-1}P$ は $S^{-1}A$ の素イデアルとなる．また，一般に環準同型 $\varphi : A \to B$ と $P \in \operatorname{Spec} B$ について $\varphi^{-1}(P) \in \operatorname{Spec} A$ であった．ここで $P' \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$ について $\varphi^{-1}(P') \in \operatorname{Spec} A$ であって，$\widetilde{P'} = \left\{x/s \in S^{-1}A \,\middle|\, x \in \varphi^{-1}(P'), s \in S\right\}$ とするとこれは P' に一致する．

以上より，P と $\varphi^{-1}(P)$ は 1 対 1 に対応する．また $Q \in \operatorname{Spec} A$ が $Q \cap S \neq \emptyset$ ならば $S^{-1}Q$ は単元を含み，$\varphi^{-1}(P) \cap S = \emptyset$ となることもわかる．（証明終）

定義 *1.5.6*

$P \in \operatorname{Spec} A$ に対し，$S = A \setminus P$ は素イデアルの定義から積閉で，これによる局所化を A_P とかいて A の P による局所化という．

局所化という名前の通り A_P は局所環である（命題 0.2.12 を用いる）．しかしながら一般の積閉集合 S による局所化は局所環になるとは限らないことに注意しなければならない．例えば局所環にならないが重要な例として，元による局所化がある．

定義 *1.5.7*

$f \in A$ に対し，$S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は積閉集合である．ただし $f^0 = 1$ と定義する．このとき，$S^{-1}A$ を A_f と書いて A の f による局所化という．

いままでは環の局所化を考えていたが，全く同様の定義で A 加群 M について，A の積閉集合による局所化 $S^{-1}M$（これは $S^{-1}A$ 加群になる）を考えることができる．また，A 加群の準同型 $\varphi : M \to N$ について，次の $S^{-1}A$ 加群の間の準同型；

$$S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}N; x/s \mapsto \varphi(x)/s$$

が誘導されることに注意しよう．よって，加群の列；

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

について，誘導された列；

$$S^{-1}(M_1) \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_3$$

が得られる．ここでこの操作によって完全性が保たれる（すなわち完全関手になっている）ことが大切である．

命題 *1.5.8*

$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ が完全ならば，$S^{-1}(M_1) \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M_3$ も完全である．

証明.

$\operatorname{Im} S^{-1}f \subset \ker S^{-1}g$ は明らかなので，逆を示す．任意の $x/s \in \ker S^{-1}g$ をとる．よって $g(x)/s = 0$ であるので，ある $h \in S$ が存在して $hg(x) = 0$ である．よって $hx \in \ker g = \operatorname{Im} f$ であるから，ある $y \in M_1$ がとれて $f(y) = hx$ とかける．すると $S^{-1}(y/hs) = hx/hs = x/s$ となる．（証明終）

これによって次の命題が示せる（証明はかんたんである）．

命題 *1.5.9*

局所化は有限の和，共通部分，剰余環，根基をとる操作と可換である．すなわち，A 加群 M とその部分加群 N，P またイデアル I について；

(i) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}(N) + S^{-1}(P)$
(ii) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}(N) \cap S^{-1}(P)$
(iii) $S^{-1}(M/N) \cong (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$
(iv) $S^{-1}(\sqrt{I}) = \sqrt{S^{-1}I}$
(v) M が有限生成ならば $S^{-1}(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Ann}(S^{-1}M)$ が成り立つ．

が成り立つ．

証明.

(i) から (iv) はかんたんであり，(v) については M の生成元の個数 n についての帰納法を用いる．（証明終）

系 *1.5.10*

N，P を A 加群 M の部分加群で P が有限生成であるとすると，積閉集合 S について $S^{-1}(N : P) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$ が成り立つ．

証明.

命題 1.2.15 より $(N : P) = \operatorname{Ann}((N+P)/N)$ であって，補題から $S^{-1}(N : P) = \operatorname{Ann}((S^{-1}N + S^{-1}P)/S^{-1}N) = (S^{-1}N : S^{-1}P)$ である．（証明終）

また，局所化は平坦な加群の例を与える（自然な $A \to S^{-1}A$ により $S^{-1}A$ を A 加群と見ている）．

命題 *1.5.11*

$S^{-1}A$ は平坦である．とくに $S^{-1}A \otimes_A M \cong S^{-1}M$ である．

証明.

命題 1.5.8 より $S^{-1}A \otimes M \cong S^{-1}M$ を示せばよいが，

$$f : S^{-1}A \otimes M \to S^{-1}M; a/s \otimes x \mapsto ax/s, \quad g : S^{-1}M \to S^{-1}M \otimes A; x/s \mapsto 1/s \otimes x$$

が互いに逆写像となる．（証明終）

ところで，位相的性質，すなわち同相で変化しない性質のように（特に素イデアルによる）局所化で変化しないものを**局所的性質** (local properties) という．その例をいくつか見ておこう．

命題 *1.5.12*

M を A 加群とすると，次の 3 つ；

(i) $M = 0$ である．
(ii) 任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について，$M_P = 0$ である．
(iii) 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，$M_\mathfrak{m} = 0$ である．

は同値である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか．$M \neq 0$ と仮定する．任意の $0 \neq x \in M$ をとる．$\operatorname{Ann} x$ は真のイデアルである．$\operatorname{Ann} x$ を含む A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとる．このとき $M_\mathfrak{m} = 0$ であるので $x/1 \in M_\mathfrak{m} = 0$ である．すると，ある $h \notin \mathfrak{m}$ が存在して $hx = 0$ である．これは $\operatorname{Ann} x$ が $\mathfrak{m}$ に含まれることに矛盾．（証明終）

命題 *1.5.13*

$\varphi : M \to N$ を A 加群の準同型とする．このとき；

(i) φ は単射である．
(ii) 任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について，$\varphi_P : M_P \to N_P$ は単射である．
(iii) 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，$\varphi_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$ は単射である．

これは単射を全射に言い換えても成り立つ．

証明.

局所化は平坦であることから (i) $\Longrightarrow$ (ii) が従う．(ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか．(iii) を仮定する．完全列；

$$0 \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$$

に対して，任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について；

$$0 \longrightarrow (\ker \varphi)_\mathfrak{m} \longrightarrow M_\mathfrak{m} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m}$$

は完全．ここで $(\ker \varphi)_\mathfrak{m} = \ker \varphi_\mathfrak{m} = 0$ であるので，命題 1.5.12 より $\ker \varphi = 0$ すなわち φ は単射である．（証明終）

§6　Spec A の幾何構造の概略

可換環論においては素イデアルが非常に重要な働きをする．というのも素イデアル全体のなす集合 $\operatorname{Spec} A$ を幾何的な対象として捉えることができるからである．そこでこの節ではある程度の $\operatorname{Spec} A$ の幾何的な意味について説明する．

とはいえ，本質的に代数幾何的な手法（層など）については参考として述べた部分もあるものの，可換環論のみを理解するには知っている必要はない．とはいえ，雰囲気だけでもわかっていると環論における定義の動

機がわかってくることがあるだろう．そこでこのように “急カーブ注意！” の標識で囲まれた段落で幾何的な意味について補足することにする．

まずは Spec A に入る位相構造について説明しよう．

定義 *1.6.1*（Zariski 位相）

環 A のイデアル $I \subset A$ に対し，$V(I) = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset P\}$ は Spec A の閉集合系としての位相を定める．これを A の Zariski 位相という．

問 1.

$\mathscr{A} = \left\{V(I) \,\middle|\, I : A \text{ のイデアル}\right\}$ が閉集合系をなすこと，すなわち；

(i) $\emptyset, \operatorname{Spec} A \in \mathscr{A}$ である．

(ii) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$ である．

(iii) $\bigcap_\lambda V(I_\lambda) = V(\sum_\lambda I_\lambda)$ である．

を確認せよ．

ここで命題 0.2.18 の証明を与えておこう．これを用いることで $V(I)$ たちの包含関係を判定できる．

命題 *1.6.2*（命題 0.2.18 再訪）

A のイデアル I に対し $\sqrt{I} = \bigcap_{P \in V(I)} P$ である．

証明.

$\subset$ は簡単にわかる．逆に $x \in \bigcap_{P \in V(I)} P$ をとる．$x \notin \sqrt{I}$ であるとしよう．すると $S = \{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は I と交わらない積閉集合となる．すると I は A_x の真のイデアルとなり（定義 1.5.7），I を含む A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ がとれる．すると $\mathfrak{m}$ は極大であるので，特に素イデアル．一方で $P \cap S \neq \emptyset$ であるので I を含む素イデアルは存在しない．これは矛盾である．（証明終）

命題 *1.6.3*

A のイデアル I, J に対し，$V(I) \subset V(J)$ であることと $\sqrt{J} \subset \sqrt{I}$ であることは同値である．

証明は簡単なので演習問題としよう．

幾何学では多様体 (manifold) とその上の（正則，連続）関数について考察するが，代数幾何では多様体 (variety) とその上の正則関数について考える．多様体は体 K からなる空間 K^n の部分集合に位相を入れたものであるが，week nullstellensatz（定理 3.3.9）により代数閉体の組 K^n と $K[X_1, \ldots, X_n]$ の極大イデアル全体が 1 対 1 対応を持つ．そこで $V \subset K^n$ と $K[X_1, \ldots, X_n]$ の部分環に対応が無いだろうか，と考えた（実際にはすべての $V \subset K^n$ と $K[X_1, \ldots, X_n]$ の部分環が対応するわけではない）．そこで極大でない素イデアルをそこに合わせることで K^n の点以上の構造をもった Spec $K[X_1, \ldots, X_n]$ ないし $\operatorname{Spec}(K[X_1, \ldots, X_n]/I)$（$I$ は $K[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアル）を考えよう，としたのが Grothendieck のスキーム論の始まりである（可換環論と

幾何の繋がり）．

一般に A 代数 B があったときに（素）イデアルの対応を考えることは大切である．しかし $\varphi : A \to B$ があったとき，$P \in \operatorname{Spec} A$ について必ずしも $\varphi(P)$ は B のイデアルになるかどうかすらわからない．そこで，A のイデアル I に対応する B のイデアルについては $\varphi(I)$ が B で生成するイデアルを考えることが自然である．また，$Q \in \operatorname{Spec} B$ について $\varphi^{-1}(Q)$ は必ず素イデアルなので，写像 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A; Q \to \varphi^{-1}(Q)$ が定まる．$\varphi^{-1}(Q)$ を Q の φ による引き戻しという．$A \to S^{-1}A$ などの自然な準同型による $Q \in \operatorname{Spec} S^{-1}A$ の引き戻しは $Q \cap A$ と書いたりする．

以上のことについて次の結果が知られている．また注意として，命題 1.5.5 と同様の議論から A のイデアル I について $I \cap S = \emptyset$ となることと I が $S^{-1}A$ で生成するイデアルが真のイデアルであることは同値である．

命題 *1.6.4*

$\varphi : A \to B$ を準同型とし，$P \in \operatorname{Spec} A$ とする．$\varphi(P)$ が B で生成するイデアルを P' とかく．ある $Q \in \operatorname{Spec} B$ が存在して $\varphi^{-1}(Q) = P$ となることと，$\varphi^{-1}(P') = P$ となることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$P \subset \varphi^{-1}(P')$ は明らかなので逆を示そう．$x \in \varphi^{-1}(P')$ とすると $\varphi(x) \in P'$ である．ここで $\varphi(P) \subset Q$ なので $P' \subset Q$ だから $\varphi(x) \in Q$ である．よって $x \in \varphi^{-1}(Q) = P$ である．

$(\Longleftarrow)$

$\varphi^{-1}(P') = P$ と仮定する．$S = \varphi(A - P)$ とおくと，$P' \cap S = \emptyset$ である．すると $S^{-1}B$ において $P'S^{-1}B$ は真のイデアルとなり，それを含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ がとれる．$Q = \mathfrak{m} \cap B$ とおくと，$\varphi^{-1}(Q) = P$ である．実際，$P' \subset Q$ であるから $P \subset \varphi^{-1}(Q)$ は明らかで，$x \in \varphi^{-1}(Q)$ をとると $Q \cap S = \emptyset$ より $x \notin P$ ならば $\varphi(x) = Q \cap S$ となってしまうので $x \in P$ でなければならない．

（証明終）

環 A と $P \in \operatorname{Spec} A$ について P による局所化を施すと P に含まれていない素イデアルは取り除かれる．また，P による剰余を施すと P を含んでいない素イデアルは取り除かれていた．これを組み合わせることによって，A の P 以外の素イデアルを取り除くことができる．

定義 *1.6.5*（剰余体）

環 A と素イデアル P について，体 A_P/PA_P を $K(P)$ とかいて，A の P における**剰余体** (residue field) という．

$Q \subset P$ を素イデアルとしたときに，P による局所化と Q による剰余を組み合わせることで A の Q と P の間にある素イデアル以外をすべて取り除くことができることがわかるが，命題 1.5.9 によって A_P/QA_P と $(A/Q)_P$ が同型であるからその順序が関係ないことがわかる．よって $K(P)$ は $\operatorname{Frac}(A/P)$ と同型である（P の A/P における像は零イデアルであるから）．

多様体に対応するものが $\operatorname{Spec} A$ であると述べたが，代数幾何では関数の情報については**層** (sheaf) というものを使って考察する．詳細は省略するが，多様体上の層がわかればどういった関数が存在しているのかが

わかる．そしてその層は局所的な情報である茎 (stalk) を集めることで復元できる．要は局所的な stalk が大切だ，ということだが，$\operatorname{Spec} A$ 上の層についてはまさに素イデアルによる局所化 A_P がその stalk である．これで A_P について調べることの大切さがなんとなくわかっていただけると思う．

また A 加群 M が定める $\operatorname{Spec} A$ 上の層 $\widetilde{M}$ というものがあり，それらの貼り合わせは**準連接層** (quasi-coherent sheaf) と呼ばれ，非常に代数幾何で大切な対象である．その各点 P における stalk は M_P であり，M_P たちは $\widetilde{M}$ の本質的な情報を全て持っている．そこで次の定義をしよう．

定義 *1.6.6*（台，サポート）

A 加群 M の素イデアル P による局所化 M_P が 0 にならない P の集まりを；

$$\operatorname{Supp} M = \{P \in \operatorname{Spec} A \mid M_P \neq 0\}$$

とかき，M の台，サポート (support) という．

まずは $P \in \operatorname{Supp} M$ となることの簡単な言い換えを述べておく（証明は定義から明らかなので省略する）．

補題 *1.6.7*

$M_P \neq 0$ であることと，ある $x \in M$ が存在して，任意の $h \notin P$ について $hx \neq 0$ となることは同値．

M が有限生成なら，その生成系 $u_1, \dots, u_r$ について $hu_i = 0$ となる $h \notin P$ が存在するかだけ確かめれば十分であることに注意すると，次の形に整理できる．

命題 *1.6.8*

A 加群 M が A 上有限生成ならば，$V(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Supp} M$ である．

証明.

M の生成系を $u_1, \dots, u_r$ とする．対偶を考えて $\operatorname{Ann} M \not\subset P$ と $M_P = 0$ が同値であることを示せばよい．もし $\operatorname{Ann} M \not\subset P$ なら $h \notin P$ でありかつ $hM = 0$ となる h が存在するため，$M_P = 0$ である．また $M_P = 0$ とすると，特に u_i について $h_i \notin P$ が存在して $h_i u_i = 0$ である．すると $h = h_1 \dots h_r$ とおけば $h \notin P$ であって $h \in \operatorname{Ann} M$ となる．（証明終）

系 *1.6.9*

A のイデアル I に対して，$\operatorname{Supp}(A/I) = V(I)$ である．

この結果は幾何的にも重要であるが，それだけでなく純粋に環論でも大切である．詳細は素因子の節で述べることにしよう．

§7　射影加群と入射加群

準同型 $\varphi : N_1 \to N_2$ があったとする．この準同型は Hom 加群の間の準同型；

$$\varphi_* : \operatorname{Hom}_A(M, N_1) \to \operatorname{Hom}_A(M, N_2); f \mapsto \varphi \circ f$$

$$\varphi^* : \operatorname{Hom}_A(N_2, M) \to \operatorname{Hom}_A(N_1, M); f \mapsto f \circ \varphi$$

を引き起こす．それぞれ次のような状況である．

$$\begin{tikzcd} & N_2 \\ M \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\varphi\circ f"] & N_1 \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Figure.6

$$\begin{tikzcd} & N_1 \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, dashed, "f\circ\varphi"] \\ N_2 \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Figure.7

下付きの $*$ は写像の合成について共変的であることを，上付きのものは反変的であることを意味している．すなわち，加群の列；

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$$

について，下付きの $*$ を考えると；

$$\mathrm{Hom}_A(N, M_1) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_2) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_3)$$

が得られ，上付きを考えると；

$$\mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

が得られる．

これは圏の言葉を用いれば $\mathrm{Hom}(N, -)$ は共変関手，$\mathrm{Hom}(-, N)$ は反変関手であると表現できる．これらは左完全になることが知られている．

命題 *1.7.1*

A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

と，任意の A 加群 N に対して；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(N, M_1) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_2) \xrightarrow{\psi_*} \mathrm{Hom}_A(N, M_3)$$

は完全である．

同様に完全列；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

も完全である．証明はほぼ同じであるから，前者のみ示す．

証明.

まず，φ_* が単射であることを確かめよう．$\varphi\circ g = \varphi\circ g'$ とする．任意の $\in N$ に対し $\varphi(g(x)) = \varphi(g'(x))$ となり，φ が単射なので $g(x) = g'(x)$ すなわち $g = g'$ である．

さて，$\mathrm{Im}\,\varphi_* = \ker\psi_*$ を示せば良い．

1°) 任意の $f \in \mathrm{Im}\,\varphi_*$ を 1 つとる．ある $g \in \mathrm{Hom}_A(N, M_1)$ が存在して $f = \varphi\circ g$ とかけるので，$\psi_*(f) = \psi\circ\varphi\circ g$ であり，$\mathrm{Im}\,\varphi = \ker\psi$ だからこれは消える．よって $f \in \ker\psi_*$ である．

2°) 任意の $f \in \ker\psi_*$ を 1 つとる．$\psi\circ f = 0$ だから任意の $x \in N$ に対し $f(x) \in \ker\psi = \mathrm{Im}\,\varphi$ となり，φ が単射だから $f(x) = \varphi(y_x)$ となる $y_x \in M_1$ が一意に定まる．ゆえに $g : N \to M_1; x \mapsto y_x$ が well-defined であることがわかる．このとき $\varphi_*(g) = f$ である．

以上より，完全である．（証明終）

ここで ψ_* が全射であるとは限らないことに注意しよう．すなわち，上の命題について ψ が全射である仮定は不要である．同様に $\mathrm{Hom}(-,N)$ については φ が単射である仮定は不要である．では $\psi_*(\psi^*)$ が全射になる場合 (すなわち Hom が完全関手になるとき) について考えよう．

定義 *1.7.2*（射影加群，入射加群）

] 任意の A 加群の短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

に対し；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, M_3) \longrightarrow 0$$

が完全となるような A 加群 M を**射影加群** (projective module) という．双対的に；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_3, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M_1, M) \longrightarrow 0$$

が完全になるような M を**入射加群** (injective module) という．

先の議論より，M が射影加群であることは，任意の全射な $\psi \in \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3)$ と任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(M, M_3)$ に対し φ_* が全射, すなわち $\varphi \circ \widetilde{f} = f$ となる $\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_A(M, M_2)$ の存在と同値．この $\widetilde{f}$ を f の**持ち上げ** (lifting) という．同様に，M が入射加群であることは任意の単射な $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ と任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$ に対し φ^* が全射，すなわち $\widetilde{f} \circ \varphi = f$ となる $\widetilde{f}$ の存在と同値．これを f の**拡張** (expantion) という．それぞれ，下の図式が可換になる $\widetilde{f}$ の存在，ということに要約される．

圏論的に言えば，左完全関手 $\mathrm{Hom}(M, -)$ を完全にするものを射影加群，反変左完全関手 $\mathrm{Hom}(-, M)$ を完全にするものを入射加群という，ということになる．

$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "\psi"] & M_3 \arrow[r] & 0 \\ P \arrow[u, dashed, "\widetilde{f}"] \arrow[ur, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Figure.8　射影加群 P

$$\begin{tikzcd} & & I & \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \arrow[u, dashed, "\widetilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

Figure.9　入射加群 I

命題 *1.7.3*

自由加群は射影加群である．

証明.

$F = \bigoplus_{i \in I} A_{x_i}$ とする．$\psi \in \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3), f \in \mathrm{Hom}_A(F, M_2)$ とすると，ψ が全射なので $y_i \in \psi^{-1}(f(x_i))$ が存在し，それを適当に選んで $\widetilde{f}(x_i) = y_i$ とすると，基底の送り先を定めれば十分だから $\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_A(F, M_1)$ を得る．（証明終）

これは選択公理と同値である．$\psi^{-1}(f(x_i))$ の元を選んで $\widetilde{f}$ を構成してするときに選択公理を使っている．

定理 *1.7.4*

A 加群 M が射影的であることと，ある A 加群 N に対して $M \oplus N$ が自由であることは同値.

証明.

$(\Longrightarrow)$

M の生成系をとることで，自由 A 加群 F からの全射 $\varphi : F \to M$ が定まる．M が射影的なので $\mathrm{id} : M \to M$ の持ち上げ $f : M \to F$ が存在する．すなわち $\varphi \circ f = \mathrm{id}_M$ である．id が単射なので f も単射となり，これによって M を F の部分加群とみなす．次の準同型；

$$\psi : M \oplus \ker\varphi \to F; (x, y) \mapsto f(x) + y$$

が同型を与えることを示す.

1°) 単射であること.

$\psi(x, y) = f(x) + y = 0$ とする．これを φ で送ると定義から x となるが，0 の像は 0 なので $x = 0$ である．すると $\psi(x, y) = y = 0$ となり，$(x, y) = 0$ となる.

2°) 全射であること.

任意の $u \in F$ をとる．すると定義から $u - f(\varphi(u)) \in \ker\varphi$ なので，$\psi(\varphi(u), u - f(\varphi(u))) = u$ となる.

よって全単射となり，同型を与える.

$(\Longleftarrow)$

$F = M \oplus N$ とおく．全射な $\psi : M_2 \to M_3$ について $f : M \to M_3$ の持ち上げがあればよい.

$$g : F \to M_3; (x, y) \mapsto f(x)$$

を考えると，F は射影的なので g の持ち上げ $\widetilde{g} : F \to M_2$ が定まる．このとき $\widetilde{g}|_M$ が f の持ち上げとなる．実際，$\psi \circ \widetilde{g}|_M(x) = \psi \circ \widetilde{g}(x) = g(x) = f(x)$ となる.

（証明終）

定理 *1.7.5*

射影加群は平坦である.

証明.

P を射影加群とする．P はある自由加群の直和因子だから，F を自由として $F = P \oplus N$ とする．$F \cong A^{\oplus\Lambda}$ とすると；

$$F \otimes M \cong \bigoplus_{\lambda}(A \otimes M) = \bigoplus_{\lambda} M$$

より，$\mathrm{id}_F \otimes \eta : F \otimes M_i \to F \otimes M_2$ も単射．また $F \otimes M \cong (P \otimes M) \oplus (N \otimes M)$ より $P \otimes M_1 \to P \otimes M_2$ に制限しても単射.

（証明終）

§8　環の直積

定義 *1.8.1*（直積環）

$\{A_i\}_{i\in I}$ を環の族とする．集合としての直積 $\prod_{i\in I} A_i$ には，各成分ごとの和，積を考えることで環構造が入る．これを**直積環** (product ring) という．$\prod A_i$ の元で，第 i 成分が 1 であり，それ以外の成分は 0 であるものを e_i とかく．

単位元はすべての成分が 1 である元であり，各 A_i が可換ならば直積も可換になる．また，e_i たちはベキ等元であることに注意しよう．この元を考えることで，直積について次が成り立つことがわかる．

命題 *1.8.2*

直積環 $\prod A_i$ は整域になり得ない．

証明.

$i \neq j$ とすると e_i, e_j はどちらも 0 でなく，$e_ie_j = 0$ である．（証明終）

実際にある環が直積であることを与える例として（それだけでなく，初等整数論における定理の一般化として）つぎの**中国剰余定理** (Chinese Remainder Theorem) が有名である．

定理 *1.8.3*（中国剰余定理）

A を環とし，$I_1, \ldots, I_r$ を A のイデアルとする．どの $k \neq l$ についても I_k, I_l が互いに素，すなわち $I_k + I_l = A$ を満たすならば，次の準同型；

$$\varphi : A/\cap_{k=1}^{r} I_k \to A/I_1 \times \cdots \times A/I_r ; a + \bigcap I_k \mapsto (a + I_1, \ldots, a + I_r)$$

は環同型である．

証明.

まず $r = 2$ のときに示す．φ の単射性は明らかなので，全射性について議論しよう．任意の $(a+I_1, b+I_2) \in A/I_1 \times A/I_2$ をとる．$I_1 + I_2 = A$ なので，ある $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2$ が存在して $x_1 + x_2 = 1$ である．このとき $(bx_1 + ax_2) + I_1 = ax_2 + I_1 = a(1 - x_1) + I_1 = a + I_1$ である．I_2 についても同様．よって $\varphi(bx_1 + ax_2 + I_1 \cap I_2) = (a + I_1, b + I_2)$ である．これより同型 $A/(I_1 \cap I_2) = A/I_1 \times A/I_2$ が示された．

イデアルが 3 つ以上の場合には，$I_1 \cap I_2$ と I_3 も互いに素になる．実際 $x_1 + x_3 = 1, x_2 + x_3' = 1$ となる $x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, x_3, x_3' \in I_3$ をとると；

$$x_1x_2 + (x_2x_3 + x_1x_3' + x_3x_3') = 1 \quad (x_1x_2 \in I_1 \cap I_2, (x_2x_3 + x_1x_3' + x_3x_3') \in I_3)$$

である．よって $A/(I_1 \cap I_2 \cap I_3) \cong A/I_1 \times A/I_2 \times A/I_3$ となり，以下帰納的に続ければよい．（証明終）

主に有限直積，とくに 2 つの環の直積であるときを考えよう（3 つ以上のときは $A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3$ であるから同様に議論できる）．

命題 *1.8.4*

A を環とすると，次は同値である．

(i) A は環の直積 $A_1 \times A_2$ と同型である．
(ii) $e_1, e_2 \in A$ が存在して，それぞれ $e_i^2 = e_i$ であり，$e_1 + e_2 = 1, e_1e_2 = 0$ を満たす．

証明.

($\Longrightarrow$) は明らか．(ii) を仮定しよう．次の準同型；

$$\varphi : A \to A/(e_1) \times A/(e_2); x \mapsto (x + (e_1), x + (e_2))$$

が環同型となる．実際 $x \in \ker\varphi$ とすると $x \in (e_1)$ かつ $x \in (e_2)$ であるので，ある $a_1, a_2 \in A$ が存在して $x = a_1e_1 = a_2e_2$ とかける．すると，各辺に e_1 を掛けることで $x = a_1e_1 = 0$ が従う．よって φ は単射であり，また任意の $(x+(e_1), y+(e_2))$ について，xe_2+ye_1 を考えると $xe_2+ye_1-x = x(1-e_2)+ye_1 = xe_1+ye_1 \in (e_1)$ である．同様に $xe_2 + ye_1 - y \in (e_2)$ より，$\varphi(xe_2 + ye_1) = (x + (e_1), y + (e_2))$ であることがわかる．以上より φ は環同型を与える．（証明終）

さて，環の直積 $\prod A_i$ があったとき，自然な射影 $\pi_i : \prod A_i \to A_i$ が存在する．これは環の全準同型であり，スキームの閉移入 $\pi_i^* : \operatorname{Spec} A_i \to \operatorname{Spec} \prod A_i; P \mapsto \pi^{-1}(P)$ を与える（幾何的にはこれはスキームの閉移入になる）．これによって有限直積については Spec の構造を決定できる．素イデアルの直積は素イデアルにならないことに注意しよう．

命題 *1.8.5*

A_1, A_2 を環とする．$\operatorname{Spec}(A_1 \times A_2)$ は，$P_1 \in \operatorname{Spec} A_1$ と $P \times \operatorname{Spec} A_2$ を，$P_2 \in \operatorname{Spec} A_2$ と $A_1 \times P_2$ を同一視することで $\operatorname{Spec} A_1 \sqcup \operatorname{Spec} A_2$ と一致する．

証明.

$A = A_1 \times A_2$ とおく．$P \in \operatorname{Spec} A$ について，$e_1e_2 = 0 \in P$ より，$e_1 \in P$ または $e_2 \in P$ である．$e_1 + e_2 = 1$ であるので，$e_1 \in P$ かつ $e_2 \in P$ となることはない．ここでは $e_1 \in P$ と仮定する．このとき $\pi_2^{-1}(\pi_2(P)) = P$ であり，$\pi_2(P) \in \operatorname{Spec} A_2$ であることを示そう．このとき $\pi_2(P) = P_2$ とおけば $P = A_1 \times P_2$ とかける．

さて，$P \subset \pi_2^{-1}(\pi_2(P))$ は明らかなので，逆を示す．$(a_1,\ a_2) \in \pi_2^{-1}(\pi_2(P))$ とすると，$\pi_2(a_1, a_2) = a_2 \in \pi_2(P)$ なので，ある $a_1' \in A_1$ が存在して $(a_1', a_2) \in P$ である．すると $(a_1', 0) = a_1'e_1 \in P$ であるので，$(0, a_2) \in P$ である．これは $(a_1, a_2) = a_1e_1 + (0, a_2) \in P$ を導く．よって $\pi_2^{-1}(\pi_2(P)) = P$ である．また，次の環の同型；

$$A/P = A/\pi_2^{-1}(\pi_2(P)) = A_2/\pi_2(P)$$

より，$A_2/\pi_2(P)$ は整域となり $\pi_2(P) \in \operatorname{Spec} A_2$ である．

$e_2 \in P$ のときは，同様に $P_1 \in \operatorname{Spec} A$ を用いて $P = P_1 \times A_2$ とかける．（証明終）

これは有限個の場合に拡張できる．すなわち次が成り立つ（証明は略）．

命題 *1.8.6*

環の有限直積 $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ について，任意の $P' \in \operatorname{Spec} A$ は，ある $1 \leq i \leq n$ と $P \in \operatorname{Spec} A_i$ により $P' = \pi_i^{-1}(P)$ とかける．すなわち；

$$\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} A_1 \sqcup \operatorname{Spec} A_2 \sqcup \cdots \sqcup \operatorname{Spec} A_n$$

である．

では，無限直積の場合はどうだろうか？実は成り立たないことが知られている．そのために補題を考えよう．

補題 *1.8.7*

環の無限直積 $A = \prod_{i \in I} A_i$ について，各 $i \in I$ に対し，$\{e_i\}_{i \in I}$ の生成する A のイデアル I_0 は A よりも真に小さい．

証明．

任意の $x \in I_0$ をとると，有限個の $i_1, \ldots, i_s \in I$ が存在して；

$$x = a_1 e_{i_1} + a_2 e_{i_2} + \cdots + a_s e_{i_s}$$

とかける．これに e_{i_j} をかけると，x の i_j 成分は a_j であることがわかる．また，i_{s+1} を $i_1, \ldots, i_s$ のどれとも違うものとすれば，x の i_{s+1} 成分は 0 である．よって，A の単位元 1 は I_0 に含まれない．（証明終）

命題 *1.8.8*

環の無限直積 $A = \prod_{i \in I} A_i$ について，$P \in \operatorname{Spec} A$ が存在して，P は $\pi_i^{-1}(P_i), P_i \in \operatorname{Spec} A_i$ の形で表せない．

証明．

補題と同じ記号を用いる．イデアル I_0 を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとる．すると，すべての $i \in I$ に対し $e_i \in \mathfrak{m}$ である．ここで，任意の $j \in I$ に対して，任意の $P_j \in \operatorname{Spec} A_j$ をとると，P_j は A_j の単位元を含まないから $e_j \notin \pi_j^{-1}(P_j)$ である．よって $\mathfrak{m} \neq \pi_j^{-1}(P_j)$ となる．（証明終）

§9　GCD 整域と原始多項式

体上の多変数多項式は PID ではなかったが，UFD であることを示すことができる．そのために次の定義を導入しよう．

定義 *1.9.1*（GCD 整域）

整域 A であって，任意の２つの $x, y \in A$ が最大公約元を必ず持つとき，A を GCD 整域 (GCD domain) という．

既約分解することで UFD は GCD 整域であることがわかる．

定義 *1.9.2*（内容，原始多項式）

A を GCD 整域とする．$f(X) = a_nX^n + \cdots + a_0 \in A[X]$ について $a_n, \ldots, a_0$ の最大公約元を $c(f)$ とかき，f の内容 (content) という．$c(f)$ が単元であるとき，f は原始的 (primitive) であるという．

x，$y \in A$ について，ある $u \in A^\times$ が存在して $x = uy$ とかけるとき x，y は同伴である，と定義したことを思い出そう．この節ではこのことを $x \sim y$ と書くことにする．

補題 *1.9.3*（Gauss の補題）

A を GCD 整域とする．$f, g \in A[X]$ について $c(fg) \sim c(f)c(g)$ が成り立つ．

証明.

$f = c(f)f_0, g = c(g)g_0$ と分解すると f_0, g_0 は原始的である．また；

$$c(fg) \sim c(c(f)c(g)f_0g_0) \sim c(f)c(g)c(f_0g_0)$$

であるので f, g は原始的であると仮定してよい．$f = a_nX^n + \cdots + a_0, g = b_mX^m + \cdots + b_0$ とおく．$fg = c_{n+m}X^{n+m} + \cdots + c_0$ とおき，$n + m$ についての帰納法で示す．$c(fg) = \gcd(c_{n+m}, \ldots, c_0)$ であるが，これは；

$$\gcd(a_n, c_{n+m-1}, \ldots, c_0) \gcd(b_n, c_{n+m-1}, \ldots, c_0)$$

を割り切る．ここで，GCD 整域において $\gcd(x, y_1, \ldots, y_n) \sim \gcd(x, y_1 + zx_1, \ldots, y_n + zx_n)$ であることから；

$$\gcd(a_n, c_{n+m-1}, \ldots, c_0) \sim \gcd(a_n, c_{n+m-1} - a_nb_{m-1}, \ldots, c_n - a_nb_0, c_{n-1}, \ldots, c_0) \sim \gcd(a_n, c((f - a_nX^n)g))$$

である．$\deg(f - a_nX^n)g < n + m$ であるから，帰納法の仮定より；

$$c((f - a_nX^n)g) \sim c(f - a_nX^n)c(g) \sim c(f - a_nX^n) = \gcd(a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

であるので，$\gcd(a_n,\ c_{n+m-1}, \ldots, c_0) \sim c(f)$ である．同様に $\gcd(b_m, c_{n+m-1}, \ldots, c_0) \sim c(g)$ であるので，$c(fg)$ は単元の約元である．よって $c(fg)$ も単元である．（証明終）

命題 *1.9.4*

A は GCD 整域とする．$p \in A$ が A で素元であることと，$A[X]$ において素元であることは同値.

証明.

p は A の素元とする．$f, g \in A[X]$ をとり，$fg \in pA[X]$ であるとする．ある $h \in A[X]$ が存在して $fg = ph$ となるので，Gauss の補題より $pc(h) \sim c(f)c(g)$ となる．p は A の素元なので $c(f) \in pA$ または $c(g) \in pA$ であり，これは $f \in pA[X]$ または $g \in pA[X]$ を意味する．（証明終）

補題 *1.9.5*

A を GCD 整域とし，K をその商体とする．$f \in A[X]$ が原始的であるとき，f が $A[X]$ で素元であることと $K[X]$ において素元であることは同値.

証明.

$(\Longrightarrow)$

$g, h \in K[X], gh \in fK[X]$ とする．ある $q \in K[X]$ が存在して $gh = fq$ である．g, h, q の分母を払い $ag, bh, dg \in A[X]$ とする．$ag = c(ag)g_0, bh = c(bh)h_0, dq = c(dq)q_0$ とすると，Gauss の補題から $dc(ag)c(bh) \sim abc(dq)$ であるので，$g_0 h_0 \sim q_0 f$ である．f は $A[X]$ で素元なので $g_0 \in fA[X]$ または $h_0 \in fA[X]$ である．よって $g \in fK[X]$ または $h \in fK[X]$ が従う.

$(\Longleftarrow)$

$g, h \in A[X], gh \in fA[X]$ とする．$K[X]$ の元とみなせば素元であるので，$g \in fK[X]$ または $h \in fK[X]$ が成り立つ．$g \in fK[X]$ としよう．ある $\varphi \in K[X]$ が存在して $g = \varphi f$ となる．分母を払い $a\varphi \in A[X]$ とすると，内容をとって $ag = c(a\varphi)\varphi_0 f$ となる．Gauss の補題より $c(ag) = ac(g) \sim c(a\varphi)$ となる．よって $a\varphi = c(a\varphi)\varphi_0 \sim ac(g)\varphi_0$ より $\varphi \sim c(g)\varphi_0$ であるので，$\varphi \in A[X]$ である．よって $g \in fA[X]$ である．$h \in fk[X]$ のときも同様.

（証明終）

これらの準備によって次が示される.

定理 *1.9.6*

A が UFD であることと $A[X]$ が UFD であることは同値である.

証明.

A が UFD なら $A[X]$ もそうであることを示せばよい．$f = c(f)f_0 \in A[X]$ をとる．A の商体を K とおき，$K[X]$ で $f_1 = p_1 \ldots p_n$ と素元分解する．分母を払って $a_i p_i = c(a_i p_i) p_{i,0}$ とかける．ここで $p_{i,0}$ は原始的で，$K[X]$ において p_i と同伴なので素元である．よって補題から $A[X]$ でも素元．積をとって $a_1 \ldots a_n f_1 = c(a_1 p_1) \ldots c(a_n p_n) p_{1,0} \ldots p_{n,0}$ となるから，内容をとって $f_1 \sim p_{1,0} \ldots p_{n,0}$ となる．これは $A[X]$ における f_1 の素元分解を与える．A は UFD だから $c(f)$ も素元分解でき，よって f を分解できる．よって $A[X]$ は UFD である.　（証明終）

系 *1.9.7*

UDF 上の n 変数多項式環は UFD である.

§10　素イデアル避け (Prime avoidance)

補題 *1.10.1*（Prime avoidance）

環 A のイデアル $P_1, \ldots, P_n$ で，素イデアルでないものは高々 2 つしかないとする．A のイデアル I が $I \subset \bigcup_{i=1}^n P_i$ を満たすならば，ある i について $I \subset P_i$ である.

Prime avoidance，素イデアル避けという名前の由来は対偶；

$$\{P_i\} \text{ に対して，すべての } i \text{ について } I \not\subset P_i \text{ ならば } I \not\subset \bigcup_{i=1}^n P_i$$

に由来する.

証明.

反例 $I, P_1, \ldots, P_n$ があるとする．そのなかでも n が最小なものを取ろう．$n = 1$ ではありえないので $n \geq 2$ である．

(i) $n = 2$ のとき．

$I \not\subset P_1, P_2$ より $a_1, a_2 \in I$ を $a_2 \notin P_1, a_1 \notin P_2$ となるようにとれる．このとき $I \subset P_1 \cup P_2$ なので，$a_1 \in P_1, a_2 \in P_2$ である．$a = a_1 + a_2$ とおくと，もし $a \in P_1$ ならば $a_2 = a - a_1 \in P_1$ となり矛盾．$a \in P_2$ のときも同様．よって $a \notin P_1 \cup P_2$ であるが，これも矛盾である．

(ii) $n \geq 3$ のとき．

P_i たちの中に素であるものが少なくとも 1 つ存在するので，それを並べ替えて $P_1 \in \operatorname{Spec} A$ とする．ここで，各 i について $I, \{P_i\}_{i \neq j}$ は反例になりえないので，$I \notin \bigcup_{j \neq i} P_j$ が成り立つ．よって，ある $a_i \in I$ をとって，$a_i \notin \bigcup_{j \neq i} P_i, a_i \in P_i$ となるようにできる．$a = a_1 + a_2 a_3 \ldots a_n$ とおくと，$a \in I$ であって，$a \notin \bigcup_{i=1}^n P_i$ であることを示そう．

$a \in P_1$ ならば $a_2 \ldots a_n \in P_1$ だが，これは P_i が素なので，$i \geq 2$ について $a_i \notin P_1$ であることに矛盾．また $i \geq 2$ について $a \in P_i$ ならばやはり $a_1 \in P_1$ となり矛盾する．よって $I \not\subset \bigcup P_i$ となり，仮定に反する．

（証明終）

> **定理 *1.10.2*（Davis の補題）**
> 環 A の素イデアル $P_1, \ldots, P_n$ に対して，ある $a \in A$ とイデアル I が存在して $(a) + I \not\subset \bigcup_{i=1}^n P_i$ ならば，ある $x \in I$ を選んで $a + x \notin \bigcup_{i=1}^n P_i$ であるようにできる．

定義から，ある $c \in A, x \in I$ を選べば $ca + x \notin \bigcup P_i$ とでき，$c = 0$ で a が消えてしまうこともありえるが，この定理は $c = 1$ とすることができる，と主張しているところが強力である．

証明.

n についての帰納法で示す．

Step 1. $n = 1$ のとき．

対偶を考える．任意の $x \in I$ について $a + x \in P_i$ ならば，$x = 0$ とすると $a \in P_i$ となり，$(a) + I \subset P_1$ である．

Step 2. $n - 1$ まで正しいとする．

任意の $1 \leq i \leq n - 1$ について，$P_i \not\subset P_n$ としてよい．よって $\prod_{i=1}^{n-1} P_i \not\subset P_n$ である．さて，$(a) + I \not\subset \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$ より，帰納法の仮定からある $y \in I$ をとって $a + y \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} P_i$ とできる．もし $a + y \notin P_n$ ならば y が求める元となり証明が終了する．$a + y \in P_n$ だったとき，$a + x \notin \bigcup_{i=1}^n P_i$ となる $x \in I$ を構成しよう．ここで，$I \not\subset P_n$ である．もし $I \subset P_n$ ならば $a + y \in P_n$ より $a \in P_n$ t なり $(a) + I \subset P_n$ となるので，これは仮定に反する．また，$\prod_{i=1}^{n-1} P_i \not\subset P_n$ であったので，P_n は素だから $I \prod_{i=1}^{n-1} P_i \not\subset P_n$ である．そこで，$z \in I \prod_{i=1}^{n-1} P_i$ を $z \notin P_n$ であるようにとれる．$x = y + z$ とおくと，$a + x \notin \bigcup_{i=1}^n P_i$ である．実際，任意の $1 \leq i \leq n - 1$ について $a + y \notin P_i$ であって，$z \in P_i$ なので，$a + x \notin P_i$ である．また $a + y \in P_n$ で $z \notin P_n$ なので $a + x \in P_n$ である．

（証明終）

Davis の補題を指して Prime avoidance ということもある．応用例として，次の事実；

A が整域なら $(x) = (y)$ であることと x と y が同伴であることは同値.

について，A について整域以外の条件を課して成り立つかどうかを考えてみよう．端的に言えば半局所環で成り立つことを示せる．

命題 *1.10.3*

A を半局所環とすると，$(x) = (y)$ であることと x と y が同伴であることは同値である．

証明.

ある $a \in A$ が存在して $y = ax$ とかける．また A が半局所環なので $\operatorname{Spm} A = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$ とおくことができる．$(a) \subset \mathfrak{m}_i$ となる極大イデアルについて，局所環 $A_{\mathfrak{m}_i}$ を考える．A のイデアルとして $(x) = (a)(x)$ であり，$(x)A_{\mathfrak{m}_i} = (a)A_{\mathfrak{m}_i}(x)A_{\mathfrak{m}_i}$ かつ $(x)A_{\mathfrak{m}_i}$ は有限生成 $A_{\mathfrak{m}_i}$ 加群である．また $\operatorname{rad} A_{\mathfrak{m}_i} = \mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}$ であるので，$(a)A_{\mathfrak{m}_i}$ は $A_{\mathfrak{m}_i}$ の Jacobson 根基に含まれるイデアルである．よって中山の補題（定理 1.2.17）より $(x)A_{\mathfrak{m}_i} = 0$ である．よって $\operatorname{Ann}(x) \not\subset \mathfrak{m}_i$ である．ゆえに $(a) + \operatorname{Ann}(x) \not\subset \mathfrak{m}_i$ が成り立つ．また，$(a) \not\subset \mathfrak{m}_j$ となる $\mathfrak{m}_j$ に対して明らかに $(a) + \operatorname{Ann}(x) \not\subset \mathfrak{m}_j$ である．よって Davis の補題（定理 1.10.2）から，ある $b \in \operatorname{Ann}(x)$ が存在して $a + b \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$ である．よって $a + b$ は A の単元である．また，$x(a+b) = ax = y$ であるので，x と y は同伴である．　　（証明終）

第2章　Noether性

—Noetherian properties

§1　極大条件と極小条件

Noether 環の定義は先に述べたとおりだが，まずはそれを加群についても考えてみよう．

命題 *2.1.1*

A 加群 M について次は同値である．

(i) M の任意の部分加群は有限生成である．

(ii) M の任意の部分加群の増大列；

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_i \subset \cdots$$

は必ず停まる．

(iii) M の部分加群からなる空でない族は，包含に関する極大元を持つ．

証明は環の場合を適切に修正すれば良いので省略する．これらの条件を満たす加群を Noether 加群という．環 A の部分 A 加群はイデアルにほかならないので，この定義は Noether 環の自然な拡張である（A を A 加群とみなすと，A が Noether 加群なら A は Noether 環，A が Noether 環なら A は Noether 加群である）．

(ii) の条件を**昇鎖条件** (ascending chain condition) といい，ACC と略す．包含の大小を逆にして；

$$N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_i \supset \cdots$$

が停まるような M を Artin 加群という．これを**降鎖条件** (descending chain condition，DCC) といい，M の部分加群の空でない族は包含に関する極小元を持つことと同値である．

Noether 性，Artin 性は環とは違って部分加群に遺伝する．これは明らかであろう．

命題 *2.1.2*

短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

について，M_2 が Noether 加群であることと，M_1 と M_3 が Noether 加群であることは同値．

証明.

$(\Longrightarrow)$

準同型は包含関係を保存するからわかる（f の単射性と g の全射性に気をつける）．

$(\Longleftarrow)$

M_2 の部分加群による増大列；

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_i \subset \cdots$$

を考える．M_1，M_3 の部分加群の列；

$$f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2) \subset \cdots \subset f^{-1}(N_i) \subset \cdots$$

$$g(N_1) \subset g(N_2) \subset \cdots \subset g(N_i) \subset \ldots$$

を考えると，M_1，M_3 の ACC からある共通の n がとれて，$n \leq i$ に対し；

$$f^{-1}(N_n) = f^{-1}(N_i), g(N_n) = g(N_i)$$

となる．$N_i \subset N_n$ を示せば十分である．$x \in N_i$ とすると，$g(x) = g(N_i) = g(N_n)$ よりある $y \in N_n$ が存在して $g(x) = g(y)$ なので，$x - y \in \ker g = \operatorname{Im} f$ だからある $z \in M_1$ により $x - y = f(z)$ とできる．ここで $N_n \subset N_i$ だから $x - y \in N_i$ すなわち $z \in f^{-1}(N_i) = f^{-1}(N_n)$ なので，$x - y = f(z) \in N_n$ である．ゆえに $x \in N_n$ となる．

（証明終）

適切に置き換えることで Artin 環についても同様の性質が成り立つ．

命題 *2.1.3*

A が Noether 環であることと，任意の有限生成 A 加群が Noether であることは同値．

証明.

片方は明らかなので，($\Longrightarrow$) を示す．まず完全列；

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^n \longrightarrow A^{n-1} \longrightarrow 0$$

において，$n = 2$ のときを考えると先の命題から A^2 は Noether である．帰納的にすべての A^n が Noether であることが従う．さて M が A 上有限生成な加群であるとすると，ある $n \in \mathbb{N}$ に対し全射 $f : A^n \to M$ が存在する．すると；

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow A^n \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

が完全であり，A^n が Noether なので再び先の命題から M は Noether である．（証明終）

Noether 加群と Artin 加群について例を見てみよう．

例 2.1.4

$\mathbb{Z}$ 加群として $\mathbb{Z}$ は Noether だが Artin でない．実際 $\mathbb{Z}$ は PID だから Noether 環なので，$\mathbb{Z}$ 加群としても Noether．一方；

$$2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset \cdots \supset 2^i\mathbb{Z} \supset \cdots$$

は停止しない減少列をなす．

例 2.1.5

$\mathbb{Z}[1/p] = \left\{x/p^n \;\middle|\; x \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ に自然な演算を入れて $\mathbb{Z}$ 加群とみる．ここで $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ を考えると，これは Artin だが Noether でない．次の $\mathbb{Z}[1/p]$ の部分加群の列；

$$\mathbb{Z} \subset \frac{\mathbb{Z}}{p} \subset \frac{\mathbb{Z}}{p^2} \subset \cdots \subset \frac{\mathbb{Z}}{p^n} \subset \cdots \tag{$*$}$$

を考えよう．このとき $x/p^n - y/p^n \in \mathbb{Z}$ であることは $x - y \in p^n\mathbb{Z}$ と同値なので $(\mathbb{Z}/p^n)/\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})/p^n$ となる．このことから $\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ の部分加群の列；

$$0 \subset \frac{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}{p} \subset \frac{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}}{p^2} \subset \cdots \subset \frac{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}}{p^n} \subset \cdots$$

ができ，これは停まらない増大列をなす．よって Noether ではない．

ここで N を $\mathbb{Z}[1/p]$ の部分加群とする．すると列 $(*)$ のどれか隣り合う項の間に N が存在する．ここで $\mathbb{Z}/p^n \subset N \subset \mathbb{Z}/p^{n+1}$ としよう．$\mathbb{Z}$ の部分加群は $k\mathbb{Z}$ に限るので $N = k\mathbb{Z}/p^{n+1}$ とかける．もし k と p が互いに素でないなら分母の次数が退化するので $(k,\ p) = 1$ のときに考えれば十分である．

このとき $(k\mathbb{Z}/p^{n+1})/\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})/p^{n+1}$ を示す．先と同様に $(k\mathbb{Z}/p^{n+1})/\mathbb{Z} = (k \cdot \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})/p^{n+1}$ が言える．ここで次の準同型；

$$\varphi : \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to k \cdot \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}; \bar{i} \mapsto \overline{ki}$$

を考えると $(k, p) = 1$ よりこれは全単射である．よって $k \cdot \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ が言えるので，$\mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ の部分加群はすべて $(\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z})/p^{n+1}$ の形をしていることがわかった．ゆえに部分加群の減少列は必ず停止するので Artin 加群である．

逆に，環については Artin 環は Noether 環となる．そのことは次の節で示すことにして，Noether 性についてもうすこし考察しよう．

命題 *2.1.6*

忠実かつ Noether な加群を持つ環は Noether 環である．

証明.

M を忠実な Noether 加群とする．特に M は有限生成で，$u_1, \ldots, u_n$ をその生成系とする．このとき準同型；

$$\varphi : A \longrightarrow M^n; a \longmapsto (ax_1,\ \ldots,\ ax_n)$$

について $\ker\varphi = \mathrm{Ann}(M)$ であるので $\ker\varphi = 0$ となり，φ は単射．よって A は Noether 加群 M^n の部分加群と同型なので，A は Noether 加群である．（証明終）

この定理において忠実という条件を外すと，次の命題が同様の手法で得られる．

命題 *2.1.7*

A 加群 M が Noether 加群ならば $A/\mathrm{Ann}(M)$ も Noether である．

定理 *2.1.8*（Formanek, 1973）

A を環とし，B を有限生成かつ忠実な A 加群とする．A のイデアル I に対し，IB の形の部分加群のなす集合が極大条件を満足すれば，A は Noether 環である．

証明.

背理法で示す．命題 2.1.6 より B が Noether であればよいので，B が Noether でないと仮定しよう．すると；

$$0 \in \Sigma = \left\{ IB \,\middle|\, I \text{ は } A \text{ のイデアルで}, B/IB \text{ は Noether でない} \right\} \neq \emptyset$$

より，仮定から極大元 IB がとれる．$\overline{B} = B/IB, \overline{A} = A/\mathrm{Ann}(\overline{B})$ とすると，対応定理から 0 でない $\overline{A}$ の任意のイデアル $\overline{J}$ に対し $\overline{B}/\overline{JB}$ は $\overline{A}$ 加群として Noether である（$\overline{J}$ は $\overline{A}$ のイデアルなので $I \subset J$ より B/JB が Noether）．また，$\overline{A}, \overline{B}$ は定理の仮定を満たす（$\overline{A}, \overline{B}$ は Σ の極大元を 0 になるように潰したものと考えることができる）．

次に，$\Gamma = \left\{ N \,\middle|\, N \text{ は} \overline{B} \text{の部分加群}, \overline{B}/N \text{ は忠実} \right\}$ とおくと，$\overline{B}/N$ が忠実であることは，$\overline{B}$ の生成系 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に対し，任意の 0 でない $x \in A$ が $xu_i \notin N$ を満たすことであるので，Γ は帰納的順序集合をなす．Zorn の補

題から極大元 N_0 がとれる．ここで，$\overline{B}/N_0$ が Noether であるとすると，命題 2.1.6 から $\overline{A}$ は Noether となる．よって $\overline{B}$ は有限生成だから Noether となり，仮定に反するので $\overline{B}/N_0$ は Noether でない．$\overline{B}' = \overline{B}/N_0$ とおくと，次の性質を満たす（これも Γ の極大元を 0 にすることに相当する）．

(i) $\overline{B}'$ は $\overline{A}$ 加群として Noether でない．
(ii) I が 0 でない $\overline{A}$ のイデアルなら，$\overline{B}'/I\overline{B}'$ は Noether.
(iii) N が 0 でない $\overline{B}'$ の部分加群なら，$\overline{B}'/N$ は A 加群として忠実でない．

ここで，N を任意の $\overline{B}'$ の部分加群とする．(iii) より，ある 0 でない $x \in \overline{A}$ が存在して $x(\overline{B}'/N) = 0$，すなわち $x\overline{B}' \subset N$ である．すると，(ii) より $\overline{B}'/x\overline{B}'$ は Noether だから，その部分加群 $N/x\overline{B}'$ は有限生成で，$x\overline{B}'$ も有限生成なので N も有限生成．よって $\overline{B}'$ は Noether 加群となるが，これは (i) に矛盾している．（証明終）

系 *2.1.9*（Eakin-永田，1968）

B は Noether 環，A をその部分加群とする．B が A 上有限生成なら，A は Noether 環である．

§2　Artin 性

この節では Artin 性について，特に Artin 環が Noether 環であることを示そう．

命題 *2.2.1*

Artin 環の素イデアルは極大イデアルであり，それは有限個しかない（半局所環である）．

証明.

A を Artin 環とし，P を A の素イデアルとする．A/P が体であることを示そう．$0 \neq x \in A/P$ をとる．すると；

$$0 \neq (x) \supset (x^2) \supset \cdots$$

はイデアルの降鎖列をなし，A/P は Artin なのでこれは停まる．するとある n が存在して $(x^n) = (x^{n+1})$ であるから，ある $y \in \overline{A}$ があって $x^n = yx^{n+1}$ である．よって $x^n(1 - xy) = 0$ であり，A/P は整域で $x \neq 0$ なので $xy = 1$ となり x は可逆．よって体である．

次に有限個であることを見よう．$\mathrm{Spm}\, A$ を A の極大イデアル全体のなす集合とする．

$$S = \{\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n \mid n \in \mathbb{Z}_+, \mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, A\}$$

とおくと，これは A のイデアルの族となるので極小元 $I = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r$ が存在する。このとき任意の $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, A$ に対し $\mathfrak{m} \cap I \in S$ であるので，$\mathfrak{m} \cap I = I$ となり $I \subset \mathfrak{m}$ である．ここで各 $1 \leq i \leq r$ に対し $\mathfrak{m}_i \not\subset \mathfrak{m}$ であると仮定すると，それぞれ $x_i \in \mathfrak{m}_i \cap \mathfrak{m}^c$ が存在して $\mathfrak{m}$ が素イデアルなので $x_1x_2 \ldots x_r \notin \mathfrak{m}$ であるが，$x_1x_2 \ldots x_r \in I \subset \mathfrak{m}$ なので矛盾．よって少なくとも 1 つの $1 \leq j \leq r$ が存在して $\mathfrak{m}_j \subset \mathfrak{m}$ である．すると $\mathfrak{m}_j$ は極大なので $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_j$ である．よって $\mathrm{Spm}\, A$ は I の成分に現れる有限個の素イデアルのみからなる．（証明終）

Noether, Artin 性は "鎖" についての性質である．ここである種の極大性を満たす鎖について考察しよう．

定義 *2.2.2*（組成列）

A 加群 M の部分加群の有限列；

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq \cdots \supsetneq M_r = 0$$

において各 M_i, M_{i+1} の間に他の部分加群が存在しないとき，この列を M の**組成列** (composition series) といい，各 M_i/M_{i+1} を組成列の**組成因子** (composition factors) という．

この条件は各 M_i/M_{i+1} が自明でない部分加群を持たないことと言い換えることができる．

定義 *2.2.3*（単純加群）

A 加群 $M \neq 0$ が M と 0 以外に部分加群を持たないとき，**単純** (simple) であるという．

この用語のもとで，組成列とは M_i/M_{i+1} がすべて単純であるような M の部分加群の減少列のことである．

有限群については部分加群を正規部分群と読み替えることで同様の定義ができ，組成列については Jordan–Hölder の定理という大定理が知られている．全く同様のことが加群でも成り立つ．

定理 *2.2.4*（Jordan–Hölder）

加群 M が組成列を持つなら，任意の組成列は長さが等しく，組成因子も順序と同系の違いを除いて等しい．

ここでは長さが一定であることのみ示そう（組成因子の同型については有限群の場合の証明が適応できる）．

証明．

M の組成列の長さの最小値を $\ell(M)$ とする．

Step 1. M の真の部分加群 N に対し，$\ell(N) < \ell(M)$ であること．

$\ell(M) = r$ とおく．M の組成列 $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0$ に対し，$N_i = M_i \cap N$ とおく．

$$N_i/N_{i+1} = (M_i \cap N)/(M_{i+1} \cap N) \subset M_i/M_{i+1}$$

より，M_i/M_{i+1} が単純だから $N_i/N_{i+1} = 0$ $(N_i = N_{i+1})$ または $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$ である．すなわち N_i の重複を除けば，それは N の組成列となる．よって，$\ell(N) \leq \ell(M)$ である．また，$\ell(N) = \ell(M)$ とすると，任意の i に対し $N_i \neq N_{i+1}$ であるから $N_i/N_{i+1} = M_i/M_{i+1}$ となるので，$N_{r-1} = M_{r-1}$ であり，帰納的にすべての i について $N_i = M_i$ を得る．よって $N = M$ である．

Step 2. 任意の組成列の長さが $\ell(M)$ であること．

$M = M_0' \supset M_1' \supset \cdots \supset M_k' = 0$ を M の組成列とする．Step 1 より $\ell(M) > \ell(M_1') > \cdots > \ell(M_k') = 0$ より $\ell(M) \geq k$ である．よって，$\ell(M)$ の定義から，$\ell(M) = k$ となるので，任意の組成列の長さは等しい．

（証明終）

一般に M の部分加群のなす減少列；

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_s = 0$$

について，隣り合う成分の間に部分加群が存在する（ある i について M_i/M_{i+1} が単純でない）ならそれを挿入することで（番号を付け替えて）M_i/M_{i+1} が単純になるように鎖を延長することができるが，一般には長さが

有限になるとは限らない（Artin 性を満たさない）．しかし Jordan–Hölder の定理から組成列が存在することがわかっていれば，全ての鎖は組成列に延長できる．このことから次の命題が成り立つ．

命題 *2.2.5*

M が組成列を持つことと，Artin かつ Noether であることは同値．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_i \subset \cdots$ を M の増大列とする．各 M_i について $\ell(M_i) \le \ell(M_{i+1}) \le \ell(M)$ で，$\ell(M)$ が有限なので，これは必ず停まる．減少列については延長すれば組成列となるので明らかである．

$(\Longleftarrow)$

$M_0 = M$ とし，M の真部分加群の中で極大なものを M_1 とする．同様に M_i を M_{i-1} の真部分加群で極大なものとしてとる．M の DCC から，これは必ずある n で $M_n = 0$ となり停まる．よって；

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_i \supset \cdots \supset M_n = 0$$

は組成列．

（証明終）

命題 *2.2.6*

体 K 上のベクトル空間 V について，Artin であることと Noether であることは同値である．

証明.

まず，V が有限次元であると仮定すると，V の基底 $\{u_1, \ldots, u_n\}$ に対して $V_i = \bigoplus_{j=1}^{i} Ku_i$ とするとこれは組成列をなすから，命題 2.2.5 より V は Artin かつ Noether である．よって Artin (resp. Noether) ならば V が有限次元であることを示せば，V は Noether (resp. Artin) であることが従う．

背理法で示す．V が Artin (resp. Noether) かつ無限次元であるとする．V の一次独立な元の無限列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が存在する．このとき，$V_n = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$ (resp. $U_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$) はそれぞれ無限な真減少列 (resp. 真増加列) をなすので，V が Artin (resp. Noether) であることに矛盾．よって示された．（証明終）

定理 *2.2.7*（秋月，1935）

Artin 環は Noether 環である．

証明.

A を Artin 環とする．まず A の極大イデアルは有限個であった（命題 2.2.1）．$\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ を A のすべての極大イデアルとし，$I = \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_r = \mathrm{rad}(A)$ とおく．DCC より $I \supset I^2 \supset \cdots$ は有限で停まるので，ある r がとれて $I^s = I^{s+1}$ となる．$J = \mathrm{Ann}(I^s) = (0 : I^s)$ とおくと；

$$(J : I) = ((0 : I^s) : I) = (0 : I^{s+1}) = J$$

である．ここで $I^s = 0$ すなわち $J = A$ を示す．

$J \subsetneq A$ と仮定する．すると J より真に大きいイデアルのなかで極小な J' がとれる．ここで $x \in J' \setminus J$ とすると $Ax + J$ は J より真に大きいイデアルであり $Ax + J \subset J'$ となる．よって J' の作り方から $J' = Ax + J$ である．

すると $J'/J = Ax$ であるので，中山の補題（系 1.2.18）より $J' \neq Ix + J$ である．すると極小性から $Ix + J = J$ である．ゆえに $Ix \subset J$ であるが，これは $x \in (J : I) = J$ を意味し，$x \in J' - J$ に矛盾．よって $J = A$ である．

よって $I^s = 0$ となり，イデアルの減少列；

$$A \supset \mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_{r-1} \supset I \supset I\mathfrak{m}_1 \supset \cdots \supset I^2 \supset \cdots \supset I^s = 0 \tag{$*$}$$

を考える．加群としての短完全列；

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_1 \longrightarrow A \longrightarrow A/\mathfrak{m}_1 \longrightarrow 0$$

を考えると，A が Artin なので $A/\mathfrak{m}_1$ と $\mathfrak{m}_1$ も Artin．同様に $(*)$ の隣り合う 2 項をそれぞれ $M, M\mathfrak{m}_1$ とすると，$M/M\mathfrak{m}_1$ が Artin で体 $A/\mathfrak{m}_1$ 上のベクトル空間なので命題 2.2.6 より $M/M\mathfrak{m}_1$ は Noether．すると，特に $M = I^{s-1}\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_{r-1}$ に対し $M/M\mathfrak{m}_r = M$ が Noether なので，帰納的に A も Noether であることがわかる．　（証明終）

可換環について示したのは秋月 (1935) であり，Hopkins(1939) は非可換環に対して証明した．加群については，秋月-Hopkins-Levitzki の定理などが知られている（前述のように，Artin だが Noether でない加群は存在するが，ある環上の加群では ACC と DCC が同値であることを示している）．

§3　加群の素因子

以下，この章の終わりまで環 A は **Noether 環とする．** 素因子，準素イデアルの議論においては Noether 性が本質的に効いてくるため，これらの概念を使った議論には Noether 性が必要である．これは Noether 環の仮定が外しにくいことの一因となっている（Noether という仮定を外すとこの章の終わりまでにおける殆どの命題に反例がある）．

定義 *2.3.1*（素因子）

A 加群 M に対し，$\operatorname{Ann} x = \{a \in A \mid ax = 0\}$ が A の素イデアルであるとき，これを M の**素因子** (prime ideal associated to M) または，M に**属する素イデアル** (associated prime ideal) という．
それらの全体を

$$\operatorname{Ass} M (= \operatorname{Ass}_A M) = \left\{P \in \operatorname{Spec} A \;\middle|\; \text{ある } x \in M \text{ に対して } P = \operatorname{Ann} x \text{ を満たす．}\right\}$$

とかく．

M の素因子がしっかり存在することを確認しておこう．

命題 *2.3.2*

$\{\operatorname{Ann} x \mid 0 \neq x \in M\}$ の極大元（A は Noether 環なので極大条件を満たす）は素イデアル，すなわち $\operatorname{Ass} M$ の元である．

証明.

$\operatorname{Ann} x$ が極大元であるとする．$ab \in \operatorname{Ann} x$，$a \notin \operatorname{Ann} x$ と仮定すると，$ax \neq 0$ かつ $abx = b(ax) = 0$ なので $b \in \operatorname{Ann}(ax)$ である．すると，定義から $\operatorname{Ann} x \subset \operatorname{Ann}(ax)$ であるが，$\operatorname{Ann} x$ の極大性より $\operatorname{Ann} x = \operatorname{Ann}(ax)$ である．よって，$b \in \operatorname{Ann} x$ となることがわかり，$\operatorname{Ann} x$ は素イデアルである．　（証明終）

系 2.3.3

$M \neq 0$ ならば $\mathrm{Ass}\, M \neq \emptyset$ である．

系 2.3.4

A 加群 M の零因子全体は素因子全体と一致する．すなわち；

$$\left\{a \in A \;\middle|\; \text{ある } x \neq 0 \in M \text{ について } ax = 0\right\} = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}\, M} P$$

である．

素因子について 1 つ補題を用意しておく．

補題 2.3.5

M を A 加群とし，S を A の積閉集合とする．$P \in \mathrm{Spec}\, A$ について，$P \in \mathrm{Ass}_A\, M$ かつ $P \cap S = \emptyset$ であることと，$S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}\, S^{-1}M$ であることは同値．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$P = \mathrm{Ann}\, x$ となる $x \in M$ をとると，$S^{-1}P = \mathrm{Ann}\, x/1$ となる．実際 $\subset$ は明らかで，任意の $a/s \in \mathrm{Ann}\, x/1$ をとると，ある $h \in S$ が存在して $hax = 0$ だから $ha \in \mathrm{Ann}\, x = P$ だが，$P \cap S = \emptyset$ より $h \notin P$ なので $a \in P$ となる．

$(\Longleftarrow)$

$S^{-1}P \in \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}$ とすると，$S^{-1}P \in \mathrm{Spec}\, S^{-1}A$ より $P \in \mathrm{Spec}\, A, P \cap S = \emptyset$ に注意しよう．

ある $x/s \in S^{-1}M$ について $S^{-1}P = \mathrm{Ann}\, x/s$ とかける．A は Noether なので $P = (a_1, \ldots, a_r)$ としよう．各 a_i について $a_1/1 \cdot x/s = 0$ より，ある $h_i \in S$ が存在して $h_i a_i x = 0$ である．h_i たちの積を $h = h_1 \cdots h_r$ とすると $h \in S$ であり，$Phx = 0$ が成り立つ．よって $P \subset \mathrm{Ann}\, hx$ である．逆に $y \in \mathrm{Ann}\, hx$ とすると，$S^{-1}M$ において $y/1 \cdot x/s = 0$ であるので $y/1 \in S^{-1}P$ であるから，あとは形式的な計算によって $y \in P$ であることがわかる．よって $P = \mathrm{Ann}\, hx \in \mathrm{Ass}_A\, M$ である．

（証明終）

ここで加群 M の support について思い出そう（定義 1.6.6）．次の結果が知られている．

定理 2.3.6

$\mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Supp}\, M$ であり，それぞれの極小元のなす集合は一致する．

証明.

$P = \mathrm{Ann}\, x$ とする．すると，任意の $x \notin P$ に対して $sx \neq 0$ である．よって $x = x/1$ は M_P の零元でない．よって $M_P \neq 0$，すなわち $P \in \mathrm{Supp}\, M$ である．よって，極小元が一致することを見るには $P \in \mathrm{Supp}\, M$ が極小なら $P \in \mathrm{Ass}\, M$ であることを示せばよい．

まず M_P は 0 でない A_P 加群であり，$\mathrm{Supp}_{A_P}\, M_P = \{PA_P\}$ を示す．それには $Q \subsetneq P$ となる $Q \in \mathrm{Spec}\, A$ について QA_P による M_P の局所化が 0 であることを示せばよい．P が $\mathrm{Supp}\, M$ で極小なので $M_Q = 0$ だから，補題 1.6.7 より任意の $x \in M$ に対してある $a \notin Q$ が存在して $ax = 0$ である．すると $a/1 \notin QA_P$ であり，任

意の $x/s \in M_P$ に対して $a/1 \cdot x/s = 0$ である．よって再び補題 1.6.7 から M_P の QA_P による局所化は 0 である．よって $\mathrm{Supp}_{A_P} M_P = \{PA_P\}$ がわかった．

ここで $M_P \neq 0$ なら $\mathrm{Ass}_{A_P} M_P \neq \emptyset$ なので，$\mathrm{Ass}_{A_P} M_P \subset \mathrm{Supp}_{A_P} M_P = \{PA_P\}$ であるから $\mathrm{Ass}_{A_P} M_P = \{PA_P\}$ である．よって補題 2.3.5 から $P \in \mathrm{Ass}_A M$ であることがわかる．（証明終）

系 *2.3.7*

環 A のイデアル I について，$V(I)$ の極小元すなわち $I \subset P$ となる $P \in \mathrm{Spec}\, A$ で極小なものは A/I の素因子である．

証明.

系 1.6.9 よりわかる．（証明終）

$P \in \mathrm{Ass}\, M$ であることと単射 $\iota : A/P \to M$ が存在することが同値であることに注意する（$P = \mathrm{Ann}\, \iota(1)$ となる）と，次の命題が示せる．

命題 *2.3.8*

A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \longrightarrow 0$$

に対して $\mathrm{Ass}\, M_2 \subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M_3$ が成立する．

証明.

$P \in \mathrm{Ass}\, M_2$ とし，$P = \mathrm{Ann}\, x$ とおこう．このとき単射；

$$A/P \to M_2; a + P \mapsto ax$$

の像を N としよう．

(i) $\mathrm{Im}\, \varphi \cap N = 0$ のとき．
　完全性から $\ker \psi = \mathrm{Im}\, \varphi$ なので，$A/P \to M_3; a + P \mapsto a\psi(x)$ が単射である．よって $P \in \mathrm{Ass}\, M_3$ となる．

(ii) $\mathrm{Im}\, \varphi \cap N \neq 0$ のとき．
　任意の $0 \neq x' \in \mathrm{Im}\, \varphi \cap N$ をとる．$x \in N$ かつ $x \neq 0$ より，ある $a \notin P$ が存在して $x' = ax$ である．ここで $P = \mathrm{Ann}\, x$ が素イデアルであることに注意すると $\mathrm{Ann}\, x = \mathrm{Ann}\, x'$ である．また $x' \in \mathrm{Im}\, \varphi$ であり φ は単射なので，0 でない $y \in M_1$ が存在して $x' = \varphi(y)$ である．すると $P = \mathrm{Ann}\, y$ であることが φ の単射性からわかる．よって $P \in \mathrm{Ass}\, M_1$ となる．

（証明終）

定理 *2.3.9*

有限生成 A 加群 M の素因子の集合 $\mathrm{Ass}\, M$ は有限である．

証明.

$M \neq 0$ としてよい．$P_1 \in \mathrm{Ass}\, M$ とすると，A/P_1 と同型な M の部分加群 M_1 が存在する．$M_1 \neq M$ のとき，$M/M_1 \neq 0$ だから，$P_2 \in \mathrm{Ass}\, M/M_1$ が存在して，$A/P_2 \cong \overline{M_2} \subset M/M_1$ とできる．M_2 を $M_2/M_1 = \overline{M_2}$ なる M の部分加群とすると，$M_1 \subset M_2 \subset M$ となる．同様に，$M_2 \neq M$ ならば操作を続けると，部分加群の増大列；

$$0 \neq M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_i \subset \cdots$$

と $M_i/M_{i-1} \cong A/P_i$ となる素イデアル P_i がとれる．M は有限生成で A は Noether なので Noether であり，この増大列は停まる．よって，ある n が存在して $M_n = M$ としてよい．すると，短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow 0$$

に対し，命題 2.3.8 から $\mathrm{Ass}\, M \subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M/M_1$ となる．また；

$$0 \longrightarrow \overline{M_2} = M_2/M_1 \longrightarrow M/M_1 \longrightarrow (M/M_1)/(M_2/M_1) = M/M_2 \longrightarrow 0$$

に対して命題 2.3.8 を用いて，$\mathrm{Ass}\, M/M_1 \subset \mathrm{Ass}\, M_2/M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M/M_2$ となる．以下同様に続けると；

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ass}\, M &\subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M/M_1 \\
&\subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M_2/M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M/M_2 \\
&\subset \ldots \\
&\subset \mathrm{Ass}\, M_1 \cup \mathrm{Ass}\, M_2/M_1 \cup \cdots \cup \mathrm{Ass}\, M_n/M_{n-1} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Ass}\, A/P_i \\
&= \{P_1, \ldots, P_n\}
\end{aligned}$$

である．最後の等号は，任意の 0 でない $x \in A/P_i$ に対し $\mathrm{Ann}\, x = P_i$ であることを用いた．（証明終）

系 2.3.10

A を Noether 環とすると，イデアル I について $V(I)$ の極小元は有限個である．

証明.

$V(I) = \mathrm{Supp}(A/I)$ で極小なものは定理 2.3.6 より $\mathrm{Ass}\, A/I$ の元なので，上の定理より I を含む素イデアルで極小なもの（極小素イデアルということもある）は有限個しかないことがわかる．（証明終）

§4　準素イデアル

加群の素因子たちが活躍する例の 1 つに素イデアルの一般化である準素イデアルがある．

定義 2.4.1（準素イデアル）

環 A のイデアル $q \neq 0$ に対し，$P = \sqrt{q}$ とおく．$ab \in q$ かつ $a \notin q$ ならば $b \in P$ が成り立つとき，q を P 準素イデアル (primary ideal) という．

明らかに素イデアルは準素である．この条件は;

A/q のすべての零因子は冪零である．

と同値であることに注意しよう．$\sqrt{q}$ を P と書くからには，P が素イデアルであるべきだろう．

命題 2.4.2

準素イデアル q の根基は q を含む最小の素イデアルである．

証明.

イデアルの根基はそのイデアルを含む全ての素イデアルの共通部分であるから，素イデアルであることを示せば十分．$ab \in \sqrt{q}$，$a \notin \sqrt{q}$ とする．$ab \in \sqrt{q}$ なので，ある n が存在して $a^n b^n \in q$ である．$a \notin \sqrt{q}$ だから，この n に対して $a^n \notin q$ である．q が準素なので，ある m が存在して $b^{nm} \in q$ である．よって $b \in \sqrt{q}$ である．（証明終）

命題 2.4.3

環 A のイデアル I について，$\sqrt{I}$ が極大なら I は準素である．

証明.

I が素のときは示すことはないので，素でないとしてよい．$\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ とおく．I を含む A の素イデアルは $\mathfrak{m}$ のみなので，$\operatorname{Spec} A/I = \{\overline{\mathfrak{m}}\}$ となる．すると $\operatorname{nil} A/I = \overline{\mathfrak{m}}$ となり，任意の $x \in A/I$ について $x \in \operatorname{nil} A/I$ または $x \in (A/I)^\times$ が成り立つ．よって I は準素である．（証明終）

一般の A 加群 M については，準素部分加群を次のように定義しよう．

定義 2.4.4

A 加群 M の部分加群 N について，$a \in A$ について，ある $x + N \in M/N$ について $ax + N = 0$ ならば $a \in \sqrt{\operatorname{Ann}(M/N)}$ であるとき N を M の**準素部分加群** (primary submodule) という．

この定義を言い換えると，$a \in A$ がある $x \in M \setminus N$ について $ax \in N$ ならば，ある $n \in \mathbb{N}$ について $a^n M \subset N$ である，ということになる．この定義のもとで準素イデアルとは A 加群の準素部分加群のことである．

命題 2.4.5

M を有限生成 A 加群とし，N をその部分加群とする．N が準素部分加群であることと，$\operatorname{Ass}(M/N)$ が一点集合であることは同値．

証明.

証明を通して $I = \operatorname{Ann}(M/N)$ とおく．

($\Longrightarrow$)

$P \in \operatorname{Ass}(M/N)$ とする．ある $0 \neq x + N \in M/N$ によって $P = \operatorname{Ann}(x + N)$ となる．任意の $a \in P$ について $ax \in N$ なので，仮定より $a \in \sqrt{I}$ となるから $P \subset \sqrt{I}$ である．一方で素因子の定義から $\sqrt{I} \subset P$ なので $P = \sqrt{I}$ となり，$\operatorname{Ass}(M/N) = \{\sqrt{I}\}$ である．

($\Longleftarrow$)

$\operatorname{Ass}(M/N) = \{P\}$ とする．定理 2.3.6 より $\operatorname{Supp} M/N$ の極小元は P のみであり，命題 1.6.8 より $V(\operatorname{Ann} M/N) = \operatorname{Supp} M/N$ である．よって $\operatorname{Ann} M/N$ を含む素イデアルで極小なものは P だけなので $\sqrt{I} = P$ が成り立つ．また $a \in \operatorname{Ann}(x + N)$ $(x + N \neq 0)$ ならば命題 2.3.2 より $a \in P = \sqrt{I}$ が成り立つ．

（証明終）

命題 *2.4.6*

M を有限生成 A 加群とし，N を準素部分加群とする．$\mathrm{Ass}(M/N)=\{P\}, \mathrm{Ann}\, M/N=I$ とおくと $\sqrt{I}=P$ であって，I は P 準素イデアルである．

証明.

$ab\in I, a\notin I$ とする．これは $abM\subset N, aM\not\subset N$ を意味するので，ある $x+N\neq 0$ について $bx+N\neq 0$ であり $a\in \mathrm{Ann}(bx+N)\subset P$ となる．よって I は P 準素．（証明終）

命題 2.4.5 の証明において $(\Longrightarrow)$ の証明には M が有限生成である必要はなかったことに注意すると，準素部分加群の定義を次のように拡張できる．

定義 *2.4.7*

M を A 加群とし，N をその準素部分加群とする．$\mathrm{Ass}(M/N)=\{P\}$ であるとき，N を P **準素部分加群**という．

紛らわしい用語だが，N が準素部分加群という定義を外してしまうと P 準素だが準素でない部分加群が存在することになり，もはや定義 2.4.4 とは同値でない．以後単に**準素部分加群**といった場合には定義 2.4.4 の意味とし，$\mathrm{Ass}(M/N)$ の元を明示したい場合にのみ P 準素という用語を用いることにする．

準素加群を考えることの嬉しさの 1 つに，加群の分解のある種の一意性がある．これは加群に対応する幾何的な対象を考えることでその対象を分解（分割）することに対応し，応用が広い．そのために部分加群の既約性（定義 1.2.6）を思い出そう．

定義 *2.4.8*（既約分解，準素分解）

M を A 加群とする．M の部分加群 N を，M の有限個の部分加群の交わりとして

$$N=N_1\cap\cdots\cap N_r$$

と表すことを N の**分解** (decomposition) という．各 N_i が既約なら**既約分解**，準素なら**準素分解**という．

分解 $N=\bigcap_i^r N_i$ に対して，各 $1\leq j\leq r$ について $N\neq\bigcap_{i\neq j}N_i$ であるとき，この分解は**むだがない** (irredundant) という．

次の定理を当面の目標としよう．その後，分解の一意性について考察していく．

定理 *2.4.9*（Laker–Noether の分解定理）

Noether 環 A 上の有限生成加群 M の任意の部分加群 N は準素分解を持つ．特に，任意の A のイデアル I は準素分解を持つ．

補題 *2.4.10*

M が Noether 加群ならば，任意の部分加群は既約部分加群の有限個の交わりとしてかける．

証明.

そのように分解できない部分加群の集まりを S とする．M の Noether 性より S の極大元がとれるので，それを N とする．N は可約なので，N_1，$N_2\neq N$ を用いて $N=N_1\cap N_2$ とできる．すると $N\subset N_1$，N_2 なので，N の極大性から N_1，$N_2\notin S$ であるから，N_1 と N_2 は既約な部分加群の交わりでかける．よって，N も既約な

部分加群の有限個の交わりとなり，矛盾．（証明終）

補題 2.4.11

既約な真部分加群は準素である．

証明.

対偶である，M の部分加群 N が準素でなければ可約であることを示す．$\mathrm{Ass}(M/N)$ は少なくとも 2 つの異なる素因子を持つので，それを $P_1 \neq P_2$ とする．$A/P_i \cong \overline{N_i} \subset M/N$ とすると，$0 \neq x \in \overline{N_i}$ ならば $\mathrm{Ann}\, x = P_i$ となるので，$\overline{N_1} \cap \overline{N_2} = 0$ でなければならない．さて，N_i を $N_i/N = \overline{N_i}$ となるようにとると，自然な全射 $\pi : M \to M/N$ に対し $N_1 \cap N_2 = \pi^{-1}(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}) = \pi^{-1}(0) = N$ であって，$N \subsetneq N_i$ なので N は可約である．（証明終）

2 つの補題により準素分解できること（定理 2.4.9）が示された．では，分解の一意性について見ていこう．

補題 2.4.12

N_1 と N_2 が M の P 準素部分加群ならば，$N_1 \cap N_2$ も P 準素である．

証明.

$$\iota : M/(N_1 \cap N_2) \longrightarrow M/N_1 \oplus M/N_2; x + N_1 \cap N_2 \longmapsto (x + N_1, x + N_2)$$

は単射であるので，短完全列；

$$0 \longrightarrow M/N_1 \longrightarrow M/N_1 \oplus M/N_2 \longrightarrow M/N_2 \longrightarrow 0$$

とあわせて，命題 2.3.8 から $\emptyset \neq \mathrm{Ass}\, M/(N_1 \cap N_2) \subset \mathrm{Ass}\, M/N_1 \cup \mathrm{Ann}\, M/N_2 = \{P\}$ であるから $N_1 \cap N_2$ は P 準素．（証明終）

これより，準素分解 $N = \bigcap_i^r N_i$ がむだのない分解であるとき，N_{i_1} と N_{i_2} がともに P 準素なら $N_{i_1} \cap N_{i_2}$ も P 準素なので，$N_j = N_{i_1} \cap N_{i_2}$ とおくと，分解の長さを短くできる．このように，すべての i に対し $\mathrm{Ass}(M/N_i)$ が異なるようにすることで**最短準素分解**が得られる．

定理 2.4.13

Noether 環上の加群 M の真部分加群 N について $N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$ を無駄のない準素分解とし，P_i を N_i の素因子とすると $\mathrm{Ass}(M/N) = \{P_1, \ldots, P_r\}$ となる．

証明.

埋め込み $M/N \subset \bigoplus_{i=1}^r M/N_i$ と，命題 2.3.8 により $\mathrm{Ass}\, M/N \subset \bigcup_{i=1}^r \mathrm{Ass}\, M/N_i = \{P_1, \ldots, P_r\}$ を得る．また，むだのないことから $0 \neq \bigcap_{i=2}^r N_i/N$ であり

$$\iota : \bigcap_{i=2}^r N_i/N \longrightarrow M/N_1; x + N \longmapsto x + N_1$$

は単射．実際 $x + N_i = 0$ とすると $x \in N_1$ である．一方 $x \in \bigcap_{i=2}^r N_i$ より $x \in N$ となり $x + N = 0$ である．よって，$\emptyset \neq \mathrm{Ass}(\bigcap_{i=2}^r N_i/N) \subset \mathrm{Ass}(M/N_1) = \{P_1\}$ すなわち $\mathrm{Ass}(\bigcap_{i=2}^r N_i/N) = \{P_1\}$ である．また，$\bigcap_{i=2}^r N_i/N \subset M/N$ でもあるので，$P_1 \in \mathrm{Ass}(M/N)$ である．他の P_i についても同様．（証明終）

準素分解の一意性については，極小素因子に対応する成分は一意的に定まることがわかる．

定理 2.4.14

M を有限生成な A 加群とし，$N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$ をむだのない最短準素分解，$\mathrm{Ass}(M/N) = \{P_1, \ldots, P_r\}$ とおく．P_i が $\mathrm{Ass}(M/N)$ で極小なら $f_{P_i} : M \longrightarrow M_{P_i}$ を P_i における局所化とすると，$N_i = f_{P_i}^{-1}(N_{P_i})$ となり，P_i 準素成分は N と P_i から一意に定まる．

証明.

適当に並べ替えて P_1 が極小であるとする．$P_i \not\subset P_1$ $(i \neq 1)$ である．よって $y \notin P_1$ かつ $y \in P_i$ となる $y \in A$ が存在する．このとき $(M/N_i)_{P_1}$ において $y/1 \in A_P$ は可逆．また，$y \in P_i = \sqrt{\mathrm{Ann}\, M/N_i}$ だから，ある n があって $y^n(M/N_i) = 0$ である．よって $y^n/1 \cdot (M/N_i)_{P_1} = 0$ で，$y/1$ は可逆なので $(M/N_i)_{P_1} = 0$ である．すると完全列；

$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M \longrightarrow M/N_i \longrightarrow 0$$

に対し；

$$0 \longrightarrow (N_i)_{P_1} \longrightarrow M_{P_1} \longrightarrow (M/N_i)_{P_1} \longrightarrow 0$$

も完全であるので $(N_i)_{P_1} = M_{P_1}$ である．ここで $N_{P_1} = \bigcap_i^r (N_i)_{P_1} = (N_1)_{P_1}$ であるので，$f_P^{-1}(N_P) = f_P^{-1}((N_1)_P) = N_1$ であることがわかった．（証明終）

これをイデアルに関して述べ返すと，次のようになる．

系 2.4.15

Noether 環 A 上のイデアル I は，有限個の準素分解 $I = q_1 \cap \cdots \cap q_r$ を持つ．この分解に無駄がなければ $P_i = \sqrt{q_i}$ は素であって，$\mathrm{Ass}(A/I) = \{P_1, \ldots, P_r\}$ である．さらに，これが最短ならば極小素因子 P_i に対応する準素イデアル q_i は I と P_i から一意に定まる．

この結果により，極小な素因子に対応する準素イデアルの一意性が言えるが，極小でない素因子を持つときを考えてみよう．k を体として，$A = k[X_1, X_2], I = (X_1^2, X_1X_2)$ とおく．ここで素イデアル鎖 $(0) \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2)$ を考えると；

$$I = (X_1) \cap (X_1^2, X_2) = (X_1) \cap (X_1, X_2)^2$$

が最短準素分解であり，$(X_1^2, X_2) \neq (X_1, X_2)^2$ である．さて $\mathrm{Ass}\, A/I = V(I) = \{(X_1), (X_1, X_2)\}$ であるので (X_1, X_2) は極小でない素因子であり，$(X_1^2, X_2), (X_1, X_2)^2$ はどちらも (X_1, X_2) に対応する準素イデアルである．このように極小でない素因子はいろいろと技術的に問題を引き起こすことがある．極小でない素イデアルを非孤立素因子 (embedded associated prime ideal) ともいう．

とはいえ，$P \in \mathrm{Ass}(A/I)$ であることと，I の無駄のない準素分解 $I = \bigcap q_i$ において $\sqrt{q_i} = P$ となる i が存在することは同値である．これら素因子の概念は環の素イデアルの挙動，特に次元論において目覚ましい活躍を見せる．次の章では環の拡大を考察し，環の次元を定義しよう．

第3章　整拡大と次元論初歩

—Integral extension and The elemnts of dimension theory

代数曲線，特に古典的な代数多様体論では，曲線をより単純な曲線，特に直線に射影して性質を見る，という方法をとる．それは環の準同型としては $K[X] \to K[X, Y]/I$ に対応し，これは**整拡大**というものになっている．また，多様体 (Variety) と環を対応させて調べるという発送において，特に議論の対象となる環は代数閉体 K 上の有限生成代数であることが多い．そこで，一般の環についてある種の**次元**を定義するとともに，それが代数多様体の自然な次元と一致することを確認することを目標にしよう．すなわち，多項式環 $K[X_1, \ldots, X_n]$ の自然な次元 n を，多項式環の性質によらずに一般の環に拡張する．

§1　環の拡大

体の拡大の基礎については第 0 章で少しまとめているが，Galois 理論などの入門書を適宜参照のこと．体の拡大 L/K において，代数的，超越的という概念があった．その概念を環の場合に拡張することを考えてみよう．代数 $f : A \to B$ を考え，これを環の拡大とみなしたい．体の場合は，体からの任意の準同型が単射なので，任意の準同型を埋め込みとして問題はなかった．そこで，$f : A \to B$ が単射であるとき**環の拡大**という．しばらくは一般の A 代数 B について議論をしていこう．まずは代数的という性質を環の拡大の場合に拡張する．

定義 *3.1.1*（整）

B を A 代数とする．$x \in B$ に対し，A 係数のモニックな多項式 $g \in A[X]$ が存在して；

$$g(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

が A 加群 B で成立するとき，x は A 上**整** (integral) であるという．

任意の $x \in B$ が A 上で整のとき，B は A 上整であるという．$\mathbb{Z}$ 上で整である複素数のことを**代数的整数**，$\mathbb{Q}$ 上で整である複素数のことを**代数的数**といっていたことを思い出そう．

例 3.1.2

環の拡大 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ を考えよう．ここでは $\mathbb{Z}$ 上整な元をすべて求める．$r = p/q$ (p, q は互いに素) が Z 上整であると仮定すると，適当な $a_i \in \mathbb{Z}$ がとれて；

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

が成り立つ．分母を払うと；

$$p^n + a_1 q p^{n-1} + \cdots + a_n q^n = 0$$

となり，p^n は q の倍数となる．p と q は互いに素なので，$q = \pm 1$ が従う．ゆえに r は $\mathbb{Z}$ の元である．$\mathbb{Z}$ の元が $\mathbb{Z}$ 上整なことは明らか.

整拡大を考えるときには，有限生成代数が度々登場する．そこで A 上有限生成代数 B について，全射 $\varphi : A[X_1, \ldots, X_n] \to B$ を考えると，これは多項式環に何かを代入した準同型になっている．これを説明する

ため，単に B が 1 変数多項式環の像になっているときを考えよう．任意の $b \in B$ について，ある $f \in A[X]$ が存在して $b = \varphi(f)$ とかける．ここで $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$ とおくと；

$$b = \varphi(a_n)\varphi(X)^n + \cdots + \varphi(a_0)$$

であるが，$\varphi(X)$ は B の元であり，B を自然に A 代数とみると，これは次のように書くのが自然である（$a \cdot b = \varphi(a)b$ としてスカラーを定義したことを思い出そう）；

$$b = a_n \varphi(X)^n + a_{n-1}\varphi(X)^{n-1} + \cdots + a_0$$

このようにして，B は多項式環 $A[X]$ の X を $\varphi(X)$ で置き換えた環になっている．多変数の場合も同じである．そこで，全準同型 $\varphi : A[X_1, \ldots, X_n] \to B$ が存在するとき，$B = A[\varphi(X_1), \varphi(X_2), \ldots, \varphi(X_n)]$ とかく．ただし，各 $\varphi(X_i)$ たちが変数のように独立に振る舞うとは限らない．例えば，$A[X,Y]$ に $X \mapsto T^2$，$Y \mapsto T^4$ と定めることで 1 変数多項式環への準同型が定まる．この準同型の像を B とすると先の議論から $B = A[T^2, T^4]$ とかけるが，これは環としては $A[T^2]$ にほかならない（T^4 は T^2 で表現できる）．

整であることは次のように特徴づけされる．

命題 3.1.3

B を A 代数とすると，次は同値である．

(i) $x \in B$ は A 上で整である．
(ii) $A[x]$ は A 加群として有限生成である．
(iii) 有限生成 A 加群 $C \subset B$ が存在して，$A[x] \subset C$ が成り立つ．
(iv) A 上有限生成な $A[x]$ 加群 M であって，任意の $f \in A[x]$ について，任意の $m \in M$ に対し $fm = 0$ ならば $f = 0$ を満たすものが存在する（有限生成で忠実な $A[X]$ 加群が存在する）．

証明.

(i)⟹(ii)

$x^n + a_1 x^{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ とすると，任意の $k \geq n$ に対して $x_k \in \bigoplus_{i=0}^{n-1} Ax_i$ である（厳密には帰納法を用いる）．ゆえに $A[x] = \bigoplus Ax_i$ となり有限生成である．

(ii)⟹(iii)

明らか．

(iii)⟹(iv)

$M = C$ とすればよい．

(iv)⟹(i)

$\varphi : M \to M = m \mapsto xm$ は A 加群としての自己準同型になり，$\varphi(M) = x \cdot M \subset M$ より，Cayley–Hamilton の定理（定理 1.2.16）を $I = A$ として使うことができる．すると；

$$\varphi^n + a_1 \varphi^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

となるから，この式の左辺は $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 倍写像であるので，忠実性から従う．

（証明終）

整な元の集まり $\{x_1, \ldots, x_n\}$ についても，以下の補題から類似する性質を示すことができる．

補題 *3.1.4*

B を A 代数とし，M を B 加群とする．B が A 加群として有限生成かつ M が B 加群として有限生成であるとき，M は A 加群として有限生成である．

証明.

B，M それぞれの生成元を $\{x_i\}, \{y_j\}$ として $B = \bigoplus Ax_i, M = \bigoplus By_j$ とすると，$M = \bigoplus_i \left(\bigoplus_j Ax_iy_j\right)$ であることがわかり，A 加群としても有限生成である．（証明終）

命題 *3.1.5*

B を A 代数とし，$b_1, \ldots, b_n \in B$ を A 上整な元たちであるとする．このとき $A[b_1, \ldots, b_n]$ は A 加群として有限生成である．

証明.

帰納法で示す．$n = 1$ のときは命題 3.1.3 より従う．$A_i = A[b_1, \ldots, b_i]$ とおこう．すると A_{n-1} が有限生成 A 加群であるとき，$A_n = A_{n-1}[b_n]$ であるので，b_n は A_{n-1} 上でも整だから A_n は有限生成 A_{n-1} 加群である．すると，補題より A_n は有限生成 A 加群になる．（証明終）

命題 *3.1.6*

B を A 代数とする．B が A 上有限型であり整であることと，A 加群として有限生成であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$ は命題 3.1.5 から即座に従う．B が A 加群として有限生成であるとする．まず，任意の $x \in B$ をとると，命題 3.1.3 (iii) において $C = B$ とできるので，x は A 上整，すなわち B は A 上整である．また，B の A 加群としての生成系を $\{b_1, \ldots, b_n\}$ とすれば；

$$A[X_1, \ldots, X_n] \to B; f \mapsto f(b_1, \ldots, b_r)$$

が全準同型となり，B は有限型である．（証明終）

これは標語的に；

有限型 + 整 = 有限生成

と言い表すことができる，とても便利な性質である．

命題 *3.1.7*（整従属の推移性）

$A \subset B \subset C$ を環の拡大とする．B が A 上整でありかつ，C が B 上整ならば，C は A 上整である．

証明.

任意の $x \in C$ をとる．B 上整であるから，$b_r, \ldots, b_n \in B$ がとれて；

$$x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

が成り立つ．このとき $B' = A[b_1, \ldots, b_n]$ とおくと，命題 3.1.5 よりこれは有限生成 A 加群であり，x は B' 上でも整なので $B'[x]$ も有限生成 A 加群となる．よって命題 3.1.3 より，x は A 上整である．（証明終）

§2　整閉整域と正規環

定義 *3.2.1*（整閉包）

$A \subset B$ を環の拡大とする．A 上整な B の元全体，すなわち；

$$\left\{ b \in B \,\middle|\, \text{ある } a_1, \ldots, a_m \in A \text{ が存在して，} b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0 \right\}$$

を A の B における**整閉包** (integral closure) という．ここでは $\overline{A}_B$ と書くことにする．[*4]

例えば，例 3.1.2 より $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ の整閉包 $\overline{\mathbb{Z}}_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Z}$ である．

次が成り立つ．

命題 *3.2.2*

(i) $\overline{A}_B$ は B の部分環である．

(ii) $\overline{A}_B$ の B での整閉包は $\overline{A}_B$ である．

証明.

(i) $x, y \in \overline{A}_B$ とする．まず x, y は A 上整なので $A[x, y]$ は有限生成である．ゆえに $x + y, xy \in A[x, y]$ だからこれらも整となり，$\overline{A}_B$ は部分環をなす．

(ii) $b \in B$ が $\overline{A}_B$ 上整であるとすると，$a_1, \ldots, a_m \in \overline{A}_B$ がとれて；

$$b^m + a_1 b^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

である．このとき $A' = A[a_1, \ldots, a_n]$ とおくと $A[b]$ は A' 加群として有限生成であり，a_i たちは A 上整だから A' は A 加群として有限生成．よって $A[b]$ は A 加群として有限生成になり，$b \in \overline{A}_B$ が従う．

（証明終）

定義 *3.2.3*（整閉）

$A \subset B$ を環の拡大とする．$\overline{A}_B = A$ のとき，A は B において**整閉** (integrally closed) であるといい，特に整域 A がその商体 $\mathrm{Frac}\, A$ で整閉のとき，**整閉整域** (integrally closed domain) という．

例 3.2.4

用意に計算できるように UFD は整閉整域である（例 3.1.2 で計算した $\mathbb{Z}$ についての類似である）．それは GCD 整域（定義 1.9.1）に対して用意に一般化できる．

定義 *3.2.5*（正規環）

環 A について，任意の $P \in \mathrm{Spec}\, A$ に対し A_P が整閉整域であるとき，A を**正規環** (normal ring) という．

これは幾何的にも意味のある命題であるが，正規環は被約である．

[*4] Global に通用する記号はないように思われる．

命題 *3.2.6*

A を正規環とすると，A は被約である．

証明.

$\operatorname{nil} A = 0$ を言えばよい．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について命題 1.5.9 より $(\operatorname{nil} A)_P = \operatorname{nil}(A_P)$ であり，A は正規なので A_P は整域だから $\operatorname{nil}(A_P) = 0$ である．すると命題 1.5.12 より $\operatorname{nil} A = 0$ となり正規環は被約である．（証明終）

補題 *3.2.7*

環の拡大 $A \subset B$ について，S を A の積閉集合とする．このとき $S^{-1}\overline{A}_B = \overline{S^{-1}A}_{S^{-1}B}$ が成り立つ．

証明.

任意の $x/s \in S^{-1}\overline{A}_B$ をとる．x は A 上整なので；

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

となる $a_i \in A$ が存在する．このとき；

$$(x/s)^n + (a_1/s)(x/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s^n = 0$$

となるので $x/s \in \overline{S^{-1}A}_{S^{-1}B}$ である．

また，任意の $x/s \in \overline{S^{-1}A}_{S^{-1}B}$ をとる．

$$(x/s)^n + (a_1/s_1)(x/s)^{n-1} + \cdots + a_n/s_n = 0$$

となる $a_i \in A$，$s_i \in S$ が存在する．ここで $t = s_1 \ldots s_n$ とおき，両辺に $(ts)^n$ をかけると $tx \in \overline{A}_B$ となる．よって $x/s = (tx)/(ts) \in S^{-1}\overline{A}_B$ である．（証明終）

以下の命題より整閉整域は正規環である．

命題 *3.2.8*

A を整域とすると，A が整閉であることと A が正規環であることは同値（整閉整域は局所的な性質である）．

証明.

$\overline{A}_{\operatorname{Frac} A} = A$ であることは，自然な包含射 $\iota : A \to \overline{A}_{\operatorname{Frac} A}$ が全射であることと同値である．さて補題 3.2.7 より $S^{-1}\overline{A}_{\operatorname{Frac} A} = \overline{S^{-1}A}_{\operatorname{Frac} A}$ である．命題 1.5.13 より ι が全射であることと ι の局所化 $A_P \to (\overline{S^{-1}A}_{\operatorname{Frac} A})_P$ が全射であることは同値だから主張が従う．（証明終）

整域においては整閉性と正規性は同値だが，整域でない正規環が存在することに注意が必要である．A_1，A_2 を整閉整域とし，直積 $A = A_1 \times A_2$ の素イデアルによる局所化を考えよう．$P \times A_2 \in \operatorname{Spec} A$ について，$A_{P\times A_2}$ は A_{1P} と同型である．$\operatorname{Spec} A$ は $P_1 \times A_2$ $(P_1 \in \operatorname{Spec} A_1), A_1 \times P_2$ $(P_2 \in \operatorname{Spec} A_2)$ のみからなるので，A は整域でない正規環である．実はすべての Noether 正規環は有限個の整閉整域の直積である．系 2.3.10 により Noether 環の極小な素イデアルは有限個であることに注意しよう．

定理 *3.2.9*

A を Noether な正規環とすると，A は有限個の整閉整域の直積である．

証明.

A の極小な素イデアル全体を $P_1, \ldots, P_r$ とする．このとき $P_i + P_j = A$ $(i \neq j)$ が成り立つ．実際 $P_i + P_j \subsetneq A$ とすると，これはイデアルをなすのである極大イデアル $\mathfrak{m}$ に含まれる．すると $A_\mathfrak{m}$ において $P_i A_\mathfrak{m}, P_j A_\mathfrak{m}$ は異なる極小素イデアルであるが（命題 1.5.5），$A_\mathfrak{m}$ は整域なのでただ 1 つの極小素イデアル (0) を持つ．これは矛盾．また A は被約なので $P_1 \cap \cdots \cap P_r = (0)$ である．よって中国剰余定理（定理 1.8.3）から；

$$A \cong \prod_{i=1}^{r} A/P_i$$

である．ここで任意の $P \in \operatorname{Spec} A/P_i$ をとると，命題 1.8.5 より $P \times \prod_{i \neq j} A/P_j \in \operatorname{Spec} A$ による A の局所化は $(A/P_i)_P$ と同型で，A が正規なのでこれは整閉整域である．よって A/P_i は整閉整域となり，A は有限個の正規環の直積である．（証明終）

また，一般の正規環 A は被約かつ全商環で整閉である．これの逆は Noether 環について成り立つ．

命題 *3.2.10*

A を正規環とする．A の全商環を $Q(A)$ とおくと，$\overline{A}_{Q(A)} = A$ である．

証明.

$x/s \in Q(A)$ が A 上整であるとしよう．次のイデアル $I = \{a \in A \mid ax/s \in A\}$ が A であることを示せばよい．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとる．自然な単射 $A \to Q(A)$ にテンソルすることで，単射 $A_P \to Q(A) \otimes_A A_P = Q(A)_P$ が存在する．x/s は A_P 上整なので，$x/s \in A_P$ である．これは $a, t, h \in A, t, h \notin P$ が存在して $h(xt - as) = 0$ であることを意味する．ゆえに $ht \in I$ であり，$I \not\subset P$ である．よって $I = A$ となり，s は A の単元である．（証明終）

定理 *3.2.11*

A が Noether なら命題 3.2.10 の逆が成り立つ．すなわち A を全商環で整閉であるような被約 Noether 環とすると，A は正規である．

証明.

Step 1. A の全商環 $Q(A)$ は有限個の体の直積であること（これは A が被約 Noether 環なら成り立つ）．

A が Noether なので，有限個の極小素イデアルを持つ．それを $P_1, \ldots, P_r$ とする．系 2.4.15 より $\operatorname{Ass} A = \{P_1, \ldots, P_r\}$ であるので，$S = A \setminus (P_1 \cup \cdots \cup P_r)$ とおくと $S^{-1}A = Q(A)$ である．このとき $\operatorname{Spec} Q(A) = \{PQ(A) \mid P \in \operatorname{Spec} A, P \subset P_1 \cup \cdots \cup P_r\}$ であり，$P \in \operatorname{Spec} A$ が $P \subset P_1 \cup \cdots \cup P_r$ を満たすなら Prime avoidance（補題 1.10.1）より $P \subset P_i$ となる i が存在するので，極小性から $\operatorname{Spec} Q(A) = \{P_1 Q(A), \ldots, P_r Q(A)\}$ である．よってこれらは全て極大で，また互いに素．A が被約だから $Q(A)$ もまたそうなので，中国剰余定理から；

$$Q(A) \cong \prod Q(A)/P_i Q(A)$$

となり $Q(A)$ は体の有限直積である．

Step 2. $A \cong \prod A/P_i$ であること．

$e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \in Q(A)$ について，$e_i^2 - e_i = 0$ よりこれ r は A 上整である．A は $Q(A)$ 上整なので，これは $a_i + 1 \in \bigcap_{i \neq j} P_j, a_i \in P_i$ となる $a_i \in A$ の存在を意味する．よって P_i たちは互いに素となり，中国剰余定理から $A \cong \prod A/P_i$ である．

Step 3. A/P_i が整閉整域であること．

$\mathrm{Frac}(A/P_i) = A_{P_i}$ に注意する．実際，準同型；

$$\varphi : \mathrm{Frac}(A/P_i) \to A_{P_i}; \frac{x+P_i}{y+P_i} \mapsto x/s$$

を考えると，$x/y = 0$ ならばある $h \notin P_i$ が存在して $xh = 0 \in P_i$ となるので $x + P_i = 0$ となり，φ は単射．また任意の $x/s \in A_{P_i}$ について $x \notin P_i$ ならば $\varphi((x+P_i)/(y+P_i)) = x/s$ であり，$x/s \in P_i A_{P_i}$ ならば $P_i = \mathrm{Ann}\, y$ となる $y \in A$ について，A が被約なので $y \notin P_i$ だから $xy = 0$ となり $P_i A_{P_i} = 0$，すなわち $\varphi(0) = x/s = 0$ である．以上より φ は全単射となり同型である．ここで，自然な準同型 $Q(A) \to A_{P_i}; x/s \mapsto x/s$ を考えると，この核は $P_i Q(A)$ であるので，$Q(A)/P_i Q(A)$ は A_{P_i} の部分体である．一方で自然に $\mathrm{Frac}(A/P_i) \subset Q(A)/P_i Q(A)$ であるから，$Q(A)/P_i Q(A) = A_{P_i}$ であることがわかる．ゆえに $Q(A) \cong \prod A_{P_i}$ である．よって $A \cong \prod A/P_i$ は $Q(A)$ で整閉であることから，各 A/P_i は整閉整域である．

以上より A は整閉整域の直積なので正規であることが示された．（証明終）

§3　超越次数

体の理論において，拡大の次数を考えることができたことを思い出そう．一般の環拡大について同様の概念を考えたい．少し条件を制限して，整域 A について全商環を考えるとこれは体になる．これを使って整域の拡大，とくに体上の有限型の代数について考えよう．まずは次の命題に倣って，元の超越性を複数個の場合に拡張しよう．

命題 3.3.1

L/K を体の拡大とする．$\alpha \in L$ が K 上超越的であることと，次の準同型；

$$\varphi : K[X] \longrightarrow L; f(X) \longmapsto f(\alpha)$$

が単射であることは同値である．

証明.

$(\Longleftarrow)$ は明らかだろう．$\alpha \in L$ が K 上超越的と仮定する．$\varphi(f) = \varphi(g)$ としよう．このとき $\varphi(f-g) = (f-g)(\alpha) = 0$ となるが，α は超越元なので $f - g = 0$ となり，$f = g$ である．（証明終）

定義 *3.3.2*（代数的に独立）

L/K を体の拡大とする．$\alpha_1,\dots,\alpha_r \in L$ に対し，

$$\varphi : K[X_1,\dots,X_r] \longrightarrow L; f(X_1,\dots,X_r) \longmapsto f(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$$

が単射であるとき，$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ は K 上**代数的に独立** (algebraically independent) であるという．また，部分集合 $S \subset L$ に対し，その任意の有限部分集合が代数的に独立であるとき，S を K 上代数的に独立な集合であるという．

これを用いて超越次数を定義しよう．

定義 *3.3.3*（超越基底）

L/K を体の拡大とする．$\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ が K 上代数的に独立な集合で，$L/K(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ が代数拡大であるとき，$\alpha_1,\dots,\alpha_r$ を L/K の**超越基底** (transcendental basis) といい，$r = \mathrm{tr.deg}_K\, L$ とかいてこれを**超越次数** (transcendence degree) という．

L/K が代数拡大であるときは $\emptyset$ を超越基底とし，$\mathrm{tr.deg}_K\, L = 0$ と定める．超越次数の well-definedness を示そう．

命題 *3.3.4*（超越次数の well-definedness）

拡大 L/K に対し，超越基底は存在し，その個数 (濃度) は一致する．

証明.

超越基底が有限のときのみ示す．

Step 1. まず超越基底が存在することを示す．集合族:

$$\Sigma = \left\{S \,\middle|\, S : \text{代数的に独立な集合}\right\}$$

は空ではなく，包含関係により帰納的順序集合をなす．よって Zorn の補題より極大元 $\mathcal{S}$ が存在する．このとき，$L/K(\mathcal{S})$ を考えると，ある $x \in L$ が $K(\mathcal{S})$ 上代数的でないと仮定したとき，$\mathcal{S} \cup \{x\}$ は代数的に独立で，$x \notin \mathcal{S}$ なので $\mathcal{S}$ の極大性に反する．よって $L/K(\mathcal{S})$ は代数拡大で，$\mathcal{S}$ が超越基底となる．

Step 2. 次数の well-definedness を示そう．$\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$ と $\{\beta_1,\dots,\beta_s\}$ がどちらも L/K の超越基底であるとする．$s \leq r$ を言えばよい．$L/K(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ は代数拡大なので，β_1 は $K(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ 上代数的．すなわち，$a_i \in K(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ によって，関係式；

$$a_n{\beta_1}^n + a_{n-1}{\beta_1}^{n-1} + \cdots + a_1\beta_1 + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \tag{$*$}$$

を満たす．β_1 は L/K において超越的なので，少なくとも 1 つの α_i が存在して，$a_0,\dots,a_n$ のうち少なくとも 1 つには α_i が表れる．番号を取り替えて，それを α_1 とすると，$(*)$ は α_1 が $K(\alpha_2,\dots,\alpha_r,\beta_1)$ 上代数的であることを示している．すると，L の任意の元は $K(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ 上代数的なので，$L/K(\alpha_2,\dots,\alpha_r,\beta_1)$ は代数拡大である．すると，β_2 は $K(\alpha_2,\dots,\alpha_r,\beta_1)$ 上代数的だから，$b_i \in K(\alpha_2,\dots,\alpha_r,\beta_1)$ がとれて；

$$b_m{\beta_2}^m + \cdots + b_1\beta_2 + b_0 = 0 \quad (b_m \neq 0) \tag{$(**)$}$$

とできる．ここで，β_1 と β_2 は K 上で代数的に独立だから，b_i の少なくとも 1 つには，$\alpha_2,\dots,\alpha_r$ のうち 1 つ以上が表れる．番号を取り替えてそれを α_2 とすると，$(**)$ は α_2 の $K(\alpha_3,\dots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2)$ 上の関係式と見ることができる．よって，同様の議論から $L/K(\alpha_3,\dots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2)$ は代数拡大．これを続けると $L/K(\alpha_{i+1},\dots,\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_i)$ はすべて代数拡大である．

ここで $r < s$ を仮定する．$L/K(\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_{r-1})$ は代数拡大で，β_r はこの上で代数的になる．いま $\{\beta_1,\dots,\beta_r\}$ は代数的に独立なので，先程の議論と同様に α_r は $K(\beta_1,\dots,\beta_r)$ 上代数的である．しかし $\alpha_1,\dots,\alpha_{r-1}$ は $K(\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_r)$ 上代数的なので，$L/K(\beta_1,\dots,\beta_r)$ は代数拡大になり矛盾．よって $r \le s$ であることがわかった．

（証明終）

定義 *3.3.5*

K を体とする．K 代数 A が整域であるとき，体の拡大 $\mathrm{Frac}\,A/K$ の超越次数を A の (K 上の) 超越次数と定義し，$\mathrm{tr.deg}_K\,A$ とかく．

命題 *3.3.6*

K を体とし，A を k 上の有限型整域とすると，0 でない A の素イデアル P に対し，

$$\mathrm{tr.deg}_K\,A/P < \mathrm{tr.deg}_K\,A$$

が成り立つ．

証明.

仮定から $K[X_1,\dots,X_n]$ の 0 でない素イデアル P' が存在して $A = K[X_1,\dots,X_n]/P'$ とかけている．簡単のため $K[X] = K[X_1,\dots,X_n]$ と略記しよう．このとき，$P \subset Q$ となる素イデアル Q について $\mathrm{tr.deg}\,K[X]/Q < \mathrm{tr.deg}\,K[X]/P$ を示せば良い．$m = \mathrm{tr.deg}\,A$ とし，$m \le \mathrm{tr.deg}\,K[X]/Q$，$r = \mathrm{tr.deg}\,K[X]/Q$ とおき，$m \le r$ と仮定する．それぞれ $K[X]/P = K[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$，$K[X]/Q = K[\beta_1,\dots,\beta_n]$ とし，適切に並べ替えて $\beta_1,\dots,\beta_r$ を $K[X]/Q$ の超越基とする．また $\alpha_1,\dots,\alpha_m \in K[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ を自然な準同型 $K[\alpha_1,\dots,\alpha_n] \longrightarrow K[\beta_1,\dots,\beta_n]$ において $\beta_1,\dots,\beta_m$ に移すものとする．また，P, Q はそれぞれ次の代入する写像；

$$\varphi : K[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow K[\alpha_1,\dots,\alpha_n]$$
$$\psi : K[X_1,\dots,X_n] \longrightarrow K[\beta_1,\dots,\beta_n]$$

の核であるので，α_i の組の関係式が存在すれば，それは対応する β_i の組の関係式でもある．さて，任意の 0 でない $q \in Q$ をとると，$\mathrm{tr.deg}\,K[X]/P = m$ だから，$p,\alpha_1,\dots,\alpha_m$ は代数的に独立でない．よって，ある K 上の多項式 f が存在して $f(q,\alpha_1,\dots,\alpha_m) = 0$ とできる．すると，$f(p,X_1,\dots,X_m)$ は 0 でない関係式であり，これにより $\beta_1,\dots,\beta_m$ が消える．これは矛盾である．（証明終）

補題 *3.3.7*（Artin–Tate の補題）

$A \subset B \subset C$ を環の拡大とする．A が Noether 環であり，C は有限型 A 代数でかつ B 加群として有限生成であるとすると，B は有限型 A 代数である．

証明.

$C = A[c_1, \ldots, c_r]$ とおくと，C は有限 B 加群なので c_i たちは B 上整である．すると；

$$c_i^{n_i} + b_{i1}c_i^{n_i-1} + \cdots + b_{n_i} = 0$$

となる $b_{ij} \in B (1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq n_i)$ たちがとれる．これらが A 上生成する有限型 A 代数を $B' = A[b_{ij}]$ とおく．このとき，構成から C は B' 上整であり，また $C = B'[c_1, \ldots, c_r]$ すなわち C は有限型 B' 代数である．これより C は有限 B' 加群となる．いま A が Noether なので B' も Noether（Hilbert の基底定理）で，C の部分 B' 加群 B は有限生成である．よって B は有限型 B' 代数で，B' は有限型 A 代数だから B は有限型 A 代数である．（証明終）

命題 *3.3.8*（Zariski の補題）

K を体とし，L を K 上の有限型代数とする．このとき，L が体ならば体の拡大 L/K は有限次拡大である．

証明.

$L = K[x_1, \ldots, x_n]$ としよう．L が K 上代数的でないと仮定すると，並び替えることで $x_1, \ldots x_r$ は k 上代数的に独立で，$x_{r+1}, \ldots, x_n$ は $F = K(x_1, \ldots, x_r)$ 上代数的であるようにとれる．このとき L は F の有限次拡大体となるので，F 加群として有限生成である．

Artin–Tate の補題（補題 3.3.7）から F は有限型 K 代数である．$F = K(x_1, \ldots, x_r)$ であったので，$f_i, g_i \in K[x_1, \ldots, x_r]$ が存在して；

$$F = K[g_1/f_1, \ldots, g_s/f_s]$$

とかける．すると $f = f_1 \ldots f_s$ とおくと，$F = K[x_1, \ldots, x_r][1/f]$ と表せる．さて $1/(f+1) \in K(x_1, \ldots, x_r) = F$ より，多項式 $h \in K[x_1, \ldots, x_r][X]$ が存在して $1/(f+1) = h(1/f)$ となる．よって $N \gg 0$ をとれば $f^N/(f+1) \in K[x_1, \ldots, x_r]$ とかける．N をこのような条件を満たすものの中で最小のものとしよう．このとき $g \in K[x_1, \ldots, x_r]$ が存在して $f^N = gf + g$ とかけている．$N \geq 1$ と仮定すると；

$$g/f = f^{N-1} + g \in K[x_1, \ldots, x_r]$$

となるので，g は f で割り切れる．これは N の最小性に矛盾．よって $N = 0$ である．すなわち $1/(f+1) \in K[x_1, \ldots, x_r]$ となり，$f \in K$ でなければならない．

よって $F = K[x_1, \ldots, x_r]$ とかけるが，$F = K(x_1, \ldots, x_r)$ であったことに矛盾．よって L は K 上代数的である．（証明終）

Zariski の補題の直接の応用の一つとして，Hilbert の零点定理（定理 3.7.7）の弱い形である次の定理を示しておこう．

定理 *3.3.9*（弱零点定理，week nullstellensatz）

K が代数閉体であるとき，$K[X_1, \ldots, X_n]$ のすべての極大イデアル $\mathfrak{m}$ は，ある $a_1, \ldots, a_n \in K$ が存在して；

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n)$$

と表せる．

証明.

簡単のため $K[X_1,\dots,X_n]=K[X]$ とかく．$\mathfrak{m}$ が極大であるから，$K[X]/\mathfrak{m}$ は体である．すると，命題 3.3.8 より $K[X]/\mathfrak{m}$ は K 代数拡大体であるので，K が代数閉体だから $K[X]/\mathfrak{m}\cong K$ である．すると，適当な全準同型写像 $\varphi : K[X]/\mathfrak{m}\twoheadrightarrow K$ が存在する．ここで $\varphi(X_i)=a_i$ とすれば，明らかに

$$(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)\subset\ker\varphi=\mathfrak{m} \tag{$*$}$$

である．また，$(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)$ は $a=(a_1,\dots,a_n)$ とするときの点 a の代入写像；

$$\phi_a : K[X_1,\dots,X_n]\longrightarrow K; f\longmapsto f(a)=f(a_1,\dots,a_n)$$

の核であるので，同型 $K[X]/(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)\cong K$ がなりたち，$(X_1-a_1,\dots,X_n-a_n)$ は極大イデアルである．よって $(*)$ において等号が成り立つことがわかる．（証明終）

§4　Krull 次元と超越次元

まず，環の次元の 1 つを定義する．環に次元を導入する方法はいくつかあるが，ある仮定のもとでそれらは一致してしまう（Krull の次元定理，定理 5.3.8）．ここでは 1 番初等的に導入が行える Krull 次元というものを紹介しよう．

定義 *3.4.1*（Krull 次元）

環 A に対し，素イデアルの真の増大列

$$P_* : P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_n$$

に対して，n を列 P_* の長さという．最長の素イデアルの列の長さを，環 A の Krull 次元といい，$\dim A$ とかく．

自明な例として，体の次元は 0 である．（体でない）PID の次元は 1 である．また，命題 2.2.1 より Artin 環の次元も 0 である．実は，次元 0 の Noether 環であることと Artin 環であることは同値である．

定理 *3.4.2*

A が Artin 環であるためには，Noether 環かつ $\dim A=0$ であることが必要十分である．

証明.

Artin 環 A は $\dim A=0$ の Noether 環であることは見た（定理 2.2.7）．A を次元 0 の Noether 環とする．系 2.3.10 より A の極小素イデアルは有限個である．それを $P_1,\dots,P_r$ とする．また，A の次元は 0 なので P_i が A の素イデアルのすべてである．$\sqrt{0}=\bigcap_{i=1}^r P_i$ であり，$\sqrt{0}$ は A のイデアルだから有限生成なのである $k\in\mathbb{Z}_+$ に対して $\sqrt{0}^k=0$ である．よって，$P_1^kP_2^k\dots P_r^k\subset(\bigcap P_i)^k=\sqrt{0}^k=0$ なので $P_1^kP_2^k\dots P_r^k=0$ である．よって，重複を許すことで極大イデアル $P_1,\dots,P_n$ を $P_1\dots P_n=0$ となるようにできる（最大でこの中には P_i が k 回ずつ現れる）．ここで，イデアルの減少列；

$$A\supset P_1\supset P_1P_2\supset\cdots\supset P_1P_2\dots P_n=0$$

を考えると，A が Noether 的なので定理 2.2.7 の証明と同様に，隣り合う 2 項の剰余加群；

$$M_i=P_1\dots P_i/P_1\dots P_{i-1}$$

は Noether 的．M_i は体 A/P_i 上の加群なので，命題 2.2.6 より M_i は Artin 的である．帰納的に A も Artin 的である．（証明終）

ここで，次元と関連したイデアルの情報を定義しておこう．

定義 *3.4.3*（高さ）

A を環，P を素イデアルとする．

$$\operatorname{ht} P = \sup\left\{r \in \mathbb{Z} \,\middle|\, P = P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \cdots \supsetneq P_r : \text{素イデアルの真減少列}\right\}$$

$$\operatorname{coht} P = \sup\left\{r \in \mathbb{Z} \,\middle|\, P = P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r : \text{素イデアルの真増大列}\right\}$$

を，それぞれ素イデアル P の高さ（高度），余高度 (height，coheight) という．coheight のことを深さ (depth) ということもある．一般のイデアル I については；

$$\operatorname{ht} I = \min\{\operatorname{ht} P \mid P \in V(I)\}$$

で I の高さを定義する．

定義から $\dim A$ は $\sup\{\operatorname{ht} P \mid P \in \operatorname{Spec} A\}$ である．高さと環の次元には次の関係がある．

命題 *3.4.4*

以下の 3 つが成り立つ．

(i) $\dim A_P = \operatorname{ht} P$
(ii) $\dim A/P = \operatorname{coht} P$
(iii) $\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P \leq \dim A$

証明.

(i) 命題 1.5.5 より，$\operatorname{Spec} A_p$ と $\{P' \in \operatorname{Spec} A \mid P' \cap (A \setminus P) = \emptyset\} = \{P' \in \operatorname{Spec} A \mid P' \subset P\}$ の間には包含関係を保つ全単射がある．よって，$\dim A_p = \operatorname{ht} P$ である．
(ii) 素イデアルの対応定理を用いれば，(i) と同様．
(iii) A の素イデアルの最長の鎖の中に P が含まれるとき，前後で区切れば最長の真増大列と真減少列になるから，$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$ である．そうでないときは，P の最長の真増大列と真減少列をつなげたものは素イデアルの鎖の 1 つとなるから，$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P \leq \dim A$ が成り立つ．

（証明終）

この命題の (iii) の不等式がいつ成り立つか，というのは重要な命題である．それについての一つの結果が命題 3.6.8 である．

ここでは次の定理により，具体的な環の次元を計算する方法の 1 つを紹介しよう．

定理 *3.4.5*

体 K 上有限生成な整域 A に対し，$\dim A = \operatorname{tr.deg}_K A$ である．

証明.

Step 1. $\dim A \leq \operatorname{tr.deg} A$ であること．

$\dim A = r$ とし，$0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ とすると，命題 3.3.6 より；

$$0 \leq \operatorname{tr.deg} A/P_r < \operatorname{tr.deg} A/P_{r-1} < \cdots < \operatorname{tr.deg} A/P_1 < \operatorname{tr.deg} A$$

であるので，$r \leq \operatorname{tr.deg} A$ である．

Step 2. $\operatorname{tr.deg} A \leq \dim A$ であること．

$\operatorname{tr.deg} A = n$ とおく．基礎体 K を動かすと n が動く．n についての帰納法で示す．まず，$n = 0$ のときは明らかに $0 \leq \dim A$ である．次に，$n-1$ で正しいとする．$\operatorname{tr.deg} A = n$ となる A を，$A = K[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ とおく．すべての α_i は代数的でないから，α_1 が K 上超越的としてよい．$S = K[\alpha_1] \setminus \{0\}$ は積閉で，これで局所化すると $A_S = K(\alpha_1)[\alpha_2, \ldots, \alpha_r]$ となる．$K(\alpha_1) = K'$ とすると，$\operatorname{tr.deg}'_K A_S = n - 1$ であるので，帰納法の仮定から（任意の基礎体について成り立っているので）$n - 1 \leq \dim A_S$ である．ゆえに，A_S の素イデアルの列；

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_{n-1}$$

がとれる．よって命題 1.5.5 より $Q_i \cap S = \emptyset$ となる A の素イデアルの列；

$$Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_{n-1}$$

がとれる．ここで，Q_{n-1} が極大でなければ $Q_{n-1} \subsetneq Q_n$ となる真のイデアル Q_n が存在するので，A/Q_{n-1} が体でないことを示せばよい．さて，$Q_{n-1} \cap S = (Q_{n-1} \cap K[\alpha_1]) \setminus \{0\} = \emptyset$ であるので，$\alpha_1 \notin Q_{n-1}$ である．そこで，もし $\overline{\alpha_1} \in A/Q_{n-1}$ が K 上代数的であると仮定すると，$f(\overline{\alpha_1}) = 0$ となる K 上の多項式 f があり，これは $f(\alpha_1) \in Q_{n-1}$ を意味する．ところが $f(\alpha_1) \in K[\alpha_1]$ であるから，矛盾．よって $\overline{\alpha_1}$ は A/Q_{n-1} の超越的な元であるから，$\operatorname{tr.deg}_K A/Q_{n-1} > 0$ である．よって命題 3.3.8 より A/Q_{n-1} は体ではない．よって $n \leq \dim A$ が示された．

（証明終）

この定理の系として，直感的な次の事実が得られる．

系 *3.4.6*

$\dim K[X_1, \ldots, X_n] = n$ である．また，$n \neq m$ なら $K[X_1, \ldots, X_n]$ と $K[X_1, \ldots, X_m]$ は同型ではない．

環の次元 $\dim A$ は幾何的には $\operatorname{Spec} A$ の次元である．加群の次元については $\operatorname{Supp} M$ の（幾何的な）次元をもって定義しよう．A 加群 M が有限生成なら $V(\operatorname{Ann} M) = \operatorname{Supp} M$ である（命題 1.6.8）．そこで一般の加群についても $\dim M = \dim(A/\operatorname{Ann} M)$ と定義する．

定義 *3.4.7*（加群の Krull 次元）

A 加群 M について $\dim(A/\operatorname{Ann} M)$ を M の Krull 次元と定め，$\dim M$ とかく．

簡単な計算により次の言い換えができることがわかる．

命題 *3.4.8*

Noether 環 A 上の有限生成加群 M について；

$$\dim M = \sup \{\dim A/P \mid P \in \operatorname{Ass} M\}$$

が成り立つ．

証明.

まず $\dim M = r$ とし，素イデアルの昇鎖 $\mathrm{Ann}\, M P \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$ を考える．次元の定義から P は $\mathrm{Ann}\, M$ の極小素イデアルとなる．ここで $V(\mathrm{Ann}\, M) = \mathrm{Supp}\, M$ であり，P は定理 2.3.6 より $\mathrm{Ass}\, M$ の元である．また $r \leq \dim A/P$ であるから，$r \leq \sup\{\dim A/P \mid P \in \mathrm{Ass}\, M\}$ が示された．次に $P \in \mathrm{Ass}\, M$ を $\dim A/P$ を最大にするものとすれば P は極小なので $\mathrm{Supp}\, M$ の元，つまり $\dim A/P \leq \dim A/(\mathrm{Ann}\, M)$ である．（証明終）

§5　上昇定理と下降定理

この節では，次節で Noether の正規化定理（定理 3.6.3）を証明する際に有力な道具となる**上昇定理**（going up theorem，定理 3.5.6）と**下降定理**（going down theorem，定理 3.5.11）を示そう．

定義 *3.5.1*

$A \subset B$ を環の拡大とする．A のイデアル I' に対し，B のイデアル I が存在して $I \cap A = I'$ となっているとき，I は I' の上にある (lying over) という．

次の命題は簡単だが大切である．

命題 *3.5.2*

$A \subset B$ を整域の拡大とする．B が A 上整であるとき，A が体であることと B が体であることは同値.

証明.

$(\Longrightarrow)$

A が体であるとき，任意の $0 \neq x \in B$ について；

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

となる a_i に対して B が整域だから $a_n \neq 0$ である．よって $x^{-1} = -a_n{}^{-1}(x^{n-1} + \cdots + a_{n-1})$ であることがわかる．

$(\Longleftarrow)$

B が体であると仮定すると，任意の $0 \neq x \in A$ について $x^{-1} \in B$ であるから；

$$x^{-n} + a_1 x^{-n+1} + \cdots + a_n = 0$$

となる a_i が存在する．両辺に $x^{n-1} \in A$ をかけると $x^{-1} = -(a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}) \in A$ であることがわかる．

（証明終）

補題 *3.5.3*

$A \subset B$ を整拡大とする．このとき，I が B のイデアルならば B/I は $A/(I \cap A)$ 上整である．

証明は明らかなので省略する．

命題 *3.5.4*

$A \subset B$ を整拡大とする．$P \in \mathrm{Spec}\, B$ について，P が極大であることと $P \cap A$ が極大であることは同値.

証明.

補題より B/P は $A/(P \cap A)$ 上整であるので，命題 3.5.2 より従う．（証明終）

定理 3.5.5

$A \subset B$ を整拡大とする．任意の $P' \in \operatorname{Spec} A$ について，P' の上にある $P \in \operatorname{Spec} B$ が存在する．

証明.

B の積閉集合 $A \setminus P'$ による局所化を $B_{P'}$ と書くことにする．自然な単射 $\iota : A \to B$ と局所化が導く可換図式を考えよう；

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{P'} & \xrightarrow{\iota_{P'}} & B_{P'} \end{array}$$

ここで素イデアルの準同型による逆像も素イデアルであることに注意しよう．$\mathfrak{m}$ を $B_{P'}$ の極大イデアルとすると，$\mathfrak{m} \cap B \in \operatorname{Spec} B$ である．これを P とおくと，$P \cap A = P'$ となる．

実際，可換図式をみると $\iota_{P'}((P \cap A)A_{P'}) = \mathfrak{m}$ となるが，命題 3.5.4 より $\iota_{P'}^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m} \cap A = P'A_{P'}$ であり，命題 1.5.13 より ι_P は単射なので $(P' \cap A)A_{P'} = P'A_{P'}$ である．ゆえに $P \cap A = P'$ である．（証明終）

定理 3.5.6（上昇定理）

$A \subset B$ を整拡大とする．$P'_1 \subset \cdots \subset P'_n$ を A の素イデアルの昇鎖とすると，B の素イデアルの昇鎖 $P_1 \subset \cdots \subset P_n$ で，$P_i \cap A = P'_i$ となるものが存在する．

証明.

帰納法によって $n = 2$ の場合についてのみ示せば十分である．$\overline{A} = A/P'_1, \overline{B} = B/P_1$ とする．補題 3.5.3 より $\overline{B}$ は $\overline{A}$ 上整である．そこで $\overline{P'_2} \in \operatorname{Spec} \overline{A}$ について定理 3.5.5 より $\overline{P_2} \in \operatorname{Spec} \overline{B}$ が存在して $\overline{P_2} \cap \overline{A} = \overline{P'_2}$ である．$\overline{P_2}$ に対応する $P_2 \in \operatorname{Spec} B$ について $P_2 \cap A = P'_2$ となり，示された．（証明終）

系 3.5.7

$A \subset B$ を整拡大とする．このとき $\dim A = \dim B$ である．

証明.

上昇定理により $\dim A \leq \dim B$ が従い，B の極大な昇鎖を引き戻せばそれは A のイデアルの昇鎖となるから $\dim B \leq \dim A$ がわかる．（証明終）

つぎに下降定理（定理 3.5.11）を示していくが，上昇定理とは異なり若干の仮定が必要である．そのためにいくつか準備をしよう．

定義 3.5.8

$A \subset B$ を環の拡大，I を A のイデアルとする．$x \in \overline{A}_B$ について，$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ となる a_i をすべて I の元であるようにとれるとき，x は I 上整であるという．I 上整である B の元全体を $\overline{I}_B$ とかき，B における I の整閉包という．

補題 *3.5.9*

$A \subset B$ を整拡大，I を A のイデアルとする．自然な準同型 $A \to \overline{A}_B$ による I の像が $\overline{A}_B$ で生成するイデアルと I' とおくと，$\overline{I}_B = \sqrt{I'}$ である．

証明.

$x \in \overline{I}_B$ をとる．このとき，$a_i \in I$ がとれて；

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

となる．すると $x^n = -(a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)$ であるので，$x \in \overline{A}_B$ であるから $x^n \in I'$ すなわち $x \in \sqrt{I'}$ である．

一方，$x \in \sqrt{I'}$ とすると，$x^n \in I'$ となる n が存在する．よって，$c_i \in \overline{A}_B$ と $x_i \in I$ によって $x^n = \sum_{i=1}^m c_i x_i$ とかける．命題 3.1.5 より，$\varphi : A[c_1, \ldots, c_m] \to A[c_1, \ldots, c_1]; y \mapsto x^n y$ に対して Cayley–Hamilton の定理（定理 1.2.16）を適用できる．これにより x^n は I 上整であり，$x \in \overline{I}_B$ である．（証明終）

命題 *3.5.10*

$A \subset B$ を整域の拡大とし，さらに A は整閉であるとする．A のイデアル I と $x \in \overline{I}_B$ について，x の $K = \operatorname{Frac} A$ 上の最小多項式 $F_x = T^n + c_1 T^{n-1} + \cdots + c_n$ をとると，$c_i \in \sqrt{I}$ とできる．

証明.

I 上整なので，K 上代数的なことは明らか．F_x のすべての根を $x = x_1, \ldots, x_m$ とし，それらを K に添加した体を L とすると，各 x_j は x と同じ関係式によって I 上整である．すると，L において F_x の係数 c_i は x_j の多項式であるので，c_i は I 上整である．すると，$c_i \in K$ であったから $c_i \in \overline{I}_K$ である．ここで，補題を $A \subset K$ について考えると，A は整閉なので $I' = I$ であるから $c_i \in \overline{I}_K = \sqrt{I}$ である．（証明終）

定理 *3.5.11*（下降定理）

$A \subset B$ を整域の拡大とし，さらに A は整閉であるとする．$P'_1 \supset P'_2 \supset \cdots \supset P'_n$ を A の素イデアルの降鎖とすると，B の素イデアルの降鎖 $P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_n$ で，$P_i \cap A = P'_i$ となるものが存在する．

証明.

上昇定理と同様に $n = 2$ の場合に帰着できる．P'_2 が B で生成するイデアルを BP'_2 とかく．B_{P_1} について同様に考えると，命題 1.6.4 より $B_{P_1} P'_2 \cap A = P'_2$ を示せば良いことがわかる．

$x/s \in B_{P_1} P'_2 \cap A$ をとる．このとき $x \in BP'_2$, $s \in B - P_1$ である．ここで補題 3.5.9 において B が A 上整なので $\overline{A}_B = B$ であり，$\sqrt{BP'_2} = \overline{P'_2}_B$ となるので x は P'_2 上整である．すると命題 3.5.10 より，x の $\operatorname{Frac} A$ 上の最小多項式は；

$$F_x = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_i \in P'_2)$$

とかける．ここで $x/s \in A$ より $x/s = y$ とおくと，$sy = x$ が成り立つので；

$$F_s = T^n + \frac{a_1}{y} T^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{y^n}$$

である．

$P'_2 \subset B_{P_1}P'_2 \cap A$ は明らかなので，$y \in B_{P_1}P'_2 \cap A$ について $y \notin P'_2$ と仮定して矛盾を導こう．s は A 上整だから，命題 3.5.10 を $I = A$ として適用すると各 $a_i/y^i \in A$ である．すると $a_i/y^i \cdot y^i = a_i \in P'_2$ で $y^i \notin P'_2$ だから $a_i/y^i \in P'_2$ である．すると；

$$s^n = -\left(\frac{a_1}{y}s^{n-1} + \cdots + \frac{a_n}{y^n}\right)$$

であるから $s^n \in BP'_2 \subset BP'_1 \subset P_1$ であり，$s \in P_1$ となるがこれは矛盾である．（証明終）

系 3.5.12

$A \subset B$ が整域の拡大で，A が整閉であるとする．B のイデアル $I \neq (1)$ について，$\operatorname{ht} I = \operatorname{ht}(I \cap A)$ が成り立つ．

最初の仮定はただ下降定理を適用するために必要である．

証明.

Step 1. I が素イデアルのとき．

$\operatorname{ht} I = r$ とおき，$I = P_0 \supset \cdots \supset P_r$ を B の素イデアルの鎖とすると，$P_i \cap A \in \operatorname{Spec} A$ によって $I' \cap A = P_0 \cap A \supset \cdots \supset P_r \cap A$ より $\operatorname{ht} I \leq \operatorname{ht}(I \cap A)$ が成り立つ．また，$\operatorname{ht}(I \cap A) = r'$ とおくと，$I \cap A = P'_0 \supset \cdots \supset P'_{r'}$ となる A の素イデアルの鎖が存在する．定理 3.5.11 より P'_i のうえにある B の素イデアル P'_i たちで降鎖をなすものが存在するから，$r' = \operatorname{ht}(I \cap A) \leq \operatorname{ht} I$ が成り立つ．

Step 2. I が一般のイデアルのとき．

以下の式が成り立つことがわかる；

$$\operatorname{ht} I = \min_{P \in V(I)} \operatorname{ht} P = \min_{P \in V(I)} \operatorname{ht}(P \cap A) \geq \min_{P' \in V(I \cap A)} \operatorname{ht} P' = \operatorname{ht}(I \cap A)$$

ここで $P' \in V(I \cap A)$ について，$A/(I \cap A) \hookrightarrow B/I$ について定理 3.5.5 から $P \in V(I)$ が存在して $P \cap A = P'$ となることがわかるので，実は等号が成立している．

（証明終）

§6　Noether の正規化定理

この節では Noether の正規化定理（定理 3.6.3）を証明し，体上の有限生成代数について考察しよう．

補題 3.6.1

$K[X_1, \ldots, X_n]$ について，任意の $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ に対し，$f \notin K$ ならば，与えられた自然数 q の倍数 $m_2, \ldots, m_n$ が存在して，$y_1 = f_1, y_2 = X_2 + X_1^{m_2}, \ldots, y_n = X_n + X_1^{m_n} (m_i \leq 0)$ とおくとき $K[X_1, \ldots, X_n]$ は $K[y_1, \ldots, y_n]$ 上整である．

証明.

f を単項式の和として $f = \sum a_i M_i$ とする．$\deg f = d$ とおき，t を d より大きい q の倍数としよう．$i \leq 2$ について，$m_i = t^{i-1}$ とおく．$M = X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_n^{k_n}$ について，$X_i = y_i + X_1^{m_i}$ を代入すると；

$$M = X_1^{\sum k_i t^{i-1}} + (X_1\text{について低次の } X_1, y_2, \ldots, y_n\text{の項})$$

である．そこで $\omega(M) = \sum k_i t^{i-1}$ とおく．f を構成する単項式 $M = X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$，$M' = X_1^{l_1} \dots$，$X_n^{l_n}$ に対して，辞書式順序において $(l_n, \dots, l_1) \leq (k_n, \dots, k_1)$ ならば $\omega(M') \leq \omega(M)$ となるから，M_i のうちで $\omega(M)$ が最大のものは唯一つしかない．それを M_1 とおく．このとき；

$$f = a_1 X_1^{\omega(M_1)} + (X_1\text{について低次の } X_1, y_2, \dots, y_n\text{の項})$$

であるので，$y_1 = f$ であったことを思い出すと，X_1 は $K[y_1, \dots, y_n]$ を係数とする多項式；

$$X^{\omega(M_1)} + (X\text{ についての低次の項}) + \frac{1}{a_1} y_1$$

の根である．よって X_1 は $K[y_1, \dots, y_n]$ 上整である．すると，$2 \leq i$ について X_i は X_1, y_i でかけているので，$K[X_1, \dots, X_n]$ は $K[y_1, \dots, y_n]$ 上で整である．（証明終）

定理 *3.6.2*（多項式環の正規化定理）

$K[X_1, \dots, X_n]$ とそのイデアル I を考える．$\mathrm{ht}\, I = r$ のとき，$y_1, \dots, y_n \in K[X_1, \dots, X_n]$ が存在して，$K[X_1, \dots, X_n]$ は $K[y_1, \dots, y_n]$ 上整であって，$K[y_1, \dots, y_n]$ のイデアルとして $I \cap K[y_1, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_r)$ とできる．

証明.

r についての帰納法で示す．

Step 1. $r = 0$ のときは $I = 0$ なので $y_i = X_i$ とすればよい．

Step 2. $I' \subset I$ を $\mathrm{ht}\, I' = r - 1$ となるものとする．帰納法の仮定から $y_1', \dots, y_n'$ で $I' \cap K[y_1', \dots, y_n'] = (y_1', \dots, y_r') \subset I \cap K[y_1', \dots, y_n']$ となるものがとれる．系 3.5.12 より $\mathrm{ht}\, I' \cap K[y_1', \dots, y_n'] = r - 1, \mathrm{ht}\, I \cap K[y_1', \dots, y_n'] = r$ であるので，ある $f \in I \cap K[y_1', \dots, y_n']$ で $f \notin I' \cap K[y_1', \dots, y_n']$ となるものがある．$I' \cap K[y_1', \dots, y_n'] = (y_1', \dots, y_r')$ より，$f(0, \dots, 0, y_r', \dots, y_n')$ も同じ条件を満たす．よって $f \in K[y_r', \dots, y_n']$ としてよい．ここで補題 3.6.1 を用いると $y_r'' = f, \dots, y_n''$ で $K[y_r', \dots, y_n']$ が $K[y_r'', \dots, y_n'']$ 上整であるものがとれる．ここで；

$$y_1 = y_1', \dots, y_{r-1} = y_{r-1}', y_r = y_r'', \dots, y_n = y_n''$$

とすると $K[X_1, \dots, X_n]$ は $K[y_1, \dots, y_n]$ 上整で，$I \cap K[y_1, \dots, y_n] \supset (y_1, \dots, y_r)$ であって $\mathrm{ht}(y_1, \dots, y_r) \geq r$ だから $\supsetneq$ ではありえず，$I \cap K[y_1, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_r)$ である．

（証明終）

定理 *3.6.3*（Noether の正規化定理）

K を体，A を有限生成 K 代数とする．このとき，K 上代数的に独立であるような $z_1, \dots, z_s \in A$ がとれて，A は $K[z_1, \dots, z_s]$ 上整である．

証明.

A が有限生成 K 代数であるから，全準同型 $\varphi : K[X_1, \dots, X_n] \to A$ が存在する．$I = \ker \varphi, \mathrm{ht}\, I = r$ とおき，前定理を適用して $y_1, \dots, y_n$ を得る．y_{r+j} の φ による像を z_j とすると，$K[X_1, \dots, X_n]$ は $K[y_1, \dots, y_n]$ 上整なので，$A = \varphi(K[X_1, \dots, X_n])$ は $K[z_1, \dots, z_{n-r}] = \varphi(K[y_1, \dots, y_n])$ 上整である．よって $z_1, \dots, z_{n-r}$ が

K 上代数的に独立ならばよい．z_i についての関係式があったとすると，それの z_i を y_{r+i} に置き換えたものは $I = \ker\varphi$ の元であるが，$I \cap K[y_1, \ldots, y_n] = (y_1, \ldots, y_r)$ なので係数は 0 である．よって代数的に独立となり，主張が従う．（証明終）

Noether の正規化定理によって，体上の有限生成代数 A が**鎖状環**と呼ばれる環になることがわかる．

定義 3.6.4（鎖状環）

環 A の素イデアルの真増大列 $P_0 \subset P_1 \subset \cdots$ についてどの隣接した 2 項の間にも素イデアルが存在しないとき，その鎖は飽和しているという．任意の $P \subset P'$ となる素イデアルについて，次の飽和したイデアルの鎖；

$$P = P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n = P'$$

の長さがすべて同一の有限値であるとき，A を**鎖状環** (catenary ring) という．

定理 3.6.5

体 K 上有限生成な整域 A に対して，飽和した素イデアル鎖 $P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_t$ について；

$$t = \dim A/P_0 - \dim A/P_t$$

である．つまり A は鎖状環である．

証明．

$0 = P_0 \subset \cdots \subset P_t$ が飽和していて，P_t が極大であるとする．環を適当に割ることで上の状態に帰着できるので，これについて t についての帰納法を用いて，$t = \dim A$ を示せばよい．

$t = 0$ のとき，A は体であるので明らか．$t-1$ まで正しいとする．$\dim A = \operatorname{tr.deg} A = d$ とおくと，Noether の正規化定理より，$z_1, \ldots, z_d \in A$ が存在して A は $K[z_1, \ldots, z_d]$ 上整である．ここで，任意の i について $z_i \notin P_1$ と仮定する．このとき $P_1 \cap K[z_1, \ldots, z_d] \subset K$ なので，$P_1 \cap K[z_1, \ldots, z_d] = 0$ である．ところが系 3.5.12 より $1 = \operatorname{ht} P_1 = \operatorname{ht}(P_1 \cap K[z_1, \ldots, z_d])$ であるので矛盾．よって $z_1 \in P_1$ としてよい．このとき $z_j \notin P_1 (j \neq 1)$ に注意して，A/P_1 と $K[z_1, \ldots, z_d]/(P_1 \cap K[z_1, \ldots, z_d]) = K[z_2, \ldots, z_d]$ について帰納法の仮定から $t-1 = d-1$ である．よって $t = d$ である．（証明終）

鎖状環の準同型像はまた鎖状環であることに注意すると，体上の有限生成代数はすべて鎖状環である．そこで次の定義をする．

定義 3.6.6（強鎖状環）

Noether 環 A であって，任意の有限生成 A 代数が鎖状であるものを**強鎖状環** (univarsally catenary ring) であるという．

先に述べたことから A が強鎖状であることと，すべての n について $A[X_1, \ldots, X_n]$ が鎖状であることは同値であり，体 K は強鎖状である．

鎖状環というトピックは命題 3.4.4 (iii) の不等式と関係している．明らかに A が局所整域（極大イデアルと極小イデアルが一意的）で鎖状ならば，等号が成り立つ．すなわち，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$$

が成り立つ．そこで，この性質のことを本書では**弱次元公式**が成り立つ，ということにしよう．

定義 *3.6.7*（弱次元公式）

環 A について，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$$

が成り立つとき，A において**弱次元公式** (week dimension formula) が成り立つという．

この表現のもとで，先に述べたことは局所整域である鎖状環において弱次元公式が成り立つ，と言い換えることができる．ではその逆，弱次元公式が成り立つ局所整域 A は鎖状環である，は成り立つだろうか？これは A が Noether 局所整域ならば正しい (Ratliff,1972) がその証明は難しい（松村 (1980)，定理 31.4.）．一方で，鎖状どころか強鎖状環ですら弱次元公式が成り立たない例が存在する（例 A.3.1）．しかし，実用の面では定理 3.6.5 により次の結果が従う．

命題 *3.6.8*

体 K 上の有限生成整域 A において弱次元公式が成り立つ．

証明.

定理 3.6.5 より任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，極大イデアルで終わる飽和した鎖は $\dim A - \dim A/\mathfrak{m} = \dim A$ 個の素イデアルからなる．（証明終）

ところで，次元公式と呼ばれる等式も存在する．A を Noether 整域，B を A 上の有限生成整域とする．任意の $P \in \operatorname{Spec} B$ と $P' = P \cap A$ について；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{tr.deg}_{K(P')} K(P) = \operatorname{ht} P' + \operatorname{tr.deg}_{\operatorname{Frac}(A)} \operatorname{Frac}(B)$$

が成り立つとき，A と B の間で**次元公式** (dimension formula) が成り立つという．A が体のときこれは体上有限生成整域についての弱次元公式にほかならない．

実際の Noether 環はほとんどが鎖状環であることが知られているが，その証明は Cohen–Macaulay 環の登場を待たなければならない．また，鎖状でない Noether 環の例は Nagata (1956) で与えられている．また鎖状であるが強鎖状でない Noether 環の例も永田によって与えられている．

§7　Hilbert の零点定理

この節では，（古典的）代数幾何学の基礎を成す零点集合について紹介しよう．

定義 *3.7.1*（Affine-n 空間）

k を（代数閉）体とする．k の元 n 個の組すべてからなる集合を n 次元 **Affine 空間** (Affine space) という．

体 k は代数閉でなくても構わないが，後述する Hilbert の零点定理は代数閉体でしか成り立たないため，注意が必要となる．

$A = k[X_1, \ldots, X_n]$ に対し，$f \in A$ と $(a_1, \ldots, a_n) = P \in k^n$ について $f(P) := f(a_1, \ldots, a_n)$ と定めることにより，A の元を k^n から k への写像と解釈することができる．

定義 *3.7.2*（零点集合）

$T \subset A$ とする．$Z(T) = \left\{P \in k^n \,\middle|\, \text{任意の } f \in T \text{ に対し } f(P) = 0\right\}$ を，T の**零点集合**という．

A は Noether 環なので，イデアル I は有限個の生成元 $(f_1, \ldots, f_n)$ を持つ．よって，$Z(I)$ は有限個の多項式 $f_1, \ldots, f_n$ の共通の零点と考えられる．

定義 *3.7.3*（代数的集合）

$X \subset k^n$ に対し，ある $T \subset A$ が存在して，$X = Z(T)$ となるとき，X を**代数的集合** (algebraic set) という．

I を T によって生成される A のイデアルとすると，$Z(T) = Z(I)$ が成り立つので，代数的集合 X に対応する T をイデアルとなるように取れる．

命題 *3.7.4*

代数的集合全体は閉集合系の公理を満たす．

証明.

Step 1. $Z(0) = \mathbb{A}^n$，$Z(1) = \emptyset$ である．

Step 2. 有限和について．

$X = Z(T_X), Y = Z(T_Y)$ を代数的集合とする．$X \cup Y = Z(T_X T_Y)$ である．実際 $\subset$ は明らかで，$p \in Z(T_X T_Y)$ とすると，$P \notin X$ ならば，ある $f \in T_X$ が存在して $f(P) \neq 0$ であるので，任意の $g \in T_Y$ について $f(P)g(P) = 0$ であることから $g(P) = 0$ である．よって，$P \in Y$ となる．ゆえに $P \in X \cup Y$ である．

Step 3. 交わりについて．

X_λ を代数的集合とし，$X_\lambda = Z(T_\lambda)$ とすると

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = Z\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda \right)$$

が成立する．実際 $\subset$ は明らかで，$P \in Z(\cup T_\lambda)$ に対し，任意の $f \in \cup T_\lambda$ について $f(P) = 0$ だから，特に各 λ に対して任意の $g \in T_\lambda$ について $g(P) = 0$ である．よって $P \in X_\lambda$ となり，$P \in \bigcap X_\lambda$ が従う．

（証明終）

定義 *3.7.5*（Zariski 位相）

$\mathbb{A}^n$ に代数的集合全体を閉集合系とする位相を定める．これを Zariski 位相という．

例として，k 上の Zariski 位相（これを Affine 直線という）を考える．$A = k[X]$ は PID だから，すべての代数的集合は 1 つの多項式の零点の集まりである．k は代数閉体なので，0 でない多項式 f はその字数が n のとき

$$f(x) = c(x - a_1) \ldots (x - a_n) \quad (c \in k)$$

と分解できる．このとき $Z(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ である．よって，$\mathbb{A}^1$ の代数的集合は，有限な部分集合または k である．よって，開集合系は空集合及び有限部分集合の補集合となる（補有限位相）．特にこれは Hausdorff ではないが，コンパクトである位相の大事な例である（ここでは「任意の開被覆を有限個で取り直せる」という性質を指して “コンパクト” と呼んだ．代数幾何学，特に Bourbaki の流儀では慣習的に上の性質に加えて Hausdorff を課してコンパクトといい，Hausdorff でないときに**準コンパクト** (quasi-compact) と呼ぶことがあるので注意してほしい)．

ここで定義 1.6.1 を思い出そう．k^n の Zariski 位相において，点 $\{(a_1,\dots,a_n)\}$ は $f=c(X_1-a_1)\cdots(X_n-a_n)$ の零点集合となり，K^n の閉点になる．これは弱零点定理（定理 3.3.9）によって $K[X_1,\dots,X_n]$ の極大イデアル，言い換えれば $\operatorname{Spec} K[X_1,\dots,X_n]$ の閉点が $(X_1,\dots,X_n)$ しかないことと対応している．

また，Zariski 位相は体 $k=\mathbb{C}$ としたとき，Euclid 位相より真に弱い位相となる．実際に多項式 f を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}$ への連続写像とみなせば，代数的集合は Euclid 位相における閉集合 $\{0\}$ の f による引き戻しにほかならない．

$Y\subset\mathbb{A}^n$ に対し
$$I(Y)=\left\{f\in A\;\middle|\;\text{任意の } P\in Y \text{ に対して } f(P)=0\right\}$$
と定めると，これはイデアルをなす．これらについて性質をまとめよう．

命題 *3.7.6*

(i) $T_1\subset T_2\subset A$ とすると $Z(T_2)\subset Z(T_1)$ である．
(ii) $Y_1\subset Y_2\subset\mathbb{A}^n$ とすると $I(Y_2)\subset I(Y_1)$ である．
(iii) $Y_1,Y_2\subset\mathbb{A}^n$ について $I(Y_1\cup Y_2)=I(Y_1)\cap I(Y_2)$ である．

証明.

(iii) のみ示す．$f\in I(Y_1\cup Y_2)$ とすると，任意の $P\in Y_1$ について $f(P)=0$ であるので，$f\in I(Y_1)$ である．同様に $f\in I(Y_2)$ であることがわかる．逆に，$f\in I(Y_1)\cap I(Y_2)$ とすると任意の $P\in Y_1$ と $Q\in Y_2$ について $f(P),f(Q)=0$ であるので，$f\in I(Y_1\cup Y_2)$ である．（証明終）

定理 *3.7.7*（Hilbert の零点定理）

k を代数的閉体，I を $A=k[X_1,\dots,X_n]$ のイデアルとし，$f\in A$ を $Z(I)$ のすべての点で消える多項式とする．このとき $f\in\sqrt{I}$ である．

証明.

$f\notin\sqrt{I}$ と仮定する．すると $P\in V(I)$ であって，$f\notin P$ であるものがとれる．このとき $\overline{A}=A/P$ において $\overline{A}_{\overline{f}}=\overline{A}[1/\overline{f}]$ と，極大イデアル $\mathfrak{m}$ を考えよう．体 $\overline{A}_{\overline{f}}/\mathfrak{m}$ は有限型 k 代数であるから，Zariski の補題（命題 3.3.8）より k の有限次拡大体，すなわち代数拡大体であり k が代数閉体だから，これは k に同型である．各 X_i の $\overline{A}_{\overline{f}}/\mathfrak{m}$ への像を a_i とおいて $a=(a_1,\dots,a_n)\in k^n$ を定めると，任意の $g\in I$ について $g(a)=g(\overline{X_1}+\mathfrak{m},\dots,\overline{X_n}+\mathfrak{m})=g(\overline{X_1},\dots,\overline{X_n})+\mathfrak{m}=0$ である．一方で $\overline{f}\notin\mathfrak{m}$ より $f(a)\neq0$ であるので，仮定に反する．よって $f\in\sqrt{I}$ である．（証明終）

命題 *3.7.8*

$\mathbb{A}^n$ の代数的集合全体を As，A の根基イデアル全体を Ri とすると，次の 2 つの写像
$$\varphi: As\longmapsto Ri; Y\longmapsto I(Y),\psi: Ri\longrightarrow As; I\longmapsto Z(I)$$
が包含関係を逆にする全単射となる．

証明.

Step 1. Hilbert の零点定理より，$I\in Ri$ とすると，$I(Z(I))=\sqrt{I}=I$ となるので，$\varphi\circ\psi=\operatorname{id}Ri$ である．
Step 2. まず，任意の $Y\subset\mathbb{A}^n$ に対し，$Z(I(Y))$ は Y の閉包 $\overline{Y}$ に等しいことを示す．簡単に確かめられるように

$Y \subset Z(I(Y))$ であって，$Z(I(Y))$ は閉なので，$\overline{Y} \subset Z(I(Y))$ である．ここで，W を $Y \subset W$ となる閉集合とする．すると，$W = Z(I)$ となるイデアル I がとれる．$Y \subset Z(I)$ なので $I(Z(I)) \subset I(Y)$ である．ここで $I \subset \sqrt{I} = I(Z(I))$ だから，$Z(I(Y)) \subset Z(I) = W$ が成立．よって $Z(I(Y)) \subset \overline{Y}$ となる．以上より $Z(I(Y)) = \overline{Y}$ であることがわかった．ここで，$\overline{Y}$ が代数的集合，すなわち $Y \in As$ なら $\overline{Y} = Y$ であるので，$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}\, As$ である．

（証明終）

第4章 完備化とArtin–Reesの補題

—completion, and Artin–Rees lemma

この章では環や加群に位相を定めること，またその位相の完備化について考察する．また，その過程でArtin–Rees の補題を始めとする応用も広い諸結果に触れていこう．この章では “極限” について触れる必要があるため，必要に応じて付録の極限の節を参照してもらいたい（圏の言葉を知らずとも良いように配慮してある）.

§1 位相群

定義 *4.1.1*（位相群）

G を Abel 群とする．また，集合として G が位相空間であり，次の写像；

$$p : G \times G \to G; (x, y) \mapsto x + y$$

$$m : G \to G; x \mapsto -x$$

が連続であるとき，G を**位相群** (topological group) という．

$g \in G$ について，写像 $p_g : G \to G; x \mapsto x + g$ は G 上の自己同相写像となる．よって，任意の点 g の近傍はすべて 0 の近傍 U を用いて $g + U$ と表せる．よって G の位相は 0 の近傍によって決定される．

命題 *4.1.2*

H を G における 0 のすべての近傍の共通部分とする．H は G の部分群であり，$\{0\}$ の閉包に等しい．

証明.

まず H が部分群であることを示そう．$0 \in H$ より $H \neq \emptyset$ である．任意の $x, y \in H$ をとる．すると 0 の任意の近傍 U に対して $x, y \in U$ である．

p の連続性から $p^{-1}(U)$ は $G \times G$ の開集合である．よって G の開集合族 $\{U_i\}, \{V_i\}$ が存在して $p^{-1}(U) = \bigcup(U_i \times V_i)$ とかける．ここで $(0, 0) \in p^{-1}(U)$ だから適当な i について $(0, 0) \in U_i \times V_i$ である．このとき U_i, V_i は 0 の近傍となり，仮定から $x \in U_i, y \in V_i$ とできる．よって $(x, y) \in p^{-1}(U)$ すなわち $x + y \in U$ である．よって $x + y \in H$ である．同様に $m^{-1}(U)$ を考えれば $x^{-1} \in H$ がわかる．

次に $H = \overline{\{0\}}$ を示そう．$x \in \overline{\{0\}}$ であることを $(*)$ とすると，これは任意の x の開近傍 U が $0 \in U$ となることと同値である．ここで U は 0 の開近傍 V を用いて $x + V$ とかけることに注意すると，$(*)$ は 0 の任意の開近傍 V に対して $0 \in x + V$ となることと同値．これは更に $-x \in V$ と言い換えることができ，$-x \in H$ と同値である．ゆえに $x \in \overline{\{0\}}$ は $x \in H$ と同値である．（証明終）

H を用いて位相群 G が Hausdorff であることの判定条件を与えよう．ここで位相空間に関する次の命題を思い出しておく．

命題 *4.1.3*

位相空間 M が Hausdorff であることと，$\Delta = \{(x, y) \in M \times M \mid x = y\}$ が $M \times M$ が閉集合であることは同値．

証明．

M が Hausdorff であるとき，Δ^c が開であることを示す．任意の $(x, y) \in \Delta^c$ に対して $x \neq y$ である．M が Hausdorff なので，開近傍 $x \in U_x, y \in U_y$ で $U_x \cap U_y = \emptyset$ であるものがとれる．すると $U_x \times U_y$ は (x, y) の開近傍で $U_x \times U_y \subset \Delta^c$ である．よって (x, y) は内点なので Δ^c は開である．

同値であることはこの議論を逆にたどることで簡単にわかる．（証明終）

命題 *4.1.4*

G が Hausdorff であることと $H = 0$ すなわち $\{0\}$ が閉集合であることは同値である．特に G/H は Hausdorff である．

証明．

$(\Longrightarrow)$

G が Hausdorff であるとき T_1 であるので，1 点は閉である．

$(\Longleftarrow)$

連続写像 $G \times G \to G; (x, y) \mapsto x - y$ による $\{0\}$ の引き戻しは Δ である．$\{0\}$ が閉なのでこれは閉であるから Hausdorff となる．

（証明終）

以降極限を扱うため G は第 1 可算公理を満たす，すなわち 0 は可算個の近傍を持つと仮定する．解析的な完備化は Cauchy 列によって与えられていたことを思い出そう．まずは位相群についても Cauchy 列を定義する．

定義 *4.1.5*（Cauchy 列）

G の元の族 $\{x_i\}$ であって，0 の任意の近傍 U について，ある整数 n が存在して；

$$\text{任意の } i, j \geq n \text{ に対し } x_i - x_j \in U$$

が成り立つとき，$\{x_i\}$ を Cauchy 列 (Cauchy sequence) であるという．

Cauchy 列を扱うには “収束” の概念が不可欠であるため，距離空間でない一般の位相空間における収束を振り返っておこう．

定義 *4.1.6*（収束）

位相空間 M について，系列 $\{x_i\}$ に対してある $x \in M$ が存在して，任意の x の開近傍 U に対してある $n > 0$ が存在して $i \geq n$ ならば $x_i \in U$ となるものが存在するとき，$\{x_i\}$ は x に**収束** (converge) するという．

G の Cauchy 列全体には，今までと同じように要素ごとの和をとることで和が定義され，次の関係；

$$\{x_i\} \sim \{y_i\} \Longleftrightarrow \lim_{i \to \infty} x_i - y_i \to 0 \tag{$*$}$$

は同値関係となる．

定義 *4.1.7*（完備化）

同値関係 $(*)$ による G の Cauchy 列全体の同値類を $\widehat{G}$ とかき，G の**完備化** (completion) という．

この定義により，$\mathbb{Q}$ を加法群としてみたときの完備化 $\widehat{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{R}$ になることが自然に納得されるだろう．

各元 $g \in G$ に対して，定数列 $\{g\}$ は明らかに Cauchy 列となる．これによって自然な写像 $\varphi : G \to \widehat{G}$ を得ることができるが，一般にはこれは埋め込みにならない，すなわち単射ではない．

補題 *4.1.8*

$\ker\varphi = H$ である．

証明.

$x \in \ker\varphi$ とすると，$(0) \sim (x)$ であるので，任意の 0 の近傍 U に対して $x \in U$ となる．よって $x \in H$ であり，逆も成り立つ．（証明終）

命題 *4.1.9*

φ が単射であることと，G が Hausdorff であることは同値である．

証明.

補題と命題 4.1.4 より従う．（証明終）

この節の最後に，完備化はテンソル積や局所化といったこれまでの操作と同様に関手になる，ということを注意しておく．というのも G, H を位相群（先程まで考えていた H とは異なる）としたとき，準同型 $f : G \to H$ により G の Cauchy 列は H の Cauchy 列を定めるから，群準同型 $\widehat{f} : \widehat{G} \to \widehat{H}$ が定義される．このとき $(g \circ f)\widehat{\ } = \widehat{g} \circ \widehat{f}$ となるからである．

§2　線形位相と代数的な完備化

ここまでは一般的な位相で考えてきたが，代数的な都合から G に**線形位相**という位相を入れて考えていくことにする．

定義 *4.2.1*（線形位相）

群 G の部分群の列；

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

が与えられたとき，U が 0 の開近傍になることは U がある部分群 G_n を含むことであると定義するとこれは G の位相になる．これを部分群の列が定める**線形位相** (liniear topology) という．

この条件は位相群 G が部分群の減少列 $\{G_n\}$ からなる 0 の基本近傍系を持つ，と言いかえることもできる．

位相になることを確かめておこう．そのために $g \in G$ について $p_g : G \to G; x \mapsto x + g$ が全単射であることを用いる．$V \subset G$ が $x \in G$ の開近傍であるとは，$p_g^{-1}(V)$ が 0 の開近傍になることであると定めよう．このとき x の開近傍全体 $\mathcal{V}(x)$ は x の近傍系の公理を満たす．

補題 *4.2.2*

$\mathcal{V}(x)$ を上のように定める．このとき；

(i) 任意の $V \in \mathcal{V}(x)$ に対して $V \subset U$ ならば $U \in \mathcal{V}(x)$ である．
(ii) $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{V}(x)$ ならば $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{V}(x)$ である．
(iii) 任意の $U \in \mathcal{V}(x)$ に対して，$x \in U$ である．
(iv) 任意の $U \in \mathcal{V}(x)$ に対して，ある $V \in \mathcal{V}(x)$ が存在して，任意の $y \in V$ に対して $U \in \mathcal{V}(y)$ である．

が成り立ち，$\mathcal{V}(x)$ は x の近傍系をなす．

証明.

(i) から (iii) はほぼ明らかであるから，(iv) だけ示す．

U を x の近傍とする．このとき，ある n が存在して $G_n \subset p_x^{-1}(U)$ となる．このとき $p_x(G_n) = V$ とおくと，$p_x^{-1}(V) = G_n$ であるから，V も x の近傍となる．任意の $y \in V$ をとると，ある $g_0 \in G_n$ がとれて $y = g_0 + x$ である．このとき $p_y^{-1}(V) = (G_n + x) - (g_0 + x) = G_n - g_0 = G_n$ であり，$V \subset U$ であるから $G_n \subset p_y^{-1}(U)$ が成り立つ．よって U は y の近傍となっている．（証明終）

以上より，任意の点の近傍系が定まったから，G 全体に位相が定まることがわかった．この位相のもとでも p_g は自然な自己同相写像であることに注意しよう．また，$\{G_n\}$ が定める線形位相において，各 G_n は開かつ閉であることに注意しよう．

先の節で，位相的な完備化 $\widehat{G}$ と $\varphi : G \to \widehat{G}$ を定義した．線形位相については，φ が埋め込みであることと $\bigcap G_n = 0$ が成り立つことが同値である．このとき，線形位相は Hausdorff であるだけでなく非常に良い位相となることが知られている．

命題 *4.2.3*

G と部分群の減少列 $\{G_n\}$ について，$\bigcap G_n = 0$ が成り立つとき；

$$d(x, y) = \inf \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n \,\middle|\, x - y \in G_n \right\}$$

と定めるとこれは G 上の距離になり，d が定める位相は $\{G_n\}$ による線形位相と一致する．

証明.

まずは距離になっていることを示そう．正値性，対称性，三角不等式が成り立つことは明らか．非退化であることを示す．$x = y$ のとき $x - y = 0$ はすべての部分群に含まれるので，$d(x, y) = 0$ である．逆に $d(x, y) = 0$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある n で $x - y \in G_n$ となるものが存在して $(1/2)^n < \varepsilon$ である．ここで任意の $m > 0$ に対して $\varepsilon = (1/2)^m$ とすれば，これに対してとれる n は $n < m$ を満たし，$x - y \in G_n \subset G_m$ より $x - y \in G_m$ である．よって $x - y \in \bigcap G_n = 0$ であり $x - y = 0$ がわかる．

以上より d は距離を定める．次に 0 の近傍全体が線形位相における 0 の近傍全体と一致することを見よう．$x \in G_n$ のとき $d(x, 0) \leq (1/2)^n$ であること，$x \notin G_n$ であるとき $(1/2)^n < d(x, 0)$ であることに注意する．各 n について $B_{(1/2)^{n-1}}(0) = G_n$ であることを示す．$x \in G_n$ ならば $d(x, 0) \leq (1/2)^n < (1/2)^{n-1}$ より $x \in B_{(1/2)^{n-1}}(0)$ である．逆に $x \in B_{(1/2)^{n-1}}(0)$ とすると，$d(x, 0) < (1/2)^{n-1}$ より $d(x, 0) \leq (1/2)^n$ でなければならないから，$x \notin G_n$ であるとすると矛盾する．

さて，任意の $\varepsilon > 0$ をとる．ここで，$(1/2)^{n-1} < \varepsilon$ となる n を取ることができる．このとき $B_{(1/2)^{n-1}}(0) = G_n$ であるから，$G_n \subset B_\varepsilon(0)$ となり $B_\varepsilon(0)$ は線形位相において開であり，逆に U が線形位相において開ならば G_n は 0 の開球であり U に含まれるから，距離空間において開である．

（証明終）

ここで，自然な全射 $\theta_n : G/G_n \to G/G_{n-1}$ を考えると，$\{G/G_n, \theta_n\}$ は射影系をなす．射影極限；

$$\varprojlim G/G_n = \left\{ (\xi_n) \,\middle|\, \text{任意の } n \leq m \text{ について} \theta_m(\xi_m) = \xi_n \text{が成り立つ.} \right\}$$

が Cauchy 列による完備化 $\widehat{G}$ と同型であることを示す．

定理 *4.2.4*（代数的な完備化）

G の部分群の列 $\{G_n\}$ からなる線形位相を考える．射影系 $\{G/G_n\}$ を考えると，次の同型が成り立つ．

$$\widehat{G} = \varprojlim G/G_n$$

証明.

まず，Cauchy 列 (x_n) を考えよう．各 n について，十分大きな m_n をとれば，任意の $i, j \leq m_n$ について $x_i - x_j \in G_n$ とできる．これは $\pi_n(x_i) = \pi_n(x_j)$ を意味する．このことは各 n について $\{\pi_n(x_i)\}_i$ は停まる，と言い換えることができる．それを ξ_n とおく．このとき (ξ_n) は $\varprojlim G/G_n$ の元になる．

次に $(\xi_n) \in \varprojlim G/G_n$ をとる．各 x_n を ξ_n の代表元とすると，(x_n) は Cauchy 列となる．実際，$\pi_n(x_{n+1}) = \theta_{n+1}(\pi_{n+1}(x_{n+1})) = \theta_{n+1}(\xi_{n+1}) = \xi_n = \pi_n(x_n)$ であるので，$x_{n+1} - x_n \in G_n$ となる．（証明終）

解析的な意味での完備性，すなわち実数の完備性とはある種の公理であった（同値な命題として中間値の定理や Bolzano–Weierstraß の定理などがある）が，ここでは純粋に代数的な完備化として射影極限による構成を与えることができているので，完備であることの定義を天下り的に定義しよう．

定義 *4.2.5*（完備）

位相群 G について，$\varphi : G \to \widehat{G}$ が同型であるとき，**完備** (complete) であるという．

φ が単射なことと $\bigcap G_n = 0$ が成り立つことが同値であったので，完備な位相群は距離空間である．この節の残りの部分では，完備化は完備であることを示すことを目標にする．

命題 *4.2.6*

群の完全列；

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \xrightarrow{p} G'' \longrightarrow 0$$

を考える．G に部分群の列 $\{G_n\}$ で定義される線形位相が入っているとき，G', G'' にはそれぞれ $\{G' \cap G_n\}, \{p(G_n)\}$ による線形位相を考えることができ，次の完全列；

$$0 \longrightarrow \widehat{G}' \longrightarrow \widehat{G} \longrightarrow \widehat{G}'' \longrightarrow 0$$

が得られる．

証明.
一般に，定義から線形位相による射影系 $\{G/G_n\}$ は全射的である．よって定理 B.4.14 を次の完全列；

$$0 \longrightarrow G'/(G' \cap G_n) \longrightarrow G/G_n \longrightarrow G''/p(G_n) \longrightarrow 0$$

に適用すれば良い．（証明終）

系 *4.2.7*

$\widehat{G}_n$ は $\widehat{G}$ の部分群であり，$\widehat{G}/\widehat{G}_n \cong G/G_n$ が成り立つ．

証明.
命題 4.2.6 において $G' = G_n, G'' = G/G_n$ とすると，G'' は離散位相を持つので，$\widehat{G}'' = G''$ となる．（証明終）

系 *4.2.8*

G の完備化 $\widehat{G}$ は完備である．

証明.
先の系において射影極限を取ればよい．（証明終）

§3　I 進位相と Artin–Rees の補題

位相群の例で重要なものは，やはり加群についての応用である．環 A のイデアル I により定義される線形位相のなかで重要なものに，I 進位相がある．

定義 *4.3.1*（*I* 進位相）

A 加群 M と A のイデアル I を考える．$\{I^n M\}$ は M の部分加群の減少列をなし，これによる線形位相を I 進位相 (I-adic topology) という．

これからは特筆しない限り，A 加群 M の位相は I 進位相を考える．M の完備化 $\widehat{M}$ は $\widehat{A}$ 加群になることに注意しよう．また，$f : M \to N$ を A 加群の準同型とすると，$f(I^n M) = I^n f(M) \subset I^n N$ であるので，f は I 進位相について連続である．よって $\widehat{f} : \widehat{M} \to \widehat{N}$ が定まる．

この節の目標は，群の場合と同様に A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{p} M'' \longrightarrow 0$$

に対して；

$$0 \longrightarrow \widehat{M}' \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'' \longrightarrow 0$$

が完全であることを示すことである（実はこれは A が Noether で，M が有限生成 A 加群であるときにしか成り立たない）．群の場合と同様に考えると，M', M'' はそれぞれ $\{(I^n M) \cap M'\}, \{I^n p(M)\}$ で定義される線形位相による完備化についての完全列は得られる．よって，問題はそれぞれの線形位相が I 進位相と一致しているだろうか？ということになる．この問題を解決するために，フィルターという概念を導入しよう．

定義 *4.3.2*（I フィルター）

A 加群 M と，A のイデアル I を考える．M_n を M の部分加群として，降鎖 $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_n \cdots$ を考える．すべての n に対して，$IM_n \subset M_{n+1}$ が成り立つとき，降鎖 $\{M_n\}$ は I フィルター (I-filtration) であるという．特に，ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq n_0$ に対して $IM_n = M_{n+1}$ が成り立つとき，そのフィルターは**安定している** (stable) という．

定義 *4.3.3*（有界な差）

$\{M_n\}, \{M'_n\}$ を M の I フィルターとする．ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ について；

$$M_{n+n_0} \subset M'_n, M'_{n+n_0} \subset M_n$$

が成り立つとき，$\{M_n\}$ と $\{M'_n\}$ は**有界な差** (bounded difference) を持つという．

補題 *4.3.4*

$\{M_n\}, \{M'_n\}$ を M の安定している I フィルターとすると，それらは有界な差を持つ．

証明.

$M'_n = I^n M$ としてよい．ある n_0 が存在して，任意の $n \leq n_0$ について $IM_n = M_{n+1}$ なので，$M_{n+n_0} = I^n M_{n_0} \subset I^n M$ となる．

また，定義より任意の $n \in \mathbb{N}$ について，$IM_n \subset M_{n+1}$ なので，帰納的に $I^n M \subset M_n$ となり，$I^{n+n_0} M \subset I^n M \subset M_n$ であることがわかる．（証明終）

系 *4.3.5*

安定しているすべての I フィルターの定める位相は I 進位相に一致する．

よって，問題は $\{(I^n M) \cap M'\}, \{I^n p(M)\}$ がそれぞれ M', M'' の安定しているフィルターとなるかどうかに帰着することがわかった．$\{I^n p(M)\}$ は定義から安定しているので，$\{(I^n M) \cap M'\}$ について考えればよい．これには Artin–Rees の補題が有効に働くため，この節の残りではこれを示すことにしよう．

Artin–Rees の補題の証明には Rees 環という次数付き環が活躍するので，次数付き環についていくつか思い出しておこう．環 S について，加法群としての部分加群の族 $\{S_d\}$ が存在して，$S = \bigoplus_d S_d$ であり，すべての d, e について $S_d S_e \subset S_{d+e}$ を満たすとき，S を**次数付き環** (graded ring) というのであった．$S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$ は S のイデアルとなっていて，無縁イデアルという．S を次数付き環とし，S 加群 M とその部分加群の族 $\{M_n\}$ について，$M = \bigoplus_n M_n$ が成り立ち，すべての d, n について $S_d M_n \subset M_{n+d}$ が成り立つとき，M を**次数付き S 加群** (graded S-module) という．各 M_n は S_0 加群であることに注意しよう．次数付き S 加群 M, N について，S 加群の準同型 $f : M \to N$ がすべての n について $f(M_n) \subset N_n$ を満たすとき，f を次数付き加群の準同型であるという．

ここで，次数付き環に関して非常に有用な命題を示しておこう．

命題 *4.3.6*

A を次数付き環とする．A が Noether であることと，A_0 が Noether で，A が有限生成 A_0 代数であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$S_0 = S/S_+$ より S_0 は Noether である．S_+ は S のイデアルなので有限生成である．そこで x_i たちを S_+ の生成元とすると，これは斉次元の和でかけるので，適切に取り替えることで x_i は次数 k_i の斉次元としてよい．また S_+ の定義より $k_i > 0$ であることに注意しよう．

$S_+ = (x_1, \ldots, x_s), S' = S_0[x_1, \ldots, x_s]$ とする．帰納法により，任意の d について $S_d \subset S'$ であることを示す．$d = 0$ のときは明らかである．任意の $x \in S_d$ をとる．$x \in S_+$ より $x = \sum a_i x_i$ とかける．ここで x は斉次なので $a_i \in S_{d-k_i}$ でなければならない（$m < 0$ のとき $S_m = 0$ と考えている）．帰納法の仮定より $a_i \in S'$ なので，$x \in S'$ であることがわかる．よって $S_d \subset S$ が成り立ち，$S = S'$ である．

$(\Longleftarrow)$

Hilbert の基底定理 (定理 1.1.8) より従う．

（証明終）

定義 *4.3.7*（Rees 環）

環 A のイデアル I と A 加群 M に対し，次数付き環；

$$R_A(I) = \bigoplus I^n$$

をイデアル I の Rees 環 (Rees ring) という．特に I の生成元を $\{x_i\}$ とするとき，$R_A(I)$ は $\{x_i\}$ で生成される A 代数であることに注意しよう．

Hilbert の基底定理より，A が Noether なら $R_A(I)$ も Noether である．

補題 *4.3.8*

A を Noether 環，M を有限生成 A 加群とする．M の I フィルター $\{M_n\}$ に対しが安定していることと，$M^* := \bigoplus M_n$ が有限生成 $R_A(I)$ 加群であることは同値である．

証明.

各 n について，$M_n^* := M_0 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus IM_n \ldots \oplus I^n M_n \oplus \cdots$ を考える．各 M_n は有限生成 A 加群であるから，M_n^* は有限生成 $R_A(I)$ 加群である．ここで，$\{M_n\}$ が安定しているならば，ある n_0 が存在して，$n \geq n_0$ について $M_n^* = M^*$ であるので，M^* は有限生成 $R_A(I)$ 加群である．

逆に M^* が有限生成 $R_A(I)$ 加群であるとすると，M^* は Noether である．いま $\{M_n^*\}$ は M^* の部分加群からなる昇鎖であるからこれは停まる．ここで $\bigcup M_n^* = M^*$ であるので，ある n_0 が存在して $M_{n_0}^* = M^*$ となり，これは任意の $n \geq 0$ について $I^n M_{n_0} = M_{n_0+n}$ が成り立つことを意味している．よって $\{M_n\}$ は安定している．

（証明終）

命題 *4.3.9*（Artin–Rees の補題）

A を Noether 環とし，A のイデアル I と有限生成加群 M を考える．M の安定している I フィルター $\{M_n\}$ と部分加群 M' について，$\{M' \cap M_n\}$ は M' の安定している I フィルターである．

証明.

$\{M' \cap M_n\}$ が I フィルターであることは明らかである．このフィルターが定める次数付き加群 $\bigoplus (M' \cap M_n)$

は M^* の部分加群であり，補題から M^* は有限生成 $R_A(I)$ 加群であり，$R_A(I)$ は Noether だから $\bigoplus (M' \cap M_n)$ も有限生成である．再び補題より $\{M' \cap M_n\}$ は安定している．（証明終）

これにより以下の定理が得られた．

定理 4.3.10

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

について，I 進位相による完備化；

$$0 \longrightarrow \widehat{M}' \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow \widehat{M}'' \longrightarrow 0$$

は完全である．

§4　Krull の交叉定理

この節では，自然な準同型 $A \to \widehat{A}$ により，$\widehat{A}$ を A 代数としてみて，完備化についての考察を続けよう．まずはテンソル積 $\widehat{A} \otimes_A \widehat{M}$ が $\widehat{M}$ と一致する条件を調べよう．A 加群の準同型 $M \to \widehat{M}$ が誘導する準同型；

$$M \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow \widehat{M} \otimes_A \widehat{A} \longrightarrow \widehat{M} \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A} = \widehat{M}$$

を考えよう．

命題 4.4.1

環 A について，M が有限生成ならば $M \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{M}$ は全射である．また A が Noether ならばこれは同型である．

証明．

M は有限生成なので，ある n について；

$$0 \longrightarrow \ker\varphi \xrightarrow{\iota} A^n \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

が完全である．テンソル積，完備化はそれぞれ左完全，完全であるから，先の準同型により，次の可換図式を考えることができる．

$$\begin{tikzcd}
 & \ker\varphi \otimes_A \widehat{A} \arrow[r, "\iota\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "f"] & A^n \otimes_A \widehat{A} \arrow[r, "\varphi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "g"] & M \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widehat{\ker\varphi} \arrow[r, "\widehat{\iota}"] & \widehat{A^n} \arrow[r, "\widehat{\varphi}"] & \widehat{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで，加群の圏において射影極限は有限個の直和と可換であるから g は同型射である．すると g は全射なので h も全射である．

また，A が Noether であったとしよう．このとき $\ker\varphi$ は有限生成なので，f も全射である．このとき，図式追跡によって h が単射であることを示すことができる（$\iota \otimes \mathrm{id}$ が単射ではないので，five lemma などは使えないことに注意）．よって同型となることがわかる．（証明終）

系 4.4.2

A が Noether であるとき，$\widehat{A}$ は平坦 A 代数である．

証明.

命題 1.4.8 からわかる．（証明終）

次に，これらの結果から極大イデアルによる完備化は局所環であることを示そう．

補題 4.4.3

A を Noether とし，I を A のイデアルとする．I 進完備化 $\widehat{A}$ について；

(i) $\widehat{I} = \widehat{A}I \cong \widehat{A} \otimes_A I$
(ii) $\widehat{I^n} = \widehat{I}^n$
(iii) $I^n/I^{n+1} \cong \widehat{I^n}/\widehat{I^{n+1}}$
(iv) $\widehat{I}$ は $\widehat{A}$ の Jacobson 根基に含まれる．

が成り立つ．

証明.

(i) A が Noether なので I は有限生成である．よって命題 4.4.1 より $\widehat{A} \otimes_A I \to \widehat{I}$ は同型であり，その像は $\widehat{A}I$ である．
(ii) (i) より $\widehat{I^n} = \widehat{A}I^n = (\widehat{A}I)^n = \widehat{I}^n$ である．
(iii) 系 4.2.7 より $\widehat{A}/\widehat{I^n} \cong A/I^n$ であり，これから (iii) が従う．
(iv) 任意の $x \in \widehat{I}$ について，すべての A に対し $\{\sum_{k=0}^{i} x^k\}$ が $\widehat{A}$ の $\widehat{I}$ 進位相において Cauchy 列をなすので，$1 + x + x^2 + \cdots = (1 - x)^{-1}$ は $\widehat{A}$ において収束する．よって $1 - x$ は単元である．よって，任意の $a \in \widehat{A}$ についても $1 - ax$ は単元となり，$\widehat{I}$ は Jacobson 根基に含まれる．

（証明終）

命題 4.4.4

環 A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ による完備化 $\widehat{A}$ は $\widehat{\mathfrak{m}}$ を唯一の極大イデアルとする局所環である．

証明.

まず，補題 4.4.3(iii) より，$\widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m}$ なので，$\widehat{\mathfrak{m}}$ は極大イデアルである．また，$\widehat{\mathfrak{m}}'$ を $\widehat{A}$ の別の極大イデアルとすると，補題 4.4.3(iv) より $\widehat{\mathfrak{m}}$ は $\widehat{A}$ の Jacobson 根基に含まれ，定義より $\widehat{\mathfrak{m}} \subset \widehat{\mathfrak{m}}'$ がわかる．よって $\widehat{\mathfrak{m}} = \widehat{\mathfrak{m}}'$ であり，局所環である．（証明終）

環 A とそのイデアル I による完備化への自然な写像 $M \to \widehat{M}$ は，一般に単射とは限らず，それは $\bigcap I^n M$ により決定されるのだった．その構造について（条件付きではあるが）次の Krull の交叉定理が知られている．

定理 *4.4.5*（Krull の交叉定理）

A を Noether，I をそのイデアルとする．有限生成 A 加群 M について，$L = \bigcap I^n M$ とおくとき，ある $a \in I$ が存在して，$(1-a)L = 0$ である．すなわち；

$$x \in L \Longleftrightarrow (1-a)x = 0$$

が成り立つ．

証明.

Artin–Rees の補題（命題 4.3.9）より，十分大きな n について $I^n M \cap L = I^{n-k}(I^k M \cap L)$ となる $k \geq 0$ をとることができる．ここで，構成から $I^n M \cap L = L$ であるので $L = IL$ である．よって，中山の補題（定理 1.2.17）からある $a \in I$ が存在して，$(1-a)L = 0$ である．（証明終）

この定理から多くの重要な系が得られる．

系 *4.4.6*

A を Noether 整域とし，$I \neq A$ をイデアルとすると，$\bigcap I^n = 0$ である．

系 *4.4.7*

A を Noether，I を A の Jacobson 根基に含まれるイデアルとする．有限生成 A 加群 M について，I 進位相は Hausdorff である．すなわち $\bigcap I^n M = 0$ である．

系 *4.4.8*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．有限生成 A 加群 M に対して M の $\mathfrak{m}$ 進位相は Hausdorff である．特に，A の $\mathfrak{m}$ 進位相は Hausdorff である．

§5　随伴次数環

この節では，Noether 環の完備化が Noether であることを示すことを目的とする．そのために随伴次数環という概念を導入するが，これは完備化の議論のみならず様々なところで活躍する．

定義 *4.5.1*（随伴次数環）

環 A とそのイデアル I，A 加群 M とその I フィルター $\{M_n\}$ を考える．このとき；

$$G(A)(= G_I(A)) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}, \quad G(M) := \bigoplus_{n\geq 0} M_n/M_{n+1}$$

をそれぞれ I に関する A の随伴次数環 (associated graded ring)，M の随伴 $G(A)$ 加群 (associatred graded $G(A)$-module) という．

積は次のように定義する．$x_n \in I^n$ について，$\overline{x_n}$ を I^n/I^{n+1} における像とする．$\overline{x_n} \cdot \overline{x_m}$ を，$x_n x_m \in I^{n+m}$ の I^{n+m}/I^{n+m+1} の像と定義すると，これは代表元のとり方によらない．作用についても同様に考えると，この演算のもとでこれらは斉次成分を $I^n/I^{n+1}, M_n/M_{n+1}$ としてもつ次数付き環，加群になる．

命題 *4.5.2*

A を Noether，I を A のイデアルとする．このとき；

(i) $G(A)$ は Noether である．
(ii) $G_I(A)$ と $G_{\widehat{I}}(\widehat{A})$ は次数付き環として同型である．

が成り立つ．特に $G(\widehat{A})$ は Noether 環である．

証明.

(i) A は Noether なので，$I = (x_1, \dots, x_n)$ とできる．$G(A)$ の 0 次斉次成分は A/I であり，これは Noether である．x_i の I/I^2 における像を $\overline{x_i}$ とすれば $G(A) = A/I[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}]$ であり，Hilbert の基底定理から $G(A)$ は Noether.
(ii) $I^n/I^{n+1} \cong \widehat{I}^n/\widehat{I}^{n+1}$ であったことから従う．

（証明終）

命題 *4.5.3*

A を Noether，I を A のイデアルとする．M が有限生成 A 加群であり，$\{M_n\}$ が安定しているフィルターのとき，$G(M)$ は $G(A)$ 加群として有限生成である．

証明.

$\{M_n\}$ が安定しているので，ある n_0 が存在して，任意の $n \geq 0$ について $M_{n_0+n} = I^n M_{n_0}$ である．よって $G(M) = \bigoplus_{n \leq n_0} M_n/M_{n+1}$ であり，各斉次成分は Noether なので，$G(M)$ は Noether である．（証明終）

命題 *4.5.4*

環 A とそのイデアル I，M 加群 A と I フィルター $\{M_n\}$ を考える．A が I 進位相について完備であり，$\bigcap M_n = 0$ がなりたち（すなわち M は Hausdorff），$G(M)$ が有限生成 $G(A)$ 加群ならば M は有限生成 A 加群である．

証明.

次数環 $G(A)$ の d 次斉次成分を $G(A)_d$ と表すことにする．

$G(M)$ は有限生成 $G(A)$ 加群なので，ある $y_i \in M_{d_i} (1 \leq i \leq r)$ たちを，y_i の M_{d_i}/M_{d_i+1} における像 $\overline{y_i}$ が $G(M)$ の生成系になるようにとれる．ここで，背理法を用いて $M = \sum_{i=1}^r Ay_i$ を示す．

ある x_0 が存在して，$x_0 \notin \sum Ay_i$ であると仮定する．$x_0 \neq 0$ より，$x_0 \in M_{k_0}$ となる最大の k_0 が存在する．$\overline{x_0}$ を M_{k_0}/M_{k_0+1} における x_0 の像とすると，$\overline{x_0} = \sum_{i=1}^r \overline{a_{0i}}\,\overline{y_i}$ とかけている．ここで $\overline{a_{0i}} \in G(A)_{k_0-d_i} = I^{k_0-d_i}/I^{k_0-d_i+1}$ である．このとき $x_1 = x_0 - \sum a_{0i}y_i$ とおくと，$x_1 \in M_{k_0+1}$ かつ $x_1 \notin \sum Ay_i$ である．

x_0 のかわりに x_1 を用いて同様の操作を行うことで，$\{x_n\}$ たちを $x_n \in M_{k_0+n}$，$x_n - x_{n+1} = \sum_{i=1}^r a_{ni}y_i$ となるようにとることができる．このとき，作り方から；

$$x - x_{n+1} = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{ji}\right)y_i \tag{$*$}$$

である．ここで，各 i について $\{\sum a_{ji}\}_j$ は A 内の Cauchy 列をなすので収束する．極限を a_i とおくと，$x = \sum_{i=1}^r a_i y_i$ となることを示そう．$\bigcap M_n = 0$ より，任意の $l \geq 0$ に対して $x - \sum a_i y_i \in M_{K_0+l}$ を示せばよい．

まず，$(*)$ より，任意の n に対し；

$$x - \sum a_i y_i = x_{n+1} + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{ij} - a_i \right) y_i$$

が成り立つ．ここで，a_i のつくりかたから，ある n_i が存在して $n \geq n_i$ では $\sum_{j=0}^{n} a_{ji} - a_i \in I^{k_0+l-d_i}$ とできる．i は有限個だから，n_i の最大値を M と置くことで $n \geq M$ について $\sum_{i=1}^{r} (\sum_{j=0}^{n} a_{ij} - a_i) y_i \in M_{k_0+l}$ である．よって，n を $k_0 + l$，M より大きくとれば $x - \sum a_i y_i \in M_{k_0+l}$ となる．

以上より $x = \sum a_i y_i \in \sum A y_i$ となり，矛盾した．（証明終）

系 *4.5.5*

環 A とそのイデアル I，A 加群 M と I フィルター $\{M_n\}$ に対して，A は I 進完備で $\bigcap M_n = 0$ が成り立つとする．このとき $G(M)$ が Noether$G(A)$ 加群ならば M は Noether$A$ 加群である．

証明.

N を M の部分 A 加群とすると，$\{N \cap M_n\}$ が N の I フィルターとなり，$G(N)$ は $G(M)$ の部分 $G(A)$ 加群なので有限生成である．明らかに $\bigcap N \cap M_n = 0$ であるから，先の命題より N は有限生成 A 加群である．（証明終）

定理 *4.5.6*

A を Noether 環とする．A の I 進位相による完備化 $\widehat{A}$ は Noether である．

証明.

$\widehat{A}$ の $\widehat{I}$ 進位相を考える．$\widehat{A}$ は完備なので $\bigcap \widehat{I}^n \widehat{A} = 0$ であり，また命題 4.5.2 より $G(\widehat{A})$ は Noether だから系 4.5.5 より $\widehat{A}$ は Noether である．（証明終）

第5章　局所環と次元論

—Local ring and Dimension theory

§1　離散付値環

局所環の例の 1 つに付値環というものがある．そのなかでも特に離散付値環は，後に見るように 1 次元 Noether 局所環の特徴付を与えている，重要なクラスの 1 つである．

定義 *5.1.1*（付値環）

A を整域とし，$K = \mathrm{Frac}\,A$ とする．任意の $0 \neq x \in K$ について，$x \in A$ か $x^{-1} \in A$ のどちらかが成り立つとき，A を K の**付値環**であるという．

定義から付値環 A は K 上整閉であることがすぐにわかる．よって付値環は整閉整域である．

命題 *5.1.2*

A を K の付値環とする．このとき，A は局所環である．

証明.

A の可逆でない元全体を $\mathfrak{m}$ とおく．これがイデアルをなすことを示そう．任意の $a \in A$ と $0 \neq x \in \mathfrak{m}$ をとる．$ax \notin \mathfrak{m}$ と仮定すると $(ax)^{-1} \in A$ となり，$x^{-1} = a(ax)^{-1} \in A$ となるので矛盾する．よって $ax \in \mathfrak{m}$ である．また 0 でない $x, y \in \mathfrak{m}$ について，$xy^{-1} \in K$ に対して仮定から $xy^{-1} \in A$ または $x^{-1}y \in A$ が成り立つ．$xy^{-1} \in A$ のとき $x + y = (1 + xy^{-1})y \in \mathfrak{m}$ が成り立ち，$x^{-1}y \in A$ のときも同様である．よって $\mathfrak{m}$ はイデアルとなり，A は局所環である．（証明終）

次に付値環の定義のもととなった，付値と呼ばれる関数について説明しよう．

定義 *5.1.3*（付値）

K を体とし，G を全順序な Abel 群とする．関数 $v : K^\times \to G$ が，全射であり，すべての a，$b \in K^\times$ に対して；

(i) $v(ab) = v(a) + v(b)$
(ii) $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$

が成立するとき，v を**付値** (valuation) という．

まず，自明な性質として $v(1) = 0$ であり，$v(x^{-1}) = -v(x)$ である．

定義 *5.1.4*

集合 $A = \{x \in K \mid v(x) \geq 0\} \cup \{0\}$ は K の部分環で，これを v の**付値環** (valuation ring) という．

体の部分環であるから付値環は必ず整域である．また付値環 A について $\mathrm{Frac}\,A = K$ となることに注意しよう．これは K の付値環をなす．その極大イデアルは $\mathfrak{m} = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ で与えられる．

次の離散付値環が特に大切である．

定義 5.1.5（離散付値）

$G = \mathbb{Z}$ としたときの付値 v を**離散付値** (discrete valuation) といい，対応する付値環を**離散付値環** (discrete valuation ring) といい，DVR と略す．このとき，便宜上 $v(0) = \infty$ とする．

付値環についていくつかの性質を示しておこう．

補題 5.1.6

$x, y \in A$ について $v(x) \geq v(y)$ ならば $x \in (y)$ である．特に $v(x) = v(y)$ ならば $(x) = (y)$ である．

証明.

$v(xy^{-1}) = v(x) - v(y) \geq 0$ より，$xy^{-1} \in A$ である．これは $x \in (y)$ を導く．（証明終）

命題 5.1.7

A を離散付値環とする．I を A の任意のイデアルとすると，ある $n \in \mathbb{N}$ がとれて $I = \mathfrak{m}^n$ である．特に A は PID である．

証明.

まず，$\mathfrak{m}^n = (x^n)$ とかけることを示そう．付値は全射であるから，$v(x) = 1$ となる $x \in \mathfrak{m}$ が存在する．このとき $\mathfrak{m} = (x)$ となることを示そう．$(x) \subset \mathfrak{m}$ は明らかである．$y \in \mathfrak{m}$ とすると，$v(y) \geq 1$ より，$v(x^{v(y)}) = v(y)$ が成立する．よって補題から $(y) = (x^{v(y)}) \subset (x)$ である．

さて，I を A のイデアルとする．$v(I) = \{v(y) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid y \in A\}$ は最小元を持つ．それを $n = v(y')(y' \in A)$ とおこう．すると任意の $y \in A$ について $v(y) \geq n = v(x^n)$ より，補題から $y \in (x^n)$ である．逆に $y \in (x^n)$ とすると，$v(y) \geq n = v(y')$ より，$y \in (y') \subset I$ が従う．よって $I = (x^n)$ であることがわかる．（証明終）

系 5.1.8

離散付値環 A は 1 次元の Noether 局所整域で，$\operatorname{Spec} A = \{0, \mathfrak{m}\}$ である．

命題 5.1.7 は離散付値環の著しい特徴付けを与えており，次が成り立つ．

定理 5.1.9

$(A, \mathfrak{m})$ を 1 次元 Noether 局所整域とする．次は同値である．

(i) A は離散付値環である．
(ii) A は整閉である．
(iii) $\mathfrak{m}$ は単項イデアルである．
(iv) $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$ である．
(v) すべての A の 0 でないイデアルは $\mathfrak{m}$ の冪である．
(vi) ある $x \in A$ が存在して，すべての 0 でないイデアルは $(x^k)(k \geq 0)$ とかける．

これを示すためにいくつかの補題を示していこう．

命題 *5.1.10*

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とすると，次のうちどちらか 1 つだけが成り立つ．

(i) 任意の $n \geq 0$ について，$\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ が成り立つ．
(ii) ある $n > 0$ が存在して $\mathfrak{m}^n = 0$ である．特に，この場合 A は 0 次元すなわち Artin 環である．

証明.

$\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ となる n があるとする．すると，中山の補題（定理 1.2.17）より $\mathfrak{m}^n = 0$ が成り立つ．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について，$\mathfrak{m}^n \subset P$ より根基をとると $\mathfrak{m} = P$ が成り立つ．ゆえに A は Artin である．（証明終）

系 *5.1.11*

$(A, \mathfrak{m})$ を $\dim A \geq 1$ となる Noether 局所環とすると，任意の n について $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ である．

補題 *5.1.12*

A を Artin 環とすると，$\operatorname{nil} A$ は冪零である．

証明.

DCC よりある $k > 0$ がとれて $(\operatorname{nil} A)^k = (\operatorname{nil} A)^{k+1} = \cdots$ となる．これを I とおこう．$I \neq 0$ と仮定する．このとき $IJ \neq 0$ となるイデアル J の集合 Σ は $I \in \Sigma$ となり空ではない．よって Σ の極小元がとれるので，それを改めて J とおこう．このとき，ある $x \in J$ がとれて $xI \neq 0$ となる．極小性より $(x) = J$ であることがわかる．ここで $(xI)I = xI^2 = xI \neq 0$ より再び極小性から $xI = (x)$ となる．よって，ある $y \in I$ について $xy = x$ とかける．ここで $y \in I \subset \operatorname{nil} A$ より $y^n = 0$ となる n がとれる．すると $x = xy = xy^2 = \cdots = xy^n = 0$ となり，$J = 0$ となるから矛盾．よって $I = 0$ である．（証明終）

命題 *5.1.13*

$(A, \mathfrak{m})$ を Artin 局所環とすると，A のすべてのイデアルが単項であることと $\dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \leq 1$ であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$ は明らかなので，逆を示す．$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 0$ なら $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2$ となり中山の補題から $\mathfrak{m} = 0$ すなわち A は体となるので，示すことはない．

$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ と仮定すると命題 1.2.19 より $\mathfrak{m}$ は単項生成である．$\mathfrak{m} = (x)$ とする．I を 0 でも A でもない A のイデアルとすると，Artin 環において冪零根基と Jacobson 根基 (極大イデアルの共通部分) は等しいので，$\operatorname{nil} A = \mathfrak{m}$ である．補題 5.1.12 より $I \subset (\operatorname{nil} A)^k, I \not\subset (\operatorname{nil} A)^{k+1}$ となる $k \in \mathbb{N}$ がとれる．よってある $y \in I$ と $a \in A$ がとれて $y = ax^k$，$y \notin (x^{k+1})$ とできる．よって $a \notin (x)$ でなければならないので a は可逆である．よって $x^k \in I$ となり，$I = (x^k)$ となることがわかった．（証明終）

補題 *5.1.14*

$(A, \mathfrak{m})$ を 1 次元 Noether 局所整域とする．0 でも A でもない A のイデアル I について，I は $\mathfrak{m}$ 準素であり，特にある n について $\mathfrak{m}^n \subset I$ である．

証明.

$\mathfrak{m}$ は A のただ 1 つの 0 でない素イデアルなので，$\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ である．よって命題 2.4.3 より $\mathfrak{m}$ 準素である．（証明終）

定理 *5.1.9* の証明.

示すことは 1 次元 Noether 局所整域について；

(i) A は離散付値環である．
(ii) A は整閉である．
(iii) $\mathfrak{m}$ は単項イデアルである．
(iv) $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 1$ である．
(v) すべての A の 0 でないイデアルは $\mathfrak{m}$ の冪である．
(vi) ある $x \in A$ が存在して，すべての 0 でないイデアルは $(x^k)(k \geq 0)$ とかける．

の同値性である．

(i)$\Longrightarrow$(ii)

明らか.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

$0 \neq a \in \mathfrak{m}$ をとる．補題 5.1.14 より $\mathfrak{m}^n \subset (a), \mathfrak{m}^{n-1} \not\subset (a)$ となる $n > 0$ がとれる．$b \in \mathfrak{m}^{n-1}$ かつ $b \notin (a)$ となる b をとる．$x = a/b \in K$ とおくと，$b \notin (a)$ より $x^{-1} \notin A$ である．A は整閉なので x^{-1} は整ではなく，命題 3.1.3 より $x^{-1}\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}$ である．いま x の構成から $x^{-1}\mathfrak{m} \subset A$ なので，$x^{-1}\mathfrak{m} = A$ が成り立ち，$\mathfrak{m} = (x)$ である．

(iii)$\Longrightarrow$(iv)

系 5.1.11 よりわかる．

(iv)$\Longrightarrow$(v)

I を A の 0 でも A でもないイデアルとする．補題 5.1.14 より $\mathfrak{m}^n \subset I$ となるものがとれる．$A/\mathfrak{m}^n$ に命題 5.1.13 を使うと，その証明から I は $\mathfrak{m}$ の冪になる．

(v)$\Longrightarrow$(vi)

系 5.1.11 より $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$ であるので，$x \notin \mathfrak{m}^2$ となる $x \in \mathfrak{m}$ がとれる．仮定より $(x) = \mathfrak{m}^r$ となる r がとれるが，x のとりかたから $r = 1$ でなければならない．よって $\mathfrak{m} = (x)$ とできるので，すべてのイデアルは (x^k) の形に書ける．

(vi)$\Longrightarrow$(i)

$(x) = \mathfrak{m}$ なので，系 5.1.11 より $(x^k) \neq (x^{k+1})$ である．よって 0 でない任意の $a \in A$ について，唯 1 つ $(a) = (x^k)$ となる k が定まる．$v(a) = k$ とし，$v(ab^{-1}) = v(a) - v(b)$ として v を K 全体に定義することで離散付値環となる．

（証明終）

§2　Dedekind 整域

定義 5.2.1（Dedekind 整域）

A を整域とする．すべての A の 0 でも A でもないイデアル I が有限個の素イデアルの積に (一意的に) かけるとき，A を Dedekind 整域という．

この条件は $\mathbb{Z}$ の素因数分解の拡張を与えるために素イデアルが考案されたという歴史的経緯を考えると，素因数分解ができる環，というように捉えることができ，$\mathbb{Z}$ のよい一般化になっている．この節では Dedekind 環の公理的特徴づけを与えよう．

まず，判定方法として 1 次元の Noether 整閉整域ならば Dedekind 整域であることを示そう．実際にはこれが同値条件を与えていることを後に示す（定理 5.2.11）．

補題 5.2.2

A を環，P，$P_0 \in \operatorname{Spec} A$ とし，q_0 を P_0 準素イデアルとする．$P \neq P_0$ であるとき，$q_0 A_P = A_P$ が成り立つ．

証明．

$x \notin P$ となる $x \in P_0$ をとる．このとき $P_0 = \sqrt{q_0}$ なので，$x^n \in q_0$ となる $n \geq 1$ がとれる．また $x^n \notin P$ なので，$x^n/1 \in q_0 A_P$ は可逆である．よって $q_0 A_P = A_P$ が成り立つ．（証明終）

補題 5.2.3

環 A のイデアル I, J について，I と J が互いに素であることは $\sqrt{I}$ と $\sqrt{J}$ が互いに素であることと同値．

証明．

逆は明らかなので根基が互いに素なら I, J も互いに素であることを見れば十分である．$x + y = 1$ となる $x \in \sqrt{I}, y \in \sqrt{J}$ をとる．適当な n, m をとって $x^n \in I$，$y^m \in J$ としたとき，$1 = (x+y)^{n+m}$ であって，これは $k+l = m+n$ となる k, l についての $x^k y^l$ の線形和である．いま $k < n$ なら $m < l$ が成り立ち，常に $x^k y^l \in I \cup J$ が成り立つ．よって各項は I か J に含まれるから，I と J は互いに素である．（証明終）

定理 5.2.4

A が 1 次元 Noether 整閉整域ならば A は Dedekind 整域である．

証明．

I を A の 0 でも A でもないイデアルとする．A は Noether なので，$I = \cap q_i$ と無駄のない準素分解ができる．$P_i = \sqrt{q_i}$ とおく．このとき A は 1 次元の整域だから P_i は極大イデアルであることに注意する．特に IA_{P_i} は A_{P_i} の 0 でないイデアルになる．ここで；

$$IA_{P_i} = \cap(q_i A_{P_i})$$

であり，$i \neq j$ のとき $P_i \neq P_j$ なので補題 5.2.2 より $q_j A_{P_i} = A_{P_i}$ である．よって $IA_{P_i} = q_i A_{P_i}$ が成り立つ．ここで A_{P_i} は 1 次元の Noether 局所整閉整域なので，定理 5.1.9 より $q_i A_{P_i} = IA_{P_i} = P_i^{n_i} A_{P_i}$ が成り立つ．こ

こで $\sqrt{P_i^{n_i}} = P_i$ であり，P_i は極大なので命題 2.4.3 より $P_i^{n_i}$ も P_i 準素イデアルである．すると；

$$q_i = q_i A_{P_i} \cap A = P_i^{n_i} A_{P_i} \cap A = P_i^{n_i}$$

である．ここで P_i たちは極大なので互いに素である．よって補題 5.2.3 より q_i たちも互いに素なので，中国剰余定理から $I = \prod P_i^{n_i}$ とかける．（証明終）

逆向きの証明を行うために，分数イデアルという概念を導入しよう．

定義 5.2.5（分数イデアル）

A を整域とし，K をその商体とする．K の 0 でない A 部分加群 M で，ある $0 \neq x \in A$ が存在して $xM \subset A$ となっているとき，M を A の**分数イデアル** (fractional ideal) という．

通常の A のイデアルは分数イデアルであることに注意せよ．ここでは A の通常のイデアルを区別する目的で整イデアルと呼ぶことがある．

K の有限生成 A 部分加群 M は分数イデアルである．なぜならば，生成元たちを “通分” して，その分母をかければよいからである．

定義 5.2.6（可逆イデアル）

M, N を K の A 部分加群とする．$MN = A$ となっているとき，M, N を**可逆イデアル** (invertible ideal) という．

実際には，M が可逆イデアルであるとき，$MN = A$ となる N は $(A : M) = \{u \in K \mid uM \subset A\}$ に一致する．実際 $N \subset (A : M) = (A : M)MN \subset AN = N$ が成り立つ．特に $(A : M) = M^{-1}$ と略記する．

一般の分数イデアル M について同様に M^{-1} を考えると MM^{-1} は A の整イデアルになる．次の補題から可逆イデアルは分数イデアルであるから，分数イデアル M が可逆であることは $M(A : M) = A$ となること，と定式化できる．

補題 5.2.7

M が可逆なら有限生成であり，分数イデアルとなる．

証明.

$MM^{-1} = A$ であるので，$x_i \in M$ と $y_i \in M^{-1}$ がとれて $\sum x_i y_i = 1$ が成立する．ここで，任意の $x \in M$ に対して $y_i x \in A$ であるから，$x = \sum (y_i x) x_i$ により M は x_i たちによって生成される．（証明終）

可逆性は局所的な性質であることを示そう．

命題 5.2.8

分数イデアル M について，次は同値である．

(i) M は可逆である．
(ii) M は有限生成で，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について M_P は可逆．
(iii) M は有限生成で，任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ について $M_{\mathfrak{m}}$ は可逆．

証明.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

M は可逆なので有限生成である．ここで $M(A:M)=A$ であるから，系 1.5.10 より $A_P = M_P(A_P : M_P)$ が成り立つ．

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

明らか．

(iii)$\Longrightarrow$(i)

$I = M(A:M)$ とおくと，これは A の整イデアルとなる．$I \neq A$ とすると，$I \subset \mathfrak{m}$ となる極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $M_\mathfrak{m}$ は可逆だから $I_\mathfrak{m} = M_\mathfrak{m}(A_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m}) = A_\mathfrak{m}$ が成り立つ．よって $I \subset \mathfrak{m}$ ではありえず，$I = A$ である．（証明終）

補題 *5.2.9*

$(A, \mathfrak{m})$ を局所整域とする．A の 0 でないすべてのイデアルが可逆ならば，A は DVR，すなわち 1 次元局所 Noether 整閉整域である．

証明.

可逆な分数イデアルは有限生成なので，A は Noether 環である．A のすべてのイデアルが $\mathfrak{m}$ の冪になっていればよい．Σ を $\mathfrak{m}$ の冪でない A のイデアル全体の集合とし，これが空でないと仮定する．I を Σ の極大元とする．このとき $I \subsetneq \mathfrak{m}$ でなければならない．よって $\mathfrak{m}^{-1}I \subsetneq \mathfrak{m}^{-1}\mathfrak{m} = A$ もイデアルで，$I \subset \mathfrak{m}^{-1}I$ である．ここで，もし $\mathfrak{m}^{-1}I = I$ ならば中山の補題（定理 1.2.17）より $I = 0$ となってしまうから，$I \subsetneq m^{-1}I$ である．よって極大性から $\mathfrak{m}^{-1}I$ は $\mathfrak{m}$ の冪になるが，これは I が $\mathfrak{m}$ の冪であることを即座に導き矛盾．（証明終）

命題 *5.2.10*

A を整域とする．A の 0 でないすべてのイデアルが可逆ならば，A は 1 次元 Noether 整閉整域である．

証明.

補題と同様に A は Noether 環である．A_P は局所整域となる．A_P のイデアルがすべて可逆であることを示そう．I を A_P のイデアルとすると，$I \cap A$ は A のイデアルなので可逆である．よって，I はこれを局所化したものだから命題 5.2.8 より可逆．補題 5.2.9 より A_P は 1 次元局所 Noether 整閉整域である．よって $\operatorname{ht} P = \dim A_P = 1$ より $\dim A = 1$ が従い，命題 3.2.8 より A は整閉であることがわかる．（証明終）

定理 *5.2.11*

A を整域とする．A が Dedekind 整域であることと，A が 1 次元 Noether 整閉整域であることは同値である．

証明.

定理 5.2.4 と命題 5.2.10 より，A が Dedekind 整域ならば A の 0 でないすべてのイデアルが可逆であることを示せばよい．以下の証明は松村 (1980) に拠っている．

Step 1. M, N を 0 でない分数イデアルとする． M, N が可逆であることと MN が可逆であることは同値である．

$MN = B$ とおく．M, N が可逆なら B が可逆なことは明らかなので，逆を示そう．B が可逆であると仮定する．簡単な計算で $M^{-1}N^{-1} \subset B^{-1}$ であることがわかる．また $B^{-1}M \subset N^{-1}, B^{-1}N \subset M^{-1}$ である

ので，$B^{-1} = B^{-1}B^{-1}B = (B^{-1}M)(B^{-1}N) \subset M^{-1}N^{-1}$ が成立する．よって $B^{-1} = M^{-1}N^{-1}$ であるから；

$$A = BB^{-1} = (MM^{-1})(NN^{-1})$$

が従う．ここで $MM^{-1} \subset A$ であり，これは A のイデアルを成すので $MM^{-1} = NN^{-1} = A$ でなければならない．

Step 2. $0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$ に対して，$P \subset I$ となるイデアル I について $IP = P$ である．

$a \notin P$ をとる．$I = P + (a)$ の形のときに示せば十分である．I^2 と $P + (a^2)$ を素イデアル分解して $I^2 = P_1 \dots P_r, P + (a^2) = Q_1 \dots Q_s$ とする．$P \subset I \subset P_i, Q_j$ なので，$\overline{A} = A/P$ における像 $\overline{P_i}, \overline{Q_j}$ はすべて 0 でない．このとき；

$$\overline{P_1} \dots \overline{P_r} = (\overline{a}^2) = \overline{Q_1} \dots \overline{Q_s} \tag{$*$}$$

となる．$\overline{P_i}$ が $\overline{P_i}$ のなかで極小であるとしてよい．ここで $\overline{Q_j}$ のすべてが $\overline{P_i}$ に含まれないと仮定すると，$x_j \in \overline{Q_j} - \overline{P_1}$ がとれる．一方で $x_1 \dots x_s \in \overline{Q_1} \dots \overline{Q_s} = \overline{P_1} \dots \overline{P_r} \subset \overline{P_1}$ より，$\overline{P_1}$ が素であることに矛盾する．よって $\overline{Q_1} \subset \overline{P_1}$ としてよい．ここで $\overline{P_1} \dots \overline{P_r} \subset \overline{Q_1}$ だから，同様にして $\overline{P_i} \subset \overline{Q_1}$ となる i がある．このとき $\overline{P_1}$ の極小性から $\overline{P_1} = \overline{Q_1}$ である．

また，$(*)$ において $(\overline{a}^2)$ は可逆なイデアルなので，Step1 から $\overline{P_i}, \overline{Q_j}$ はすべて可逆である．よって両辺に $\overline{P_1}^{-1}$ をかけることで $\overline{P_2} \dots \overline{P_r} = \overline{Q_2} \dots \overline{Q_s}$ がわかる．上と同様にして $r = s$ であり，$\overline{P_i} = \overline{Q_i}$ となるように並び替えることができることがわかる．

よって $P_i = Q_i$ が従うから，$P + (a^2) = P^2 + aP + (a^2)$ である．よって，任意の $x \in P$ は；

$$x = y + az + a^2 t \quad y \in P^2,\ z \in P,\ t \in A$$

とかけるが，このとき $a^2 t \in P$ で $a \notin P$ から $t \in P$ である．よって $P \subset P^2 + aP = IP \subset P$ であるから，主張が従う．

Step 3. $0 \neq x \in A$ に対して，$(x) = P_1 \dots P_r$ と素イデアル分解したとき，各 P_i は極大イデアルである．

実際，イデアル I が $P_i \subset I$ を満たすなら Step2 より $IP_i = P_i$ であるが，P_i は Step1 より可逆だから $I = A$ である．

Step 4. すべての A のイデアルは可逆である．

任意の 0 でも A でもないイデアル I について，$I = P_1 \dots P_r$ と素イデアル分解する．各 P_i が可逆なら I も可逆になるので，すべての $0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$ が可逆ならよい．

$0 \neq P \in \operatorname{Spec} A$ と $0 \neq x \in P$ をとる．Step3 より $(x) = Q_1 \dots Q_s$ と分解したとき各 Q_i は極大イデアルである．ここでどれかの Q_i は P に含まれるから，$Q_i = P$ が成り立つ．よって P は可逆である．

（証明終）

§3　Krull の次元定理

定義 3.4.1 で環の Krull 次元を定義した．素イデアルの長さをもってして環の大きさを計ったわけであるが，この節では Poincaré 級数を用いた別の “計りかた” を，次数付き Noether 環に，そして定義 4.5.1 で定義した随伴次数環を用いて Noether 局所環に対して考えよう．まず，一般に**加法的関数**というものを定義する．

定義 *5.3.1*（加法的関数）

ある加群の族 $\{M_i\}$ 上定義された $\mathbb{Z}$ への関数 λ で，任意の短完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

について，$\lambda(M_1) - \lambda(M_2) + \lambda(M_3) = 0$ であるとき，λ を加法的 (additive) 関数という．

さて，$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ を次数付き Noether 環とする．このとき，$A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$ とできる（命題 4.3.6）．ここで x_i を斉次元で取り替え，それらの次数を k_i としよう．また，$M = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$ を有限生成 A 加群とし，斉次な生成元を $m_1, \ldots, m_t$，それぞれの次数は $r_1, \ldots, r_t$ とする．このとき M_n のすべての元は $f_i \in A_{n-r_i}$ によって $\sum f_i m_i$ の形で書けるので，M_n は有限生成 A_0 加群である．以後，しばらくはこの記号で話をすすめる．

定義 *5.3.2*（Poincaré 級数）

次数付き環 A，次数付き有限生成 A 加群 M について，λ をすべての有限生成 A_0 加群からなる集合族上の加法的関数とする．このとき；

$$P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(M_n) t^n$$

を M の Poincaré 級数 (Poincaré series) という．

Poincaré 級数の考察には，次の定理により与えられる表示が強力である．

定理 *5.3.3*（Hilbert，Serre）

$P(M, t)$ は有理関数である．特に $\mathbb{Z}$ 係数の多項式 $f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して；

$$P(M, t) = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^{s}(1 - t^{k_i})}$$

が成り立つ．

証明.

$A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$ とおく．s についての帰納法で示す．

Step 1. $s = 0$ のとき．

$A = A_0$ なので，M は有限生成 A_0 加群となり，十分大きな M_n について $M_n = 0$ である．よって $P(M, t)$ は多項式となる．

Step 2. $s - 1$ まで正しいとする．

$M_n \xrightarrow{\times x_s} M_{n+k_s}$ の核，余核を K_n, L_{n+k_s} とおくと；

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow M_n \xrightarrow{\times x_s} M_{n+k_s} \longrightarrow L_{n+k_s} \longrightarrow 0$$

が完全である．$K = \bigoplus K_n, L = \bigoplus L_n$ とおくと，M は有限生成 A 加群なので，その部分加群，剰余加群である K，L も有限生成である．どちらも x_s で零化されるので $A_0[x_1, \ldots, x_{s-1}]$ 加群である．ここで λ が加法的なので，$(*)$ において；

$$\lambda(K_n) - \lambda(M_n) + \lambda(M_{n+k_s}) - \lambda(L_{n+k_s}) = 0$$

である．t^{n+k_s} をかけて，n について加えると，補正項を $g(t)$ として；

$$t^{k_s}P(K,\ t) - t^{k_s}P(M,t) + P(M,t) - P(L,\ t) - g(t) = 0$$

となり；

$$(1-t^{k_s})P(M,t) = -t^{k_s}P(K,\ t) + P(L,\ t) + g(t)$$

となるので，帰納法の仮定から条件を満たす $f(t)$ が見つかる．

（証明終）

もっとも簡単な，かつ多項式のように重要な $k_1 = \cdots = k_s = 1$ の場合を考えてみよう．このとき $P(M,t) = f(t)(1-t)^{-s}$ とかけるが，$f(1) = 0$ ならば約分して f をとりかえることで；

$$P(M,t) = \frac{f(t)}{(1-t)^d},\quad f(1) \neq 0$$

とできる．ここで d は $P(M,t)$ の 1 における極の位数であることに注意する．$(1-t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \cdots$ の両辺を t で微分して (あるいは $(1 + t +^t 2 + \cdots)^d$ を展開して)；

$$(1-t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} t^n$$

を得る．よって，$f(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^k$ とすると；

$$\lambda(M_n) = a_0\binom{d+n-1}{d-1} + a_1\binom{d+n-2}{d-1} + \cdots + a_k\binom{d+n-k-1}{d-1} \tag{$*$}$$

とかけている ($m < d-1$ なら $\binom{m}{d-1} = 0$ とする ($*$) の先頭項 (最高次の係数と次数) は $f(1)/(d-1)!n^{d-1}$ である．これをまとめると次のようになる．

定義 *5.3.4*（Hilbert 多項式）

$k_1 = \cdots = k_s = 1$ のとき，有理係数で $d-1$ 次の (n に関する) 多項式 $\varphi_M(n)$ が存在して，$N \leq n$ ならば $\lambda(M_n) = \varphi_M(n)$ が成り立つ．φ_M を，M の λ に関する Hilbert 多項式 (function，polymonial) という．

A_0 が Artin（特に体）のとき，M は有限生成だから Artin かつ Noether 的なので命題 2.2.5 より組成列の長さ $l(M)$ は有限である．そして $l(M)$ は加法的である（確かめよ）．x_i を A_0 上の不定元として $A = A_0[x_1, \ldots, x_s]$ とすると，A_n は $x_1^{m_1} \ldots x_s^{m_s}$ ($\sum m_i = n$) により生成される．n 次の単項式は $\binom{n+s}{s}$ 個あるので，$l(A_n) = l(A_0)\binom{n+s}{s}$ となり；

$$\varphi_A(n) = \frac{l(A_0)}{s!}(n+s)(m+s-1)\ldots(n+1)$$

である．

次に $(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環，M を有限生成 A 加群とし，随伴次数環について考えよう．I を $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとし，$G(A) = (G_I(A) =) \bigoplus I^n/I^{n+1}, G(M) = \bigoplus M_n/M_{n+1}$ を考える．このとき $G_0(A) = A/I$ は I が $\mathfrak{m}$ 準素なので Artin である．ここでフィルターについて思い出してみよう．

命題 5.3.5

上の設定のもとで，$\{M_n\}$ を M の安定している I フィルターとする．$x_1, \ldots, x_s$ を I の極小の生成系とすると；

(i) $l(M/M_n)$ は有限である．

(ii) すべての十分大きな n について，次数が s 以下の多項式 $g(n)$ が存在して $l(M/M_n) = g(n)$ となる．

(iii) $g(n)$ の先頭項は M と I のみに依存する（フィルター $\{M_n\}$ には依存しない）．

が成り立つ．また (i),(ii) は $\{M_n\}$ の安定性を仮定せずに成り立つ．

証明.

(i) 命題 4.5.2，命題 4.5.3 より $G(A)$ は Noether で，$G(M)$ は有限生成 $G(A)$ 加群である．各 $G_n(M) = M_n/M_{n+1}$ は I で零化されるので Noether A/I 加群であるから，A/I は Artin なので $l(M_n/M_{n+1})$ は有限である．ここで $l(M/M_n) = \sum_{i=1}^{n} l(M_{i-1}/M_i)$ であるから，$l(M/M_n)$ も有限である．

(ii) $I = (x_1, \ldots, x_s)$ のとき，$G(A) = A/I[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_s}]$ であった．よって 定義 5.3.4 の条件を満たし，次数が $s-1$ 次以下の $\varphi_{G(M)}(n)$ が存在して，$l(M_n/M_{n+1}) = \varphi_{G(M)}(n)$ となる．(i) より $l(M/M_{n+1}) - l(M/M_n) = \varphi_{G(M)}(n)$ なので，題意が従う．

(iii) $\{M'_n\}$ を M の安定している I フィルターとすると，$g'(n) = l(M/M'_n)$ とおく．補題 4.3.4 より $\{M_n\}, \{M'_n\}$ は有界な差を持つ．よって，ある $n_0 \geq 0$ が存在して，すべての n について；

$$g'(n) \leq g(n+n_0), g(n) \leq g'(n+n_0)$$

が成り立つ．はさみうちの原理から $\lim_{n\to\infty} g(n)/g'(n) = 1$ となり，先頭項は一致する．

（証明終）

フィルター $\{I^n M\}$ に対応する $g(n)$ は $\chi_I^M(n)$ で表される．

定義 5.3.6（特性多項式）

$M = A$ のとき，$\chi_I(n)(= \chi_I^A(n))$ を $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I の**特性多項式** (characteristic polynomial) という．

$\chi_I(n)$ の次数は I の極小の生成系の個数以下であることに注意する．

命題 5.3.7

I, I' を $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとすると，$\chi_I(n)$ と $\chi'_I(n)$ の次数は等しい．

証明.

$\deg \chi_I(n) = \deg \chi_{\mathfrak{m}}(n)$ を示せばよい．A が Noether で I が $\mathfrak{m}$ 準素なので $\sqrt{I} = \mathfrak{m}$ だから，ある $r \geq 0$ が存在して $\mathfrak{m}^r \subset I \subset \mathfrak{m}$ である．よって $\mathfrak{m}^{nr} \subset I^n \subset \mathfrak{m}^n$ なので；

$$\chi_{\mathfrak{m}}(n) \leq \chi_I(n) \leq \chi_{\mathfrak{m}^r}(nr)$$

である．右辺と左辺の次数は等しいので題意が成り立つ．（証明終）

$\deg \chi_I(n) = d(A)$ とかく．また，先程まで s とかいていた I の極小の生成系の個数を $\delta(A)$ とかくことにする．$d(A)$ を A の Hilbert-Samuel 次元，$\delta(A)$ を A の座標次元と呼ぶ．この節の残りの目標は Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について，次の Krull の次元定理；

定理 5.3.8（Krull の次元定理）

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．$\chi_{\mathfrak{m}}(n) = l(A/\mathfrak{m}^n)$ の次数を $d(A)$, A の $\mathfrak{m}$ 準素イデアルの極小の生成系の個数を $\delta(A)$ とおくと；

$$\dim A = d(A) = \delta(A)$$

が成り立つ．

を示すことである．先程も注意したように，$\delta(A) \geq d(A)$ が成り立っている．次に $d(A) \geq \dim A$ を示していこう．

補題 5.3.9

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I について，M を有限生成 A 加群，$x \in A$ を M の零因子でない元として $M' = M/xM$ とおく．このとき $\deg \chi_I^{M'} \leq \deg \chi_I^M - 1$ である．特に，$M = A$ としたとき $d(A/(x)) \leq d(A) - 1$ が成り立つ．

証明.

$N = xM$ とおき，$N_n = N \cap I^n M$ とする．このとき；

$$0 \longrightarrow N/N_n \longrightarrow M/I^n M \longrightarrow M'/I^n M' \longrightarrow 0$$

が完全である．Artin–Rees の補題（命題 4.3.9）より，$\{N_n\}$ は N の (安定している) I フィルターだから，命題 5.3.5 より，十分大きな n について $l(M/M_n) = g(n)$ となる $g(n)$ がとれる．同様に，十分大きな n をとれば $g(n) - \chi_I^M(n) + \chi_I^{M'}(n) = 0$ が成り立つ．また，仮定より $N = xM \cong M$ であるから，命題 5.3.5(iii) より $\deg g(n) = \deg \chi_I^M$ であるので，主張が従う．（証明終）

命題 5.3.10

$d(A) \geq \dim A$ である．

証明.

$d(A) = d$ についての帰納法で示す．

Step 1. $d = 0$ のとき．

十分大きな n に対して $l(A/\mathfrak{m}^n)$ は定数である．これは $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$ であるので，中山の補題（定理 1.2.17）より $\mathfrak{m}^n = 0$ である．よって命題 5.1.10 から A は Artin であり，$\dim A = 0$ である．

Step 2. $d - 1$ まで正しいとする．

$\dim A = r$ とおき，$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_r$ を A の素イデアルの列とする．$x \in P_1 \setminus P_0$ をとる．$A' = A/P_0$ とおき，x' を x の A' への像とする．A' は整域で，$x' \neq 0$ であるので，補題 5.3.9 より $d(A'/(x'))) \leq d(A') - 1$ が成り立つ．ここで $\mathfrak{m}'$ を $\mathfrak{m}$ の A' への像とすると，$(A', \mathfrak{m}')$ は Noether 局所環である．ここで $l(A'/\mathfrak{m}') \leq l(A/\mathfrak{m})$ であるので $d(A') \leq d(A)$ である．よって $d(A'/(x')) \leq d(A) - 1$ であるから，帰納法の仮定から $\dim A'/(x') \leq d - 1$ である．$P_1, \ldots, P_r$ の $A'/(x')$ への像は長さ $r - 1$ の素イデアルの列をなし，$r \leq d$ が成り立つ．よって示された．

（証明終）

系 5.3.11

Noether 環 A の素イデアル P について $\operatorname{ht} P < \infty$ である．

証明.

Noether 局所環 $(A', \mathfrak{m})$ について，$\delta(A') < \infty$ が明らかに成り立つ．よって $\dim A' < \infty$ である．よって，Noether 環 A とその素イデアル P について，A_P は局所環となるので，$\operatorname{ht} P = \dim A_P < \infty$ である．（証明終）

しかしながら，無限次元の Noether 環（整域）が存在することに注意しなければならない（例 A.3.2）．

補題 5.3.12

A を $1 \leq \dim A$ なる有限次元 Noether 環とする．このとき，単元でない $x \in A$ が存在して，$\dim A/(x) < \dim A$ が成り立つ．

証明.

$P \in \operatorname{Spec} A$ を $\operatorname{ht} P > 0$ となるものとする．ここで，A が Noether なので A の極小な素イデアルは有限個しか存在しない（系 2.3.10）．よって，それらを $P_1, \ldots, P_n$ とすると，すべての i について $P \not\subset P_i$ であるから，Prime avoidance（補題 1.10.1）より $P \not\subset \bigcup_{i=1}^n P_i$ が成り立つ．よって $x \in P \setminus \bigcup P_i$ をとると，$\dim A/(x) < \dim A$ である．

（証明終）

命題 5.3.13

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とすると，$\dim A \geq s$ 個の元からなる $\mathfrak{m}$ 準素イデアル I が存在する．特に $\delta(A) \leq \dim A$ である．

証明.

$\dim A = d$ についての帰納法で示す．

Step 1. $d = 0$ のとき．

A は Artin なので，命題 5.1.10 より，ある n が存在して $\mathfrak{m}^n = 0$ である．よって $\mathfrak{m} = \operatorname{nil} A$ が成り立ち，0 は $\mathfrak{m}$ 準素イデアルである．ゆえに $\delta(A) = 0$ がわかる．

Step 2. $d - 1$ まで正しいとする．

補題より，単元でない $x \in A$ で，$\dim A/(x) \leq d - 1$ となるものがとれる．$A' = A/x$ とおくと，これは Noether 局所環である．$d' = \dim A'$ とすると，帰納法の仮定より $d' \geq s$ 個の元で生成される $\mathfrak{m}'$ 準素イデアル $I' = (x_1', \ldots, x_s')$ が存在する．ここで $I = (x_1, \ldots, x_s, x)$ が $\mathfrak{m}$ 準素イデアルであること，すなわち $\mathfrak{m} \subset \sqrt{I}$ であることを示そう．

任意の $y \in \mathfrak{m}$ をとる．もし $y \in (x)$ のときは $y \in I$ であるので，$y \notin (x)$ すなわち y' を A' への像とすると $y' \neq 0$ としてよい．I' は $\mathfrak{m}'$ 準素なので，ある n が存在して $y'^n \in I'$ である．よって $y'^n = a_1' x_1' + \cdots + a_s' x_s'$ とかける．よって $y^n - a_1 x_1 + \cdots + a_s x_s \in (x)$ であるから，$y^n \in I$ である．

よって $\delta(A) = s + 1 \leq d' + 1 \leq (d-1) + 1 = d$ であることがわかった．

（証明終）

以上より，命題 5.3.5，命題 5.3.10，命題 5.3.13 によって Krull の次元定理（定理 5.3.8）が示された．

§4　Krull の次元定理の系たち

準素イデアルの節で注意しておいたことだが，極小素イデアルについてもう一度注意しておこう．Noether 環 A とそのイデアル I について $V(I)$ の極小元，つまり I を含む素イデアルで極小なものは $\mathrm{Ass}(A/I)$ の元であるから有限個である．また $I = \bigcap q_i$ と準素分解したとき，$P = \sqrt{q_i}$ となる i が存在する．

定理 5.4.1（Krull の標高定理）

A を Noether 環とし，$f_1, \ldots, f_n \in A$ とする．イデアル $(f_1, \ldots, f_n)$ の極小素イデアル P について $\mathrm{ht}\,P \leq n$ が成り立つ．

証明.

P のとりかたから，$(f_1, \ldots, f_n) = \bigcap_{i=1}^m q_i$ と準素分解したとき，$P = \sqrt{q_j}$ となる j がある．ここで A_P において $(f_1, \ldots, f_n)A_P$ が PA_P 準素イデアルであることを示そう．そのために $\sqrt{(f_1, \ldots, f_n)A_P} = PA_P$ を示せば十分である．任意の $x/s \in PA_P$ をとる．$x \in P = \sqrt{q_j}$ より，ある n がとれて $x^n \in q_j$ である．ここで $x^n \notin q_i$ となる i たちをまとめて $i_1, \ldots, i_r$ とする．$\sqrt{q_i} = P_i$ とおくと，P は極小なので $P_i \not\subset P$ が成り立つ．よって $i_1, \ldots, i_r$ について，ある $y_k \in P_{i_k}$ が存在して $y_k \notin P$ である．$y_k \in \sqrt{q_{i_k}}$ よりある n_k が存在して $y_k^{n_k} \in q_{i_k}$ である．n，$n_1, \ldots, n_r$ の最大値を n ととりなおし，$xy_1 \ldots y_r$ を x，$sy_1 \ldots y_r$ を s と置き直すと $x^n = \bigcap_{i=1}^m q_i = (f_1, \ldots, f_n)$ であり，$s \notin P$ であるので，$x/s \in \sqrt{(f_1, \ldots, f_n)A_P}$ である．よって Krull の次元定理から $\mathrm{ht}\,P = \dim A_P \leq n$ となる．（証明終）

系 5.4.2（Krull の単項イデアル定理）

A を Noether 環とし，x を A の零因子でも単元でもない A の元とする．このとき，(x) のすべての極小素イデアル P について $\mathrm{ht}\,P = 1$ である．

証明.

標高定理より $\mathrm{ht}\,P \leq 1$ である．$\mathrm{ht}\,P = 0$ であるとすると，$\mathrm{Spec}\,A_P = \{P\}$ であるので，$\mathrm{nil}\,A_P = PA_P$ である．$x \in P$ であるので，x は零因子でないことに矛盾する．よって $\mathrm{ht}\,P = 1$ である．（証明終）

定理 5.4.3（Krull の標高定理の逆）

A を Noether 環とし，$P \in \mathrm{Spec}\,A$ が $\mathrm{ht}\,P = n$ であったとすると，ある $a_1, \ldots, a_n \in P$ が存在して P は $(a_1, \ldots, a_n)$ の極小素イデアルとなる．

証明.

A_P は n 次元局所環なので，n 個の元で生成される PA_P 準素イデアル $(x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$ が存在する．このとき PA_P は $(x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$ の極小素イデアルになる．ここで $a_i = s_1 \ldots s_n(x_i/s_i) \in A$ とおくと，$s_1 \ldots s_n$ は A_P の単元なので，イデアルとして $(a_1, \ldots, a_n)A_P = (x_1/s_1, \ldots, x_n/s_n)$ である．よって P は $(a_1, \ldots, a_n)$ の極小素イデアルとなる．（証明終）

命題 5.4.4

A を Noether 環とし，$P \in \operatorname{Spec} A$ が $(a_1, \ldots, a_n)$ の極小素イデアルなら $\operatorname{ht}(P/(a_1, \ldots, a_i)) = n - i (1 \leq i \leq n)$ である．

証明.

P の $\overline{A} = A/(a_1, \ldots, a_n)$ における像を $\overline{P}$ とおく．$\operatorname{ht} \overline{P} = r$ としよう．$\overline{A}$ において $\overline{P}$ は $(\overline{a_{i+1}}, \ldots, \overline{a_n})$ の極小素イデアルである．よって Krull の標高定理から $r \leq n - i$ である．

また，Krull の標高定理の逆より $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r} \in \overline{A}$ が存在して $\overline{P}$ は $(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_r})$ の極小素イデアルである．よって P は $(a_1, \ldots, a_i, x_1, \ldots, x_r)$ の極小素イデアルとなり，$n \leq r + i$ である．よって $r = n - i$ が示された．（証明終）

命題 5.4.5

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と A の零因子でない $x \in \mathfrak{m}$ について，$\dim A/(x) = \dim A - 1$ が成り立つ．

証明.

$d = \dim A/(x)$ とおく．補題 5.3.9 より $d \leq \dim A - 1$ である．一方，$\mathfrak{m}$ の $A/(x)$ への像を $\overline{\mathfrak{m}}$ とすると，局所環 $(A/(x), \overline{\mathfrak{m}})$ において d 個の元で生成される $\overline{\mathfrak{m}}$ 準素イデアルがある．$x_1, \ldots, x_d \in A$ をそれらの $A/(x)$ への像 $\overline{x_i}$ が $\overline{\mathfrak{m}}$ 準素イデアルを生成するような元としよう．このとき $(x, x_1, \ldots, x_d)$ は $\mathfrak{m}$ 準素イデアルとなる．よって $\dim A \leq d + 1$ となり，示された．（証明終）

定理 5.4.6

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ において，$\mathfrak{m}$ 進完備化を $\widehat{A}$ とすると $\dim \widehat{A} = \dim A$ である．

証明.

補題 4.4.3 より $A/\mathfrak{m}^n = \widehat{A}/\widehat{\mathfrak{m}}^n$ であるので，$\chi_{\mathfrak{m}}(n) = \chi_{\widehat{\mathfrak{m}}}(n)$ が成り立つ（証明終）

命題 5.4.7

Noether 環 A のイデアル I について，$\operatorname{ht} I = r$ ならばある $f_1, \ldots, f_r \in I$ が存在して，任意の $1 \leq i \leq r$ について $\operatorname{ht}(f_1, \ldots, f_i) = i$ が成り立つ．

証明.

まず，f_1 を A の零因子で単元でもない元とすると，Krull の単項イデアル定理より $\operatorname{ht}(f_1) = 1$ である．そこで，ある $i < r$ について $f_1, \ldots, f_i$ がすべての $1 \leq j \leq i$ について $\operatorname{ht}(f_1, \ldots, f_j) = j$ となるように選ばれているとする．素イデアル $P \in V(f_1, \ldots, f_i)$ について $\operatorname{ht} P = i$ であるものは $(f_1, \ldots, f_i)$ の極小素因子なので系 2.3.10 より有限個しかない．また，$I \subsetneq P$ であるので，Prime avoidance（補題 1.10.1）より $f_{i+1} \in I$ を $f_{i+1} \notin \bigcup_{P \in V(j_1, \ldots, j_i), \operatorname{ht} P = j} P$ となるようにとることができる．すると $\operatorname{ht}(f_1, \ldots, f_{i+1}) = i + 1$ が成り立つ．よって帰納的に主張が従う．（証明終）

定理 5.4.8

環 A について，$\dim A + 1 \leq \dim A[X] \leq 2 \dim A + 1$ が成り立つ．

証明.

$\dim A+1 \leq \dim A[X]$ は明らかである．$\dim A[X] = d$ とおこう．$A[X]$ の素イデアル鎖 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d$ について，$P'_i = P_i \cap A$ とおいて A の素イデアル鎖 $P'_0 \subset P'_1 \subset \cdots \subset P'_d$ を考える．この鎖の長さの取りうる値の最小値を求めよう．

$P \in \operatorname{Spec} A[X]$ と $P' = P \cap A \in \operatorname{Spec} A$ を考える．積閉集合 $A - P'$ による A，$A[X]$ の局所化はそれぞれ $A'_P, A'_P[X]$ である．特に $\operatorname{Spec} A'_P[X]$ は $\{Q \in \operatorname{Spec} A[X] \mid (Q \cap A) \subset P'\}$ と対応する．また，$A'_P[X]$ において $V(P'A'_P[X])$ は $\operatorname{Spec}(A'_P[X]/P'A'_P[X]) = \operatorname{Spec}(K(P)[X])$ と対応するので，これらから P について $\{Q \in \operatorname{Spec} A[X] \mid Q \cap A = P'\}$ からなる $A[X]$ の素イデアル鎖の長さは高々 1 である．

さて，A の素イデアル鎖 $P'_0 \subset \cdots \subset P'_d$ にもどると，もし $P'_{i-1} = P'_i$ ならば先の議論より P'_{i-2}, P'_{i+1} は P'_i と異なる．よってこの鎖は最短でも長さが d が偶数なら $d/2$, 奇数なら $(d-1)/2$ である．よって $(d-1)/2 \leq \dim A$ すなわち $d \leq 2\dim A + 1$ が成り立つ．（証明終）

次の結果は系 3.4.6 の拡張である．

系 *5.4.9*

A が Noether 環ならば，$\dim A[X] = \dim A + 1$ が成り立つ．帰納的に $\dim A[X_1, \ldots, X_n] = \dim A + n$ である．

証明.

$d = \dim A[X]$ としたとき，$A[X]$ の素イデアル鎖 $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d$ について，先の定理と同様に A の素イデアル鎖 $P'_0 \subset \cdots \subset P'_d$ を考える．このとき $d - 1 \leq \operatorname{ht} P'_d$ を示したい．

$P' \in \operatorname{Spec} A$ について，$P'A[X]$ を係数がすべて P' の元である多項式全体とすると，これは $A[X]$ の素イデアルになる．$\operatorname{ht} P' = r$ とし，A の素イデアル鎖 $Q'_0 \subsetneq Q'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q'_r = P'$ を考えよう．このとき $Q'_0A[X] \subsetneq Q'_1A[X] \subsetneq \cdots \subsetneq Q'_rA[X]$ は $A[X]$ の素イデアル鎖になるので $r \leq \operatorname{ht} P'A[X]$ が成り立つ．また $\operatorname{ht} P' = r$ より，P はある $f_1, \ldots, f_r$ について $I = (f_1, \ldots, f_r)$ の極小素イデアルである．このとき $P'A[X]$ は $I[X]$ の極小素イデアルになるので，Krull の標高定理より $\operatorname{ht} P'A[X] \leq r$ である．

すると，A の素イデアル鎖 $P'_0 \subset \cdots \subset P'_d$ において $\operatorname{ht} P'_d = \operatorname{ht} P'_dA[X]$ であり，$P'_dA[X] \cap A = P_d \cap A$ であるので，$P'_dA[X] \subset P_d$ でありかつ前定理の議論からその間に素イデアルはない．よって $d - 1 \leq \operatorname{ht} P'_dA[X] = \operatorname{ht} P'_d \leq \dim A$ である．よって $d \leq \dim A + 1$ が従う．（証明終）

§5　正則環

以後２つの節，正則環と Cohen–Macaulay 環については，深い結果を証明するにはホモロジー代数の考え方が不可分なので，定義とそこから予見される性質を紹介するに留める．

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m}, k)$ について，$\dim A = d$ とすると A の $\mathfrak{m}$ 準素イデアルは少なくとも d 個の元で生成される．ちょうど d 個の元で $\mathfrak{m}$ 準素イデアルが生成されているときを考えよう．

定義 *5.5.1*（巴系）

$(A, \mathfrak{m})$ を d 次元 Noether 局所環とする．$x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}$ 準素イデアルを生成するとき $x_1, \ldots, x_d$ を A の巴系 (system of parameters) という．

また命題 1.2.19 より，$\mathfrak{m}$ を生成するのに必要な元の個数は $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ である．$\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ を A の**埋め込み次元** (embedding dimension) といい $\mathrm{em.dim}\, A$ と表す．次元定理より $\dim A \leq \mathrm{em.dim}\, A$ が成り立つ．等号が成り立つとき，すなわち $\mathfrak{m}$ が $\dim A$ 個の元で生成されているとき A を**正則局所環**という．

定義 5.5.2（正則局所環）

$(A, \mathfrak{m})$ を局所環とする．$d = \dim A$ 個の元 $x_1, \ldots, x_d \in A$ が存在して $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_d)$ となっているとき A を**正則局所環** (regular local ring) といい，$\mathfrak{m}$ を生成する巴系を正則巴系という．

環 A のすべての素イデアル P による局所化 A_P が正則局所環であるような A を，**正則環** (regular ring) という．

命題 5.5.3

d 次元 Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について，$x_1, \ldots, x_i$ が A の正則巴系の 1 部分であることと $A/(x_1, \ldots, x_i)$ が $d - i$ 次の正則局所環であることは同値．

証明.

($\Longrightarrow$)

$A/(x_1, \ldots, x_i)$ の極大イデアルは $x_{i+1}, \ldots, x_n$ の像で生成されており，命題 5.4.4 より $\dim A/(x_1, \ldots, x_i) = d - i$ である．よって正則局所環となる．

($\Longleftarrow$)

$A/(x_1, \ldots, x_i)$ の極大イデアル $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/(x_1, \ldots, x_i)$ が $y_1, \ldots, y_{n-i}$ の像で生成されているとすると $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_i，y_1, \ldots, y_{n-i})$ である．

（証明終）

定理 5.5.4

正則局所環 $(A, \mathfrak{m})$ は整域である．

証明.

$\dim A$ についての帰納法で示す．$\dim A = 0$ のときは A が体であるので明らか．$\dim A \geq 1$ とし，$\dim A - 1$ 次までの正則局所環は整域であると仮定する．A の高さ 0 の素イデアルを $P_1, \ldots, P_r$ とする．命題 5.1.10 より $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{m}^2$ であり $\mathfrak{m} \not\subset P_i$ であるので，Prime avoidance よりある $x \in \mathfrak{m}$ が存在して $x \notin \mathfrak{m}, P_1, \ldots, P_r$ が成り立つ．すると x の $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ における像 $\bar{x}$ は 0 でないので延長して $\{\bar{x}, \overline{y_1}, \ldots, \overline{y_{n-1}}\}$ を $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の基底にできる．このとき $x, y_1, \ldots, y_{n-1}$ は A の正則巴系となるので，前命題より A/xA は $n-1$ 次元の正則局所環である．仮定より整域なので (x) は素イデアル．すると P_i たちは極小なので $P_i \subset (x)$ となる i がある．すると任意の $y \in P_i$ について $y = ax \in P_i$ となる $a \in A$ が存在し，$x \notin P_i$ なので $a \in P_i$ である．よって $P_i = xP_i$ となり，中山の補題から $P_i = 0$ である．よって A は整域である．（証明終）

定理 5.1.9 より次の結果が従う．

系 5.5.5

$(A, \mathfrak{m})$ が 1 次元の正則局所環であることと DVR であることは同値．

DVR は整閉なので，1 次元の正則局所環は整閉である．またより強く DVR は UFD でもあるが，次の結果が知られている．

定理 *5.5.6*（Auslander–Bachsbaum の定理）

正則局所環は UFD である．

特にすべての正則局所環は整閉整域である．この結果の証明にはホモロジー代数的手法を本質的に必要とするため，ホモロジー代数を導入した後に証明を与える．

§6　Cohen–Macaulay 加群

重要な局所環のクラスの 1 つに Cohen–Macaulay 環（略して CM 環と書くことも多い）がある．Cohen–Macaulay 環は現在の可換環論で中心的な存在の 1 つであり，この節ではホモロジー代数を要しない範囲で性質をまとめておこう．まずそのために正則列と深さを導入する．

定義 *5.6.1*（正則元）

A 加群 M について，$a \in A$ が M に非例因子として作用する，すなわち任意の $0 \neq x \in M$ について $ax \neq 0$ であるとき，a は M 正則 (regular) であるという．

定義 *5.6.2*（正則列）

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．$a_1, \ldots, a_r \in A$ が任意の $1 \leq i \leq r$ について a_i が $M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$ 正則であるとき，$a_1, \ldots, a_r$ を M 正則列 (regular sequence) という．

例えば体上の多項式 $A = K[X_1, X_2, X_3]$ において $f_1 = X_1(X_2 - 1), f_2 = X_2, f_3 = X_3(X_1 - 1)$ とすると f_1, f_2, f_3 は A 正則列をなす．ところが X_1 は $A/(f_1)$ において 0 ではないが，f_3X_3 は 0 であるので f_1, f_3, f_2 は A 正則列ではない．このように正則列は順序を考慮する必要があるが，局所環においては極大イデアルの元について順序によらないことが知られている．ここではより強く $\operatorname{rad} A$ の元においてそのことを示そう．

補題 *5.6.3*

Noether 環 A 上の加群 M において $a \in A$ が M 正則でありかつ $\bigcap a^n M = 0$ であるものとする．このとき M の素因子 $P \in \operatorname{Ass} M$ について $P + (a) \subset Q$ となる $Q \in \operatorname{Ass}(M/aM)$ が存在する．

この補題の仮定は Krull の交叉定理（系 4.4.7）より $a \in \operatorname{rad} A$ のとき満たされる．

証明.

$x \in M$ によって $P = \operatorname{Ann}(x)$ とかける．ここで $\bigcap a^n M = 0$ より，ある $k \geq 0$ が存在して $x \in a^k M$ かつ $x \notin a^{k+1} M$ である．このとき $y \in M$ によって $x = a^k y$ と書けているとすると $y \notin aM$ である．ここで $\overline{y}$ を y の M/aM における像とすると，a が M 正則なので $(P + (a))\overline{y} = 0$ が成り立つ．これは $P + (a) \subset \operatorname{Ann}(\overline{y})$ を意味するが，命題 2.3.2 よりある $Q \in \operatorname{Ass}(M/aM)$ が存在する．（証明終）

命題 *5.6.4*

Noether 環 A 上の有限生成加群 M において $a_1, \ldots, a_r \in \operatorname{rad} A$ とする．このとき $a_1, \ldots, a_r$ が M 正則列ならその並べ替えも M 正則である．

証明.

まず 2 つの場合に帰着できることをみよう．$a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_r$ が M 正則列であるとする．$N = M/(a_1, \dots, a_{i-1})M$ とおくと a_i は N 正則であり，a_{i+1} は $N/a_iN = M/(a_1, \dots, a_i)M$ 正則である．このとき $a_1, \dots, a_{i+1}, a_i, \dots, a_r$ が M 正則列であることをみるには a_{i+1} が N の，a_i が $N/a_{i+1}N = M/(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1})M$ 正則であることを示せばよい．

よって a_1 が M の，a_2 が M/a_1M 正則なら a_2 が M の，a_1 が M/a_2M 正則であることを示せば十分である．まず a_2 が M の零因子とすると，命題 2.3.2 よりある $P \in \operatorname{Ass} M$ に対して $a_2 \in P$ である．ここで $a_1 \in \operatorname{rad} A$ より，Krull の交叉定理から $\bigcap a_1^n M = 0$ となるので，補題から $P + (a_1) \subset Q$ となる $Q \in \operatorname{Ass}(M/a_1M)$ がある．すると $a_2 \in P \subset Q$ だから a_2 が M/a_1M 正則であることに矛盾する．よって a_2 は M 正則．また a_1 が M/a_2M の零因子とすると，ある $x \notin a_2M, y \in M$ について $a_1x = a_2y$ だが，このとき $a_2y \in a_1M$ より a_2 が M/a_1M 正則だから $y \in a_1M$ である．$y = a_1z$ とおくと $a_1(x - a_2z) = 0$ となり，a_1 は M 正則なので $x = a_2z$ となって矛盾する．よって a_1 は M/a_2M 正則である．（証明終）

系 5.6.5

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の有限生成加群 M について，$a_1, \dots, a_r \in \mathfrak{m}$ が M 正則列であるとき，その並べ替えも M 正則列である．

次元と関連して，加群の深さというものを導入しよう．

定義 5.6.6（深さ）

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群とする．A のイデアル I について $IM \neq M$ であるとき，I の元からなる M 正則列の長さの最大値を M の I における深さ (depth) といい，$\operatorname{depth}_I M$ とかく．$IM = M$ であるときは $\operatorname{depth}_I M = \infty$ と定義する．特に A が極大イデアルが $\mathfrak{m}$ である局所環のとき，$\mathfrak{m}$ における M の深さを $\operatorname{depth} M$ とかいて単に M に深さという．

この定義における $M \neq IM$ という条件は，$M \neq 0$ のとき $(A, \mathfrak{m})$ が局所環ということと中山の補題から $I \subset \mathfrak{m}$ と同値である．

さて，Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ について $\dim A \leq \operatorname{em.dim} A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ であり，これの等号が成り立つものを正則局所環というのであった．深さは環の次元を下から抑えるものとなっている．そのことを示そう．

命題 5.6.7

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と，有限生成 A 加群 $M \neq 0$ について，任意の $P \in \operatorname{Ass} M$ に対し；

$$\operatorname{depth} M \leq \dim A/P$$

が成り立つ．

証明.

$\operatorname{depth} M$ についての帰納法で示す．まず $\operatorname{depth} M = 0$ のときは明らかに成り立っている．$\operatorname{depth} M = r$ とおき，$\operatorname{depth} M' \leq r - 1$ となる M' について成り立っていると仮定しよう．M 正則列 $a_1, \dots, a_r$ を考える．このとき $\operatorname{depth}(M/a_1M) = r - 1$ である．また任意の $P \in \operatorname{Ass} M$ について，補題 5.6.3 から $P + (a_1) \subset Q$ となる $Q \in \operatorname{Ass}(M/a_1M)$ が存在し，$a_1 \notin P, a_1 \in Q$ であるから $P \subsetneq Q$ である．よって $\dim A/Q < \dim A/P$ が成り立つ．帰納法の仮定から $r - 1 = \operatorname{depth}(M/a_1M) \leq \dim A/Q < \dim A/P$ であるので，$r \leq \dim A/P$ であるこ

とがわかる．（証明終）

系 5.6.8

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ と，有限生成 A 加群 $M \neq 0$ について，$\operatorname{depth} M \leq \dim M$ である．

これにより次の定義を導入する．

定義 5.6.9（Cohen–Macaulay 加群）

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の有限生成加群 M について，$\dim M = \operatorname{depth} M$ であるとき M を Cohen–Macaulay **加群**という．以後単に CM 加群とかく．

まず，わかりやすいご利益として定義から次が従う．

命題 5.6.10

M を Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の CM 加群とすると，M は非孤立素因子を持たない．

証明.

一般に $P \in \operatorname{Ass} M$ なら $\operatorname{depth} M \leq \dim A/P \leq \dim M$ だが，M が CM なので $\dim A/P$ は P によらず $\operatorname{depth} M = \dim M$ に等しい．（証明終）

これから CM 性についての考察を進めていきたいところではあるが，加群の深さについては Ext と呼ばれる関手を使った言い換えがあり，それにより扱いが簡明になるところがある．ホモロジー代数を仮定しないここでは，次の補題；

補題 5.6.11

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，M を A 上の有限生成加群とする．$a \in I$ が M 正則ならば，イデアル $I \subset \mathfrak{m}$ について；

$$\operatorname{depth}_I(M/aM) = \operatorname{depth}_I M - 1$$

が成り立つ．

を仮定して（証明は補題 7.1.4 で与える），CM 性のご利益について見ていくことにしよう．まず補題を用意する．

補題 5.6.12

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし、$M \neq 0$ を有限生成 A 加群とする．$a \in \mathfrak{m}$ が M 正則元であるとき，$\dim M/aM = \dim M - 1$ が成り立つ．

証明.

a は $A/\operatorname{Ann} M$ の非零因子なので，命題 5.4.5 より $\dim M - 1 = \dim A/\operatorname{Ann} M - 1 = \dim A/(\operatorname{Ann} M + (a))$ が成り立つ．また $\dim M/aM = \dim A/\operatorname{Ann}(M/aM)$ であるので，$\dim A/(\operatorname{Ann} M + (a)) = \dim A/\operatorname{Ann}(M/aM)$ であることを示せばよい．それには $P \in \operatorname{Spec} A$ が $\operatorname{Ann} M + (a) \subset P$ であることと $\operatorname{Ann}(M/aM) \subset P$ であることが同値であることを示せば十分である．

容易に $\operatorname{Ann}(M/aM) \subset P$ なら $\operatorname{Ann} M \subset P$ かつ $a \in P$ であることがわかる．一方で $\operatorname{Ann} M \subset P$ かつ $a \in P$ ならば $M_P \neq 0$ であり，また $a \in P$ だから $(M/aM)_P = M_P/aM_P$ であり，$a/1 \in \operatorname{rad}(A_P) = PA_P$ だから中山

の補題より $M_P/aM_P \neq 0$ である．よって $P \in \operatorname{Supp} M/aM$ すなわち $\operatorname{Ann}(M/aM) \subset P$ となり，求める等式が示された．（証明終）

この２つの補題から帰納法により容易に次が従う．

系 5.6.13

M を Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の CM 加群とする．$a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{m}$ が M 正則列なら（r は $\operatorname{depth} M$ と一致しているとは限らない），$M/(a_1, \ldots, a_r)M$ も次元が $\dim M - r$ の CM 加群である．

最後に技術的な命題たちを述べておこう．

補題 5.6.14

A を Noether 環，M を A のイデアルとし I を $IM \neq M$ となる A のイデアルとする．$\operatorname{depth}_I M = 0$，すなわち任意の $x \in I$ が M の零因子であることと，ある $P \in \operatorname{Ass} M$ が存在して $I \subset P$ であることは同値．

証明.

$(\Longleftarrow)$ は明らか．$(\Longrightarrow)$ は対偶を示す．任意の $P \in \operatorname{Ass} M$ について $I \subsetneq P$ であると仮定する．$\operatorname{Ass} M$ は有限だから Prime avoidance より $I \subsetneq \bigcup_{P \in \operatorname{Ass} M} P$ であり，系 2.3.4 より $x \in I$ で M 正則元となるものが存在する．（証明終）

命題 5.6.15

M を Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の CM 加群とすると，任意の $P \in \operatorname{Supp} M$ について；

$$\operatorname{depth}_P M = \operatorname{depth}_{PA_P} M_P = \dim M_P$$

が成り立つ．特に M_P も CM A_P 加群である．

証明.

一般に $\operatorname{depth}_P M \leq \operatorname{depth}_{PA_P} M_P \leq \dim M_P$ であることを容易に確かめることができる．よって $\dim M_P \leq \operatorname{depth}_P M$ であることを示せばよい．

$\operatorname{depth}_P M$ についての帰納法で示そう．まず $\operatorname{depth}_P M = 0$ ならば，補題よりある $\in \operatorname{Ass} M$ が存在して $P \subset Q$ である．ここで補題 2.3.5 より $V(\operatorname{Ann}(M_P)) = \operatorname{Ass} M_P = \{Q \in \operatorname{Ass} M \mid Q \subset P\} \neq \emptyset$ であり，M が CM 加群だから非孤立素因子を持たないので $V(\operatorname{Ann}(M_P)) = PA_P$ となり，$\dim M_P = \dim A_P/PA_P = 0$ である．さて $\operatorname{depth}_P M = r > 0$ として，$r-1$ まで正しいとする．定義より $a \in P$ で M 正則なものがある．ここで補題 5.6.11 より $\operatorname{depth}_P M/aM = \operatorname{depth}_P M - 1$ であり，帰納法の仮定と補題 5.6.12 から $\operatorname{depth}_P M/aM = \dim(M/aM)_P = \dim M_P/aM_P = \dim M_P - 1$ である．よって $\operatorname{depth}_P M = \dim M_P$ であることがわかり，証明が完了する．（証明終）

この命題により CM 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ の局所化 A_P もまた $\operatorname{depth} A_P = \operatorname{ht} P$ となる CM 局所環である．

§7　Cohen–Macaulay 環と鎖状環

正則環と同様に，局所環でない環は局所化により局所環とできることから次の定義をする．

定義 *5.7.1*（Cohen–Macaulay 環）

Noether 環 A について，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ による局所化 A_P が A_P 加群として Cohen–Macaulay 加群のとき，A を Cohen–Macaulay 環という．

明らかに体は CM 環である．また簡単な計算により 1 次元 Noether 整域は CM 環であることがわかる．特に PID，Dedekind 整域などは CM 環である．この節では，CM 環の簡単な性質を見るとともに，正則局所環や CM 環上の有限生成代数が CM 環であること，またすべての CM 環が強鎖状環であることを示そう．

命題 *5.7.2*

環 A について，鎖状性は局所的な性質である．すなわち A が鎖状環であることと，任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ について A_P が鎖状環であることは同値.

証明は定義から明らかであろう．この性質により CM 局所環に帰着することができる.

定理 *5.7.3*

$(A, \mathfrak{m})$ を CM 局所環とする．A において弱次元公式（定義 3.6.7）が成り立ち，また A は鎖状環である.

証明.

まず弱次元公式が成り立つことを示そう．任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとり，$\operatorname{ht} P = n$ とする．命題 5.6.15 より A_P も CM 局所環で $\operatorname{ht} P = \operatorname{depth}_{PA_P} A_P = \operatorname{depth}_P A$ であるので，A 正則列 $a_1, \dots, a_n \in P$ が存在する．$I = (a_1, \dots, a_n)$ とおくと，系 5.6.13 より A/I は $\dim A/I = \dim A - n$ となる CM 局所環である．また $a_1, \dots, a_n$ は A 正則なので $0 < \operatorname{ht}(a_1) < \operatorname{ht}(a_1, a_2) < \cdots$ であるから，$n \leq \operatorname{ht} I$ が成り立つ．また $\operatorname{ht} I \leq \operatorname{ht} P = n$ より $\operatorname{ht} I = \operatorname{ht} P$ となり，P は I の極小素イデアルである．よって P は A/I の素因子なので，$\dim A/P = \dim A/I = \dim A - n$ が成り立つ．よって $\dim A/P = \operatorname{coht} P$ だから $\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$ である.

次に鎖状であることを示す．任意の素イデアル鎖 $P \subsetneq Q$ をとる．局所化 A_Q も CM 局所環なので，弱次元公式が成り立つから $\operatorname{ht} Q - \operatorname{ht} P = \dim A_Q/PA_Q$ が成り立つ．そこで $P \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_s = Q$ を飽和した素イデアル鎖とすると，$P_i \subsetneq P_{i+1}$ について同様に $\operatorname{ht} P_{i+1} = \operatorname{ht} P_i + \dim A_{P_i}/P_{i-1}A_{P_i} = \operatorname{ht} P_i + 1$ が成り立つ．よって $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + s$ であり，$s = \dim A_Q/PA_Q$ がわかるので A は鎖状である.（証明終）

系 *5.7.4*

CM 環は鎖状環である.

次に CM 環においては巴系と正則列の間に相互に良い関係があることを見よう．まず一般に正則局所環は CM 環であることを確認しておく.

命題 *5.7.5*（Cohen）

正則局所環は CM 環である.

証明.

$(A, \mathfrak{m})$ を正則局所環とし，$\dim A = n$ とおく．$x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{m}$ を正則巴系としよう．このとき命題 5.5.3，定理 5.5.4 によりこれらが A 正則列をなすことがわかる.（証明終）

CM 環という条件を仮定すると，正則列と巴系の概念が一致する.

命題 *5.7.6*

$(A,\mathfrak{m})$ を CM 局所環とすると，$a_1,\ldots,a_r \in \mathfrak{m}$ について，以下の命題；

(i) $a_1,\ldots,a_r$ は A 正則列をなす．
(ii) 任意の $1 \le i \le r$ について $\mathrm{ht}(a_1,\ldots,a_i) = i$ である．
(iii) $\mathrm{ht}(a_1,\ldots,a_r) = r$ である．
(iv) $a_1,\ldots,a_r$ は A の巴系の一部分をなす．

は同値である．

証明.

CM 性が必要になるのは (iv)$\Longrightarrow$(i) のみであることを注意しておく．

(i)$\Longrightarrow$(ii)

$a_1,\ldots,a_r \in \mathfrak{m}$ を A 正則列とすると，$0 < \mathrm{ht}(a_1) < \mathrm{ht}(a_1,a_2) < \cdots$ より Krull の標高定理（定理 5.4.1）から $1 \le i \le r$ について $\mathrm{ht}(a_1,\ldots,a_i) = i$ である．

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

自明．

(iii)$\Longrightarrow$(iv)

もし $\dim A = r$ なら，$(a_1,\ldots,a_r)$ の極小素イデアルは $\mathfrak{m}$ のなので $\sqrt{(a_1,\ldots,a_r)} = \mathfrak{m}$ となり $(a_1,\ldots,a_r)$ は $\mathfrak{m}$ 準素だから $a_1,\ldots,a_r$ は巴系をなす．また $r < \dim A$ なら $\mathfrak{m}$ は $(a_1,\ldots,a_r)$ の極小素イデアルではないので，Prime avoidance から $a_{r+1} \in \mathfrak{m}$ を $(a_1,\ldots,a_r)$ のすべての極小素イデアルに含まれないようにとれる．このとき $\mathrm{ht}(a_1,\ldots,a_r,a_{r+1}) > r$ なので，高さが $\dim A$ と一致するまで続けることで $a_1,\ldots,a_r$ は A の巴系の一部分であることがわかる．

(iv)$\Longrightarrow$(i)

$\dim A = n$ として，$a_1,\ldots,a_n$ が巴系なら A 正則であることを示せばよい．n についての帰納法を用いる．まず $n = 1$ のとき，a_1 が巴系であるとする．ここで a_1 が A 正則でない，すなわち $a_1x = 0$ となる $x \neq 0 \in A$ が存在するとすると，命題 2.3.2 から $a_1 \in P$ となる $P \in \mathrm{Ass}\,A$ が存在するが，命題 5.6.10 の証明からわかるように $\dim A/P = 1$ であるので，$P \subsetneq \mathfrak{m}$ を意味する．これは (a_1) が $\mathfrak{m}$ 準素であることに矛盾する．よって a_1 は A 正則である．

次に $n-1$ まで正しいとする．A の巴系 $a_1,\ldots,a_n$ について，a_1 が A 正則元でないと仮定すると，$n = 1$ の場合と同様に $a_1 \in P$ となる $P \in \mathrm{Ass}\,A$ が存在して $\dim A/P = n$ である．一方で $\sqrt{(a_1,\ldots,a_n)} = \mathfrak{m}$ であるので，A/P において $\sqrt{(\overline{a_2},\ldots,\overline{a_n})} = \mathfrak{m}$ であり，次元定理から $\dim A/P \le n-1$ が言えるがこれは矛盾である．ゆえに a_1 は A 正則で，A/a_1A は $a_2,\ldots,a_n$ の像を巴系とする $n-1$ 次の CM 局所環である．よって帰納法の仮定から $a_2,\ldots,a_n$ の像は A/a_1A の正則列であり，$a_1,\ldots,a_n$ は A の正則列をなす．

（証明終）

次に CM 環上の多項式環も CM 環になることを示そう．そのために，CM 環について Macaulay,Cohen らが考察していた当時の定義を紹介しよう．

定義 *5.7.7*（純性定理）

Noether 環 A のイデアル I について，任意の $P \in \operatorname{Ass} A/I$ の高さが $\operatorname{ht} I$ に等しいとき，I は純 (unmixied) であるという．特に Noether 環 A について r 個の元で生成されるイデアル $I = (a_1, \ldots, a_r)$ について $\operatorname{ht} I = r$ ならば I は必ず純であるとき，A において**純性定理** (unmixedness theorem) が成り立つという．

Krull の標高定理（定理 5.4.1）より，r 個の元で生成され高さが r のイデアル I の極小素イデアルの高さはすべて r であるので，I が純であるということは非孤立素因子を持たないということを意味する．Macaulay (1916) は体上の多項式環について純性定理が成り立つことを，Cohen (1946) は正則局所環について純性定理が成り立つことを証明した．Noether 環 A について純性定理が成り立つことと，（本書の意味で）CM 環であることは同値である．これが CM 環の由来である．正則局所環が CM 環であることは確かめたとおりである（Cohen は純性定理が成り立つことを証明したため道筋はだいぶ異なる）．CM 環の定義と純性定理が成り立つことを同値であることを確かめておこう．

定理 *5.7.8*

Noether 環 A について，純性定理が成り立つことと CM 環であることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

任意の $P \in \operatorname{Spec} A$ をとり，$\operatorname{ht} P = r$ とする．命題 5.4.7 より $a_1, \ldots, a_r \in P$ を $\operatorname{ht}(a_1, \ldots, a_i) = i$ がすべての $1 \leq i \leq r$ で成り立つようにとれる．このとき $a_1, \ldots, a_r$ が A_P 正則列になる．各 i について純性定理により $(a_1, \ldots, a_i)$ の素因子の高さはすべて i であるので，特に a_{i+1} を含まない．すると系 2.3.4 により a_{i+1} は $A/(a_1, \ldots, a_i)$ で正則である．よって $\operatorname{depth} A_P = r = \dim A_P$ であり A_P は CM 局所環である．すなわち A は CM 環.

($\Longleftarrow$)

$I = (a_1, \ldots, a_r)$ が $\operatorname{ht} I = r$ であるとする．$P \in \operatorname{Ass} A/I$ をとり，P が極小でないと仮定する．P を含む極大イデアル $\mathfrak{m}$ で局所化して考える．このとき $IA_\mathfrak{m}$ はすくなくとも素因子 $P'A_\mathfrak{m} \subsetneq PA_\mathfrak{m}$ を持つ．ところが命題 5.7.6 より $a_1, \ldots, a_r$ は $A_\mathfrak{m}$ の正則列であり，系 5.6.13 より $A_\mathfrak{m}/IA_\mathfrak{m}$ も CM 局所環である．よって $IA_\mathfrak{m}$ の素因子はすべて極小でなければならないので矛盾である．よって純性定理が成り立つ.

（証明終）

この証明の ($\Longleftarrow$) に注目すると，A の極大イデアルによる局所化が CM 局所環でありさえすれば純性定理が成り立つ．よって次の系が従う．

系 *5.7.9*

Noether 環 A が CM 環かどうかを確かめるには任意の極大イデアルによる局所化が CM 局所環であるかどうかを確かめれば十分である．

CM 環上の多項式環が CM 環であること，そして CM 環は強鎖状環であることを証明してこの節を締めくくろう．

定理 *5.7.10*

A を CM 環とすると，A 上の多項式 $A[X_1, \ldots, X_n]$ も CM 環である．

証明.

先の系により $A[X]$ の極大イデアル $\mathfrak{m}'$ による局所化が CM 局所環であることを示せば十分である．まずは A が局所環の場合に帰着できることを見る．$A \cap \mathfrak{m}' = \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} A$ とおくと，自然な対応で；

$$A[X]_{\mathfrak{m}'} = (A_{\mathfrak{m}}[X])_{\mathfrak{m}' A_{\mathfrak{m}}[X]}, A_{\mathfrak{m}}[X]/(\mathfrak{m}' A_{\mathfrak{m}}[X]) = A[X]/\mathfrak{m}'$$

であり，A を局所環と仮定してよいことがわかる．また $\mathfrak{m}' A_{\mathfrak{m}}[X] \cap A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}}$ であるので，$\mathfrak{m}$ も極大と仮定してよい．

以上より，A が局所環であって，$A[X]$ の極大イデアル $\mathfrak{m}'$ が $\mathfrak{m}' \cap A = \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ を満たすときに $A[X]_{\mathfrak{m}'}$ が CM 局所環であることを示せばよい．体 $A/\mathfrak{m}$ を k とおくと，準同型；

$$\varphi : A[X] \to K[X]; a_n X^n + \cdots + a_0 \mapsto \overline{a_n} X^n + \cdots + \overline{a_0} \quad （\overline{a_i} \text{ は } a_i \text{ の } A/\mathfrak{m} \text{ における像.}）$$

により環同型 $A[X]/\mathfrak{m}A[X] \cong K[X]$ がある．いま $\mathfrak{m}A[X] \subset \mathfrak{m}'$ であり，$A[X]/\mathfrak{m}A[X]$ は 1 次元の整域であることに注意すると $\mathfrak{m}'$ の像は極大イデアルである．よってモニックで既約な $f' \in K[X]$ によって生成されている．$f \in \mathfrak{m}'$ を $\varphi(f) = f'$ となるようにとると，$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}A[X] + (f)$ である．よって $\mathfrak{m} = (a_1, \ldots, a_r)$ とすれば $A[X]$ 上 $\mathfrak{m}'$ は $a_1, \ldots, a_r, f$ で生成されている．またこれらは $A[X]$ 正則列をなす．a_i たちについては命題 5.7.6 から A 正則列をなすことから従い，f は $A[X]/(a_1, \ldots, a_r)A[X] = K[X]$ でモニックなので正則である．よって $r + 1 \leq \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}'} A[X]$ であることがわかる．また $\mathfrak{m}'$ は $r+1$ 個の元で生成されているから Krull の標高定理により $\dim A[X]_{\mathfrak{m}'} \leq r + 1$ である．これらに命題 5.6.15 をあわせて；

$$\dim A[X]_{\mathfrak{m}'} \leq r + 1 \leq \operatorname{depth}_{\mathfrak{m}'} A[X] = \operatorname{depth} A[X]_{\mathfrak{m}'}$$

がわかり，$A[X]_{\mathfrak{m}'}$ は CM 局所環である．（証明終）

系 *5.7.11*（Macaulay）

体上の多項式環 $K[X_1, \ldots, X_n]$ は CM 環である．

系 *5.7.12*

CM 環は強鎖状環である．

それでは，いよいよ次の章からは圏論とホモロジー代数を導入し，より現代的な手法を用いた可換環の考察についてみていこう．

第6章　ホモロジー代数

—Homological algebra

ホモロジー代数とは圏の手法を用いてホモロジーの考察を行うものだが，その手法が Serre らの手によって可換環論に応用され革命をもたらした．現代では代数を研究する際の非常に有用な道具として使われている．初等的には完全列とその乱れを調べる手法のことだと思って構わない．この章以降圏の簡単な知識を仮定する．その内容については付録，特に圏，関手，Abel 圏の節を見よ．

§1　基本命題

この節では完全列について考えるときの基本的な道具となる，**5 項補題** (five lemma)，**蛇の補題** (snake's lemma)，**分裂補題** (splitting lemma) を紹介しよう．また常に A 加群の圏 $\mathrm{Mod}(A)$ を考える．

補題 *6.1.1*

図式 Figure.10 が可換ならば，核，余核に誘導される可換図式 Figure.11 がある．

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[d, "h_2"] \\ N_1 \arrow[r, "g"] & N_2 \end{tikzcd}$$

Figure.10

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & \mathrm{Coker}\, f \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker g \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g"] & N_2 \arrow[r] & \mathrm{Coker}\, g \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Figure.11

証明.

任意の $x \in \ker f$ について $h_1(x) \in \ker g$ であるので，$\varphi : \ker f \to \ker g; x \mapsto h_1(x)$ が定まる．

また，$\psi : \mathrm{Coker}\, f \to \mathrm{Coker}\, g; y + \mathrm{Im}\, f \mapsto h_2(y) + \mathrm{Im}\, g$ が求める準同型を与える．実際 $y + \mathrm{Im}\, f = y' + \mathrm{Im}\, f$ ならば $y - y' \in \mathrm{Im}\, f$ なので，ある $x \in M_1$ がとれて $h_2(y) - h_2(y') = g(h_1(x)) \in \mathrm{Im}\, g$ である．よって well-defined.　（証明終）

補題 *6.1.2*（5 項補題）

2 つの行が完全であるような次の可換図式；

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & M_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & M_5 \arrow[d, "h_5"] \\ N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 \arrow[r, "g_3"] & N_4 \arrow[r, "g_4"] & N_5 \end{tikzcd}$$

について次が成り立つ．

(i) h_1 が全射で h_2, h_4 が単射ならば h_3 は単射.

(ii) h_5 が単射で h_2, h_4 が全射ならば h_3 は全射.

特に h_1, h_2, h_4, h_5 が同型ならば h_3 も同型である.

証明.

(i) $h_3(x_3) = h_3(x_3')$ とする．すると $f_3(x_3 - x_3') \in \ker h_4 = 0$ である．よって $x_3 - x_3' \in \ker f_3 = \mathrm{Im}\, f_2$ であるので，$x_3 - x_3' = f_2(x_2)$ とかける．ここで $g_2(h_2(x_2)) = h_3(x_3 - x_3') = 0$ より $h_2(x_2) \in \ker g_2 = \mathrm{Im}\, g_1$ である．よって $h_2(x_2) = g_1(y_1)$ とかけている．すると h_1 が全射なので $h_2(x_2) = g_1(h_1(x_1)) = h_2(f_1(x_1))$ とかけている．よって h_2 が単射だから $x_2 - f_1(x_1) = 0$ である．すると $f_2(x_2 - f_1(x_1)) = x_3 - x_3' = 0$ である．よって h_3 は単射．

(ii) 任意の $y_3 \in N_3$ に対して，h_4 が全射なので $g_3(y_3) = h_4(x_4)$ となる x_4 がとれる．すると $h_5(f_4(x_4)) = g_4(h_4(x_4)) = 0$ より h_5 が単射であるから，$f_4(x_4) = 0$ である．よって $x_4 \in \ker f_4 = \mathrm{Im}\, f_3$ である．ゆえに $f_3(x_3) = x_4$ となる x_3 がとれる．このとき $g_3(y_3) = h_4(x_4) = h_4(f_3(x_3)) = g_3(h_3(x_3))$ であるので，$y_3 - h_3(x_3) \in \ker g_3 = \mathrm{Im}\, g_2$ である．よって h_2 の全射性から $y_3 - h_3(x_3) = g_2(y_2) = g_2(h_2(x_2)) = h_3(f_2(x_2))$ とかける x_2, y_2 が存在する．ゆえに $y_3 = h_3(x_3 + f_2(x_2))$ となり全射である．

（証明終）

補題 *6.1.3*（蛇の補題）

2 つの行が完全であるような次の可換図式；

$$
\begin{tikzcd}
 & M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\varphi'"] & N_2 \arrow[r, "\psi'"] & N_3 &
\end{tikzcd}
$$

を考えると，自然に誘導される射たちが存在して；

$$
\ker f_1 \xrightarrow{\overline{\varphi}} \ker f_2 \xrightarrow{\overline{\psi}} \ker f_3
$$
$$
\xrightarrow{\ d\ } \mathrm{Coker}\, f_1 \xrightarrow{\overline{\varphi'}} \mathrm{Coker}\, f_2 \xrightarrow{\overline{\psi'}} \mathrm{Coker}\, f_3
$$

が完全になる．

また φ が単射であることと $\overline{\varphi}$ が単射であること，ψ' が全射であることと $\overline{\psi'}$ が全射であることは同値．

$$
\begin{tikzcd}
(0 \arrow[r] &)\ker f_1 \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d] & \ker f_2 \arrow[r, "\overline{\psi}"] \arrow[d] & \ker f_3 \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "d"] & \\
(0 \arrow[r] &)M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & N_2 \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d] & N_3(\arrow[r] \arrow[d] & 0) \\
 & \mathrm{Coker}\, f_1 \arrow[r, "\overline{\varphi'}"] & \mathrm{Coker}\, f_2 \arrow[r, "\overline{\psi'}"] & \mathrm{Coker}\, f_3(\arrow[r] & 0)
\end{tikzcd}
$$

Figure.12　蛇の補題

証明.

Step 1. $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ の定義.

φ, ψ を制限することで定義しよう．実際，$x \in \ker f_1$ について $f_2(\varphi(x)) = \varphi'(f_1(x)) = 0$ であるので，$\varphi(x) \in \ker f_2$ である．ψ についても同様.

Step 2. $\overline{\varphi'}, \overline{\psi'}$ の定義.

φ', ψ' を Coker に誘導することで定義しよう． well-definedness を確認しておく． $\overline{y} = \overline{y'}$ と仮定すると，$y - y' \in \operatorname{Im} f_1$ よりある $x \in M_1$ で $y - y' = f_1(x)$ となるものが存在する．すると $\varphi'(y - y') = f_2(\varphi(x)) \in \operatorname{Im} f_2$ より $\overline{\varphi'(y)} = \overline{\varphi'(y')}$ である.

Step 3. d の定義.

$d : \ker f_3 \to \operatorname{Coker} f_1$ を次のように定めよう．$x \in \ker f_3$ に対し ψ が全射なので $\psi(x_2) = x$ となる $x_2 \in M_2$ がとれる．このとき $f_2(x_2) \in \ker \psi' = \operatorname{Im} \varphi'$ となり，ただ 1 つの $y_1 \in N_1$ が存在して $f_2(x_2) = \varphi'(y_1)$ である． $d(x) = \overline{y_1} \in \operatorname{Coker} f_1$ と定義する.

この定義において well-deinfedness を確かめるには，x_2 のとり方によらないことを見れば良い．$\psi(x_2) = \psi(x_2') = x$ となっているとしよう．このとき $\varphi'(y_1') = f_2(x_2')$ となる y_1' をとると，$\varphi'(y_1' - y_1) = f_2(x_2' - x_2)$ であり， $x_2' - x_2 \in \ker \psi = \operatorname{Im} \varphi$ より $\varphi(x_1) = x_2' - x_2$ となる $x_i \in M_1$ がとれる．すると $\varphi'(f_1(x_1)) = f_2(x_2' - x_2) = \varpi'(y_1' - y_1)$ となり， φ' は単射だから $y_1' - y_1 = f_1(x_1) \in \operatorname{Im} f_1$ である.

Step 4. d の完全性のみ確認しておこう.

(i) $\operatorname{Im} \overline{\psi} = \ker d$ であること.

任意の $x \in \operatorname{Im} \overline{\psi}$ について $d(x) = 0$ を示せばよい． 定義から $x_2 \in \ker f_2$ が存在して $x_3 = \psi(x_2)$ とかけている．すると $\varphi'(y_1) = f_2(x_2) = 0$ となる y_1 をとれば $d(x) = \overline{y_1}$ だが， $y_1 \in \ker \varphi' = 0$ である．よって $d(x) = 0$ である.

$x \in \ker d$ をとると，$x = \psi(x_2)$ となる $x_2 \in M_2$ がとれる． $f_2(x_2) = \varphi'(y_1)$ となる y_1 について， $\overline{y_1} = d(x) = 0$ より $y_1 \in \operatorname{Im} f_1$ である．よって $y_1 = f_1(x_1)$ となる $x_1 \in M_1$ をとる．すると $f_2(x_2) = \varphi'(y_1) = \varphi'(f_1(x_1)) = f_2(\varphi(x_1))$ であるので，$x_2 - \varphi(x_1) \in \ker f_2$ となる．このとき $\psi(x_2 - \varphi(x_1)) = \psi(x_2) = x_3$ であるので，$x_3 \in \operatorname{Im} \overline{\psi}$ である.

(ii) $\operatorname{Im} d = \ker \overline{\varphi'}$ であること.

$\overline{y_1} \in \operatorname{Im} d$ をとる．$d(x) = \overline{y_1}$ とすると， $\psi(x_2) = x_3$ となる x_2 をとったとき， $f_2(x_2) = \varphi'(y_1')$ となる y_1' について $\overline{y_1} = \overline{y_1'}$ である．いま $\varphi(y_1') \in \operatorname{Im} f_2$ なので， $\overline{\varphi'}(\overline{y_1}) = 0$ である.

$\overline{y_1} \in \ker \overline{\varphi'}$ をとる．すると $\varphi'(y_1) \in \operatorname{Im} f_2$ である．よって $\varphi'(y_1) = f_2(x_2)$ となる $x_2 \in M_2$ がとれる．このとき $d(\psi(x_2)) = \overline{y_1}$ となる.

（証明終）

定義 *6.1.4*（分裂完全列）

完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M_2 \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

について，次の条件；

(i) $i : M_2 \to M$ が存在して $\pi \circ i = \mathrm{id}_{M_2}$ が成り立つ.

(ii) $p : M \to M_1$ が存在して $p \circ \iota = \mathrm{id}_{M_1}$ が成り立つ.

のどちらかが成り立つとき，完全列 $(*)$ は**分裂** (split) するという．特に (i) を**左分裂** (left split)，(ii) を**右分裂** (right split) という.

補題 *6.1.5*（分裂補題）

完全列 $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M_2 \longrightarrow 0$ について，以下の 3 つ；

(i) M は $M_1 \oplus M_2$ と同型で，ι, π はそれぞれ自然な移入と射影に一致する.

(ii) $i : M_2 \to M$ が存在して $\pi \circ i = \mathrm{id}_{M_2}$ が成り立つ.

(iii) $p : M \to M_1$ が存在して $p \circ \iota = \mathrm{id}_{M_1}$ が成り立つ.

は同値．すなわち完全列が分裂していることと，中央の項が左右の項の直和であることが同値である.

証明.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

自然な $i : M_2 \to M_1 \oplus M_2$ によって得られる.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

任意の $x \in M$ について $x - i(\pi(x)) \in \ker \pi = \mathrm{Im}\,\iota$ より，$y \in M_1$ で $\iota(y) = x - i(\pi(x))$ となるものが一意的に定まる．これによって $p : M \to M_1$ を $p(x) = y$ と定めると題意を満たす.

(iii)$\Longrightarrow$(i)

$\varphi : M \to M_1 \oplus M_2; x \mapsto (p(x), \pi(x))$ が同型射となる.

Step 1. 単射であること.

$\varphi(x) = 0$ とすると $p(x) = \pi(x) = 0$ であるので，$x \in \ker \pi = \mathrm{Im}\,\iota$ よりある $y \in M_1$ が存在して $\iota(y) = x$ とかける．すると $p(x) = y = 0$ なので $x = 0$ である.

Step 2. 全射であること.

任意の $(x_1, x_2) \in M_1 \oplus M_2$ について，π が全射なのである $x \in M$ が存在して $\pi(x) = x_2$ である．このとき $\varphi(x + \iota(x_1)) = (x_1, x_2)$ となる.

（証明終）

定理 6.1.6

完全列 $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ が分裂しているとする．加群の圏への半完全関手 F に対して；

$$0 \longrightarrow F(M_1) \longrightarrow F(M) \longrightarrow F(M_2) \longrightarrow 0$$

は完全である．

証明.

$F(p \circ \iota) = F(p) \circ F(\iota) = F(\mathrm{id}_{M_1}) = \mathrm{id}_{F(M_1)}$ より $F(\iota)$ が単射であることがわかり，同様にして $F(\pi)$ は全射である．（証明終）

§2　複体とホモロジー，コホモロジー

この節では Abel 圏 $\mathscr{A}$ で考えていく（付録 B もみよ）が，埋め込み定理（定理 B.3.3）により加群だとおもって話を進めていく．つまり核，余核は今までどおりの見知った対象であると考え，元についての操作を行う．圏論的な考え方で議論を押し切って行くことを「アブストラクト・ナンセンス (abstract nonsense)」とよく言うが, これはごちゃごちゃした計算に頼ることなく，いわば考えている対象を “上に” あげて，コホモロジーやスペクトル系列などの道具で計算してから地上に戻してみると証明したかったことがわかっている，といった状況のことをいう．加藤 (2003) によれば「使われているすべてのコホモロジーは, みな導来関手」である．まずは導来関手を考えるためにホモロジー代数の基礎知識を集め，定義していこう．

定義 6.2.1（複体）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の対象の族 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ と射 $d_i : A_i \to A_{i-1}$ の族 $\{d_i\}$ で，$d_i \circ d_{i+1} = 0$ を満たすものを（鎖）**複体** (chain complex) という．これらをまとめて $A_\bullet$ とかく．また $\mathscr{A}$ の対象の族 $\{A^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ と射 $d^i : A^i \to A^{i+1}$ の族 $\{d^i\}$ で，$d^{i+1} \circ d^i = 0$ を満たすものを**余鎖複体** (cochain complex) といい，これらを $A^\bullet$ とかく．

射 d_i を i 次**境界作用素** (boundary operator) ともいう．この定義の意味を考えてみよう．列（鎖）；

$$\cdots \xrightarrow{d_{i+2}} A_{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} A_i \xrightarrow{d_i} A_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} A_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A_0 \xrightarrow{d^0} \cdots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

があったときここから情報としてホモロジー，コホモロジーを取りたいわけだが，その定義は ker を Im で割ったものであるので，この定義が意味を持つのは $\mathrm{Im}\, d_{i+1} \subset \ker d_i$ であるとき，つまり $d_i \circ d_{i+1} = 0$ であるときである．これが複体の意味である．以後，単に複体といえば鎖複体を表すものとする．

定義 6.2.2（ホモロジー群，コホモロジー群）

$A_\bullet$ を複体とする．各 i に対して $\ker d_i / \mathrm{Im}\, d_{i+1}$ を $A_\bullet$ の i 次**ホモロジー群** (homology group) といい，$H_i(A_\bullet)$ で表す．余鎖複体 $A^\bullet$ については $H^i(A^\bullet) = \ker d^i / \mathrm{Im}\, d^{i-1}$ を i 次**コホモロジー群** (cohomology group) という．

ホモロジー群とは A_i の部分対象である．自然な全射をそれぞれ $\pi_i : \ker d_i \to H_i(A_\bullet), \pi^i : \ker d^i \to H^i(A^\bullet)$ という．それぞれの対象がどうなっているかについていろいろと名前があるので，それを挙げておく．

定義 6.2.3（非輪状）

すべての $i > 0$ について $H_i(A_\bullet) = 0$ となるとき，つまり $\ker d_i = \operatorname{Im} d_{i+1}$ となるとき $A_\bullet$ を完全 (exact)，ひいては**非輪状** (acyclic) という．$A^\bullet$ についても同様．

完全列そのものではどこのホモロジー，コホモロジーをとっても消えてしまう．しかし，見方を返せば完全列に関手を施して複体を作ったときそこでホモロジーが消えない，ということは完全性が乱れてしまったということにほかならない．以前取り上げた左（右）完全関手はその一例である．このようにホモロジーは鎖がどれだけ完全列から離れているかという "乱れ" を計測する手段であるといえる．

定義 6.2.4（コサイクル，コバウンダリー）

$\ker d_i$ の元をサイクル，**輪体** (cycle)，$\operatorname{Im} d^{i+1}$ の元をバウンダリー，**境界輪体** (boundary) という．$\ker d^i, \operatorname{Im} d_{i-1}$ についてはコサイクル，**余輪体** (cocycle)，コバウンダリー，**余境界輪体** (coboundary) という．

次に複体の圏について考えたい．そのために複体の間の射 $f_\bullet : A_\bullet \to B_\bullet$ を考えねばならない．射 $f_i : A_i \to B_i$ の族 $\{f_i\}$ ないし $\{f^i\}$ で，次の図式；

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & B_i \arrow[r, "d'_i"] & B_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Figure.13　複体の射

を可換にするものを**複体の射**といい $f_\bullet$ とかく．余複体についても双対的に考え $f^\bullet$ とかく．まとめよう．

定義 6.2.5（複体の圏）

$\mathscr{A}$ を Abel 圏とする．対象を $\mathscr{A}$ の複体，射を $f_\bullet$ として定める圏を $\mathrm{Ch}\,A$ とかき，**複体の圏**という．また余鎖複体と $f^\bullet$ のなす圏を $\mathrm{CoCh}\,\mathscr{A}$ とかく．

コホモロジーとは導来関手である，と述べたが，まずホモロジーをとることは関手になることをみよう．

命題 6.2.6

各 i に対し，ホモロジー H_i は $\mathrm{Ch}\,A$ から $\mathscr{A}$ への関手になる．

証明.

複体の射 $f_\bullet$ について $H_i(f_\bullet)$ を次で定めよう；

$$H_i(f_\bullet) = \widetilde{f_i} : H_i(A_\bullet) \to H_i(B_\bullet); x + \operatorname{Im} d_{i+1} \mapsto f_i(x) + \operatorname{Im} d'_{i+1}$$

$x \in \ker d_i$ ならば $f_i(x) \in \ker d'_i$ であるので，この定義は意味を持つ．well-definedness についても計算すれば明らかである．　（証明終）

コホモロジーについても同様に $\mathrm{CoCh}\,\mathscr{A}$ から $\mathscr{A}$ への関手になる．ではいつ $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ となるかを考えよう．まず $H_i(f_\bullet) = H_i(g_\bullet)$ であることと，任意の $x \in \ker d_i$ に対して $f_i(x) - g_i(x) \in \operatorname{Im} d'_{i+1}$ であることは同値である．ここで射 $s_i : A_i \to B_{i+1}$ が存在して $f_i - g_i = (d'_{i+1} \circ s_i) + (s_{i-1} \circ d_i)$ となるとき，$x \in \ker d_i$ なら

$f_i(x) - g_i(x) \in \operatorname{Im} d'_{i+1}$ である．このような s^i がすべての i でとれるとき，任意の次数のホモロジーが一致する．このとき $f_\bullet$ と $g_\bullet$ はホモトピー同値であるという．

定義 6.2.7（ホモトピー同値）

複体の射 $f_\bullet, g_\bullet$ に対し，射 $s_i : A_i \to B_{i+1}$ の族 $\{s_i\}$ で，各 i に対し $f_i - g_i = (d'_{i+1} \circ s_i) + (s_{i-1} \circ d_i)$ となるものが存在するとき $f_\bullet$ と $g_\bullet$ はホモトピー同値，ホモトピック (homotopic) であるという．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[dl, "s_{i+1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{i+1}"] & A_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[dl, "s_i"'] \arrow[d, shift right, "g_i"'] \arrow[d, shift left, "f_i"] & A_{i-1} \arrow[r] \arrow[dl, "s_{i-1}"'] \arrow[d, shift right, "g_{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "f_{i-1}"] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r] & B_{i+1} \arrow[r, "d'_{i+1}"] & B_i \arrow[r, "d'_i"] & B_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Figure.14　複体の射のホモトピー同値

余鎖複体についても同様に少し調整し，$f^i - g^i = (d'^{i-1} \circ s^i) + (s^{i+1} \circ d^i)$ とすればよい．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d^{i-1}"] \arrow[dl, "s^{i-1}"'] \arrow[d, shift right, "g^{i-1}"'] \arrow[d, shift left, "f^{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d^i"] \arrow[dl, "s^i"'] \arrow[d, shift right, "g^i"'] \arrow[d, shift left, "f^i"] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[dl, "s^{i+1}"'] \arrow[d, shift right, "g^{i+1}"'] \arrow[d, shift left, "f^{i+1}"] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d'^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "d'^i"] & B^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Figure.15　余鎖複体の射のホモトピー同値

問 1.

ホモトピー同値は同値関係である．

複体に加法的関手を施すことを考えよう．というのも，加法的関手 F に対して $\mathscr{A}$ の対象 A における導来関手 $R^iF(A)$ を対応させたいからである．前述の通り F が完全関手でなければ非輪状な（完全な）複体は，移した先ではもはや完全ではない．そこでのホモロジーを見ることで，どの程度関係が乱れたかを測りたい．そのためには移した先でも複体になっていることが必要である．

命題 6.2.8

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を加法的関手とする．複体 $A_\bullet \in \operatorname{Ch} A$ に対し；

$$\cdots \longrightarrow FA_{i+1} \xrightarrow{Fd_{i+1}} FA_i \xrightarrow{Fd_i} FA_{i-1} \xrightarrow{Fd_{i-1}} \cdots$$

は $\mathscr{B}$ の複体となる．これを $FA_\bullet$ とかく．

証明.

$A_\bullet$ が複体なので $d_i \circ d_{i+1} = 0$ である．F が加法的関手なので $F(d_i) \circ F(d_{i+1}) = F(d_i \circ d_{i+1}) = F(0) = 0$ である．ゆえに複体となる．（証明終）

よってホモロジーをとることができる．

問 2.

ホモトピー同値は加法的関手で保たれることを示せ．

しかし，そもそもは対象 A の情報を取りたかったのである．では A から定まる自然な複体についてコホモロジーを考えてみるのはどうだろうか．

命題 *6.2.9*

Abel 圏 $\mathscr{A}$ は $\mathrm{Ch}\,A$ の部分圏になる．

証明．

次の自然な鎖；

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \tag{$*$}$$

は複体になる．（証明終）

とはいえこの構成はあまりに自然すぎて，ここに加法的関手を施してもたかだか A の前後でしか完全性は乱れない（加法的関手は 0 を 0 に移すから）．そこで A を分解してみよう．とはいえその分解はあくまで A の代わりであるので，（移す前の）ホモロジーは $(*)$ と一致することを要求する．それを実現してくれるのがここから話す**射影分解**である（コホモロジーでは**入射的分解**を用いる）．

§3　射影分解と入射的分解

前節の最後に話したことを図式で書いてみよう；

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Figure.16

となる複体 $P_\bullet$ で，ホモロジーを取ると $H_0(P_\bullet) = \ker d_0/\mathrm{Im}\,d_1 = A, H_i(P_\bullet) = \ker d_i/\mathrm{Im}\,d_{i+1} = 0\ (i \geq 1)$ となるものをうまく取りたいということであった．高次のホモロジーが消えているような $P_\bullet$ を定義するために，まずはうまい P_i を取る必要がある．

定義 *6.3.1*（射影対象）

Abel 圏の対象 P で，任意の完全列；

$$A \xrightarrow{\varepsilon} A'' \longrightarrow 0$$

と $f : P \to A''$ が与えられたとき，$\varepsilon \circ \widetilde{f} = f$ となる $f : P \to A$ が必ず存在するような P を**射影対象** (projective object) という．

これは次の図式が可換になる $\widetilde{f}$ の存在といえる．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] & A'' \arrow[r] & 0 \\ P \arrow[u, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[ur, "f"'] & & \end{tikzcd}$$

Figure.17

射影加群 (injective module) の定義を思い出そう．一般の Abel 圏でも関手 $\mathrm{Hom}(N, -)$ は左完全関手になる．射影加群の定義はこの関手を完全にする M のことであったが，射影対象も $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, -)$ が（$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ に対して）完全になる関手のことである，といってよい．これを用いて A の都合の良い分解を与える．

定義 *6.3.2*（射影分解）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の対象 A について，入射的対象 P^i $(i \geq 0)$ がとれて；

$$\cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

が完全列であるとき，d_0 を自然な零射とする複体；

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

を $P_\bullet$ と書いて A の**射影分解** (projective resolution) という．

このとき $H_0(P_\bullet) = \ker d_0 / \mathrm{Im}\, d_1 = P_0/\ker\varepsilon = A$ となっていることに注意しよう．
どんな A でも射影分解が行えるとは限らないが，分解の存在を保証してくれる条件がある．

定義 *6.3.3*

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の任意の対象 A について，$\mathscr{A}$ の射影対象 P が存在して；

$$P \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

が完全になるような ε が存在するとき，$\mathscr{A}$ は**射影対象を十分に持つ** (has enough projectives) という．

射影対象を十分に持つなら A の射影分解が構成できることは演習問題としよう．

命題 *6.3.4*

A 加群の圏 $\mathrm{Mod}(A)$ は射影対象を十分に持つ．

証明.

A 加群 M について自由加群 F からの全射 $\varepsilon : F \to M$ が存在し，自由加群は射影加群（命題 1.7.3）なので題意は満たされる．（証明終）

次に入射的分解について考えよう．Figure.16 の余鎖複体バージョンを考えると，次のようになる；

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Figure.18

となる複体 $I^\bullet$ で，コホモロジーを取ると $H^0(I^\bullet) = \ker d^0 = A, H^i(I^\bullet) = \ker d^i/\mathrm{Im}\, d^{i-1} = 0\ (i \geq 1)$ となるものをうまく取りたい．

定義 *6.3.5*（入射的対象）

Abel 圏の対象 I で，任意の完全列；

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\ \varepsilon\ } A$$

と $f' : A' \to I$ が与えられたとき，$f \circ \varepsilon = f'$ となる $f : A \to I$ が必ず存在するような I を**入射的対象** (injective object) という．

これは次の図式が可換になる f の存在といえる．

$$\begin{tikzcd}
 & & I \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[ur, "f'"] & A \arrow[u, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

Figure.19

定義 *6.3.6*（入射的分解）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の対象 A について，入射的対象 $I^i\ (i \geq 0)$ がとれて；

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \varepsilon\ } I^0 \xrightarrow{\ d^0\ } I^1 \xrightarrow{\ d^1\ } \cdots$$

が完全列であるとき，複体；

$$0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{\ d^0\ } I^1 \xrightarrow{\ d^1\ } I^2 \xrightarrow{\ d^2\ } \cdots$$

を $I^\bullet$ と書いて，A の**入射的分解** (injective resolution) という．

同様に $H^0(I^\bullet) = \ker d^0 = \mathrm{Im}\, \varepsilon = A$ であることに注意しよう．また射影分解と同様に入射的対象を十分に持つなら入射的分解が必ずできる．

定義 *6.3.7*

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の任意の対象 A について $\mathscr{A}$ の入射的対象 I が存在して；

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ \varepsilon\ } I$$

が完全になるような ε が存在するとき，$\mathscr{A}$ は**入射的対象を十分に持つ** (has enough injectives) という．

A 加群の圏 $\mathrm{Mod}(A)$ が入射的対象を十分に持つことを示すには，射影加群の場合と違って多少手間がかかる．

定理 *6.3.8*（Baer's Criterion）

A 加群 I が入射的であることと，すべての A のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a} \to I$ が $A \to I$ に拡張できることは同値である．

証明.

片方の矢印は明らか．$M \subset N$ を A 加群とし，$\varphi : M \to I$ とする．ここで，Zorn の補題から N' を $M \subset N' \subset N$ なる加群のうちで φ を拡張できる極大のものとしてとれる．ここで $N' \neq N$ を仮定する．任意の $x \in N - N'$ をとる．ここで $\mathfrak{a} = \{a \in A \mid ax \in N'\}$ は A のイデアルとなる．このとき $\mathfrak{a} \to N'; a \mapsto ax$ と $\varphi' : N' \to A$ の合成は，仮定より $\psi : A \to I$ に持ち上がる．ここで；

$$\varphi'' : N' + Ax \to I : n' + an \mapsto \varphi'(n') + \psi(a)$$

はその構成から N' に制限すると φ に一致する．これは N' の極大性に矛盾．よって I は入射的となる．（証明終）

この定理から直ちに整域 A の商体 K は入射的 A 加群である．実際 $f : \mathfrak{a} \to K$ を A のイデアルからの A 準同型とすると，任意の $x, y \in \mathfrak{a}$ について $yf(x) = xf(y)$ が成り立つ．すなわち固定された 1 つの元 $x_0 \in \mathfrak{a}$ について $f(x) = x \cdot f(x_0)/x_0$ が常に成り立つ．よって $f' : A \to K; x \mapsto xf(x_0)/x_0$ が f の拡張になる．

A が PID という特殊な場合には入射加群はよりわかりやすい表示を持つ．

定義 *6.3.9*（可除加群）

A を環，M を A 加群とする．任意の $x \in M$ と $a \neq 0 \in A$ について $ay = x$ となる $y \in M$ が存在するような M を**可除加群** (divisible module) という．

命題 *6.3.10*

A を PID とする．A 加群 I が可除加群であることと，入射加群であることは同値．

証明.

$(\Longrightarrow)$

A のイデアルはすべて (a) の形をしている．このとき A 準同型 $f' : (a) \to I$ は $f(a)$ で決まる．I が可除なのである $y \in I$ が存在して $ay = f(a)$ とかけるから，$f : A \to I; x \mapsto xy$ が f' の延長になる．よって I は入射的．

$(\Longleftarrow)$

任意の $x \in I, a \neq 0 \in A$ をとる．$f' : (a) \to I; a \mapsto x$ は $f : A \to I$ に延びる．すると $1 \in A$ より $x = f(a) = af(1)$ となるので I は可除加群である．

（証明終）

この命題と商体の場合を組み合わせて $\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が入射的であることがわかる．この加群は以下の議論で黒子的な活躍をする．A 加群 M に対し T を $\mathbb{Z}$ 加群とすると，M の T 双対 $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, T)$ は $a \cdot f : x \mapsto f(ax)$ と定めることで A 加群になる．

補題 *6.3.11*

I を入射的 $\mathbb{Z}$ 加群とすると，射影加群 P に対しその I 双対 P^* は入射的である．

証明.

$M \subset N$ と $\varphi : M \to P^*$ をとると；

$$M \times P \to I; (m, y) \mapsto \varphi(m)(y)$$

が A 双線形になり，テンソル積の普遍性から $\psi : M \otimes P \to I$ がある．ここで P は射影加群なので, 平坦だから自然な $M \hookrightarrow N$ と id_P のテンソル $M \otimes P \to N \otimes P$ は単射．このとき I が入射的なので $\hat{\psi} : N \otimes P \to I$ が存在し，これにより；

$$\hat{\varphi} : N \to P^*; x \mapsto (y \mapsto \hat{\psi}(x \otimes y))$$

が定まるが，これは構成から $x \in M$ ならば $\hat{\psi}(x \otimes y) = \psi(x \otimes y) = \varphi(x)(y)$ となり $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x)$ となる．よって P^* は入射的である．（証明終）

補題 *6.3.12*

A 加群 M に対して，$T = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 双対 M^* の双対 M^{**} を考えると単射 $M \to M^{**}$ が存在する．

証明.

次の準同型；

$$i : M \to M^{**}; x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

が単射になる．$i(x) = 0$ と仮定しよう．このとき $x = 0$ を示したいので，$x \neq 0$ ならばある $f \in M^*$ が存在して $f(x) \neq 0$ を示せば良い．

x の M での位数が n ならば $f(x) = 1/n + \mathbb{Z}$, 位数が無限なら $f(x) = 1/2 + \mathbb{Z}$ と定義すると $\mathbb{Z}$ 準同型 $m\mathbb{Z} \to T$ が定まる．T の単射性からこれは $M \to T$ に持ち上がり $f(x) \neq 0$ である．（証明終）

定理 *6.3.13*

A 加群の圏は入射的対象を充分に持つ．

証明.

M を A 加群とする．M の T 双対 M^* は生成系をとると，自由加群 P からの全射 $s : P \to M^*$ が存在する．T 双対をとって $s^* : M^{**} \to P^*; \varphi \mapsto \varphi \circ s$ を考える．これは s が全射なので単射である．上の補題たちより P^* は入射的で，単射 $M \hookrightarrow M^{**}$ が存在するので，$M \hookrightarrow P^* = I$ が存在する．（証明終）

§4　導来関手

いよいよ導来関手の定義である．

定義 *6.4.1*（左導来関手）

$\mathscr{A},\mathscr{B}$ を Abel 圏とし，対象 $A \in \mathscr{A}$ と加法的右完全関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を考える．A の射影分解 $P_\bullet$ について，$FP_\bullet$ も複体になる．これに対する $\mathscr{B}$ の中でのホモロジー $H_i(FP_\bullet)$ を $L_iF(A)$ とかいて，L_iF を F の A における i 次**左導来関手** (left derived functor) という．

左導来関手は誤植ではない． 右完全関手によって，複体（左に伸びる鎖）が左に伸びるホモロジーの列を作る（定理 6.4.9 をみよ）から左導来関手と呼ぶ．

この定義では $P_\bullet$ を無視して $L_iF(A)$ と書いているのだから, 射影分解のとり方によらないことを証明する必要がある（命題 6.4.3）．つまり $J_\bullet$ を A の別の射影分解とすると，F で送ったときにホモロジーが一致せねばならない．このことを**擬同型**であるという．

定義 *6.4.2*（擬同型）

複体 $A_\bullet, B_\bullet$ に対し，各 i について $H_i(A_\bullet) = H_i(B_\bullet)$ であるとき $A_\bullet$ と $B_\bullet$ は**擬同型** (quasi-isomorphic) であるという．

この用語は余鎖複体 $A^\bullet, B^\bullet$ についてコホモロジーが一致するときにも用いられる．

命題 *6.4.3*

$P_\bullet, Q_\bullet$ を A の射影分解とすると，加法的右完全関手 F について $FP_\bullet$ と $FQ_\bullet$ は擬同型である．

証明．

まず，複体の射 $f_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet, g_\bullet : Q_\bullet \to P_\bullet$ を構成しよう．

全射 $\varepsilon : P_0 \to A, \varepsilon' : Q_0 \to A$ を考える．P_0 は射影的なので，ε' に対して $f_0 : P_0 \to Q_0$ が存在する．次に $d_1' \circ f_1 = f_0 \circ d_1$ となるような $f_1 : P_1 \to Q_1$ を作りたい．

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[dd, dashed, "f_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[dd, dashed, "f_1"] & P_0 \arrow[dd, "f_0"] \arrow[dr, "\varepsilon"] & & \\
& & & & A \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d_2'"] & Q_1 \arrow[r, "d_1'"] & Q_0 \arrow[ur, "\varepsilon'"] & &
\end{tikzcd}$$

Figure.20

ここで，$\mathrm{Im}(f_0 \circ d_1) \subset \mathrm{Im}\, d_1'$ であるので次の図式を考えることができ，P_1 の射影性から f_1 がとれる．可換性は構成から明らか．

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[d, dashed, "f_1"] \arrow[dr, "f_0 \circ d_1"] & & \\
Q_1 \arrow[r, "d_1'"] & \mathrm{Im}\, d_1' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Figure.21

これを続けることで $f_\bullet$ が構成され，$g_\bullet$ も同様に作ることができる．

関手 F を施してホモロジーをとることで，$H_i(Fg_\bullet), H_i(Ff_\bullet)$ が同型射であることを示せばよい．ここで；

$$H_i(Fg_\bullet) \circ H_i(Ff_\bullet) = H_i(F(g_\bullet \circ f_\bullet))$$

であるので，$F(g_\bullet \circ f_\bullet)$ と $F(\mathrm{id}_{P_\bullet}), F(f_\bullet \circ g_\bullet)$ と $F(\mathrm{id}_{Q_\bullet})$ がホモトピックであることを示せばよい．$g_\bullet \circ f_\bullet$ と $\mathrm{id}_{P_\bullet}$ がホモトピックであることを示そう．

$h_n = \mathrm{id}_{P_n} - (f_n \circ g_n)$ とおき，$d_{n+1} \circ s_n = h_n - (s_{n-1} \circ d_n)$ となる $\{s_n\}$ を帰納的に作ろう．

Step 1. $n = 0$ のとき．

$\mathrm{Im}\, h_0 \subset \mathrm{Im}\, d_1 = \ker \varepsilon$ なので，P_1 の射影性から次の図式のように $s_0 : P_0 \to P_1$ が $d_1 \circ s_0 = h_0$ となるように作れる．

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dashed, "s_0"'] \arrow[d, "h_0"] & \\ P_1 \arrow[r, "d_1"] & \mathrm{Im}\, d_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Figure.22

Step 2. $n = 1$ のとき．

$\mathrm{Im}(h_1 - s_0 \circ d_1) \subset \mathrm{Im}\, d_2 = \ker d_1$ より，P_2 の射影性から次の図式；

$$\begin{tikzcd} & P_1 \arrow[dl, dashed, "s_1"'] \arrow[d, "h_1-(s_0\circ d_1)"] & \\ P_2 \arrow[r, "d_2"] & \mathrm{Im}\, d_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Figure.23

のように $s_1 : P_1 \to P_2$ を $d_2 \circ s_1 = h_1 - (s_0 \circ d_1)$ となるようにできる．

Step 3. $n-1$ まで正しいとき．

同様に $\mathrm{Im}(h_n - (s_{n-1} \circ d_n)) \subset \mathrm{Im}\, d_{n+1} = \ker d_n$ なので，P_{n+1} の射影性から s_n が定まる．

よって $g_\bullet \circ f_\bullet$ と $\mathrm{id}_{P_\bullet}$ はホモトピックで，$f_\bullet \circ g_\bullet$ と $\mathrm{id}_{Q_\bullet}$ についても同様．以上から $H_i(FI_\bullet) = H_i(FJ_\bullet)$ であることがわかった．（証明終）

これにより，左導来関手は射影分解のとり方によらない．次に右導来関手を考えよう．

定義 *6.4.4*（右導来関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，対象 $A \in \mathscr{A}$ と加法的左完全関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を考える．A の入射的分解 $I^\bullet$ について，$FI^\bullet$ も（余鎖）複体になる．これに対する $\mathscr{B}$ の中でのコホモロジー $H^i(FI^\bullet)$ を $R^iF(A)$ とかいて，F の A における i 次**右導来関手** (right derived functor) という．

右導来関手も入射的分解のとり方によらない．

命題 *6.4.5*

$I^\bullet, J^\bullet$ を A の入射的分解とすると，$FI^\bullet$ と $FJ^\bullet$ は擬同型である．

証明．

単射 $\varepsilon : A \to I^0, \varepsilon' : A \to J^0$ を考える．このとき J^0 が入射的対象なので $f^0 : I^0 \to J^0$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
 & & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, dashed, "f^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & & & \\
 & & J^0 \arrow[r, "d'^0"] & J^1 \arrow[r, "d'^1"] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Figure.24

$\ker d^0 \subset \ker(d'^0 \circ f^0)$（たしかめよ）であるので，$\varphi : \operatorname{Im} d^0 \to \operatorname{Im}(d' \circ f^0) \subset J^1$ が $\varphi \circ d^0 = d'^0 \circ f^0$ となるように定まる．これを J^1 の入射性から持ち上げて f^1 を得る．

$$
\begin{tikzcd}
I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[drr, bend right, "d'^0 \circ f^0"'] & \operatorname{Im} d^0 \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"] & I^1 \arrow[d, dashed, "f^1"] \\
 & & J^1
\end{tikzcd}
$$

Figure.25

これを繰り返して複体の射 $f^\bullet$ を作ることができる．$g^\bullet$ も同様.

$H^i(Fg^\bullet), H^i(Ff^\bullet)$ が同型射であることを示せばよい．左導来関手のときと同様に $g^\bullet \circ f^\bullet$ と $\mathrm{id}_{I^\bullet}$ がホモトピックであることを示そう．

$h_n = \mathrm{id}_{I^n} - (g^n \circ f^n)$ とおき，$s^n \circ d^{n-1} = h_{n-1} - (d^{n-1} \circ s^{n-1})$ となるような $\{s^n\}$ を帰納的に作ろう．左導来関手と違い $n = 1$ からの議論なことに注意する．

まず $n = 1$ のとき，$\ker d^0 \subset \ker h^0$ なので $\varphi : \operatorname{Im} d^0 \to \operatorname{Im} h^0 \subset I$ が $\varphi \circ d^0 = h^0$ となるように定まる．これを I^1 の入射性から持ち上げて s^1 を得る．

$$
\begin{tikzcd}
I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "h^0"] & \operatorname{Im} d^0 \arrow[r] \arrow[dl, "\varphi"] & I^1 \arrow[dll, dashed, bend left, "s^1"] \\
I^0 & &
\end{tikzcd}
$$

Figure.26

次に s^{n-1} まで存在するとする．このとき $s^{n-1} \circ d^{n-2} = h_{n-2} - (d^{n-3} \circ s^{n-2})$ であることに注意すると，$\ker d^{n-2} \subset \ker(h_{n-1} - (d^{n-2} \circ s^{n-1}))$ であることが確かめられる．よって次の図式から s^n の存在がわかる．

$$
\begin{tikzcd}
I^{n-1} \arrow[r, "d^{n-1}"] \arrow[d, "h_{n-1} - (d^{n-2} \circ s^{n-1})"'] & \operatorname{Im} d^{n-1} \arrow[r] \arrow[dl] & I^n \arrow[dll, dashed, bend left, "s^n"] \\
I^{n-1} & &
\end{tikzcd}
$$

Figure.27

これを繰り返して $\mathrm{id}_{I^\bullet}$ と $g^\bullet \circ f^\bullet$ がホモトピックであることを得る．よって $H^i(FI^\bullet) = H^i(FJ^\bullet)$ であることがわかった．（証明終）

ここでは共変関手のみ考えていたが，加法的反変右完全関手は入射分解から左導来関手を導き，加法的反変左完全関手は射影分解から右導来関手を導く．以後証明は共変関手のことしか考えない．また，これらの証明

における $f_\bullet, f^\bullet$ の構成を真似することで次の補題を得る.

補題 6.4.6

任意の射 $\varphi : A \to B$ と A, B の射影分解 $P_\bullet, Q_\bullet$ について, 複体の射 $\varphi_\bullet : P_\bullet \to Q_\bullet$ を次の図式が可換になるようにとれる（入射分解についても同様）;

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, dashed, "\varphi_2"] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, dashed, "\varphi_1"] & P_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "\varphi_0"] & A \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr] & \\
& & & & & 0 \\
\cdots \arrow[r] & Q_2 \arrow[r, "d'_2"] & Q_1 \arrow[r, "d'_1"] & Q_0 \arrow[r, "\varepsilon'"] & B \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

次に，複体の完全列について H_n を施すとどうなるのかを観察しよう.

命題 6.4.7（ホモロジー長完全列と連結射の存在）

複体の完全列 $0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{\varphi_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{\psi_\bullet} C_\bullet \longrightarrow 0$ について，任意の n について $\partial_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet)$ が存在して；

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A_\bullet) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(B_\bullet) \xrightarrow{\psi_n} H_n(C_\bullet) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

$$\xrightarrow{\partial_1} H_0(A_\bullet) \xrightarrow{\varphi_0} H_0(B_\bullet) \xrightarrow{\psi_0} H_0(C_\bullet) \longrightarrow 0$$

が完全.

この長完全列を $0 \longrightarrow A_\bullet \longrightarrow B_\bullet \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow 0$ に伴うホモロジー長完全列 (long exact sequence of homologies) といい， ∂_n を連結射 (connecting morphism) という.

証明.

Step 1. $A_\bullet$ において，$d_n : A_n \to A_{n-1}$ に対して；

$$\widetilde{d_n} : \mathrm{Coker}\, d_{n+1} \to \ker d_{n-1}; x + \mathrm{Im}\, d_{n+1} \mapsto d_n(x)$$

と定めるとこれは well-defined である．このとき；

$$0 \longrightarrow \ker \widetilde{d_n} \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_{n+1} \xrightarrow{\widetilde{d_n}} \ker d_{n-1} \longrightarrow \mathrm{Coker}\, \widetilde{d_n} \longrightarrow 0$$

は完全で，構成から $\ker \widetilde{d_n} = \ker d_n / \mathrm{Im}\, d_{n+1} = H_n(A_\bullet), \mathrm{Coker}\, \widetilde{d_n} = \ker / d_{n-1} / \mathrm{Im}\, \widetilde{d_n} = H_{n-1}(A_\bullet)$ なので，完全列；

$$0 \longrightarrow H_n(A_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Coker}\, d_{n+1} \xrightarrow{\widetilde{d_n}} \ker d_{n-1} \longrightarrow H_{n-1}(A_\bullet) \longrightarrow 0$$

が得られた.

Step 2. それぞれの複体の境界作用素を $d_{n,1}, d_{n,2}, d_{n,3}$ とおくと，蛇の補題から次の可換図式がある.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker d_{n,1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_{n,2} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_{n,3} \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners] & \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d] & B_n \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "\psi_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \operatorname{Coker} d_{n-1,1} \arrow[r] & \operatorname{Coker} d_{n-2,2} \arrow[r] & \operatorname{Coker} d_{n-1,3} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

特に；

$$\operatorname{Coker} d_{n+1,1} \longrightarrow \operatorname{Coker} d_{n+1,2} \longrightarrow \operatorname{Coker} d_{n+1,3} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \ker d_{n-1,1} \longrightarrow \ker d_{n-1,2} \longrightarrow \ker d_{n-1,3}$$

が完全である．すると再び蛇の補題と Step.1 から；

$$
\begin{tikzcd}
 & H_n(A_\bullet) \arrow[r, "\varphi_n"] \arrow[d] & H_n(B_\bullet) \arrow[r, "\psi_n"] \arrow[d] & H_n(C_\bullet) \arrow[d] \arrow[dddll, rounded corners, "\partial_n"] & \\
 & \operatorname{Coker} d_{n+1,1} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d_{n,1}}"] & \operatorname{Coker} d_{n+1,2} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d_{n,2}}"] & \operatorname{Coker} d_{n+1,3} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{d_{n,3}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_{n-1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_{n-1,2} \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_{n-1,3} \arrow[d] & \\
 & H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[r, "\varphi_{n-1}"] & H_{n-1}(B_\bullet) \arrow[r, "\psi_{n-1}"] & H_{n-1}(C_\bullet) &
\end{tikzcd}
$$

が得られる．

（証明終）

連結射 ∂_n は記号的には $\varphi_{n-1}^{-1} \circ d_{n,2} \circ \psi_n^{-1}$ と書くことができることに注意しよう．

命題 6.4.8（連結射の可換性）

各行が完全であるような複体の可換図式；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_\bullet \arrow[r, "\varphi_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"] & B_\bullet \arrow[r, "\psi_\bullet"] \arrow[d, "g_\bullet"] & C_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h_\bullet"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_\bullet \arrow[r, "\varphi'_\bullet"] & B'_\bullet \arrow[r, "\psi'_\bullet"] & C'_\bullet \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

について，各 n と連結射 $\partial_n : H_n(C_\bullet) \to H_{n-1}(A_\bullet), \delta_n : H_n(C'_\bullet) \to H_{n-1}(A'_\bullet)$ に対して；

$$\begin{tikzcd}
H_n(C_\bullet) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "H_n(h_n)"] & H_{n-1}(A_\bullet) \arrow[d, "H_n(f_n)"] \\
H_n(C'_\bullet) \arrow[r, "\delta_n"] & H_{n-1}(A'_\bullet)
\end{tikzcd}$$

が可換である．

証明.

$\partial_n = \varphi_{n-1}^{-1} \circ d_{n,2} \circ \psi_n^{-1}, \delta_n = {\varphi'_{n-1}}^{-1} \circ d_{n,2}' \circ {\psi'_n}^{-1}$ に注意すると，$\ker d_{n,3}/\mathrm{Im}\, d_{n+1,3}$ 上で ${\varphi'_{n-1}}^{-1} \circ d'_{n,2} \circ {\psi'_n}^{-1} \circ h_n = f_{n-1} \circ \varphi_{n-1}^{-1} \circ d_{n,2} \circ \psi_n^{-1}$ に帰着するが，これは次の図式を追うことでわかる．

$$\begin{tikzcd}
& A_n \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & B_n \arrow[rr, "\psi_n"] \arrow[dl, "d_{n,2}"'] \arrow[dd] & & C_n \arrow[dl] \arrow[dd, "h_n"] \\
A_{n-1} \arrow[rr, "\varphi_{n-1}"] \arrow[dd, "f_{n-1}"] & & B_{n-1} \arrow[rr] \arrow[dd] & & C_{n-1} \arrow[dd] & \\
& A'_n \arrow[rr] \arrow[dl] & & B'_n \arrow[rr, "\psi'_n"] \arrow[dl, "d'_{n,2}"] & & C'_n \arrow[dl] \\
A'_{n-1} \arrow[rr, "\varphi'_{n-1}"] & & B'_{n-1} \arrow[rr] & & C'_{n-1} &
\end{tikzcd}$$

Figure.28

（証明終）

以上 2 つの結果はコホモロジーについても同様に成り立ち，コホモロジー長完全系列と連結射 ∂^n の存在と可換性がいえる．

定理 6.4.9（左導来関手の特徴付け）

F を $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ の加法的右完全関手とする．このとき F の左導来関手 L_iF に対し次が成り立つ．

(LDF1) $L_0F \cong F$ である．

(LDF2) $\mathscr{A}$ の完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0$ に対し，各 $i \geq 0$ について連結射 $\partial_{i+1}: L_{i+1}F(A_3) \to L_iF(A_1)$ が存在して；

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} L_nF(A_1) \xrightarrow{L_nF(\varphi)} L_nF(A_2) \xrightarrow{L_nF(\psi)} L_nF(A_3)$$

$$\xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

$$\xrightarrow{\partial_2} L_1F(A_1) \xrightarrow{L_1F(\varphi)} L_1F(A_2) \xrightarrow{L_1F(\psi)} L_1F(A_3)$$

$$\xrightarrow{\partial_1} F(A_1) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A_2) \xrightarrow{F(\psi)} F(A_3) \longrightarrow 0$$

が $\mathscr{B}$ の完全列になる．

(LDF3) $\mathscr{A}$ の可換図式；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & A_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\lambda"] & B_2 \arrow[r, "\mu"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して，下の列についての連結射を $\delta_i : L_{i+1}F(B_3) \to L_iF(B_1)$ とすると，図式；

$$\begin{tikzcd}
L_{i+1}F(A_3) \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "L_{i+1}F(h)"] & L_iF(A_1) \arrow[d, "L_iF(f)"] \\
L_{i+1}F(B_3) \arrow[r, "\delta_i"] & L_iF(B_1)
\end{tikzcd}$$

が可換である．

(LDF4) P を射影的対象とすると，$i > 0$ について $L_iF(P) = 0$ である．

逆に, $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を加法的右完全な関手とする．このとき，$T_0, T_1, \cdots$ という加法的な関手の列が；

(i) 同型な自然変換 $T^0 \cong F$ がある．

(ii) $\mathscr{A}$ の完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0$ について $\mathscr{B}$ の射 $\partial_n : T_{n+1}(A_3) \to T_n(A_1)$ が存在して；

$$\cdots \longrightarrow T_{n+1}(A_3) \xrightarrow{\partial_n} T_n(A_1) \longrightarrow T_n(A_2) \longrightarrow T_n(A_1) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_1} F(A_1) \longrightarrow F(A_2) \longrightarrow F(A_3) \longrightarrow 0$$

が完全．

(iii) $\mathscr{A}$ での可換図式；

$$\begin{CD}
0 @>>> A_1 @>>> A_2 @>>> A_3 @>>> 0\\
@. @VVV @VVV @VVV @.\\
0 @>>> B_1 @>>> B_2 @>>> B_3 @>>> 0
\end{CD}$$

について，$\mathscr{B}$ 内で；

$$\begin{CD}
T_{i+1}(A_3) @>{\partial_i}>> T_i(A_1)\\
@VVV @VVV\\
T_{i+1}(B_3) @>{\delta_i}>> T_i(B_1)
\end{CD}$$

が可換.

(iv) $\mathscr{A}$ の射影的対象 P について $i \geq 1$ について $T_i(P) = 0$.

を満たすとき，T_i を F の左導来関手と定義することができる.

定理 *6.4.9* の証明.

(LDF1) A の射影分解 $P_\bullet$ について， $L_0F(A) = H_0(FP_\bullet) = \ker F(d_0)/\operatorname{Im} F(d_1) = F(P_0)/\operatorname{Im} F(d_1)$ であるが，F は右完全なので $F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(A) \longrightarrow 0$ は完全．よって $\operatorname{Im} F(d_1) = \ker F(d_1)$ であるので，$L_0F(A) = F(P_0)/\ker F(d_1) = F(A)$ である.

(LDF2) A_1, A_2, A_3 の射影分解からなる複体の完全列で，分裂しているものを作りたい（これ自身は Horseshoe の補題と呼ばれる）． A_1, A_3 の射影分解の初項を $P_{0,1}, P_{0,3}$ とする．ここで $P_{0,2} = P_{0,1} \oplus P_{0,3}$ とおくと，これは射影的である．また自然な単射，全射があって次の図式が考えられる；

$$\begin{tikzcd}
 & P_{0,1} \arrow[r, shift left, "\iota_0"] \arrow[d, "\varepsilon_1"] & P_{0,2} \arrow[l, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift left, "\pi_0"] \arrow[d, dashed, "\varepsilon_2"] & P_{0,3} \arrow[l, shift left, "i_0"] \arrow[d, "\varepsilon_3"] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0\\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figure.29

これが可換になるような全射 $\varepsilon_2 : P_{0,2} \to A_2$ を作りたい．まず $P_{0,2}$ の射影性から，$\varepsilon_3 \circ \pi_0 : P_{0,2} \to A_3$ の拡張 $\varepsilon_2' : P_{0,2} \to A_2$ が定まる．ここで $\varepsilon_2 = \varphi \circ \varepsilon_1 \circ p_0 + \varepsilon_2'$ とおくと，これは図式を可換にする全射となる（ε_2' だけみていると $P_{0,3}$ の情報はでてくるが $P_{0,1}$ の情報はでてこないので，そこを補おうという気持ち）．すると蛇の補題から；

$$0 \longrightarrow \ker \varepsilon_1 \longrightarrow \ker \varepsilon_2 \longrightarrow \ker \varepsilon_3 \longrightarrow 0$$

は完全．ここで A_1, A_3 の射影分解について境界作用素をそれぞれ $d_{i,1}, d_{i,3}$ としたとき $\ker \varepsilon_1 = \operatorname{Im} d_{1,1}, \ker \varepsilon_3 = \operatorname{Im} d_{1,3}$ であるので，$P_{1,2} = P_{1,1} \oplus P_{1,3}$ とおくことで次の可換図式がある.

$$\begin{tikzcd}
 & P_{1,1} \arrow[r, shift left, "\iota_1"] \arrow[d, "d_{1,1}"] & P_{1,2} \arrow[l, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[d, dashed, "d_{1,2}"] & P_{1,3} \arrow[l, shift left, "i_1"] \arrow[d, "d_{1,3}"] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Im} d_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \ker \varepsilon_2 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} d_{1,3} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figure.30

これは Figure.29 と全く同様にして全射 $d_{1,2}$ の存在を導く．ゆえに，A_1, A_2, A_3 の射影分解 $P_{\bullet,1}, P_{\bullet,2}, P_{\bullet,3}$ からなる複体の完全列で，分裂しているものができる．すると定理 6.1.6 により F を施しても完全なので，命題 6.4.7 を適用することができる．

(LDF3) 補題 6.4.6 と (LDF1) の証明から，それぞれの射影分解からなる複体の完全列で，行は分裂しているものができる．これに F と命題 6.4.8 を施して求める結果を得る．

(LDF4) $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \longrightarrow 0$ 自体が射影分解となることから明らか．

（証明終）

右導来関手についても同様に得られる．証明は省略するが，結果だけ述べておこう．

定理 *6.4.10*（右導来関手の特徴付け）

F を $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ の加法的左完全関手とする．このとき F の導来関手 R^iF に対し；

(RDF1) $R^0F \cong F$ である．

(RDF2) $\mathscr{A}$ の完全列 $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\varphi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0$ に対し，各 $i \geq 0$ について連結射 ∂^i : $R^iF(A_3) \to R^{i+1}F(A_1)$ が存在して；

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow F(A_1) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A_2) \xrightarrow{F(\psi)} F(A_3) \xrightarrow{\partial^0} \cdots \\
\xrightarrow{\partial^{i-1}} R^iF(A_1) \xrightarrow{R^iF(\varphi)} R^iF(A_2) \xrightarrow{R^iF(\psi)} R^iF(A_3) \xrightarrow{\partial^i} \cdots
\end{aligned}$$

が $\mathscr{B}$ の完全列になる．

(RDF3) $\mathscr{A}$ の可換図式；

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] & A_2 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\lambda"] & B_2 \arrow[r, "\mu"] & B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

に対して，下の列についての連結射を $\delta^i : R^iF(B_3) \to R^{i+1}F(B_1)$ とすると，図式；

$$\begin{tikzcd}
R^iF(A_3) \arrow[r, "\partial^i"] \arrow[d, "R^iF(h)"] & R^{i+1}F(A_1) \arrow[d, "R^{i+1}F(f)"] \\
R^iF(B_3) \arrow[r, "\delta^i"] & R^{i+1}F(B_1)
\end{tikzcd}$$

が可換である．

(RDF4) I を入射的対象とすると，$i > 0$ について $R^iF(I) = 0$ である．

§5　二重複体

導来関手の例として Tor, Ext を定義したいのだが，計算の必要性から二重複体についての知識が必要となる．

定義 *6.5.1*（二重複体）

Abel 圏 $\mathscr{A}$ の対象の族 $\{X_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{N}}$ と，射 $d'_{p,q} : X_{p,q} \to X_{p-1,q}, d''_{p,q} : X_{p,q} \to X_{p,q-1}$ の族 $\{d'_{p,q}\}, \{d''_{p,q}\}$ について；

$$d'_{p-1,q} \circ d'_{p,q} = 0, \quad d''_{p,q-1} \circ d''_{p,q} = 0, \quad d''_{p-1,q} \circ d'_{p,q} + d'_{p,q-1} \circ d''_{p,q} = 0$$

が成り立つとき，これらをまとめて $X_{\bullet,*}$ とかいて二重複体 (double chain complex) という．

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X_{p+1,q+1} \arrow[r, "d'_{p+1,q+1}"] \arrow[d, "d''_{p+1,q+1}"] & X_{p,q+1} \arrow[r, "d'_{p,q+1}"] \arrow[d, "d''_{p,q+1}"] & X_{p-1,q+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{p-1,q+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_{p+1,q} \arrow[r, "d'_{p+1,q}"] \arrow[d, "d''_{p+1,q}"] & X_{p,q} \arrow[r, "d'_{p,q}"] \arrow[d, "d''_{p,q}"] & X_{p-1,q} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{p-1,q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_{p+1,q-1} \arrow[r, "d'_{p+1,q-1}"] \arrow[d] & X_{p,q-1} \arrow[r, "d'_{p,q-1}"] \arrow[d] & X_{p-1,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Figure.31　二重複体

双対的に二重余鎖複体についても同様の定義ができる．

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1,q-1} \arrow[r, "d'^{p-1,q-1}"] \arrow[d, "d''^{p-1,q-1}"] & X^{p,q-1} \arrow[r, "d'^{p,q-1}"] \arrow[d, "d''^{p,q-1}"] & X^{p+1,q-1} \arrow[r] \arrow[d, "d''^{p+1,q-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1,q} \arrow[r, "d'^{p-1,q}"] \arrow[d, "d''^{p-1,q}"] & X^{p,q} \arrow[r, "d'^{p,q}"] \arrow[d, "d''^{p,q}"] & X^{p+1,q} \arrow[r] \arrow[d, "d''^{p+1,q}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{p-1,q+1} \arrow[r, "d'^{p-1,q+1}"] \arrow[d] & X^{p,q-1} \arrow[r, "d'^{p,q-1}"] \arrow[d] & X^{p+1,q-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Figure.32　二重余鎖複体

本によって射が満たすべき性質が異なることに注意しておく．ここでは河田 (1976)，志甫 (2016) に合わせ

た．加藤 (2003) では Figure.31 が可換であることを要請している．加藤 (2003) のように；

$$d'_{p-1,q} \circ d'_{p,q} = 0, \quad d''_{p,q-1} \circ d''_{p,q} = 0, \quad d''_{p-1,q} \circ d'_{p,q} = d'_{p,q-1} \circ d''_{p,q}$$

を仮定すると，これは複体の複体となるので $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ch}(\mathscr{A}))$ の対象となる．一般にこれは二重複体にはならないが，$d''_{p,q}$ を $-d''_{p,q}$ に変えることにより二重複体が得られる．この対応は $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ch}(\mathscr{A}))$ と二重複体の圏の間の圏同値を与える．

複体を二重複体とみなす自然な方法は（２つ）あることがすぐにわかるが，二重複体から複体を得ることもできる．以下ではとりあえず３通り紹介しよう．

定義 *6.5.2*（全複体）

二重複体 $X_{\bullet,*}$ について；

$$T_n = \bigoplus_{p+q=n} X_{p,q}, \quad d_n = \sum_{p+q=n} (d'_{p,q} + d''_{p,q}) : T_n \to T_{n-1}$$

と定めると $T_\bullet$ は複体となる．これを $X_{\bullet,*}$ の**全複体** (total chain complex) という．

また，各行，列からも複体が作られる．

定義 *6.5.3*

二重複体 $X_{\bullet,*}$ について；

$$A_q = \mathrm{Coker}\, d'_{1,q}, \quad B_p = \mathrm{Coker}\, d''_{p,1}$$

とおくと，補題 6.1.1 より定まる $d^A_q : A_q \to A_{q-1}, d^B_p : P_p \to B_{p-1}$ によって $\{A_q, d^A_q\}, \{B_p, d^B_p\}$ は複体となる．これを $X_{\bullet,*}$ の**辺複体** (bordered chain complex) という．

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
 & & & \cdots \arrow[r] & X_{1,q} \arrow[r, "d'_{1,q}"] \arrow[d, "d''_{1,q}"] & X_{0,q} \arrow[r, "\varepsilon'_q"] \arrow[d, "d''_{0,q}"] & A_q \arrow[r] \arrow[d, "d^A_q"] & 0 \\
 & & & \cdots \arrow[r] & X_{1,q-1} \arrow[r, "d'_{1,q-1}"] \arrow[d] & X_{0,q-1} \arrow[r, "\varepsilon'_{q-1}"] \arrow[d] & A_{q-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & X_{p,1} \arrow[r, "d'_{p,1}"] \arrow[d, "d''_{p,1}"] & X_{p-1,1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{p-1,1}"] & \cdots \arrow[r] & X_{1,1} \arrow[r, "d'_{1,1}"] \arrow[d, "d''_{1,1}"] & X_{0,1} \arrow[r, "\varepsilon'_1"] \arrow[d, "d''_{0,1}"] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "d^A_1"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & X_{p,0} \arrow[r, "d'_{p,0}"] \arrow[d, "\varepsilon_q''"] & X_{p-1,0} \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon_{p-1}''"] & \cdots \arrow[r] & X_{1,0} \arrow[r, "d'_{1,0}"] \arrow[d, "\varepsilon''_1"] & X_{0,0} \arrow[r, "\varepsilon'_0"] \arrow[d, "\varepsilon''_0"] & A_0 \arrow[r] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & B_p \arrow[r, "d^B_p"] \arrow[d] & B_{p-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "d^B_1"] \arrow[d] & B_0 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Figure.33

定理 6.5.4

二重複体 $X_{\bullet,*}$ の全複体 $T_\bullet$，辺複体 $A_\bullet, B_\bullet$ について，各 p, q に対して次の列；

$$\cdots \xrightarrow{d'_{2,q}} X_{1,q} \xrightarrow{d'_{1,q}} X_{0,q} \xrightarrow{\varepsilon'_q} A_q \longrightarrow 0\ , \qquad \cdots \xrightarrow{d''_{p,2}} X_{p,1} \xrightarrow{d''_{p,1}} X_{p,0} \xrightarrow{\varepsilon''_q} B_q \longrightarrow 0$$

が完全であるならば，ホモロジーについて $H_n(T_\bullet) = H_n(A_\bullet) = H_n(B_\bullet)$ が成り立つ.

証明.

全複体 $T_\bullet$，辺複体 $A_\bullet, B_\bullet$ の間に複体の射；

$$\varphi_n : T_n \to A_n; (x_{p,q})_{p+q=n} \mapsto \varepsilon'_n(x_{0,n}), \quad \psi_n : T_n \to B_n; (x_{p,q})_{p+q=n} \mapsto \varepsilon''_n(x_{n,0})$$

が定義できる．例えば，φ について $\varphi_{n+1} \circ d_{n+1} = d^A_{n+1} \circ \varphi_n$ を確かめることは簡単である．ψ も同様.

$H_n(\varphi_n) : H_n(T_\bullet) \to H_n(A_\bullet)$ が全単射であることを示そう．$H_n(\psi_n)$ についても同様に示すことができる.

Step 1. 単射であること.

$(x_{p,q})_{p+q=n} \in \ker d_n$ に対して，$\varepsilon'_n(x_{0,n}) \in \operatorname{Im} d^A_{n+1}$ ならば $(x_{p,q}) \in \operatorname{Im} d_{n+1}$ を示せばよい．まず ε'_{n+1} は全射なので，ある $x_{0,n+1} \in X_{0,n+1}$ が存在して $x_{0,n} - d''_{0,n+1}(x_{0,n+1}) \in \ker \varepsilon'_n = \operatorname{Im} d_{1,n}$ である．ゆえに，ある $x_{1,n} \in X_{1,n}$ が存在して $x_{0,n} = d'_{1,n}(x_{1,n}) + d''_{0,n+1}(x_{0,n+1})$ である.

次に，$x_{1,n-1}$ について，仮定から $d'_{1,n-1}(x_{1,n-1}) + d''_{0,n}(x_{0,n}) = 0$ である．すると $x_{0,n} = d'_{1,n}(x_{1,n}) + d''_{0,n+1}(x_{0,n+1})$ であったので；

$$d'_{1,n-1}(x_{1,n-1}) + d''_{0,n}(x_{0,n}) = d'_{1,n-1}(x_{1,n-1}) + d'_{1,n-1}(d''_{1,n}(x_{1,n})) = 0$$

となる．すなわち $x_{1,n-1} - d''_{1,n}(x_{1,n}) \in \ker d'_{1,n-1} = \operatorname{Im} d'_{2,n-1}$ であるから，$x_{1,n-1} = d''_{1,n}(x_{1,n}) + d'_{2,n-1}(x_{2,n-1})$ となる $x_{2,n-1} \in X_{2,n-1}$ がみつかる.

以後帰納的に $x_{n,0}$ まで続けることで $(x_{p,q}) \in \operatorname{Im} d_{n+1}$ を示すことができる.

Step 2. 全射であること.

任意の $x_n + \operatorname{Im} d^A_{n+1} \in \ker d^A_n$ について，$(x_{p+q})_{p+q=n}$ を $(x_{p+q}) \in \ker d_n, \varepsilon'_n(x_{0,n}) = x_n$ となるようにとりたい.

まず ε'_n は全射なので，ある $x_{0,n}$ で $\varepsilon'_n(x_{0,n}) = x_n$ となるものが存在する．次に $d'_{1,n-1}(x_{1,n-1}) + d''_{0,n}(x_{0,n}) = 0$ となる $x_{1,n-1}$ の存在を言いたいので，$-d''_{0,n}(x_{0,n}) \in \operatorname{Im} d'_{1,n-1} = \ker \varepsilon'_{n-1}$ を示せばよいが，d^A_n の定義から $\varepsilon'_{n-1} \circ d''_{0,n} = d^A_n \circ \varepsilon'_n$ であるので，$\varepsilon'_n(x_{0,n}) = x_n \in \ker d_A$ より成り立っていることがわかる．以後帰納的に続けることで条件を満たす $(x_{p,q})_{p+q=n}$ を構成することができる.

（証明終）

全複体，辺複体の定義と定理 6.5.4 は余鎖複体についても双対的に行うことができる.

満を持して Tor と Ext の登場である.

定義 6.5.5（Tor 関手）

加群 M について，関手 $M \otimes -$ は右完全である．これによる左導来関手を $\operatorname{Tor}_n(M, -)$ とかく．これを Tor 関手 (Tor functor, torsion functor) という.

この定義からは $\mathrm{Tor}(M,N)$ を計算するには N の射影分解 $P_\bullet$ を計算する必要があるように思われるが，定理 6.5.4 より次の定理を言うことができる．

定理 6.5.6（Tor の可換性）

A 加群 M,N について，M の射影分解に N をテンソルした複体；

$$\cdots Q_2\otimes N \longrightarrow Q_1\otimes N \longrightarrow Q_0\otimes N \longrightarrow 0$$

の n 次のホモロジーは $\mathrm{Tor}_n(M,N)$ と同型である．特に $\mathrm{Tor}(M,N)\cong\mathrm{Tor}(N,M)$ である．

証明.

M,N の射影分解からなる複体を $Q_\bullet, P_\bullet$ とする．ここで射影加群は平坦であることに注意すると，各 i,j について次の複体たちは完全である；

$$\cdots \longrightarrow P_1\otimes Q_j \xrightarrow{d_1\otimes\mathrm{id}_{Q_j}} P_0\otimes Q_j \xrightarrow{\varepsilon\otimes\mathrm{id}_{Q_j}} N\otimes Q_j \longrightarrow 0$$

$$\cdots \longrightarrow P_i\otimes Q_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_{P_i}\otimes d_1'} P_i\otimes Q_0 \xrightarrow{\mathrm{id}_{P_i}\otimes\varepsilon'} P_i\otimes M \longrightarrow 0$$

よって，辺複体が $M\otimes P_\bullet, N\otimes Q_\bullet$ である二重複体 $P_\bullet\otimes Q_*$ で，各行，列が完全なものができる．これに定理 6.5.4 を適用して $\mathrm{Tor}(M,N)\cong\mathrm{Tor}(N,M)$ を得る．（証明終）

定義 6.5.7（Ext 関手）

加群 M について，関手 $\mathrm{Hom}(M,-)$ は左完全である．これによる右導来関手を $\mathrm{Ext}^n(M,-)$ とかき，Ext 関手 (Ext functor, extension functor) という．

Tor と同様に，$\mathrm{Ext}(M,N)$ の計算は N の単射分解と M の射影分解のどちらを計算しても良い（$\mathrm{Hom}(-,N)$ は反変左完全であるから）．

ここで普遍性と命題 1.4.5 より次が成り立っている．

命題 6.5.8

A 加群の圏において，以下が成り立つ．

(i) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda,N)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}(M_\lambda,N)$

(ii) $\mathrm{Hom}(M,\prod_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda)\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}(M,N_\lambda)$

(iii) $M\otimes\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(M\otimes N_\lambda)$

M が有限生成なら次も正しい．

(iv) $\mathrm{Hom}(M,\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda)\cong\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}(M,N_\lambda)$

証明.

(i)~(iii) についてはまさに直積，直和の普遍性と命題 1.4.5 による．(iv) は M が有限生成なら $f\in\mathrm{Hom}(M,\bigoplus N_\lambda)$ について有限部分集合 $I\subset\Lambda$ が存在して，$f(M)\subset\bigoplus_{i\in I}N_i$ が成り立つ．（証明終）

ここから導来関手たちにも次が言えることがわかる．

命題 *6.5.9*

A 加群の圏において，以下が成り立つ．

(i) $\mathrm{Ext}(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, N) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}(M_\lambda, N)$
(ii) $\mathrm{Ext}(M, \prod_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}(M, N_\lambda)$
(iii) $\mathrm{Tor}(M, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Tor}(M \otimes N_\lambda)$

M が有限生成なら次も正しい．

(iv) $\mathrm{Ext}(M, \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda) \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Ext}(M, N_\lambda)$

証明.

(i) だけ示す．M_λ の射影分解を $P_{\bullet,\lambda}$ とすると，$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_{\bullet,\lambda}$ は $\bigoplus M_\lambda$ の射影分解になる．すると $\mathrm{Hom}(-, N)$ によって次の余鎖複体；

$$\longrightarrow \bigoplus \mathrm{Hom}(P_{n,\lambda}, N) \longrightarrow \bigoplus \mathrm{Hom}(P_{n+1,\lambda}, N) \longrightarrow$$

を得るが，これの各成分は $\prod \mathrm{Hom}(P_{n,\lambda}, N)$ と同型である．よって主張が従う．（証明終）

第7章　可換環論のホモロジー代数的手法

—Homological method to ring theory

前章で定義した射影分解，Tor, Ext などの道具を使って可換環の理論にホモロジー代数的手法を持ち込もう．

§1　Ext と加群の深さ

この節では，Cohen–Macaulay 性を議論するために必要不可欠な深さの概念について，Ext を使った言い換えを与え，ホモロジー代数の道具を用いて考察していく．まずは補題 5.6.11 の証明を与えるために，深さと Ext の関係，最初は簡単な場合として正則元と Hom のつながりについて調べてみる．以後の命題たちの証明に補題 5.6.11 は必要ないことに注意しよう．

補題 *7.1.1*

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群，I を $IM \neq M$ となる A のイデアルとする．このとき，次の条件；

(i) M 正則元である $a \in I$ が存在する．

(ii) 任意の有限生成 A 加群 N について，$\operatorname{Supp} N \subset V(I)$ ならば $\operatorname{Hom}(N, M) = 0$ である．

(iii) ある有限生成 A 加群 N が存在して，$\operatorname{Supp} N = V(I)$ かつ $\operatorname{Hom}(N, M) = 0$ となる．

は同値である．

証明.

(i)$\Longrightarrow$(ii)

a 倍写像 $a\cdot : M \to M$ は単射である．すると，これを合成する準同型 $a\cdot_* : \operatorname{Hom}(N, M) \to \operatorname{Hom}(N, M)$ も単射である．任意の $\varphi \in \operatorname{Hom}(N, M)$ をとると，$a\cdot_*(\varphi)$ は $x \mapsto \varphi(ax)$ という準同型であることに注意する．ここで $\operatorname{Supp} N = V(\operatorname{Ann} N) \subset V(I)$ なので，命題 1.6.3 より $I \subset \sqrt{\operatorname{Ann} N}$ である．よってある $n > 0$ が存在して $a^n N = 0$ である．すると φ に $a\cdot_*$ を n 回施すとそれは 0 になり，これは単射なので φ は 0 でなければならない．

(ii)$\Longrightarrow$(iii)

$N = A/I$ とすればよい．

(iii)$\Longrightarrow$(i)

I は M 正則元を持たないとする．すると補題 5.6.14 より $P \in \operatorname{Ass} M \cap V(I)$ となる $P \in \operatorname{Spec} A$ が存在する．このとき単射 $A/P \to M$ が存在する（$P = \operatorname{Ann} x$ とするとき，$A/P \to M; a + P \mapsto ax$ とすればよい）．これを P で局所化して $K(P) \to M_P$ が存在する．また，$P \in V(I) = \operatorname{Supp} N$ であるので $N_P \neq 0$ であり，中山の補題より $N_P/PN_P = N \otimes_A K(P)$ は 0 でない $K(P)$ ベクトル空間である．よって 0 でない $N_P/PN_P \to K(P)$ がある．以上のことを組み合わせて $\operatorname{Hom}_{A_P}(N_P, M_P) = \operatorname{Hom}(N, M)_P \neq 0$ である．すると命題 1.5.12 より $\operatorname{Hom}(N, M) \neq 0$ であるので矛盾である．

（証明終）

これを正則列について一般化しよう．

命題 *7.1.2*

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群，I を $IM \neq M$ となる A のイデアルとする．任意の $n > 0$ について，次の条件；

(i) $n \leq \operatorname{depth}_I M$ である．

(ii) 任意の有限生成 A 加群について，$\operatorname{Supp} N \subset V(I)$ ならば任意の $0 \leq i < n$ について $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$ である．

(iii) ある有限生成 A 加群 N が存在して，$\operatorname{Supp} N = V(I)$ かつ任意の $0 \leq i < n$ について $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$ である．

(iv) 任意の $0 < i < n$ について，$a_1, \ldots, a_i \in I$ が M 正則列であるならば，ある $a_{i+1}, \ldots, a_n \in I$ が存在して $a_1, \ldots, a_n$ が M 正則列をなす．

は同値である．

証明.

(i)⟹(ii)

n についての帰納法で示す．$n = 1$ のときは先の補題でみたので，$n > 1$ とする．$a_1, \ldots, a_n \in I$ を M 正則列とする．完全列；

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{a_1\cdot} M \longrightarrow M/a_1M \longrightarrow 0$$

について Ext が導く完全列を考えて；

$$\operatorname{Ext}^{i-1}(N, M/a_1M) \xrightarrow{\partial^{i-1}} \operatorname{Ext}^i(N, M) \xrightarrow{a_1\cdot} \operatorname{Ext}^i(N, M)$$

が完全である（$\operatorname{Ext}^i(N, M)$ の間の準同型は $a_1\cdot$ が誘導するコホモロジーの間の準同型だが，これは $a_1 \in A$ なので $a_1\cdot$ のまま変わらない）．ここで $a_2, \ldots, a_n$ が M/a_1M 正則列なので $n-1 \leq \operatorname{depth}_I M/a_1M$ だから，帰納法の仮定より $a_1\cdot : \operatorname{Ext}^i(N, M) \to \operatorname{Ext}^i(N, M)$ は単射である．また Ext の定義から $\operatorname{Ann} N \subset \operatorname{Ann}(\operatorname{Ext}^i(N, M))$ であるので，補題と同様の議論で $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$ である．

(ii)⟹(iii)

$N = A/I$ とすればよい．

(iii)⟹(iv)

これも n についての帰納法で示す．$n = 1$ のときは見た．$n > 1$ とし，$i < n$ について $a_1, \ldots, a_i \in I$ が M 正則列であるとする．(iii) の条件を満たす有限生成 A 加群 N と a_1 倍写像についての完全列が導く Ext の完全列；

$$\operatorname{Ext}^j(N, M) \longrightarrow \operatorname{Ext}^j(N, M/a_1M) \xrightarrow{\partial^i} \operatorname{Ext}^{j+1}(N, M)$$

を考える．$j+1 < n$ のとき，仮定から完全列の両端は 0 となり，任意の $j < n-1$ について $\operatorname{Ext}^j(N, M/a_1M) = 0$ である．$\operatorname{Supp} N = V(I)$ であるから，帰納法の仮定から M/a_1M 正則列 $a_2, \ldots, a_i \in I$ を長さ $n-1$ に延長できる．よって，番号のズレに気をつけて $a_1, \ldots, a_n \in I$ を M 正則列となるようにできることがわかった．

（証明終）

この命題から即座に次の定理が従う．

定理 *7.1.3*

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群，I を $IM \neq M$ となる A のイデアルとする．I の元からなる極大な M 正則列の長さは一定であり，また；

$$\operatorname{depth}_I M = \inf\left\{i \in \mathbb{N} \,\middle|\, \operatorname{Ext}^i(A/I, M) \neq 0\right\}$$

である．

命題 7.1.2 によって，最初の目的が達成できる．

補題 *7.1.4*（補題 5.6.11 の証明）

A を Noether 環とし，M を有限生成 A 加群，I を $IM \neq M$ となる A のイデアルとする．$a \in I$ が M 正則ならば；

$$\operatorname{depth}_I(M/aM) = \operatorname{depth}_I M - 1$$

が成り立つ．

証明.

$a_1, \ldots, a_n \in I$ が M/aM 正則列ならば $a, a_1, \ldots, a_n$ は M 正則であり，$\operatorname{depth}_I(M/aM) \leq \operatorname{depth}_I M - 1$ であることはすぐにわかる．また $\operatorname{depth}_I M = r$ とすると，命題 7.1.2 より $a, a_2, \ldots, a_r \in I$ を M 正則列であるようにできる．このとき $a_2, \ldots, a_r$ は M/aM 正則列をなすので $\operatorname{depth}_I M - 1 \leq \operatorname{depth}_I(M/aM)$ であることがわかった．（証明終）

CM 局所環とは $\dim A = \operatorname{depth} A$ となっている環のことであったことを思い出すと，この定義は Krull 次元がホモロジカルな量で与えられている局所環のことである，と言い換えることができる．Krull 次元をホモロジカルな量に翻訳することで可換環論に新たな視点が持ち込まれ．ホモロジカル予想と呼ばれる一連の予想群が生まれることとなった．これらの予想については本書のところどころで目にすることになるだろう．

§2　射影被覆と入射包絡

異なるホモロジカルな量としてホモロジー次元とも呼ばれる**射影次元**と，その双対概念であるところの**入射次元**を定義しよう．

定義 *7.2.1*（射影次元）

A を環とし，M を A 加群とする．M の射影分解の長さの最小値を M の**射影次元** (projective dimension) といい，$\operatorname{proj.dim}_A M$ とかく．$M = 0$ のときは $\operatorname{proj.dim} M = -1$ とする．

$\operatorname{proj.dim} M = 0$ であることと M が射影的であることは同値である．例を見てみよう．

例 7.2.2

$x \in A$ を単元でも零因子でもないとする．$M = A/Ax$ とおくと；

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が射影分解となり $\operatorname{proj.dim} M = 1$ である．

この例で x が冪零，例えば $A = \mathbb{R}[X]/(X^2), x = X + (X^2)$ なら x 倍写像 $A \to A$ の核が $Ax \cong M$ であるので；

$$\ldots \longrightarrow A \xrightarrow{x} A \xrightarrow{x} A \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が無限に続く射影分解となる．だがここから $\mathrm{proj.dim}\, M = \infty$ を言えるかというと，そうではない．そのためには長さが極小になるような（本質的な）射影分解を考える必要がある．

定義 *7.2.3*（射影被覆）

A 加群 M の部分加群 N が；

$$\text{任意の } M \text{ の部分加群 } L \text{ について } N + L = M \text{ なら } L = M.$$

を満たすとき，N を M の**余剰部分加群** (superfluous submodule) という．A 加群 M について射影加群 P と全射 $\varepsilon : P \to M$ が存在して $\ker \varepsilon$ が P の余剰加群のとき，P, ε は M の**射影被覆** (projective cover) であるという．

補題 *7.2.4*

加群の準同型の列（完全性は仮定しない） $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ について，$\psi \circ \varphi$ が全射であるとする． $\ker \psi$ が M_2 の余剰加群なら φ も全射である．

証明.

任意の $x \in M_2$ についてある $x_1 \in M_1$ が存在して $\psi(\varphi(x_1)) = \psi(x)$ である．このとき $\varphi(x_1) - x \in \ker \psi$ なので $M_2 = \varphi(M_1) + \ker \psi$ である．よって仮定から $M_2 = \varphi(M_1)$ となる．（証明終）

命題 *7.2.5*

M を A 加群とし，M の射影被覆 $\varepsilon : P \to M$ が存在したとする．射影加群 P' への全射 $\varepsilon' : P' \to M$ に対して分裂全射 $f : P' \to P$ が存在して，次の図式；

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\varepsilon'"] & & \\ P \arrow[r, "\varepsilon"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

が可換（P' は P と同型な直和因子を持つ）．

証明.

可換になる f の存在は P' が射影的であることから従う．いま $\varepsilon \circ f$ が全射で $\ker \varepsilon$ が余剰加群なので，補題より f も全射である．また P も射影的であるから，次の図式；

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\ P' \arrow[r, "f"] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

が可換になる $g : P \to P'$ が存在し f は分裂全射である．（証明終）

この命題より射影被覆は存在すれば同型を除いて一意である．また，同様の議論で $M \cong M'$ であり P, P' がそれぞれ M, M' の射影被覆なら $P \cong P'$ である．

定義 7.2.6（極小射影分解）

A 加群 M の射影分解；

$$\dots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} 0$$

について，各 $d_i : P_i \to \ker d_{i-1}$ が射影被覆であるとき**極小射影分解** (minimal projective resolution) であるという．

極小射影分解は存在すれば同型を除いて一意である．よって冒頭の２つめの例に戻ると，この分解が極小射影分解を与えていることを見ればよい．それには Ax が A の余剰部分加群であることを示せば十分である．A のイデアル I について $Ax + I = A$ であるとすると，x は冪零なので $Ax \subset \mathrm{nil}(A) \subset \mathrm{rad}(A)$ であるので，中山の補題から $I = A$ である．よって $\mathrm{proj.dim}\, M = \infty$ が示された．

しかし一般には極小射影分解（射影被覆）が存在するとは限らないことに注意しなければならない. 例えば $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ について；

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の射影分解を与えるが，これは $m\mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ の余剰部分加群でないので極小射影分解ではない．これより $\mathrm{proj.dim}\, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = 1$ である（$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ は射影 $\mathbb{Z}$ 加群でない）．するともし極小射影分解が存在すれば；

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

という形をしているが，このとき ε は分裂全射なので P_0 は $P_1 \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と同型である．すると P_1 は $\ker \varepsilon$ と同型で，これは余剰加群であるから $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = P_0$ となり $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ が射影的となって矛盾する．

双対的に入射加群について考えたものが**入射包絡**であり，こちらは必ず存在する．

定義 7.2.7（入射次元）

M を A 加群とする． M の入射分解の長さの最小値を M の**入射次元** (injective dimension) といい，$\mathrm{inj.dim}_A\, M$ とかく．$M = 0$ のときは $\mathrm{inj.dim}\, M = -1$ とする．

定義 7.2.8（入射包絡）

A 加群 M の部分加群 N が；

任意の M の部分加群 L について $N \cap L = 0$ なら $L = 0$.

を満たすとき，N を M の**本質部分加群** (essential submodule) という．A 加群 M について入射加群 I と単射 $\varepsilon : M \to I$ が存在して $\mathrm{Im}\, \varepsilon$ が I の本質加群のとき，I, ε は M の**入射包絡** (injective hull) であるという．

本質部分加群については次の判定条件が強力である．

命題 7.2.9

A 加群 M の部分加群 N が本質的であることと，任意の $x \neq 0 \in M$ について $Ax \cap N \neq 0$ であることは同値.

証明.

($\Longleftarrow$) のみ示す．$N \cap L = 0$ かつ $L \neq 0$ とすると, $x \neq 0 \in L$ がとれ, このとき $Ax \subset L$ より $Ax \cap N \subset L \cap N = 0$ であるので $Ax \cap N = 0$ だがこれは矛盾．よって $L = 0$ である．（証明終）

補題 7.2.4 の双対版を示しておこう．

補題 *7.2.10*

加群の準同型の列 $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ について，$\psi \circ \varphi$ が単射であるとする．$\mathrm{Im}\,\varphi$ が M_2 の本質加群なら ψ も単射である．

証明.

任意の $x \neq 0 \in M_2$ について $\psi(x) \neq 0$ を言えばよい．このとき $Ax \cap \mathrm{Im}\,\varphi \neq 0$ であるので，ある $a \in A$ が存在して $0 \neq ax \in \mathrm{Im}\,\varphi$ である．すると，ある $x_1 \in M_1$ が存在して $ax = \varphi(x_1)$ とできる．$\psi(x) = 0$ と仮定すると，$0 = a\psi(x) = \psi(ax) = \psi(\varphi(x_1))$ であり $\psi \circ \varphi$ が単射なので $x_1 = 0$ となる．よって $ax = \varphi(0) = 0$ となりこれは矛盾．よって $\psi(x) \neq 0$ である．（証明終）

これをつかって，射影被覆と双対的に次が示される．

命題 *7.2.11*

M を A 加群とし，入射包絡 $\varepsilon : M \to I$ が存在したとする．入射加群 I' と単射 $\varepsilon' : M \to I'$ について分裂単射 $f : I \to I'$ が存在して，次の図式；

$$\begin{tikzcd} & & I \arrow[d, "f"] \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & \\ & & I' \end{tikzcd}$$

が可換（I' は I と同系な直和因子を持つ）．

定義 *7.2.12*（極小入射分解）

A 加群 M の入射分解；

$$0 \longrightarrow I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \longrightarrow \cdots$$

について，各移入 $\mathrm{Im}\,d^i \hookrightarrow I^{i+1}$ が入射包絡のとき**極小入射分解** (minimal inductive resolution) であるという．

極小射影分解と同様に同型を除いて一意に定まる．射影被覆と異なるのは入射包絡が必ず存在することである．

定理 *7.2.13*（入射包絡の存在）

A 加群 M について入射包絡が必ず存在する．

証明.

A 加群の圏は入射的対象を十分に持つ（定理 6.3.13）ので，入射加群 I と単射 $\varepsilon : M \to I$ が存在する．次の集合；

$$\mathscr{E} = \left\{ E : I \text{ の部分加群} \;\middle|\; M \subset E, M \text{ は } E \text{ の本質部分加群} \right\}$$

は $M \in \mathscr{E}$ なので空ではなく，帰納的順序集合をなす．よって Zorn の補題から極大元がとれ，それを E としよう．次に；

$$\mathscr{L} = \left\{ L : I \text{ の部分加群} \;\middle|\; L \cap E = 0 \right\}$$

は $0 \in \mathscr{L}$ より空でなく，帰納的順序集合をなすなので極大元を L とおく．埋め込み $\iota : E \to I$ と自然な全射 $\pi : I \to I/L$ を考える．合成 $\pi \circ \iota$ は単射であり，$\pi(E)$ は I/L で本質的．実際 $L \subset N \subset I$ を I の部分加群とすると，$\pi(E) \cap N/L = 0$ なら $E \cap N \subset L$ だが $E \cap L = 0$ より $E \cap N = 0$ となり，L の極大性より $N = L$ である．

次に E は $\varphi(I/L)$ の本質部分加群であることを示そう．I が入射的なので，次の図式；

$$\begin{tikzcd} & & I \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[ur, hook, "\iota"] \arrow[r, "\pi\circ\iota"'] & I/L \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

が可換になる $\varphi : I/L \to I$ が存在する．$\varphi(I/L)$ の部分加群 N について $E \cap N = 0$ であるとする．このとき $\pi(E) \cap \varphi^{-1}(N) = 0$ である．実際 $x \in \pi(E) \cap \varphi^{-1}(N)$ とすると，ある $y \in E$ が存在して $\pi(y) = x$ である．このとき $\varphi(\pi(y)) = y \in N \cap E$ より $y = 0$ であり，ゆえに $x = 0$ となる．すると $\pi(E)$ は I/L の本質部分加群なので $\varphi^{-1}(N) = 0$ となり $N \subset \operatorname{Im}\varphi$ だから $N = 0$ となる．すると E は M の本質拡大で，$\varphi(I/L)$ は E の本質拡大なので $\varphi(I/L)$ は M の本質拡大だから（命題 7.2.9 を用いて確かめよ）E の極大性より $E = \varphi(I/L)$ である．よって $\iota : E \to I$ は分裂単射となる．ゆえに E は入射加群であり，これが M の入射包絡にほかならない．（証明終）

この定理と命題 7.2.11 より A 加群 M の入射包絡は同型を除いて必ず一意に存在するので $\mathrm{E}(M)$ とかくことにしよう．

§3　ホモロジー次元

定義からホモロジー次元について次が従う．

補題 *7.3.1*

A を環，M を A 加群とする．このとき；

(i) $\operatorname{proj.dim} M \leq n$ であるとき，任意の $i > n$ と A 加群 N について $\operatorname{Ext}^i(M, N) = 0$ である．
(ii) $\operatorname{inj.dim} M \leq n$ であるとき，任意の $i > n$ と A 加群 N について $\operatorname{Ext}^i(N, M) = 0$ であることは同値．

この逆が成り立つだけでなく，命題 7.3.3 により $n+1$ についてのみ確かめればよいことがわかる．まず Ext の長完全列を考えることにより次の補題が従うことを注意しておこう．

補題 *7.3.2*

A 加群 P が射影的であることと，任意の A 加群 N について $\operatorname{Ext}^1(P, N) = 0$ であることは同値．また I が入射的であることは任意の N について $\operatorname{Ext}^1(N, I) = 0$ であることと同値．

証明.

P についてのみ示す．A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

から得られる Ext の長完全列；

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, M_1) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, M_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P, M_3) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Ext}^1(P, M_1) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(P, M_2) \longrightarrow \cdots$$

を考えれば $\mathrm{Hom}(P, -)$ が完全関手であることと $\mathrm{Ext}^1(P, M_1) = 0$ が同値であることがわかる．　（証明終）

命題 *7.3.3*

A を環，M を A 加群とする．このとき；

(i) $\mathrm{proj.dim}\, M \leq n$ であることと，任意の A 加群 N について $\mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ であることは同値.

(ii) $\mathrm{inj.dim}\, M \leq n$ であることと，任意の A 加群 N について $\mathrm{Ext}^{n+1}(N, M) = 0$ であることは同値.

が成り立つ.

証明.

(i) のみ示す．($\Longrightarrow$) は明らかなので，逆を見れば良い．M の射影分解 $P_\bullet$ を考える．$P = \mathrm{Im}\, d_n$ ($d_n : P_n \to P_{n-1}$) とおくと，次の２つの完全列；

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ;$$

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P \longrightarrow 0$$

がある．１つめの完全列より，P が射影的ならば $\mathrm{proj.dim}\, M \leq n$ が従うので，これを示そう．２つめの完全列を P の射影分解とみなすと，$\mathrm{Ext}^1(P, N) = \mathrm{Ext}^{n+1}(M, N) = 0$ となっており，P は射影的である．（証明終）

同様に Ext の長完全列を考えることで次の２つの命題がわかる.

系 *7.3.4*

A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

について，２つの加群の射影元が有限なら残りの１つの射影次元も有限.

系 *7.3.5*

A 加群の完全列；

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

について，$\mathrm{proj.dim}\, M_2 < \infty$ であるとき，$\mathrm{proj.dim}\, M_1 = \mathrm{proj.dim}\, M_2$ ならば $\mathrm{proj.dim}\, M_3 \leq \mathrm{proj.dim}\, M_1 + 1$ であり，$\mathrm{proj.dim}\, M_1 > \mathrm{proj.dim}\, M_2$ ならば $\mathrm{proj.dim}\, M_3 = \mathrm{proj.dim}\, M_1 + 1$ である.

以後簡単のために局所環という条件を課すことにしよう．これにより様々な恩恵が得られることは局所環の章でみてきた通りである．ホモロジカルなご利益としては，例えば Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ のもとでは射影被覆が存在し，かつ扱いやすいものとなる.

定義 7.3.6（極小自由分解）

Noether 局所環 $(A, \mathfrak{m})$ 上の有限生成加群 $M \neq 0$ の射影分解 $P_\bullet$ であって，次の条件；

(i) $P_\bullet$ は極小射影分解である．
(ii) 各 P_i は自由 A 加群である．
(iii) $P_0 \otimes (A/\mathfrak{m}) = M/\mathfrak{m}M = M \otimes (A/\mathfrak{m})$ である．

をみたすものを M の**極小自由分解** (minimal free resolution) という．

存在証明.

$M/\mathfrak{m}M$ の（有限次元）$A/\mathfrak{m}$ ベクトル空間としての生成系 $\{e_i\}$ をとり，各 e_i の代表元 $f_i \in M$ を固定する．$\{e_i\}$ が生成する自由 A 加群 $\oplus Ae_i$ を P_0 とおく．このとき，次の A 準同型；

$$\varepsilon : P_0 \to M; e_i \mapsto f_i$$

を考えると，これは全射である．実際 $M = \mathrm{Im}\,\varepsilon + \mathfrak{m}M$ であることが容易に確かめられ，中山の補題より $M = \mathrm{Im}\,\varepsilon$ であることがわかる．またこれは射影被覆になる．これも $\ker\varepsilon \subset \mathfrak{m}P_0$ であることに注意して中山の補題から従う．同様に $\ker\varepsilon$ について射影被覆 $d_1 : P_1 \to \ker\varepsilon$ がとれる．これを繰り返して完全列；

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

を得，各 $\ker d_i$ は P_i の余剰部分加群である．よって $P_\bullet$ を各 P_i が自由でありかつ極小射影分解となっているようにとることができた．（証明終）

ここから射影次元を次のように言い換えることができる．

定理 7.3.7

$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とし，$M \neq 0$ をその上の有限生成加群とする．このとき；

$$\mathrm{proj.dim}\, M = \sup\{i \in N \mid \mathrm{Tor}_i(A/\mathfrak{m}, M) \neq 0\}$$

である．

付録A　様々な例

—*Appendix A, Various Example*

Counter example of Commutative Algebra を目指したい．

§1　加群の同型と相等

加群について，全単射準同型の存在，すなわち同型 $M \cong N$ と，集合としての相等 $M = N$ は区別しなければならない．例えば中山の補題で大変なことになる．次の例を見てみよう．

例 A.1.1

A を環，x を零因子でない元とする．A 加群として $A \cong xA$ であるので，中山の補題（系 1.2.18）からある $a \in A$ で $a - 1 \in (x)$，$aA = 0$ となるものが存在する．$aA = 0$ より $a = 0$ であり，$-1 \in (x)$ となるので x は可逆である．

この結果は明らかに正しくない．矛盾を引き起こした理由は同型であって相等ではないときに中山の補題を適用してしまったからである．このように加群の同型をイコールと思って扱うと大変なことになってしまうので注意を必要とする．

§2　ED,PID,UFD

例 A.2.1

体 K について，$K[X, X^{-1}]$ は PID である．

証明.

I を $K[X, X^{-1}]$ のイデアルとする．これは Noether なので $I = (f_1, \ldots, f_r)$ とできる．$f_1, \ldots, f_r$ に現れる負ベキの項は高々有限個だから，ある $n \geq 0$ が存在して $X^n f_i \in K[X]$ とできる．$(X^n f_1, \ldots, X^n f_r)$ を $K[X]$ のイデアルとみると，これは PID なので $(X^n f_1, \ldots, X^n f_r) = (g)$ となる $g \in K[X]$ が存在し，$K[X, X^{-1}]$ のイデアルとしても $(f_1, \ldots, f_r) = (g)$ となる．（証明終）

例 A.2.2（UFD だが PID でない環）

体 K について，$K[X, Y]$ は UFD だが PID ではない．

証明.

系 1.9.7.（証明終）

例 A.2.3（PID だが ED でない環）

$\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-19})/2]$ は PID だが ED ではない．

PID だが ED でない環はこのように 2 次体の整数環についてよく知られているが，次の定理が知られている（証明は Goel, Patil and Verma (2018) を見よ）．

定理 *A.2.4*

$b, c \in \mathbb{R}$ を $b > 0, c > 0$ とする．$\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+bY^2+c)$ は PID であるが ED ではない．

証明.

$\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+bY^2+c)$ は $b > 0, c > 0$ のとき ED ではない（Goel et al. (2018)，系 2.17）．また，$\mathbb{R}[X,Y]/(X^2+bY^2+c)$ が PID であることは $c > 0$ と同値である（Goel et al. (2018)，系 2.18）．（証明終）

§3　素イデアルについて

例 *A.3.1*（鎖状だが $\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$ が成りたたない例）

$(A, \mathfrak{m})$ を DVR（すなわち 1 次元 Noether 局所整閉整域）とする．$B = A[X]$ とすればこれは鎖状だが，$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = \dim A$ を満たさない $P \in \operatorname{Spec} B$ が存在する．

証明.

$\mathfrak{m}$ は単項なので，$\mathfrak{m} = (a)$ とおこう．系 5.4.9 より $\dim B = 2$ である（$(0) \subsetneq (a) \subsetneq (a, X)$ により $2 \leq \dim B$ と考えても構わない）．$P = (aX-1)$ とおくと，これは B の極大イデアルであるが，高さ 1 である．よって；

$$\operatorname{ht} P + \operatorname{coht} P = 1 + 0 = 1 \neq 2 = \dim B$$

となり，成り立たない．

また，1 次元の Noether 整域は CM 環である．CM 環は強鎖状（系 5.7.12）であるから，B は鎖状である．（証明終）

この例では Noether 環なので単項イデアルの高さは高々 1 である（Krull の標高定理）が，Noether 性という仮定を外せば高さ 2 以上の単項イデアルが存在する．

例 *A.3.2*（無限次元の Noether 整域の例（永田, 1974））

k を体とし，$A = k[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ を可算無限個の変数をもつ多項式環とする．自然数の増加列 $\{n_i\}$ を，$n_i - n_{i-1} < n_{i+1} - n_i$ が成り立つように取る．$P_i = (x_{n_i}, \ldots, x_{n_{i+1}-1})$ とおく．これらは素イデアルであるから，$\bigcup P_i$ の A における補集合を S とすると，これは積閉である．$S^{-1}A$ は無限次元の Noether 整域となる．

証明.

実際，$S^{-1}A$ の素イデアルは $\bigcup P_i$ に含まれる A の素イデアルであることを考えると $\dim S^{-1}A = \infty$ であることは明らか．Noether であることは，次の補題から従う．

補題 *A.3.3*

環 A について，以下の 2 つ；

(i) $\mathfrak{m}$ が A の極大イデアルならば，$A_\mathfrak{m}$ は Noether である．

(ii) 任意の $0 \neq x \in A$ について，x を含む A の極大イデアルは有限個しかない．

を満たすならば，A は Noether である．

補題の証明.

I を A のイデアルとする．(ii) より，I を含む極大イデアルは有限個しかない．それらを $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ としよう．任意の $x_0 \in I$ をとる．x を含む極大イデアルは有限個であるから，それを $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s, \mathfrak{m}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{m}_{s+r}$ とする．各 $1 \leq j \leq r$ について，$x_j \in I$ で $x_j \notin \mathfrak{m}_j$ であるものがとれる．また，(i) より各 $1 \leq i \leq s$ について $A_{\mathfrak{m}_i}$ は Noether なので，$IA_{\mathfrak{m}_i}$ を生成する I の元は有限個である．それらを $x_{s+1}, \ldots, x_{s+t}$ としよう．$I' = (x_0, \ldots, x_t)$ とおく．明らかに $I' \subset I$ であるので，A 自然な A 加群の準同型 $\iota : I' \hookrightarrow I$ が存在する．このとき命題 1.5.13 を用いて ι が全射であることを示す．A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，$\mathfrak{m}$ が $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ のどれとも異なるとき，I, $I' \not\subset \mathfrak{m}$ であるから，$IA_\mathfrak{m} = I'A_\mathfrak{m} = A_\mathfrak{m}$ である．また $\mathfrak{m}_i (1 \leq i \leq s)$ については，I' は $IA_{\mathfrak{m}_i}$ の生成元をすべて含むので，$I'A_{\mathfrak{m}_i} = IA_{\mathfrak{m}_i}$ である．よって，任意の極大イデアルに ι を誘導したものは全単射であるから，命題 1.5.13 によって ι は全射，すなわち $I = I'$ である．よって I は有限生成．（証明終）

この補題が適用できることを見るために，$S^{-1}A$ の極大イデアルは $S^{-1}P_i$ のみであることを示そう．$P \in \operatorname{Spec} A$ が $P \subset \bigcup P_i$ であるとすると，$P \subset P_i$ となる i があることをいえば十分．任意の $a \in P$ に対して，a を含む P_j たちは有限個なので，それをすべてとってきて $(a) \subset \bigcup_{j=1}^{n} P_j$ とする．任意の $x \in P$ に対し，x を含む P_j たちも有限個だから，ある n' に対して $(a, x) \subset \bigcup_{j=1}^{n'} P_j$ とできる．Prime avoidance より $(a, x) \subset P_j$ となる $j \leq n'$ がとれるが，$a \in P_j$ より $j \leq n$ でなければならず，すると $(a, x) \subset \bigcup_{j=1}^{n} P_j$ である．よって，x は任意で，n のとりかたは x によらないので $P \subset \bigcup_{j=1}^{n} P_i$ である．再び Prime avoidance を使って $P \subset P_i$ となる i がとれる．

また，$S^{-1}A_{S^{-1}P_i} = A_{P_i}$ であるので，$S^{-1}A$ は補題を満たす．

（証明終）

付録B　圏論

—Appendix B, Category theory

この付録では最低限の圏論について触れることにしよう．詳細に興味がある場合は例えば志甫 (2016) などを見よ．

§1　圏

定義 *B.1.1*（圏）

- クラス $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$（$A \in \mathscr{A}$ を**対象** (object) という）．
- $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ について，クラス $\mathrm{Hom}(A, B)$（$f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ を A から B への**射** (morphism,map,arrow) という）．

について，以下の公理；

- $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ について，**恒等射** (identity) $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ が存在する．
- $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ とする．すべての $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ と $g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ について $g \circ f \in \mathrm{Hom}(A, C)$ が定義され，f, g の**合成** (composition) という．これは結合的で．恒等射を単位元とする．

をみたすとき，$\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ と Hom のデータを合わせて**圏** (category)$\mathscr{A}$ という．

$\mathrm{Hom}(A, B)$ は $\mathscr{A}(A, B)$ ともかく．また簡単のために $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ を $A \in \mathscr{A}, f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ を $f : A \to B$ とかく．

例 B.1.2

圏の例として以下がある（ここでは 1 つの対象のみからなる圏など，いかにも圏論チックな例は扱わない）．

Set . . . . 集合全体，写像．

Ab . . . . Abel 群全体，準同型写像．

Ring . . . . （1 を持つ）可換環全体，準同型写像．

$\mathrm{Mod}(A)$ . . . . . A 加群全体，A 準同型写像．

定義 *B.1.3*（局所小）

圏 $\mathscr{A}$ について，任意の $A, B \in \mathscr{A}$ に対して $\mathrm{Hom}(A, B)$ が集合であるとき $\mathscr{A}$ を**局所小** (locally small) な圏であるという．

上にある例はすべて局所小である．以降，すべての圏は明記しない限り局所小であることを仮定する．

どこの圏の話であるかを捉えるために $A, B \in \mathscr{A}$ について $\mathrm{Hom}(A, B)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ とかいたりする．たとえば Abel 群 A は $A \in \mathbf{Ab}$ かつ $A \in \mathbf{Set}$ なので，射を区別する必要がある．

§2　関手

定義 *B.2.1*（関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を圏とする．

$$F : \mathrm{ob}(\mathscr{A}) \to \mathrm{ob}(\mathscr{B}); A \mapsto F(A)$$

$$F : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B)); f \mapsto F(f)$$

で，次の公理；

(i) 任意の $A \in \mathscr{A}$ について $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$．

(ii) $f \in \mathrm{Hom}(A, B), g \in \mathrm{Hom}(B, C)$ に対して $F(g \circ f) = F(g) \circ F(g)$．

を満たすとき，F を $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への**関手** (functor)，特に**共変関手** (covariant functor) という．

定義 *B.2.2*（双対圏）

圏 $\mathscr{A}$ について，圏 $\mathscr{A}^{op}$ を；

$$\mathrm{ob}\,\mathscr{A}^{op} = \mathrm{ob}\,\mathscr{A}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, A)$$

と定める．これを $\mathscr{A}$ の**双対圏** (dual category) という．

定義 *B.2.3*（反変関手）

圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ について, 関手 $\mathscr{A}^{op} \to \mathscr{B}$ を $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への**反変関手** (contravariant functor) という．

定義 *B.2.4*（忠実，充満）

$F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を関手とする．各 $A, B \in \mathscr{A}$ について；

$$F : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B)); f \mapsto F(f)$$

が単射であるとき**忠実** (faithful)，全射であるとき**充満** (full) という．

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dd, dashed] & & & F(A) \arrow[dd, "g"] & \\
\mathscr{A} & & {} \arrow[r, Rightarrow, "F"] & {} & & \mathscr{B} \\
& B & & & F(B) &
\end{tikzcd}$$

Figure.34

上の図式において，関手 F で g に移る $\mathscr{A}$ の射（図式では破線）が高々 1 つならば忠実で，少なくとも 1 つあれば充満である．

定義 *B.2.5*（自然変換）

関手 F, G が $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ であって，すべての $\mathscr{A}$ の射 $f : A \to B$ について以下の図式 (Figure.35) を可換にするような射 $\varphi(A) : F(A) \to G(A)$ がとれるとき，$\varphi : F \to G$ を関手 F から G への**自然変換** (natural transformation) という．

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi(A)"] & F(B) \arrow[d, "\varphi(B)"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(B) \end{tikzcd}$$

Figure.35

すべての $A \in \mathscr{A}$ に対して $\varphi(A)$ が同型のとき，φ を同型な自然変換という．

定義 *B.2.6*（圏同値）

関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ に対して，$G \circ F = \mathrm{id}_{\mathscr{A}}, F \circ G = \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$ となる関手 $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ が存在するとき，$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ は**圏同値** (equivalence of categories) であるという．

また $\mathscr{A}^{op}$ と $\mathscr{B}$ が圏同値なとき $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ は**反変同値**，双対同値 (dual equivalance) という．

§3　Abel 圏

Abel 圏とはホモロジー代数を展開するために必要なエッセンスを抽出した圏のことである．まず，射 $f : X \to Y$ についての図式追跡（いままでの例では完全列など）を考えるために核，像の議論が不可欠であった．これはホモロジー，コホモロジーの定義にも不可欠である．よって核，像，余核を持つことが要求される．そのために圏 $\mathscr{A}$ について $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ が自然に Abel 群になることを要求する．このとき自然な準同型 $h_Z : \mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y); \varphi \mapsto f \circ \varphi$ が定まる．これの核を表現する対象を $\ker f$ とかく．$h_Z^{op} : \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ として余核も同様に定義される．定義の形でまとめよう．

定義 *B.3.1*（射の核, 余核）

圏 $\mathscr{A}$ を任意の $X, Y \in \mathscr{A}$ に対し $\mathrm{Hom}(X, Y)$ が自然に Abel 群である圏とする．射 $f : X \to Y$ を固定する．各 $Z \in \mathscr{A}$ に対して；

$$\mathrm{Hom}(Z, \ker f) \cong \ker h_Z = \ker(\mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Z, Y))$$

となる $\ker f \in \mathscr{A}$ が存在するとき，これを射 f の**核**という．
同様に $\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}\, f, Z) \cong \ker h_Z^{op} = \ker(\mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z))$ となる対象が存在するとき，それを $\mathrm{Coker}\, f$ とかいて f の**余核**という．

この定義は $\mathrm{Hom}(Z, \ker f)$ は $\mathrm{Hom}(Z, X)$ の一部と同型だと言っているので，$\mathrm{Hom}(Z, \ker f) \to \mathrm{Hom}(Z, X)$ が定まる．これにより関手の間の射 $\mathrm{Hom}(-, \ker f) \to \mathrm{Hom}(-, X)$ があるから $\iota : \ker f \to X$ がある．ここで $\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Coker}\, \iota$ と定義する．また $\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}\, f, Z) \to \mathrm{Hom}(Y, Z)$ が存在するが，Z として $\mathrm{Coker}\, f$ をとると $\mathrm{Hom}(\mathrm{Coker}\, f, \mathrm{Coker}\, f) \to \ker h^{op}_{\mathrm{Coker}\, f} \subset \mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Coker}\, f)$ がある．これによる id の像を $\pi : Y \to \mathrm{Coker}\, f$

とする．ここで $\operatorname{Im} f$ を $\ker \pi$ で定義する．いま $h^{op}_{\operatorname{Coker} f}(\pi) = f \circ \pi = 0$ であるので，$g : X \to \ker \pi = \operatorname{Im} f$ が存在する．また $\ker h_Z$ を形式的に書き下せば；

$$\ker h_Z = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(Z, X) \mid f \circ \varphi = 0\}$$

である．$\operatorname{Hom}(Z, \ker f) \cong \ker h_Z$ は同型，特に全単射であるから $\operatorname{Hom}(Z, \ker f) \to \operatorname{Hom}(Z, X)$ は集合の間の写像として単射である．これは ι が単射であることを導く[*5]．ここでは $f \circ \iota = 0$ であるので，$\ker \pi$ に対して $\varphi : \ker \pi \to Y$ を考えると $f \circ \iota = \varphi \circ (g \circ \iota) = 0$ であるので，φ は単射であるから $g \circ \iota = 0$ を導く．ここから $\operatorname{Coker} \iota$ の普遍性より $h : \operatorname{Coker} \iota \to \operatorname{Im} f$ が存在する．この h が同型であることを要請したい．これは以下のように図式にすると見やすい．これらをまとめて Abel 圏を定義しよう．

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r, "\iota"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "g"] & Y \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Coim} f \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "\varphi"] \arrow[d, equal] & \\
& \operatorname{Coker} \iota & \ker \pi &
\end{tikzcd}$$

Figure.36

定義 *B.3.2*（Abel 圏）

圏 $\mathscr{A}$ が次の定義；

(AC1) 任意の $X, Y \in \mathscr{A}$ に対し，$\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(X, Y)$ は Abel 群としての自然な構造を持つ．

(AC2) $\mathscr{A}$ は自然な零対象 0 を持つ．

(AC3) 任意の $X, Y \in \mathscr{A}$ に対し，直和 $X \oplus Y$ を持つ．ここで $X \oplus Y$ とは，任意の $Z \in \mathscr{A}$ に対し $\operatorname{Hom}(X \oplus Y, Z) \cong \operatorname{Hom}(X, Z) \times \operatorname{Hom}(Y, Z)$ が成り立つ対象のことである（加群における直和の普遍性を思い出そう）．

(AC4) $\mathscr{A}$ の中の $f : X \to Y$ について，核 $\ker f$ と余核 $\operatorname{Coker} f$ が存在する．

(AC5) $\operatorname{Coim} f$ と $\operatorname{Im} f$ は同型である（準同型定理）．

を満たすとき，Abel 圏 (Abelian Category) であるという．

先に出た核からの射の単射性について補足しておきたいところだが，ここは流れに乗って議論を進めよう．Abel 圏の例としては，自明な Abel 群の圏，A 加群の圏 $\operatorname{Mod}(A)$ などの他にスキーム $(X, \mathscr{O}_X)$ 上の $\mathscr{O}_X$ 加群の層の圏などがある．以後 $\mathscr{A}$ を Abel 圏とする，として議論していきたいのだが，それではあまりにも $\mathscr{A}$ が抽象的にすぎる．ここで次の定理が大切である（証明は志甫 (2016) 定理 2.160 をみよ）．

定理 *B.3.3*（Freyd–Mitchell の埋め込み定理）

対象の全体が集合となるような Abel 圏（対象の全体が集合となる圏を小さい圏という）から Abel 群の圏への（加法的）完全忠実充満関手が存在する．

[*5] このあたりのことは核は差核 (difference kernel) の特別なものであることに由来しているが，本書ではそこまで述べる余裕はない．志甫 (2016) などを参照すると良いかもしれない．

これにより Abel 圏を考えるときには，加群の圏などで図式追跡により示せる事実は（一般の Abel 圏では図式追跡はできないにもかかわらず！）正しいということに注意する必要がある．むしろそれは恩恵であって，元を考えたくなったらすべて加群だと思ってよい，ということをこの定理は主張している．実際にあの Hartshorne (1977) でさえも，多くの文献では図式追跡の証明のみによる，とくに加群の圏でしか示していないことに言及をし，その後この定理により “正当化” している．本書でも，以後大手を振って Abel 圏についての事実の証明に図式追跡を使おう．そのための注意として，まず Abel 圏 $\mathscr{A}$ のなかでの完全列を埋め込むと，加群としても完全であることは大切である．

ここで埋め込み定理に述べた「加法的」という言葉について，なかば明らかで推測はついていると思うが説明しておく．

定義 *B.3.4*（加法的関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とし，関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ を考える．$\mathrm{Hom}(X, Y)$ が Abel 群なので $f + g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ である．ここで；

$$F(f+g) = F(f) + F(g)$$

を満たす F を**加法的** (additive) 関手という．

次加法的関手なら $F(0) = 0$ であることに注意しよう．次に何度も取り上げてきた完全関手について述べる．

定義 *B.3.5*（完全関手）

$\mathscr{A}, \mathscr{B}$ を Abel 圏とする．加法的関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ と，$\mathscr{A}$ の対象からなる短完全列；

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

を考える．ここで，$F(A) \to F(B) \to F(C)$ が完全であるとき F を**半完全** (half-exact) であるといい，$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$ が完全であるとき**完全** (exact) であるという．G が加法的反変関手であるときは $0 \to G(C) \to G(B) \to G(A) \to 0$ が完全であるとき G は（**反変**）**完全**であるという．

完全列；

$$0 \longrightarrow M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \tag{($*$)}$$

について，それぞれ；

$$0 \longrightarrow F(M_0) \longrightarrow F(M_1) \longrightarrow F(M_2)$$

$$G(M_2) \longrightarrow G(M_1) \longrightarrow G(M_0) \longrightarrow 0$$

が完全であるとき，F を**左完全** (left-exact)，G を**反変右完全** (contravariant right-exact) であるという．また；

$$M_0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0 \tag{($**$)}$$

に対して；

$$F(M_0) \longrightarrow F(M_1) \longrightarrow F(M_2) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow G(M_2) \longrightarrow G(M_1) \longrightarrow G(M_0)$$

が完全であるとき，F を**右完全** (right-exact)，G を**反変左完全** (contravariant left-exact) であるという．

§4　帰納極限，射影極限

完備化の文脈で極限を考察する必要があることから，この節では極限についてまとめておく．なお第 4 章で参照することを鑑みて，圏の言葉を知らずとも理解できるように配慮した．

定義 *B.4.1*（前順序）

集合 A とその上の関係 $\leq$ に対し，反射律と推移律を満たすとき $\leq$ を**前順序** (preorder) といい，A を**前順序集合** (preordered set) という．

定義 *B.4.2*（有向集合）

A を前順序集合とする．任意の有限部分集合 $X \subset A$ が上界を持つとき，A を**有向集合** (directed set) またはフィルター付き集合 (filterd set) という．

定義 *B.4.3*（帰納系）

I を有向集合とする．各 $i \in I$ について集合 A_i が存在し，また $i \leq j$ となる $i, j \in I$ に対して写像 $\varphi_{ij} : A_i \to A_j$ が与えられ，次を満たすとき $(A_i, \varphi_{ij})_{i,j \in I}$ を集合の**帰納系** (inductive system) または**順系** (direct system) という．しばしば (A_i) と略す．

(IS1) 任意の $i \in I$ に対し $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ である．
(IS2) $i, j, k \in I$ が $i \leq j \leq k$ を満たすなら，$\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ である．

定義 *B.4.4*（射影系）

帰納系の写像の向きを逆にしたものを**射影系** (projective system) または**逆系** (inverse system) という．すなわち各 $i \in I$ について集合 A_i が存在し，また $i \leq j$ となる $i, j \in I$ に対して写像 $\varphi_{ji} : A_j \to A_i$ が与えられ，次を満たすとき $(A_i, \varphi_{ji})_{i,j \in I}$ を集合の射影系といい，(A_i) と略す．

(PS1) 任意の $i \in I$ に対し $\varphi_{ii} = \mathrm{id}_{A_i}$ である．
(PS2) $i, j, k \in I$ が $i \leq j \leq k$ を満たすなら，$\varphi_{ki} = \varphi_{ji} \circ \varphi_{kj}$ である．

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & A_k \\ & A_j \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

Figure.37　帰納系

$$\begin{tikzcd} A_i & & A_k \arrow[ll, "\varphi_{ki}"'] \arrow[dl, "\varphi_{kj}"] \\ & A_j \arrow[ul, "\varphi_{ji}"] & \end{tikzcd}$$

Figure.38　射影系

帰納系，射影系の定義において，例えば集合を加群，写像を準同型写像と置き換えると加群の系が得られる．圏の言葉で言えば，各 i について圏 $\mathscr{C}$ の対象 A_i を与え，射 φ_{ij}(resp.φ_{ji}) を条件を満たすように定めれば圏 $\mathscr{C}$ の系となる．そのため，以下集合の写像についても射という言葉を用いる．

定義 *B.4.5*（帰納系，射影系の射）

$(A_i), (B_i)$ を帰納系とする．このとき (A_i) から (B_i) への帰納系射 (morphism) とは，$f_i : A_i \to B_i$ となる射の族 (f_i) で，任意の $i \leq j$ について Figure.39 が可換であるものをいう．射影系の射については Figure.40 が可換であるものをいう．

$$
\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\varphi_{ij}"] & B_i \arrow[d, "\psi_{ij}"] \\
A_j \arrow[r, "f_j"] & B_j
\end{tikzcd}
$$

Figure.39　帰納系の射

$$
\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "f_i"] & B_i \\
A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[u, "\varphi_{ji}"] & B_j \arrow[u, "\psi_{ji}"']
\end{tikzcd}
$$

Figure.40　射影系の射

次のような列；

$$
\cdots \longrightarrow A^3 \longrightarrow A^2 \longrightarrow A^1 \longrightarrow 0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow \cdots
$$

を考えよう．また $A_0 = A^0 = 0$ として，$\{A_i\}, \{A^i\}$ がそれぞれ（$\mathbb{N}$ を有向集合とする）帰納系，射影系をなしているとする．この列において "右にずっと行ったところ" と "左にずっと行ったところ"，つまり極限を考えるものが帰納極限と射影極限である．それぞれ定義のあとの図もみよ．

定義 *B.4.6*（帰納極限）

(A_i) を帰納系とする．A 及び射の族 $\varphi_i : A \to A_i$ の組 (A, φ_i) で，次の条件；

(IL1) $i \leq j$ に対し $\varphi_j \circ \varphi_{ij} = \varphi_i$.

(IL2) 任意の集合 B と，任意の射の族 $f_i : A_i$ で $i \leq j$ に対し $f_j \circ \varphi_{ij} = f_i$ となるものに対して，射 $f : A \to B$ で $f_i = f \circ \varphi_i$ となるものが一意的に存在する．

を満たすものを帰納極限 (inductive limit) または順極限 (direct limit) といい，$\varinjlim_{i \in I} A_i$ とかく．

$$
\begin{tikzcd}
 & i \leq j & & & \\
\cdots \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[rrrd, bend right, "f_i"'] & A_j \arrow[r] \arrow[rrd, "f_j"] & \cdots \arrow[r] & \varinjlim A_i \arrow[d, dashed, "f"] \\
 & & & & B
\end{tikzcd}
$$

Figure.41　帰納極限

定義 *B.4.7*（射影極限）

(A_i) を射影系とする．A 及び射の族 $\varphi_i : A \to A_i$ の組 (A, φ_i) で，次の条件；

(PL1) $i \leq j$ に対し $\varphi_{ji} \circ \varphi_j = \varphi_i$.

(PL2) 任意の集合 B と，任意の射の族 $f_i : B \to A_i$ で $i \leq j$ に対し $\varphi_{ji} \circ f_i = f_j$ となるものに対して，射 $f : B \to A$ で $f_i = \varphi_i \circ f$ となるものが一意的に存在する．

を満たすものを**射影極限** (projective limit) または**逆極限** (inverse limit) といい，$A := \varprojlim_{i \in I} A_i$ とかく．

$$j \geq i$$

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim A_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A_j \arrow[r, "\varphi_{ji}"] & A_i \arrow[r] & \cdots \\
B \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[urr, "f_j"] \arrow[urrr, bend right, "f_i"']
\end{tikzcd}$$

Figure.42　射影極限

普遍性からの標準的な結果によって，射影極限や帰納極限は同型を除いて一意的である．加群の圏において必ず極限が存在することを示そう．

定理 *B.4.8*

加群の帰納系 (M_i) について必ず帰納極限が存在する．

証明.

直和 $\oplus M_i$ を考え，自然な単射を $\iota_i : M_i \to M$ とする．$\oplus M_i$ の部分集合；

$$S = \left\{ \iota_j(f_{ij}(x_i)) - \iota_i(x_i) \;\middle|\; i < j, x_i \in M_i \right\}$$

が生成する $\oplus M_i$ の部分加群を N とする．このとき $M = \oplus M_i / N$ について自然な準同型 $\pi : \oplus M_i \to M$ に対して $\varphi_i = \pi \circ \iota_i : M_i \to M$ と定義することで (M, φ_i) は帰納極限の普遍性を満たす．（証明終）

定理 *B.4.9*

加群の射影系 (M_i) について必ず射影極限が存在する．

証明.

直積 $\prod M_i$ の部分加群；

$$M = \left\{ (x_i) \in \prod M_i \;\middle|\; \text{任意の } i \leq j \text{ について } x_j = \varphi_{ji}(x_i) \right\}$$

を考える．φ_i を自然な射影 $M \to M_i$ と定めることで，(M, φ_i) は射影極限の普遍性を満たす．（証明終）

定義 *B.4.10*

帰納（射影）系 $(A_i), (B_i), (C_i)$ に対し，その間の射 $(f_i), (g_i)$ が各 i について系列；

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{f_i} B_i \xrightarrow{g_i} C_i \longrightarrow 0$$

を完全にするとき；

$$0 \longrightarrow (A_i) \xrightarrow{(f_i)} (B_i) \xrightarrow{(g_i)} (C_i) \longrightarrow 0$$

を系の（短）完全列であるという．

加群の帰納（射影）系の系列に対して，極限をとることで自然な系列が誘導される．すなわち，帰納系の射 $(f_i) : (A_i) \to (B_i)$ について $f : \varprojlim A_i \to \varprojlim B_i ; (x_i) \mapsto (f_i(x_i))$ と定めると，これは準同型になる．射影極限についても同様．これにより圏の言葉で言えば極限をとることは関手になり，特に帰納極限は完全関手となる．すなわち完全列の帰納極限は完全列となるが，射影極限についてはそうとは限らない．

命題 *B.4.11*

帰納極限は完全関手である．すなわち帰納系 $(A_i, \varphi_{ij}), (B_i, \psi_{ij}), (C_i, \omega_{ij})$ について；

$$0 \longrightarrow (A_i) \xrightarrow{(f_i)} (B_i) \xrightarrow{(g_i)} (C_i) \longrightarrow 0$$

が完全であるとき；

$$0 \longrightarrow \varinjlim A \xrightarrow{f} \varinjlim B \xrightarrow{g} \varinjlim C \longrightarrow 0$$

は完全である．

証明.

Step 1. f の単射性.

任意の $x \in \varinjlim A_i$ をとり，$f(x) = 0$ と仮定する．$x = \varphi_i(x_i)$ となる x_i をとると $f(x) = f_i(x_i) = 0$ であるので，f_i は単射だから $x_i = 0$ である．よって x は 0 で代表されるから $x = 0$ となる．

Step 2. $\operatorname{Im} f = \ker g$ であること.

1°) 任意の $y \in \ker g$ をとる．$y = \psi_i(y_i)$ となる y_i をとると，$g(y) = (\omega_i \circ g_i)(y_i) = 0$ である．よって帰納極限の構成からある $i \leq j$ がとれて $\omega_{ij}(g_i(y_i)) = 0$ となる．ここで $\omega_{ij} \circ g_i = g_j \circ \psi_{ij}$ であるので $\psi_{ij}(y_i) \in \ker g_j = \operatorname{Im} f_j$ である．よってある $x_j \in A_j$ がとれて $f_j(x_j) = \psi_{ij}(y_i)$ となる．ゆえに $f(\varphi_j(x_j)) = (\psi_j \circ \psi_{ij})(y_i) = \psi_i(y_i) = y$ となり $y \in \operatorname{Im} f$ である．

$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "f_j"] \arrow[d, "\varphi_j"] & B_j \arrow[d, "\psi_j"] & B_i \arrow[l, "\psi_{ij}"'] \arrow[dl, "\psi_i"] \\ \varinjlim A_i \arrow[r, "f"] & \varinjlim B_i & \end{tikzcd}$$

2°) 任意の $y \in \operatorname{Im} f$ をとる．すなわち，ある $x \in \varinjlim A_i$ がとれて $f(x) = y$ である．ここで $x = \varphi_i(x_i)$ となる $x_i \in A_i$ をとる．すると $\psi_i(f(x_i)) = y$ となる．よって $g(y) = (\omega_i \circ g_i)(f(x_i)) = \omega(0) = 0$

となるので $y \in \ker g$ である．

Step 3. g の全射性.

任意の $z \in \varinjlim C_i$ をとる．$\omega_i(z_i) = z$ となる $z_i \in C_i$ をとると，g_i は全射なのである y_i がとれて $g(y_i) = z_i$ である．ここで $y = \psi_i(y_i)$ とおくと $g(y) = (\omega_i \circ g_i)(y_i) = \omega_i(z_i) = z$ となる．

（証明終）

射影極限については一般に全射性は保存されない．

命題 B.4.12

加群の射影極限は左完全関手である．すなわち，射影系 $(A_i, \varphi_{ij}), (B_i, \psi_{ij}), (C_i, \omega_{ij})$ の完全列；

$$0 \longrightarrow (A_i) \xrightarrow{(f_i)} (B_i) \xrightarrow{(g_i)} (C_i) \longrightarrow 0$$

に対して；

$$0 \longrightarrow \varprojlim A_i \xrightarrow{f} \varprojlim B_i \xrightarrow{g} \varprojlim C_i$$

は完全である．

証明.

帰納極限と同様に構成から左完全であることは明らか（本質的に図式追跡）である．（証明終）

射影極限が完全となるための条件を 1 つ与えよう．

定義 B.4.13（全射的系）

射影系 (A_i, φ_{ij}) について，各 i について $\varphi_{i+1,i}$ が全射であるとき (A_i) を**全射的系** (surjective system) であるという．

定理 B.4.14

加群の射影系の完全列；

$$0 \longrightarrow (A_i) \xrightarrow{(f_i)} (B_i) \xrightarrow{(g_i)} (C_i) \longrightarrow 0$$

において，(A_i) が全射的ならば；

$$0 \longrightarrow \varprojlim A_i \xrightarrow{f} \varprojlim B_i \xrightarrow{g} \varprojlim C_i \longrightarrow 0$$

は完全である．

証明.

g の全射性のみ示せばよい．任意の $(z_i) \in \varprojlim C_i$ をとる．帰納的に (y_i) を構成しよう．すなわち $y_i \in B_i$ で $\psi_i(y_i) = z_i$ となるものがあるとき，$y_{i+1} \in B_{i+1}$ で $\psi_{i+1}(y_{i+1}) = y_i, g_{i+1}(y_{i+1}) = z_{i+1}$ となるものを作ればよい．

z_{i+1} に対して $g_{i+1}(y'_{i+1}) = z_{i+1}$ となるものをとる．すると $g_i(y_i) = z_i = \omega_{i+1}(z_{i+1}) = g_i(\psi_{i+1}(y'_{i+1}))$ より $y_i - \psi_{i+1}(y'_{i+1}) \in \operatorname{Im} f_i$ である．よって $y_i - \psi_{i+1}(y'_{i+1}) = f_i(x_i)$ となる $x_i \in A_i$ がとれる．いま $\varphi_{i+1} : A_{i+1} \to A_i$ は全射なので，$\varphi_{i+1}(x_{i+1}) = x_i$ となるものをとると $y_i - \psi_{i+1}(y'_{i+1}) = f_i(\varphi_{i+1}(x_{i+1})) = \psi_{i+1}(f_{i+1}(x_{i+1}))$ となり，$y_i = \psi_{i+1}(y'_{i+1} + f_{i+1}(x_{i+1}))$ である．ここで $y_{i+1} = y'_{i+1} + f_{i+1}(x_{i+1})$ とおけば条件を満たす．（証明終）

索引

た

な

は

ま

や

ら

参考文献

[1] 松村英之 (1980)『復刊 可換環論』，共立出版，（M. Reid 訳，『Commutative Ring Theory』，Cambridge University Press，1989 年）.

[2] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald (1969) *Introduction to commutative algebra* : Addison–Wesley, （新妻弘訳，『可換代数入門』，共立出版，2006 年）.

[3] 後藤四郎・渡辺敬一 (2011)『可換環論』，日本評論社.

[4] 永田雅宜 (1974)『可換環論』，紀伊國屋書店.

[5] 飯高茂 (1977)『岩波講座 基礎数学 代数学 iv 可換環論』，岩波書店.

[6] Eisenbad David (1995) *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* : Springer.

[7] Robin Hartshorne (1977) *Algebraic Geometry* : Springer, （高橋宣熊・松下大介訳，『代数幾何学 1,2,3』，シュプリンガー・フェアラーク東京，2004 年）.

[8] 志甫淳 (2016)『層とホモロジー代数』，共立出版.

[9] 河田敬義 (1976)『岩波講座 基礎数学 代数学 iii ホモロジー代数』，岩波書店.

[10] 加藤五郎 (2003)『コホモロジーのこころ』，岩波書店.

[11] Jan-Erik Björk (1973) “Noetherian and artinian chain conditions of associative rings” *Archiv der Mathematik*, Vol. 24, No. 1, pp. 366–378, DOI: 10.1007/BF01228225.

[12] Edward Formanek (1973) “Faithful Noetherian Modules” *Proceedings of The American Mathematical Society - PROC AMER MATH SOC*, Vol. 41, DOI: 10.2307/2039099.

[13] Masayoshi Nagata (1956) “On the Chain Problem of Prime Ideals” *Nagoya Mathematical Journal*, Vol. 10, pp. 51–64, DOI: 10.1017/S0027763000000076.

[14] Kriti Goel, Dilip P. Patil, and Jugal Verma (2018) “Nullstellensätze and Applications”，arXiv: 1809.02818.