ZFC+U のおはなし

安藤 遼哉 *

2022 年 1 月 31 日

* 東京理科大学理工学研究科数学専攻修士課程２年

はじめに

[] における集合の濃度，順序数の定義は素朴には理解しやすい．しかし「集合全体」を「同値関係で割る」という議論は（公理的）集合論的にはアヤシイを通り越してやってはいけない議論である．本稿は公理的集合論入門と銘打って，集合論的に問題のない濃度の定義を紹介するものである．その後筆者の時間が許す限り可換代数について公理的集合論と関係する話題，すなわち選択公理と同値な命題群の紹介や Grothendieck 宇宙の話などを述べたい．本稿で引用した数々の文献について，年代が古いものが多いことからインターネット上であっても原文を見つけるのが困難な作品も少なくないが，引用したもののうち [], [], [], [], [], [], [] については [] に英訳が収録されていることを注意しておく．

本稿は東京理科大学大橋研究室において，2021 年度の卒業文集に寄稿するために書かれたものである．この文集は学部生の卒業に際し卒業論文集として企画されているものであり，筆者はほとんどの学部生とは直接の面識はないが，修士課程を修了するにあたり形式上はいったん卒業すること，また学士修了時に卒業論文を書かなかったことから，よい機会と思って楽しく本稿を書かせていただいた．本稿の内容の一部はセミナーで発表したものに基づいている．セミナーに出席していただき，コメントを頂いた浅川，榎園，大橋，金子，松本の各位に感謝する．

目次

公理的集合論入門

—Introduction to Axiomatic Set Theory

§ 1　公理系 ZF

まず，「素朴な」集合論のもとに濃度について [] に基づいて定義を述べる．しかしそれに伴って（公理的）集合論として適切でない議論を行うので，Bourbaki によって導入された「危険な曲がり角 (tournant dangereux)」によって注意することにする．[*1]

集合全体の集合を $\mathfrak{S}$ とおく．

$$X \sim Y \iff \text{全単射 } f : X \to Y \text{ が存在する．}$$

と定めると $\sim$ は $\mathfrak{S}$ 上の同値関係をなすことが容易に確かめられ，これによる商集合 $\mathfrak{S}/\sim$ と自然な写像 $\pi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}/\sim$ がある．任意の集合 X について $\#X := \pi(X)$ とおく．このとき $\#X$ を X の**濃度 (cardinality)** という．また；

$$\#X \leq \#Y \iff \text{単射 } f : X \to Y \text{ が存在する．}$$

と定めると $\mathfrak{S}/\sim$ には順序が定まる．

ここでは濃度を考える際に「集合全体の集合」を考えてしまったが，これは矛盾を引き起こしてしまう．集合 X について，その冪集合を $\mathfrak{P}(X) := \{Y \mid Y \subset X\}$ で表す．

定理 *1.1*（Cantor）
X を集合とする．X から $\mathfrak{P}(X)$ への全射は存在しない．特に $\mathfrak{P}(X)$ から X への単射は存在しない．

証明.
全射 $f : X \to \mathfrak{P}(X)$ が存在したとする．$Y := \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ とおくと，$Y \in \mathfrak{P}(X)$ なのである $x' \in X$ によって $Y = f(x')$ とかけるが，構成により $x' \in Y$ としても $x' \notin Y$ としても矛盾する．よって全射は存在しない．

また，自然な単射 $X \to \mathfrak{P}(X)$ が存在するので，Bernstein の定理から単射 $\mathfrak{P}(X) \to X$ も存在しない．（証明終）

この定理は任意の集合についてその冪集合の濃度はもとの集合の濃度より必ず大きくなる，ということを主張している．$\mathfrak{S}$ をすべての集合を含む集合とすると，自然な包含 $\mathfrak{P}(\mathfrak{S}) \hookrightarrow \mathfrak{S}$ があるが，これは Cantor の定理に矛盾している．これは Cantor のパラドックスといわれる．この問題は集合を素朴に「物の集まり」と考えるだけではいけない，ということを示唆するもので，同様に $\left\{X : \text{集合} \;\middle|\; X \notin X\right\}$ も集合としてしまうと容易に矛盾を引き起こす．$Y := \left\{X : \text{集合} \;\middle|\; X \notin X\right\}$ を集合とすると，$Y \in Y$ ならば定義より $Y \notin Y$ なので矛盾する．よって $Y \notin Y$ だが，すると $Y \in Y$ となり矛盾を引き起こす．これは Russell のパラドックスと呼ばれている．

[*1] 本来の使い方は躓きやすい場所を注意するものなので，すこし使い方がずれていますが……．

このパラドックスは（Russell より早く）Zermelo によっても発見されており（[]），これが Zermelo, Fraenkel らによる ZF 公理系の定義のモチベーションとなった．それは [] の序文における次の文章にも現れていよう；

Angesichts namentlich der “Russellschen Antinomie” von der “Menge aller Mengen, welche sich selbst nicht als Element enthalten” scheint es heute nicht mehr zulässig, einem beliebigen logisch definierbaren Begriffe eine “Menge” oder “Klasse” als seinen “Umfang” zuzuweisen.

先程の濃度の議論にような集合を取り扱う際に公理に注目せずに議論を行う集合論を**素朴集合論 (naive set theory)** というのに対して，公理を明確に設定し，集合として取り扱う対象を限定する集合論を**公理的集合論 (axiomatic set theory)** という．現代の数学の多くでは公理系として **ZFC (Zermelo–Fraenkel set-theory with the Axiom of Choice)** が採用されている．通常数学を行う際には（歴史的な事情もあり，選択公理以外の）特定の公理について気にすることはほとんどないが，前述のように「何を集合として扱ってもよいのか」を明確にすることは大切である．これは圏論などの高度に抽象的な技法（のなかでも 2-圏などの繊細なものを，implicit にしろ explicit にしろ）を多用するようになった現代では，自分の操作が直接見えないところで集合論的な矛盾を引き起こす可能性について，慎重になるにこしたことはないであろう．

さて，ここでは論理記号 $\in, =$ を備えた等号付き（１階）述語論理の言葉で ZFC の公理を列挙していこう．量化された自由変数は当然集合のことであり，たとえば以下の式における $\forall x$ は「すべての集合 x について」と解釈される．また，述語論理の意味論において**議論領域 (universe of discourse)** は空であってはならないので，論理側の要請から集合の存在は（ZFC とは無関係に）仮定されていることに注意する．この意味で，ZFC とは集合が存在するという仮定をもとに，何が集合であるかを規定しているものであると考えることもできる．

公理 1.（外延性公理 (Axiom of Extensionality)）

$$\forall x(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b$$

この公理は，集合の相等は元が等しいことにほかならないと主張する．$\forall z(z \in b \to z \in a)$ の略記として $b \subset a$ を導入すると，$a = b \leftrightarrow (a \subset b) \wedge (b \subset a)$ である．論理において $\to$ を $\varphi \to \psi$ は $(\neg\varphi) \vee \psi$ に等しいとして導入したように，集合論においてもある論理式の略記として記号を導入する．

公理 2.（空集合の公理 (Axiom of Empty set)）

$$\exists x \forall y(\neg y \in x)$$

外延性公理からこのような集合は一意に定まり，これを**空集合 (empty set)** といい $\emptyset$ で表す．

公理 3.（対の公理 (Axiom of Pairing)）

$$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow (y = a \vee y = b))$$

集合 a, b が与えられたとき，対の公理により a, b のみを要素にもつ集合が定まり，外延性公理から一意に定まるのでそれを $\{a, b\}$ とかく．$a = b$ のときの $\{a\} \coloneqq \{a, a\}$ を**一元集合 (singleton)** という．

公理 4.（和の公理 (Axiom of Union)）

$$\exists x \forall y(y \in x \leftrightarrow \exists z(z \in a \wedge y \in z))$$

集合 a が与えられたとき，その元の元をすべて集めた集合の存在を主張するのが和の公理である．このとき公理から存在する集合 x を（外延性公理から一意に定まり）$\bigcup a$ で表す．ここで $b \in a$ ならば $b \subset \bigcup a$ であることに注意しよう．また集合 $\{a, b\}$ に対して，公理から存在する和集合を $a \cup b$ で表す．対の公理から２元集合と１元集合が作れたが，和の公理と組み合わせることで任意の $a_1, \ldots, a_r$ について $\{a_1, \ldots, a_r\}$ を作ることができる．

公理 5.（冪集合の公理 (Axiom of Power set)）

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \subset a)$$

集合 a が与えられたとき，その部分集合全体の集合 x の存在を主張するのがこの公理である．このような x も一意にさだまり，これを $\mathfrak{P}(a)$ とかいて a の**冪集合 (power set)** という．

次に述べる公理は等号の公理とおなじく，各論理式 φ に対する公理の集まりである．このような公理の集まりを**公理図式 (axiom schema)** という．

公理 6.（置換公理 (Axiom of Replacement)）

$$\forall y (y \in a \to \forall u \forall v (\varphi(y, u) \land \varphi(y, v) \to u = v)) \to \exists x \forall u (u \in x \leftrightarrow \exists y (y \in a \land \varphi(y, u)))$$

この置換公理は，大雑把に言えば写像とその像の存在を主張する．公理における；

$$\forall y (y \in a \to \forall u \forall v (\varphi(y, u) \land \varphi(y, v) \to u = v))$$

の部分は，論理式 φ が集合 a 上で関数的であると述べている．すなわち，各 $y \in a$ に対して $\varphi(y, u)$ を満たすような u は存在すればただ 1 つに定まるから，それを $\varphi(y)$ と書くことにすれば φ は a（上の一部分）で定義された関数 $y \mapsto \varphi(y)$ を定めていると思える．このとき，このような $\varphi(y)$ 全体を集めてきた集合，すなわち**像 (image)** が存在するといっているのがこの置換公理である．公理文の後半の部分もなんだか仰々しいが，これは見慣れた言葉で書くと $\{u \mid \exists y \in a; \varphi(y) = u\}$ が集合であると言っているにすぎない．

命題 *1.2*（分出公理 (Axiom of Separation)）

a を集合，φ を x を自由変数に持たない論理式とする．このとき；

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow (y \in a \land \varphi(y)))$$

が成り立つ．

最初に主張の気持ちを説明しておこう．集合 a と論理式 φ があったときに，集合 $\{y \in a \mid \varphi(y)\}$ が存在することを主張するのが分出公理である．これは内包性公理 (axiom of comprehension) とも呼ばれる．「公理」と呼ばれているものの，分出公理はこれまでの公理群から導出される．それにともなっていまの公理系では公理ではないのだが，歴史的経緯から分出「公理」と呼ばれる．まずは証明してしまおう．

証明.

a を集合，φ を x を自由変数に持たない論理式とする．このとき ψ を $\varphi(y) \land (u = y)$ で定義される論理式とすると，置換公理から；

$$\exists x \forall u (u \in x \leftrightarrow \exists y (y \in a \land \varphi(y) \land (u = y)))$$

となる．よって；

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \in a \land \varphi(y))$$

が証明できた．（証明終）

歴史的な事情についてすこしコメントしておこう．前述の通り，各パラドックスを受けて公理的集合論を創始したのは [] であった．その際 Zermelo は分出公理を公理とおいている (Axiom der Aussonderung)．それを改良し，分出公理を置換公理に取り替えたのが [] である．本稿で述べている主張は述語論理の形式に則ったものであるが，Zermelo, Fraenkel の原論文では述語論理の形式をとっておらず，分出公理，置換公理の主張で

は本稿では論理式を用いた部分に「集合に対する**確定的 (definit)** な性質」という用語を用いている．以下に Zermelo による分出公理の主張を原論文からそのまま引用してしまおう；

Ist die Klassenaussage $\mathfrak{E}(x)$ definit für alle Elemente einer Menge M, so besitzt M immer eine Untermenge $M_{\mathfrak{E}}$, welche alle diejenigen Elemente x von M, für welche $\mathfrak{E}(x)$ wahr ist, und nur solche als Elemente enthält.

この “definiten Klassenaussage” の不明確さは [] らによって指摘されている．そこで，本稿で述べているような述語論理を用いた形式化を行ったのが [] であった．それとは独立に [] によっても修正が試みられている．より詳しくは []，[] を見てほしい．

分出公理について，（述語論理による定式化下においても）素朴に考えてしまうと集合論的危うさを引き起こすことがあるので注意しなくてはならない．まず 1 つ目に，論理式 φ に対して $\{y \mid \varphi(y)\}$ を考えることはできない．たとえば φ として $y \notin y$ とすると，$\{y \mid y \notin y\}$ が集合であると主張することになり，Russell のパラドックスを引き起こす．しかしながら述語論理の意味論においては論理式を考える際に，議論領域 U において $\{y \mid \varphi(y)\}$ を考えることになるから，集合ではないがメタ論理の対象としてこのようなものは存在している．そのようなものを**クラス (class)** といい，特に集合でないもの（集合とすると ZFC で矛盾するもの）を**真クラス (proper class)** と呼んだりする．真クラスは ZFC 内では取り扱うことができないが，圏論などを考える際には有益であるので（インフォーマルに）しばしば現れる．これをフォーマルに取り扱うためには，ZFC とは異なる公理系を用いた定式化をせねばならないことに注意しなければならない（例えば付録における宇宙公理）．

次に論理式の条件「x を自由変数に持たない」も蔑ろにしてしまうと矛盾を引き起こす．たとえば φ として $y \notin x$ のようなものを考えると，任意の集合 a に対して；

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \in a \land y \notin x)$$

が成り立ち，これは外延性公理から $a = \emptyset$ を導く．すると対の公理から $\emptyset = \{\emptyset\}$ であるが，これは外延性公理に矛盾している．

とはいえ論理式の条件に気をつけさえすれれば「与えられた集合について，その元であって論理式 φ を満たすもの全体からなる部分集合を取り出すことができる」という分出公理は非常に強力で，この公理のもとで直積や写像を構成することができる（先程は置換公理が写像と像を構成すると書いたが，実際にはほとんど分出公理の形で使う）．

これらの数学的対象が構成される様を眺めてみよう．外延性公理，対の公理，和の公理，冪集合の公理も特に断らずに用いる．２つの集合 x, y に対し，**順序対 (ordered pair)** を $(x, y) \coloneqq \{\{x\}, \{x, y\}\}$ で定める．$(x, y) = (x', y') \leftrightarrow x = x' \land y = y'$ であることに注意しよう．

また通常の数学と同様に，論理式 φ に対していくつかの略記を導入する．まず φ を満たす y が一意に存在する，という記号 $\exists! y(\varphi(y))$ を $\exists y(\varphi(y) \land \forall x(\varphi(x) \to x = y))$ の略記として導入する．同様に $\forall x \in a, \varphi(x)$ を $\forall x(x \in a \to \varphi(x))$ の，$\exists x \in a; \varphi(x)$ を $\exists x(x \in a \land \varphi(x))$ の略記とする．

構成 1.3

a, b を集合とする．直積 $a \times b$ を構成しよう．各 $x \in a, y \in b$ について $(x, y) \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b))$ であり，分出公理から；

$$a \times b \coloneqq \{u \in \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(a \cup b)) \mid \exists x \in a; \exists y \in b; u = (x, y))\}$$

が存在する．

定義から $a = \emptyset$ または $b = \emptyset$ ならば $a \times b = \emptyset$ であることに注意しよう．

構成 1.4

次は写像 $f : a \to b$ を構成しよう．$f \subset a \times b$ を，a から b への**対応 (corresponding)** という．

$$f(a) \coloneqq \{y \in b \mid \exists x \in a; (x, y) \in f\}$$

を a の f による**像 (image)** という．また $a' \subset a$ について，$f(a') \coloneqq \{y \in b \mid \exists x \in a'; (x, y) \in f\}$ と定義する．対応 f について，$\forall x \in a, \exists y \in b; f(\{x\}) = \{y\}$ が成り立つとき f は**写像 (map)** であるといい，$f : a \to b$ と表す．またこのとき $f(x) \coloneqq y$ と表す．また元の対応を明示して $f : a \to b; x \mapsto y$ などのように書くこともある．

写像 $f : a \to b$ について全射，単射，全単射が通常通り定義できる．また集合 a について**恒等写像 (identity map)** とは $\{(x, x) \mid x \in a\} \subset a \times a$ で定義される写像 $\mathrm{id}_a : a \to a; x \mapsto x$ のことであり，これは明らかに全単射である．

また任意の集合 a について $\emptyset \times a = \emptyset$ だから，対応 $\emptyset \to a$ が一意に存在する．このときこれは写像であり，これを**空写像 (empty map)** という．また対応 $a \to \emptyset$ も一意に存在するが，$a \neq \emptyset$ のとき任意の $x \in a$ に対しその像は空集合であるのでこれは写像ではない．以上より空集合を始域とする写像はただ 1 つ存在し，空でない集合から空集合を終域とする写像は存在しないことがわかる（圏の言葉で言えば，集合の圏で空集合は始対象であり終対象ではない）．空写像は単射の定義を満たし終域も空集合なら全単射である．

構成 1.5

次に集合の共通部分について定義しておこう．a を空でない集合とする．

$$\bigcap a \coloneqq \left\{x \in \bigcup a \;\middle|\; \forall y \in a, x \in y\right\}$$

を a の共通部分という．和集合と同様に $\{a, b\}$ について $a \cap b \coloneqq \bigcap\{a, b\}$ とする．

構成 1.6

集合の差についても定義しておく．a, b を集合とするとき；

$$a \setminus b \coloneqq \{x \in a \mid x \notin b\}$$

で定義する．

また Cantor の定理（定理 1.1）を使わずに，分出公理からすべての集合の集合の存在を否定できる．

命題 *1.7*

すべての集合の集合は存在しない．すなわち $\forall a \exists b (b \notin a)$ が成り立つ．

証明.

a を任意の集合とする．論理式 $y \notin y$ に対して分出公理を用いると；

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow (y \in a \land y \notin y))$$

が成り立つ．ここで $x \in a$ と仮定すると，$x \in x \leftrightarrow x \notin x$ となってしまうので $x \notin a$ である． （証明終）

分出公理によって直積や写像を構成できたが，具体的に構成できた集合は空集合にこれらの操作を繰り返して得られたものに過ぎない．では通常の数学で使われる「数」はどのように定義される（構成される）のだろうか？ここでは自然数の [] による定義と，[] による構成を紹介しよう．なお「Peano の公理によって自然数

が構成される」という言明は間違いで，Peano の公理系を満たすものを自然数と呼ぶ，というべきである．また次に述べる Peano の公理自体は加法や乗法については何も規定しないことに注意が必要である．実際には Peano は公理系を定義する際に加法を演算（述語論理の言葉で言えば関数記号）として導入した．加法や乗法なども含めた公理系は **Peano 算術 (arithmetic)** と呼ばれる．本稿では Peano 算術については扱わない．

定義 *1.8*（Peano システム）

集合 N, S, O が次の条件；

(PS1) $O \in N$.

(PS2) $S \subset N \times N, \forall n \in N, \exists m \in N; S(\{n\}) = \{m\}$.

(PS3) $\forall n \in N, S(n) \neq O$.

(PS4) $\forall m, n \in N, (S(m) = S(n) \rightarrow m = n)$.

(PS5) $\forall a \in \mathfrak{P}(N), ((O \in a \wedge (\forall n \in a, S(n) \in a)) \rightarrow a = N)$.

をすべて満たすとき，組 (N, S, O) を **Peano システム**という．

上の定義では仰々しくすべて論理式を用いて書いたが，要は O とはゼロの抽象化であり，(PS2), (PS4) は S が N から N への単射であることを，(PS5) は O を含み S で閉じているような N の部分集合は N そのものであると言っているだけに過ぎず，実態は帰納法の原理そのものである．命題 1.12 の証明を見よ．さて Peano システムの例を挙げたいのだが，そのために無限公理を使う．

定義 *1.9*（帰納的集合）

集合 x について，$\emptyset \in x$ かつ $\forall y \in x, y \cup \{y\} \in x$ を満たすとき x を**帰納的 (inductive)** であるという．

このような集合の存在を保証するのが次の無限公理である．

公理 7.（無限公理 (Axiom of Infinity)）

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)$$

命題 *1.10*

帰納的集合 x について；

$$N_x := \bigcap \left\{ a \in \mathfrak{P}(x) \,\middle|\, a : \text{帰納的} \right\}$$

と定める．このとき任意の帰納的集合 y について $N_x = N_y$ であり，これを $\mathbb{N}$ で表す．

主張における「任意の帰納的集合 y について $N_x = N_y$」は，論理式としては $\forall y \in \left\{ u \,\middle|\, u : \text{帰納的} \right\}, N_x = N_y$ **ではなく**，$\forall y(y : \text{帰納的} \rightarrow N_x = N_y)$ を表していると解釈する．このような略記を認めれば，「帰納的集合全体のクラス」が集合かどうかを気にせずに，普段の数学と同様の言葉使いができる．

証明.

$N_x \subset N_y$ を示せばよい．任意の $a \subset y$ で帰納的なものをとると，$\emptyset \in a \cap x$ であって，定義からこれも帰納的．すると $a \cap x \subset x$ であるので，$N_x \subset x \cap a \subset a$ である．よって $N_x \subset N_y$ であることがわかった．（証明終）

これで well-defined にさだまった $\mathbb{N}$ を自然数全体の集合とする．

例 *1.11*（Peano システムの標準的構成）

上の命題における $\mathbb{N}$ について，$\mathrm{suc} := \{(a, a \cup \{a\}) \mid a \in \mathbb{N}\}$ と定める．すなわち；

$$\mathrm{suc} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; a \mapsto a \cup \{a\}$$

とする．このとき $(\mathbb{N}, \mathrm{suc}, \emptyset)$ は Peano システムである．

これが Paeno システムの定義を満たすことを確かめるのは手の運動だろう．この Peano システムにおいて，$0 := \emptyset, 1 := \mathrm{suc}(0) = \{\emptyset\}, 2 := \mathrm{suc}(1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \cdots$ とおく．また $n \in \mathbb{N}$ について $n+1 := \mathrm{suc}(n)$ と表す．これを Peano システムの標準的な構成という．自然数 $\mathbb{N}$ を使って，写像の再帰的な定義を正当化し，Peano システムの一意性について見ていこう．

命題 *1.12*（再帰的構成の原理）

x を集合とし，$y_0 \in x, g : \mathbb{N} \times x \to x$ とする．このとき，写像 $f : \mathbb{N} \to x$ が一意に存在して，$f(0) = y_0$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f(n+1) = g(n, f(n))$ を満たす．

証明.

$\mathscr{F} := \{a \subset \mathbb{N} \times x \mid (0, y_0) \in a \land \forall (n, y) \in a, (n+1, g(n, y)) \in a\}$ とおく．$N \times x \in \mathscr{F} \neq \emptyset$ である．ここで $f := \bigcap \mathscr{F}$ とおく．$f \in \mathscr{F}$ に注意する．f が写像であることを示そう．すなわち $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! y \in x; (n, y) \in f$ を示す．

$N := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists! y \in x; (n, y) \in f\}$ とおく．まず $0 \in N$ であることを示す．$y_1 \in x$ について $(0, y_1) \in f$ であったとする．このとき $f' := f \setminus \{(0, y_1)\}$ とおくと．任意の $(n, y) \in f'$ について $(n+1, g(n, y)) \neq (0, y_1)$ なので $(n+1, g(n, y)) \in f'$ である．よってもし $(0, y_0) \in f'$ ならば $f' \in \mathscr{F}$ となるので f の最小性に矛盾するから $(0, y_0) \notin f'$ すなわち $y_0 = y_1$ でなければならない．ゆえに $0 \in N$ である．

よって (PS5) を適用するために，$n \in N$ ならば $n+1 \in N$ であることを示せばよいが，$n \in N$ とすると $(n, y_n) \in f$ となる y_n が一意に存在して，$f \in \mathscr{F}$ より $(n+1, g(n, y_n)) \in f$ である．$g(n, y_n)$ の一意性については，$n = 0$ の場合と同様に $(n+1, y_{n+1})$ となる y_{n+1} について $f \setminus \{(n+1, y_{n+1})\}$ を考えることで証明できる．よって $n+1 \in N$ となり，(PS5) から $N = \mathbb{N}$ である．（証明終）

ここでは存在のみ示したが，一意性も (PS5) によって容易に示せる．この証明ではなにやら条件を満たす集合を N とおき，それに (PS5) を適用できることを示す……という流れを踏んだが，これは要は帰納法である．そこでこの証明を「帰納法」を明示した形に大枠だけ書き換えてみよう．

命題 *1.12* の証明の書き換え.

f を上と同じように構成する．帰納法によって f が写像であることを示そう．

Step 1. $n = 0$ のとき．

$(0, y_1) \in f$ とすると，$f \setminus \{(0, y_1)\}$ を考えることで $y_0 = y_1$ が示せて，$n = 0$ で成り立つ．

Step 2. n まで正しいと仮定する．

仮定より $(n, y_n) \in f$ となる y_n が一意に存在する．すると $g(n, y_n)$ について $(n+1, g(n, y_n)) \in f$ であり，一意性を $n = 0$ の場合と同様に示すことができる．よって $n+1$ でも成り立つ．

（証明終）

この形に書いてしまえば単に見慣れた証明に過ぎない．整理しておこう．論理式 φ について $N :=\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n)\}$ とおき，$0 \in N$ かつ $\forall n \in N, n+1 \in N$ を示すことによって $N = \mathbb{N}$ であること，すなわち $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n)$ を証明することを**帰納法 (induction)** という．

命題 *1.13*

(N, S, O) を Peano システムとすると，全単射 $f : \mathbb{N} \to N$ であって $f(\emptyset) = O$ かつ $f \circ \mathrm{suc} = S \circ f$ を満たすものが一意的に存在する．

証明.

命題 1.12 を $x = N, y_0 = O, g(n, y) = S(y)$ として適用する．（証明終）

ここまで見たように Peano システムはある程度の一意性を持って定まるが，Peano 算術のモデルについては標準な構成と異なる（モデルとして同型でない）構成が たとえば [] によって発見された．本稿は（筆者の不勉強もあり）公理系のモデルにまでは立ち入らないことにする．詳しくは [] などをみよ．

さて，ここまで記号的に $n+1$ を定義したのみで一般の加法については一切触れてこなかった．なんだか ZF 入門ではなくて自然数の構成入門になっている気がするが，加法を構成して可換モノイドになっていることを確かめておこう．

定義・命題 *1.14*（自然数の加法）

写像 $F : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ であって，任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $F(n, 0) = n, F(n, m+1) = F(n, m) + 1$ を満たすものが一意的に存在する．そこで $n + m := F(n, m)$ と定め，これを $\mathbb{N}$ における**加法 (addition)** という．

証明.

命題 1.12 を $x = \mathbb{N}, y_0 = 0, g(n, m) = m + 1$ として適用すると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ であって，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $f_n(0) = n, f_n(m+1) = f_n(m) + 1$ を満たすものが一意的に存在することがわかる．そこで $F(n, m) = f_n(m)$ が写像となり存在が示される．

他に条件を満たす $G : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ があったとすると，任意の $n \in \mathbb{N}$ について明らかに $F(n, 0) = G(n, 0)$ であり，また $F(n, m) = G(n, m)$ ならば $F(n, m+1) = F(n, m) + 1 = G(n, m) + 1 = G(n, m+1)$ なので帰納法から任意の n, m について $F(n, m) = G(n, m)$ である．よって一意性も示された．（証明終）

この定義は $n + 1 = \mathrm{suc}(n)$ と矛盾なく定まっていることを注意しておこう．

命題 *1.15*

$(\mathbb{N}, +)$ は可換モノイドをなす．すなわち，任意の $n, m, k \in \mathbb{N}$ に対して；

(i) $n + 0 = 0 + n = n$.

(ii) $(n + m) + k = n + (m + k)$.

(iii) $n + m = m + n$.

が成り立つ．

証明.

(i) $0 + n = n$ を帰納法で示せばよい.

(ii) k についての帰納法で示せる.

(iii) まず帰納法で任意の $n, m \in \mathbb{N}$ について $(n + m) + 1 = (n + 1) + m$ であることを示す．するとまたもや帰納法で主張が示せる.

（証明終）

ここまで見てきたように，公理 1 から 7 までによって直積，写像などの普遍的に使われる概念のほか，自然数を構成できその上にモノイド構造を定めることができた．自然数のモノイド構造から整数環を構成し，有理数体を作り……という流れでよく使われる集合が構成できることは知られたことであろう．自然数に関連した話題の最後に無限集合の定義を述べておくことにする（この定義には自然数の構成，特に無限公理は必要ではないが，この形で述べたほうがだいぶわかりやすいだろう）.

定義 *1.16*（有限，無限集合）

X を集合とする．ある自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在して，全単射 $f : X \to \{0, \ldots, n\}$ が存在するとき X は**有限 (finite)** 集合であるという．X が有限でないとき**無限 (infinite)** 集合であるという.

定義 *1.17*（Z^-, ZF^-）

公理 1 から 7 まで，すなわち外延性公理，空集合の公理，対の公理，和の公理，冪集合の公理，置換公理，無限公理を公理系として採用する集合論を $\mathbf{ZF}^-$ という．ZF^- において置換公理の代わりに分出公理を採用する集合論を $\mathbf{Z}^-$ という.

この節の最後に， [] によって導入された正則性公理を述べる.

公理 8.（正則性公理 (axiom of regularity)）

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \land \forall z \in x(z \notin y)))$$

正則性公理は基礎の公理 (axiom of foundation) とも呼ばれる．この公理をわかりやすく書き下せば，任意の空でない集合 x に対して，ある $y \in x$ が存在して $x \cap y = \emptyset$ が成り立つ，という主張である．この公理が直接使われることは殆どない．この「直接使われることはない」はだいぶんインフォーマルな言い方だが，実際に公理系として $ZF^- + AC$ を採用すれば普段行っている数学のほとんどを再現できる．そこで基礎の公理はどこで使われているのかというと，もっぱら集合論（の深奥）においてで， たとえば特定の命題が ZF と独立かどうかを調べるときに役に立つ．本稿では選択公理と同値な命題群を紹介する際に多少正則性公理を使うことになる.

定義 *1.18*（Z, ZF）

公理 1 から 8 まで，すなわち外延性公理，空集合の公理，対の公理，和の公理，冪集合の公理，置換公理，無限公理，正則性公理を公理系として採用する集合論を **ZF** という．ZF において置換公理の代わりに分出公理を採用する集合論を **Z** という.

このように現代では外延性公理から正則性公理までを集めたものとして ZF が定義されているが，もともと Zermelo, Fraenkel は**選択公理 (axiom of choice)** も公理として採用していたことはあまり知られていないように思われる．それに鑑みて筆者は ZF を選択公理も含めた公理系の呼称としてもよいのではないかと考えているが，歴史的経緯から選択公理は敬遠されがちな公理であるという実態があることも否めない．次節では選択

公理について多少詳しく扱う．本稿が少しでも世間の選択公理への不理解を解消する助けになれば幸いである（が，そもそもこれを読む人に選択公理に抵抗のある人間はいない気もする）．

§2　選択公理

前節では ZF⁻ 下において自然数 $\mathbb{N}$ を構成し，これらによって現代数学の多くが展開されると述べたが，無限的な条件を扱う際には選択公理は実質的に不可欠であろう．本節では選択公理とそれに同値な命題をいくつか紹介したい．なお，基礎論では選択公理よりも弱い可算選択公理 (Axiom of countable choice) や従属選択公理 (axiom of dependent choice) なども興味深い対象として積極的に研究されているが，本稿ではあまり扱わない．これらについては選択公理についての教科書である [], [] などを参照のこと．また選択公理と同値な命題についてはウェブサイト『壱大整域』[*2]に情報がまとまっている．

公理 9.（選択公理 (axiom of choice)）

$$\forall x(\emptyset \notin x \to \exists f \in \mathrm{Map}\left(x, \bigcup x\right); \forall a \in x, f(a) \in a)$$

集合 x に対して，選択公理から存在が要請される写像 f を x の**選択関数 (choice function)** と呼ぶ．もし x が有限集合ならば，選択公理によらずに選択関数を持つことに注意せよ．選択公理はよく **AC** と略される．

定義 *2.1*（ZFC）

公理 1 から 9 まで，すなわち外延性公理，空集合の公理，対の公理，和の公理，冪集合の公理，置換公理，無限公理，正則性公理，選択公理を公理系として採用する集合論を **ZFC** という．ZFC において置換公理の代わりに分出公理を採用する集合論を **ZC** という．

ZFC が無矛盾であること，また選択公理は ZF で証明も反証もできないこと（それぞれ選択公理の**無矛盾性 (consistency)** と**独立性 (independence)** という）は集合論の大問題であるが，この節ではそういった基礎論的なことには触れずに，選択公理が数学でどのように現れるかをみていこう．

選択公理の気持ちを理解するには，無限個の直積を考えることがよい方法だろう．

構成 2.2

$I \neq \emptyset, A$ を集合とする．写像 $f : I \to A$ が与えられたとき，像 $f(I)$ を I で**添数つけられた集合 (indexed set)** という．各 $i \in I$ に対して $a_i \coloneqq f(i) \in A$ を明示して $\{a_i\}_{i\in I} \coloneqq f(I)$ と表す．$\{a_i\}_{i\in I}$ に対して，その和集合を $\bigcup_{i\in I} a_i$ で表す．このとき；

$$\prod_{i\in I} a_i \coloneqq \left\{\lambda \in \mathrm{Map}\left(I, \bigcup_{i\in I} a_i\right) \middle| \forall i \in I, \lambda(i) \in a_i\right\}$$

を $\{a_i\}_{i\in I}$ の**直積 (direct product)** という．

$\lambda \in \prod a_i$ について，$(\lambda(i))_{i\in I} = \lambda$ と表示すれば直感的に扱っている直積そのものであることがわかる．I が有限個の元からなるとき，構成 1.3 で定めた直積との間に全単射があることが確認されよう．

[*2] URL : `http://alg-d.com/math/ac/`

命題 *2.3*

ZF 上で次は同値である．

(i) AC.
(ii) 任意の非空集合の族 $\{a_i\}_{i\in I}$ に対して $\prod a_i \neq \emptyset$ である．

証明.
(i) $\Longrightarrow$ (ii)
$\{a_i\}_{i\in I}$ の選択関数を f とする．このとき仮定から $a_i \neq \emptyset$ なので $f(a_i) \in a_i$ である．すると；

$$\lambda : I \to \bigcup a_i; i \mapsto f(a_i)$$

とすれば $\lambda \in \prod a_i$ である．
(ii) $\Longrightarrow$ (i)
x を $\emptyset \notin x$ であるような任意の集合とする．$x = \emptyset$ のときは空写像が選択関数である．$x \neq \emptyset$ のときは $x = \{a\}_{a\in x}$ が非空集合の族だから，仮定から $\lambda \in \prod x$ が存在しこれが選択関数である．

（証明終）

この証明により，ZF において X が選択関数を持つことと $\prod_{x\in X} x \neq \emptyset$ であることは同値である．また $\prod_{x\in X} x \neq \emptyset$ のとき，各 $x \in X$ に対して $\pi_x; f \mapsto f(x)$ が自然に定まっており，X が選択関数を持たないときは π_x を空写像とすればよいので ZF においても無限個も許す直積は各成分についての射影を持つことを注意しておく．

さて前節の最後に Zermelo, Fraenkel は選択公理を採用していたと述べたが，歴史的に選択公理が初めて現れたのは [] においてである．この論文は整列可能定理（定理 2.5）の証明を試みたものであり，明示的に選択公理が現れているわけではないが，その証明において本質的に用いられている．これに対して Borel, Hadamard, Lebesgue, Peano ら当時の数学者によって「どんな操作が可能なのか？妥当なのか？」と激論がかわされることになる．*3このことからも Zermelo が選択公理を採用するのは自然な流れであり，筆者は単に ZF で選択公理を含む公理系を指すことにし，公理 1 から 8 までを公理とする集合論には別の名前をつけるべきであると考えているが，本稿でも慣例に則った ZFC という用語の使い方をする（歴史の重みには逆らえない）．*4

さて，ここで [] によって明文化された選択公理の主張を紹介しよう．２つの集合 X, Y について，$X \cap Y = \emptyset$ であるとき X, Y は**互いに素 (disjoint)** であるという．

命題 *2.4*

次は ZF 上同値である．

(i) AC.
(ii) 集合 T について，$\emptyset \notin T$ かつ任意の $E_1 \neq E_2 \in T$ について E_1, E_2 が互いに素ならば，ある集合 S が存在して，任意の $E \in T$ に対して $E \cap S$ は一元集合である．

(ii) の主張における S を T の**選択集合 (choice set)** と呼ぶことにする（[] でこのような用語が用いられていたわけではない）．また本稿では (ii) の主張を AA と略すことにする（Axiom der Auswahl の略）．

*3 選択公理の歴史的なことについては [] に非常に詳しく書かれているので，本稿ではあまり歴史の細部には踏み込まないつもりである．
*4 ZF については，Skolem の業績も加味して ZFS と呼ぶ人もいるようである．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

T を $\emptyset \notin T$ かつ任意の異なる 2 元が互いに素であるような集合とする．T の選択関数 $f : T \to \bigcup T$ をとると，$f(T)$ が T の選択集合である．実際任意の $E \in T$ について $x, y \in f(T) \cap E$ であるとすると，$x \in f(T)$ よりある $E' \in T$ によって $x = f(E') \in E'$ とかけるが，$E \cap E' \neq \emptyset$ により $x = f(E)$ でなければならない．y についても同様であり $x = y$ である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

x を任意の集合とする．$x = \emptyset$ ならば明らかなので，$x \neq \emptyset$ としてよい．$x_0 \in x$ を 1 つ固定する．任意の $y \in x$ について $y \neq \emptyset$ のとき $\widetilde{y} := \{(y, z) \mid z \in y\}$ とおく．$\widetilde{x} := \{\widetilde{y} \mid y \neq \emptyset \in x\}$ とおくと，$\widetilde{x}$ は AA の仮定を満たし選択集合 S がとれる．すると任意の $y \neq \emptyset \in x$ について $z \in y$ で $(y, z) \in S \cap \widetilde{y}$ となるものが一意に存在するから；

$$f : x \to \bigcup x; y \mapsto \begin{cases} z & \text{if } y \neq \emptyset \\ x_0 & \text{if } y = \emptyset \end{cases}$$

が x の選択関数となる．（証明終）

さて，選択公理のよく使われる形である Zorn の補題と整列可能定理について触れないわけにはいかない．順序集合の定義を復習しておく．X を集合とする．$R \subset X \times X$ を X 上の二項関係という．$(x, y) \in R$ であることを xRy で表す．二項関係 $\leq$ が反射的，反対称的，推移的であるとき組 $(X, \leq)$ を順序集合という．任意の $x, y \in X$ に対し $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つとき $(X, \leq)$ は全順序集合であるという．$Y \subset X$ について，Y 上に制限した順序が全順序であるとき Y を X の鎖であるという．順序集合 X について，任意の空でない部分集合が最小元を持つとき整列集合という．

定理 *2.5*（Zorn の補題，整列可能定理）

次は ZF 上同値である．

(i) AC.
(ii) 順序集合 $(X, \leq)$ について，すべての鎖が上界を持つならば X は極大元を持つ（Zorn の補題）.
(iii) 任意の集合 X について，X 上の順序関係 $\leq$ で $(X, \leq)$ が整列集合であるものが存在する（整列可能定理）.

これらの命題の同値性についてはよく知られているだろうし，少々長くなるので省略したい．順序数などを使わない平易な同値性証明はたとえば []，[] などで読むことができる．

定義 *2.6*

集合 X, Y と写像 $f : X \to Y$ について，写像 $r : Y \to X$ で $r \circ f = \mathrm{id}_X$ が成り立つものを f の**レトラクション (retraction)** といい，$s : Y \to X$ で $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ が成り立つものを f の**セクション (section)** という．

命題 *2.7*

任意の空でない集合上の単射はレトラクションを持つ．

証明.

$X, Y \neq \emptyset$ とその上の単射 $f : X \to Y$ について，$y \in f(X)$ ならば $x \in X$ であって $f(x) = y$ であるものがた

だ 1 つ存在するので，それを $f^{-1}(y)$ で表すことにする．このとき任意の $x_0 \in X$ を 1 つ固定すれば；

$$r : Y \to X; y \mapsto \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{if } y \in f(X). \\ x_0 & \text{if } y \notin f(X). \end{cases}$$

と定めることで r は f のレトラクションとなる． （証明終）

この命題の証明には明らかに選択公理は不要であるが，その双対は選択公理と同値である．

命題 *2.8*

次は ZF 上同値である．

(i) AC.
(ii) 任意の全射はセクションを持つ．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$f : X \to Y$ を全射とする．このとき任意の $y \in Y$ について；

$$f^{-1}(y) := \{x \in X \mid f(x) = y\} \neq \emptyset$$

である．集合族 $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ の選択関数 $g : \{f^{-1}(y)\}_{y \in Y} \to X = \bigcup\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ をとる．すると；

$$s : Y \to X; y \mapsto g(f^{-1}(y))$$

が f のレトラクションとなる．実際選択関数の定義から $g(f^{-1}(y)) \in f^{-1}(y)$ なので $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

選択公理と同値な AA（命題 2.4）が成り立つことを示す．T を AA の仮定を満たす集合とする．このとき任意の $x \in \bigcup T$ に対して，$x \in E_x$ となる $E_x \in T$ が一意に存在する．よって写像 $f : \bigcup T \to T; x \mapsto E_x$ が定まり，これは全射である．仮定からセクション $g : T \to \bigcup T$ をとる．すると任意の $E \in T$ に対し $g(T) \cap E = \{g(E)\}$ が成り立ち，$g(T)$ が T の選択集合である． （証明終）

§3 順序数

選択公理と同値であることがよく知られている「任意の線型空間は基底を持つ」や「任意の 0 でない環は極大イデアルを持つ」などについて紹介していきたいのであるが，その同値性証明のためには順序数を使うと便利であるので，順序数の公理的集合論における定義を述べることにしよう．まず最初に**超限帰納法 (transfinite induction)** について説明しておく．

定理 *3.1*（超限帰納法）

$(X, \leq)$ を整列集合とする．論理式 φ について；

$$(\forall x \in X((\forall y < x, \varphi(y)) \to \varphi(x))) \to \forall x \in X, \varphi(x)$$

が成り立つ．

証明.

背理法で示す．整列集合 X と φ の組で；

$$(\forall x \in X((\forall y < x, \varphi(y)) \to \varphi(x))) \land \exists x \in X; \neg\varphi(x)$$

が成り立っているものが存在するとする．このとき $X_f \coloneqq \{x \in X \mid \neg\varphi(x)\}$ とおくとこれは空でなく，最小元 $x = \min X_f$ が存在する．よって任意の $y < x$ に対して $\varphi(y)$ であるので，仮定より $\varphi(x)$ が真であるがこれは矛盾である．（証明終）

[] などにおける順序の定義とは異なる**狭義順序**について紹介しておこう．

定義 *3.2*（狭義順序）

集合 X 上の関係 $<$ について，任意の $x, y, z \in X$ に対して以下の条件；

(i) $x \nless x$ である．

(ii) $x < y, y < z$ ならば $x < z$ である．

を満たすとき**狭義順序 (strict order)** であるという．加えて；

(iii) $x = y$ または $x < y$ または $y < x$ が常に成り立つ．

を満たすとき $<$ は**狭義全順序 (strict total order)** であるという．

(i) は非反射律 (irreflexivity)，(iii) は三分律 (trichotomy) と呼ばれる．ここで順序から狭義順序を，また狭義順序から順序を自然に定義でき，これらは 1 対 1 の対応を与えることを注意しておく．

命題 *3.3*

集合 X 上の順序 $\leq$ が与えられたとき，関係 $<$ を；

$$x < y \iff x \leq y \text{ かつ } x \neq y$$

で定めるとこれは狭義順序をなす．また狭義順序 $<$ が与えられているとすると，関係；

$$x \leq y \iff x < y \text{ または } x = y$$

は X 上の順序をなす．特に全順序と全狭義順序も対応する．

証明は各自確かめられたい．これにより実質的には順序を考えることと狭義順序を考えることは同じである．また，狭義順序について $x \in X$ が $<$ についての最小元であることを，任意の $x \neq x' \in X$ に対して $x < x'$ であることと定めれば，$<$ に関する（狭義）整列性を自然に定義でき，$(X, \leq)$ が整列集合であることと $(X, <)$ が（狭義）整列集合であることは同値なので，狭義順序に関しても整列集合という言葉使いをする．

前置きはこのあたりにしておいて，いよいよ順序数の定義に進もう．

定義 *3.4*（推移的集合）

集合 X に対して，任意の $Y \in X$ に対して $Y \subset X$ であるとき，X は**推移的 (transitive)** であるという．

明らかな言い換えではあるが，X が推移的であるとは任意の $Y \in X, Z \in Y$ に対して $Z \in X$ が成り立つことである．例を見てみよう．

例 3.5

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ などは推移的である．これは Peano–Neumann 流の自然数の構成から来ていて，この方法では $0 \coloneqq \emptyset, 1 \coloneqq \{\emptyset\} = \{0\}, 2 \coloneqq \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}, \ldots$ のように，$n \mapsto n \cup \{n\}$ によって自然数を帰納的に構成していくのだった．このとき自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ も推移的であり，$\in$ が $\mathbb{N}$ 上の狭義順序を定め整列集合である（自然な大小関係 $<$ にほかならない）．

上の例における $\in$ が整列順序を与える，という性質は重要であるが，一般の推移的集合で満たされるとは限らない．それればかりか（狭義）順序にすらならないことがある．たとえば $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ がそのような例である．そこで次の条件を課したもののことを**順序数**と呼ぶことにする．

定義 *3.6*（順序数）

集合 X について，X が推移的で，また $\in$ が X 上の狭義順序をなし $(X, \in)$ が整列集合であるとき $(X, \in)$ を**順序数 (ordinal number)** という．

ここでは順序数に対応する英語として ordinal number を紹介したが，英語では ordinal を名詞として扱う用法が定着している（たとえば for some ordinal α, ~ などとかかれる）ことを述べておく．

順序数は慣例的にギリシャ文字で表されることが多い．上で述べたように自然数全体 $\mathbb{N}$ は順序数をなすが，$\mathbb{N}$ を順序数とみるとき ω で表すことにする．それだけでなく たとえば $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ が順序数の定義を満たすことは容易に確かめられ，すべての $n \in \omega$ が順序数であることがわかる（定義 3.11）．

補題 *3.7*

α, β を順序数とする．このとき $\alpha \subset \beta$ であることと $\alpha \in \beta$ または $\alpha = \beta$ であることは同値である．

証明.

$(\Longleftarrow)$ は明らかだろう．$\alpha \subsetneq \beta$ であると仮定する．このとき $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$ で，β は整列されているから最小限 $x = \min(\beta \setminus \alpha)$ が存在する．任意の $y \in x$ をとると β は推移的だから $y \in \beta$ で，x の最小性から $y \notin \beta \setminus \alpha$ なので $y \in \alpha$ である．よって $x \subset \alpha$ である．もし $x \subsetneq \alpha$ であると仮定すると，$z \in \alpha \setminus x$ をとれば $x, z \in \beta$ なので $\in$ が β 上の全順序だから $x = z$ または $x \in z$ である．いま $x \notin \alpha, z \in \alpha$ より $x \neq z$ で，また α も推移的なので $x \in z$ なら $x \in \alpha$ となってしまうから，そのどちらでもない．よって $x = \alpha$ となり，示された．（証明終）

定理 *3.8*

α, β, γ を順序数とする．このとき以下が成り立つ；

(i) $\alpha \notin \alpha$ である．
(ii) $\alpha \in \beta, \beta \in \gamma$ ならば $\alpha \in \gamma$ である．
(iii) $\alpha \in \beta$ または $\beta \in \alpha$ または $\alpha = \beta$ のいずれかが成り立つ．
(iv) 集合 X について任意の X の元が順序数ならば，X は $\in$ について極小元をもつ．

「順序数全体の集合」なるものが存在すると，この定理は $\in$ という関係がその集合上の整列付けられた狭義全順序であることを主張している，と表現できる．しかし集合論的には「順序数全体の集合」なるものを取り扱うことはできないことに注意せよ（定理 3.10）．

証明.

(i) α 上で $\in$ は非反射的，すなわち任意の $x \in \alpha$ について $x \notin x$ だから，もし $\alpha \in \alpha$ なら直ちに矛盾する．

(ii) γ が推移的なので明らかである．

(iii) $\gamma = \alpha \cap \beta$ とおく．すると明らかに γ も順序数であって，$\gamma \subset \alpha$ かつ $\gamma \subset \beta$ であるので，補題 3.7 より；

$$(\gamma \in \alpha \text{または} \gamma = \alpha) \text{ かつ } (\gamma \in \beta \text{または} \gamma = \beta)$$

である．もし $\gamma \in \alpha$ かつ $\gamma \in \beta$ であるとすると $\gamma \in \gamma$ となり (i) に反する．また $\gamma = \alpha$ かつ $\gamma = \beta$ ならば $\alpha = \beta$ である．$\gamma \in \alpha$ かつ $\gamma = \beta$ なら $\beta \in \alpha$ であり，$\gamma = \alpha$ かつ $\gamma \in \beta$ ならば $\alpha \in \beta$ となり，示された．

(iv) 任意の $\alpha \in X$ を 1 つとる．このとき α が最小ならば示すことはない．そうでないならば；

$$\alpha \cap X = \{\beta \in X \mid \beta \in \alpha\} \neq \emptyset$$

であって，α が $\in$ について整列集合なので最小元 β_0 が存在する．任意の $\beta \in X$ に対して，$\beta_0 \notin \beta$ なら (iii) より $\beta = \beta_0$ または $\beta \in \beta_0$ であって，α が推移的なので $\beta \in \beta_0$ ならば $\beta \in \alpha$ となってしまうから β_0 の最小性より $\beta = \beta_0$ でなければならない．よって β_0 は X でも最小である．

（証明終）

つぎに「順序数全体の集合」は存在しないことを証明しよう．

補題 *3.9*

α を順序数とする．$\beta \in \alpha$ ならば β も順序数である．

証明.

α は推移的なので $\beta \subset \alpha$ であって，β も $\in$ によって整列付けられていることがわかる．よって β が推移的であることを示せばよい．$x \in y \in \beta$ とすると，$y \in \beta \subset \alpha$ より $x \in \alpha$ であるから $x, y, \beta \in \alpha$ なので，α 上で $\in$ は推移的なので $x \in \beta$ が従う．（証明終）

定理 *3.10*（Burali-Forti のパラドックス）

任意の順序数を含むような集合は存在しない．

このパラドックスの名称は Cesare Burali-Forti に由来するが，実際にそれを発表したのは [] である（歴史的経緯については [] をみよ）．

証明.

集合 X が任意の順序数を含むと仮定する．するとすべての順序数からなる集合 $O \coloneqq \left\{\alpha \in X \,\middle|\, \alpha : \text{順序数}\right\}$ が定義できるが，このとき定理 3.8，補題 3.9 によって O 自体も順序数をなす．よって $O \in O$ だが，これは定理 3.8 に矛盾している．（証明終）

次に，整列集合は自然数のもつ性質の一般化であると捉えられるが，順序数も自然数の一般化であること，また順序数は整列順序集合と 1 対 1 に対応することを見ていこう．

定義 *3.11*（後続者）

α を順序数とする．$S(\alpha) \coloneqq \alpha \cup \{\alpha\}$ と定義するとこれも順序数になり，$S(\alpha)$ を α の**後続者 (successor)** という．$S(\alpha)$ は $\alpha + 1$ とも書かれる．

$S(\alpha)$ が順序数になることは明らかだろう．これはちょうどうえで述べたように自然数の構成に対応しており，すべての $n \in \omega$ が順序数であることがわかる．このような順序数を**有限 (finite)** または**自然数**というが，これをはっきりと定式化しよう．

定義 *3.12*（後続型，極限順序数）

順序数 α について，ある順序数 β が存在して $\alpha = S(\beta)$ であるとき α を**後続型順序数 (successor ordinal number)** という．0 でない順序数で，後続型でないものを**極限順序数 (limit ordinal number)** という．

定義 *3.13*（有限順序数）

順序数 α に対して，任意の $\beta \in \alpha$ と α がすべて 0 または後続型であるとき α は**有限 (finite)** であるという．

定理 3.8 と補題 3.9 によって，$\in$ による狭義順序（もどき）について，順序数 α, β について，$\beta \in S(\alpha)$ を $\beta \leq \alpha$ と略記する，という記号を用いることにすると，これはちょうど順序数全体の集合（もどき）に順序（もどき）を定めたことになる（これは $\beta \in \alpha$ または $\beta = \alpha$ と同値）．この記号のもと，自然な自然数の順序と順序数としての自然数の順序が対応しており，また任意の $n \in \omega$ について順序数として $n \leq \omega$ となっている．

命題 *3.14*

ω は最小の極限順序数である．

証明.

任意の $n \in \omega$ に対して，$S(n) \in \omega$ なので ω が後続型であることはない．逆に $n \in \omega$ なら $n = 0$ か，そうでないならば $n = S(n-1)$ だから後続型なので ω より小さい極限順序数も存在しない．（証明終）

次に，任意の整列集合に対して，それと順序同型な順序数がただ 1 つ存在することを示そう．

補題 *3.15*

α, β を順序数とする．順序（$\in$）を保つ全単射 $f : \alpha \to \beta$ が存在するならば，集合として $\alpha = \beta$ である．

証明.

任意の $\gamma \in \alpha$ に対して $f(\gamma) = \{f(\gamma') \mid \gamma' \in \gamma\}$ である．さて $\{\gamma \in \alpha \mid f(\gamma) \neq \gamma\} \neq \emptyset$ であると仮定する．すると最小元 $\gamma_0 \in \alpha$ をとることができ，特に $\emptyset \neq \gamma_0$ である．このとき $f(\gamma_0) = \{f(\gamma') \mid \gamma' \in \gamma_0\}$ なので，γ_0 の最小性から $f(\gamma') = \gamma'$ なので，$f(\gamma_0) = \gamma_0$ となって矛盾する．よって任意の $\gamma \in \alpha$ に対して $f(\gamma) = \gamma$ であり，f は id_α にほかならない．（証明終）

定理 *3.16*

$(X, \leq)$ を整列集合とすると，順序数 α が一意に存在して，順序同型 $X \cong \alpha$ が存在する．

証明.

補題 3.15 により一意性は従う．

Step 1. 任意の $x \in X$ に対して，x の切片を $w(x) \coloneqq \{y \in X \mid y < x\}$ で定める．また；

$$G \coloneqq \left\{x \in X \,\middle|\, \gamma \cong w(x) \text{ となる順序数 } \gamma \text{ が存在する.}\right\} \subset X$$

を考える．補題 3.15 により，各 $x \in G$ に対して順序数 $f(x)$ と順序同型 $g_x : w(x) \to f(x)$ が一意に定まっている（２つの同型 g, h があったとすると，$g^{-1} \circ h$ が $f(x)$ の自己同型となり，$\mathrm{id}_{f(x)}$ と等しい）．

Step 2. 任意の $x \in G$ に対して $w(x) \subset G$ であること．

任意の $y < x$ に対して $f(y) \coloneqq g_x(y) \in f(x)$ と定めると補題 3.9 により $f(y)$ も順序数であって，$z < y$ ならば g_x は順序同型だから $g_x(z) \in g_x(y)$ なので，$g_x|_{w(y)} : w(y) \to g_x(y)$ も順序同型を与える．

Step 3. $f : G \to \{f(x) \mid x \in G\}$ は順序同型であること．

Step 2. と補題 3.15 により，$x, y \in G, y < x$ ならば $f(y) = g_x(y) \in g_x(x) = f(x)$ が成り立つ．

Step 4. $f(G)$ は順序数であること．

$f(x) \in f(G)$ をとる．任意の $\gamma \in f(x) = g_x(w(x))$ をとると，$y < x$ によって $\gamma = g_x(y)$ とかけている．Step 2 より $w(y) \cong \gamma$ であるから $\gamma \in f(G)$ となり，$f(x) \subset f(G)$ である．よって $f(G)$ は推移的集合で，定理 3.8 により $f(G)$ も順序数である．

Step 5. $X = G$ であること．

もし $X \setminus G \neq \emptyset$ であるとすると，最小元 x_0 がとれる．このとき明らかに $w(x_0) \subset G$ である．ここで任意の $x \in G$ をとり，$x_0 \leq x$ であるとする．明らかに $x \neq x_0$ であって，$x_0 < x$ ならば Step 2 より同型 $w(x_0) \to g_x(x_0)$ が定まるので $x_0 \in G$ となり矛盾する．よって $x < x_0$ である．よって $w(x_0) = G$ であり，$w(x_0) \cong f(G)$ だが Step 4 より $x_0 \in G$ となってこれは矛盾する．ゆえに $X = G$ であることがわかった．

（証明終）

この α を X の**順序型 (order type)** という．この定理の応用として，集合の濃度について正確な定義を与えよう．そのために次の命題を証明する．

命題 3.17

X を集合とする．X への（順序は問わない）全単射が存在するような順序数全体，すなわち；

$$\mathrm{ON}_X \coloneqq \left\{\alpha\text{: 順序数} \;\middle|\; \text{全単射 } f : \alpha \to X \text{ が存在する.}\right\}$$

は集合である．

証明.

$\mathfrak{P}(X)$ を X の冪集合とする．$\mathfrak{P}(X)$ に整列可能定理（定理 2.5）により整列順序を入れ，定理 3.16 により順序数 β と順序同型 $\mathfrak{P}(X) \cong \beta$ を得る．ここで α を全単射 $\alpha \to X$ が存在するような順序数とすると；

$$\alpha \xrightarrow{\text{bij}} X \hookrightarrow \mathfrak{P}(X) \xrightarrow{\sim} \beta$$

によって単射 $\alpha \to \beta$ が定まる．ここで定理 3.8 により $\alpha \in \beta$ または $\beta \in \alpha$ または $\alpha = \beta$ であり，$\beta \in \alpha$ ならば包含 $\beta \to \alpha$ が存在するから，Bernstein の定理により全単射 $\beta \to \alpha$ が存在する．すると $\beta \in \alpha$ または $\alpha = \beta$ のとき，全単射 $\mathfrak{P}(X) \to X$ が存在するがこれは Cantor の定理（定理 1.1）に矛盾する．よって $\alpha \in \beta$ でなければならない．ゆえに $\mathrm{ON}_X \subset \beta$ である．（証明終）

定義 3.18（集合の濃度）

X を集合とする．$\#X \coloneqq \min \mathrm{ON}_X$ を X の**濃度 (cardinality)** という．

この定義によれば集合の濃度とは順序数そのものである．記号として，$\mathrm{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0, \mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \aleph$ であらわし，それぞれを**可算濃度 (cardinality of the countable set)**，**連続体濃度 (cardinality of the continuum)** という．次の性質が成り立つことは明らかだろう．

命題 3.19

集合 X, Y について $\#X = \#Y$ であることと全単射 $X \to Y$ が存在することは同値であり，また全単射 $X \to \#X$ が存在する．

本節において命題 3.17 以外に選択公理を用いていないことに注意されたい．これにより選択公理の（ZF 上の）同値性の議論に順序数を用いることができる．定義 3.18 は任意の集合に対してある順序数への全単射が存在することを本質的に使っているが，実は次が成り立つ．

定理 3.20

次は ZF 上同値である．

(i) AC.
(ii) 任意の集合 X に対して，ある順序数 α と全単射 $f : X \to \alpha$ が存在する．
(iii) 任意の集合 X に対して，ある順序数 α と全射 $f : \alpha \to X$ が存在する．
(iv) 任意の集合 X に対して，ある順序数 α と単射 $f : X \to \alpha$ が存在する．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

整列可能定理により定理 3.16 から従う．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

明らか.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

任意の $x \in X$ に対して $\emptyset \neq f^{-1}(x) \subset \alpha$ であるので $\min f^{-1}(x)$ が存在し，$s : X \to \alpha; x \mapsto \min f^{-1}(x)$ が単射である．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

整列可能定理を示す．集合 X に対して順序数への単射 $f : X \to \alpha$ が存在するとき，$x, y \in X$ に対して；

$$x \leq y \Longleftrightarrow x = y \text{ または } f(x) \in f(y)$$

と定めるとこれは整列集合をなす． （証明終）

よって定義 3.18 には本質的に選択公理が必要である．濃度の定義には選択公理を用いない（代わりに正則性公理を用いる）ものも知られていて，**Scott のからくり (Scott's trick)** と呼ばれている．次節ではそれについても紹介する．

§4　順序数と正則性公理

本節では集合の累積的階層の定義を行う．正則性公理は通常数学を行う上で意識されることは他の公理と比較しても殆どないが，種々の命題の選択公理との同値性を示す際に有用な道具となる．たとえば選択公理と任意の線型空間は基底を持つことの ZF 上の同値性は広く知られているが，任意の線型空間が基底を持つならば選択公理が成り立つことの証明が ZF^- でできるかどうかは未解決である．

ここで正則性公理について主張を思い出しておくと，任意の空でない集合 x に対してある $y \in x$ が存在して $x \cap y = \emptyset$ が成り立つというものであった．定理 3.8 の (i) で順序数 α について $\alpha \notin \alpha$ であることを示したが，正則性公理によって任意の集合において同様のことが成り立つことを示せることを注意しておく．

命題 *4.1*

X を集合とすると，$X \notin X$ である．

証明.

もし $X \in X$ となるような集合 X が存在したとすると，$Y := \{X\}$ とおけば $Y \neq \emptyset$ であって $X \cap Y \neq \emptyset$ なので正則性公理に反する．（証明終）

定義 *4.2*（集合の累積的階層）

α を順序数としたとき；

$$V_\alpha := \begin{cases} \emptyset & \text{if } \alpha = 0. \\ \mathfrak{P}(V_\beta) & \text{if } \alpha = \beta + 1. \\ \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta & \text{if } \alpha : \text{極限順序数}. \end{cases}$$

と定義する．各 V_α を集合の**累積的階層 (cumulative hierarchy)** という．集合 X について，ある順序数 α が存在して $X \in V_\alpha$ が成り立つとき X を**整礎 (well-founded)** であるという．

ここで次の補題を示しておく．

補題 *4.3*

集合 X が順序数 α によって整礎であるとすると，$\left\{\beta \in \alpha \,\middle|\, X \in V_{\beta+1}\right\} \neq \emptyset$ である．また，$\alpha' \neq \alpha$ について $X \in V_{\alpha'}$ であったとすると；

$$\min\left\{\beta \in \alpha \,\middle|\, X \in V_{\beta+1}\right\} = \min\left\{\beta \in \alpha' \,\middle|\, X \in V_{\beta+1}\right\}$$

が成り立つ．

証明.

α が後続型のときは $\alpha = \beta + 1$ となる β があるので明らか．α が極限順序数のときは，累積的階層の定義から $\left\{\beta \in \alpha \,\middle|\, X \in V_\beta\right\} \neq \emptyset$ なので，最小元 $\gamma := \min\left\{\beta \in \alpha \,\middle|\, X \in V_\beta\right\}$ が存在する．このとき γ は後続型でなければならないので，$\gamma = \beta_0 + 1$ とすれば $\beta_0 \in \left\{\beta \in \alpha \,\middle|\, X \in V_{\beta+1}\right\}$ である．

また $\alpha' \neq \alpha$ について $X \in V_{\alpha'}$ であると仮定する．このとき定理 3.8 の (iii) から $\alpha \in \alpha'$ であるとしてよい．$\gamma := \min\left\{\beta \in \alpha \,\middle|\, X \in V_{\beta+1}\right\}, \gamma' := \min\left\{\beta \in \alpha' \,\middle|\, X \in V_{\beta+1}\right\}$ とおく．すると；

$$\left\{\beta \in \alpha \,\middle|\, X \in V_{\beta+1}\right\} \subset \left\{\beta \in \alpha' \,\middle|\, X \in V_{\beta+1}\right\}$$

なので $\gamma' \in \gamma$ または $\gamma' = \gamma$ である．もし $\gamma' \in \gamma$ であるとすると $\gamma \in \alpha$ なので $\gamma' \in \alpha$ だから，最小性より $\gamma \in \gamma'$ となる．よって $\gamma \in \gamma$ となって矛盾する．よって $\gamma = \gamma'$ である． （証明終）

この補題において $\gamma \in \gamma$ が矛盾であることを用いたが，定理 3.8 の (i) によりこの補題には正則性公理は不要であることを注意しておく．さて，この補題により次の定義が well-defined である．

定義 *4.4*（集合の階数）

X を順序数 α によって整礎であるような集合とするとき；

$$\mathrm{rank}(X) \coloneqq \min\left\{\beta \in \alpha \;\middle|\; X \in V_{\beta+1}\right\}$$

を X の**階数 (rank)** という．

実は ZF$^-$ 上で任意の X が整礎であること，すなわち任意の集合について階数が定義できることと，正則性公理が成り立つことが同値である．このことを証明するための準備をしていこう．まずは累積的階層の性質についていくらかみていく．

命題 *4.5*

α を順序数とすると次が成り立つ．

(i) V_α は推移的集合である．
(ii) $\beta \in \alpha$ ならば $V_\beta \subset V_\alpha$ である．

証明.

(i) 集合 $\alpha + 1$ についての超限帰納法で示す．すなわち任意の $\beta \in \alpha + 1$ をとり，任意の $\gamma \in \beta$ に対して V_γ が推移的であると仮定する．このとき V_β が推移的であればよい．

$\beta = 0$ のときは明らかである．また β が極限順序数であるときは推移的集合の和はまた推移的なので正しい．β が後続型であるとする．$\beta = \gamma + 1$ とかくと，$V_\beta = \mathfrak{P}(V_\gamma)$ であって V_γ は推移的である．任意の $X \in V_\beta$ に対して $X \subset V_\gamma$ なので，任意の $x \in X$ について $x \in V_\gamma$ である．すると V_γ は推移的だから $x \subset V_\gamma$ なので，$x \in V_\beta$ である．よって $X \subset V_\beta$ となり，V_β は推移的である．

(ii) $\beta \in \alpha$ となる順序数の組を固定する．このとき集合 $\{\gamma \in \alpha + 1 \mid \beta \in \gamma\}$ について超限帰納法を用いる．すなわち $\gamma \in \alpha + 1$ について，$\beta \in \gamma$ かつ任意の $\gamma' \in \gamma$ について $\beta \in \gamma'$ ならば $V_\beta \subset V_{\gamma'}$ であるとき，$V_\beta \subset V_\gamma$ であることを示せばよい．

まず γ について，$\{\gamma' \in \gamma \mid \beta \in \gamma'\}$ が空かどうかで場合分けを行う．まず空のときを考えると，任意の $\gamma' \in \gamma$ に対して $\gamma' \in \beta$ または $\gamma' = \beta$ でなければならないので，$\gamma = \{\beta\} \cup \beta = \beta + 1$ となるから $V_\gamma = \mathfrak{P}(V_\beta)$ である．すると任意の $X \in V_\beta$ をとると (i) より V_β は推移的だから $X \subset V_\beta$ となり $X \in V_\gamma$ である．よって $V_\beta \subset V_\gamma$ となる．

次に $\{\gamma' \in \gamma \mid \beta \in \gamma'\} \neq \emptyset$ であるとする．まず γ が後続型であるとき，$\gamma = \gamma' + 1 = \gamma' \cup \{\gamma'\}$ なので $\beta \in \gamma'$ または $\beta = \gamma'$ であり，$\beta = \gamma'$ の場合は上と同様（$\{\gamma' \in \gamma \mid \beta \in \gamma'\} = \emptyset$ になるといってもよい）．また $\beta \in \gamma'$ のときは $V_\gamma = \mathfrak{P}(V_{\gamma'})$ で $V_\beta \subset V_{\gamma'}$ なので，証明が空の場合と同様にまわる．γ が極限順序数のとき，$V_\gamma = \bigcup_{\gamma' \in \gamma} V_{\gamma'}$ なので $\{\gamma' \in \gamma \mid \beta \in \gamma'\} \neq \emptyset$ だから $V_\beta \subset V_\gamma$ である．

（証明終）

系 *4.6*

X を整礎な集合とすると，任意の $x \in X$ も整礎であり $\mathrm{rank}(x) \in \mathrm{rank}(X)$ である．

証明.

命題 4.5 によって，順序数 α に対して $X \in V_\alpha$ であることと $\mathrm{rank}(X) \in \alpha$ であることが同値であることに注意する．そこで $\alpha \coloneqq \mathrm{rank}(X)$ とおくと，$X \in V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha)$ であるので $X \subset V_\alpha$ だから $x \in V_\alpha$ となり，$\mathrm{rank}(x) \in \alpha$ である． （証明終）

順序数 α, β について $\beta \leq \alpha$ を $\beta \in \alpha$ または $\beta = \alpha$ の意味で用いる．ちょうど狭義順序から順序を作るのと同じである．

定義・命題 *4.7*

集合 X について，任意の $\alpha \in X$ が順序数であるとする．このとき $\bigcup X$ も順序数であって，任意の順序数 β について任意の $\alpha \in X$ に対して $\alpha \leq \beta$ ならば $\bigcup X \leq \beta$ である．これを $\sup X \coloneqq \bigcup X$ とかく．

これを確かめることは難しくない．

命題 *4.8*

集合 X について，X が整礎であることと任意の $x \in X$ について x が整礎であることは同値である．また $\mathrm{rank}(X) = \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in X\}$ で与えられる．

証明.

X が整礎なら $x \in X$ が整礎であることは上の系より従う．任意の $x \in X$ が整礎であると仮定しよう．このとき $\alpha \coloneqq \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 \mid x \in X\}$ とおく．すると $x \in V_{\mathrm{rank}(x)+1} \subset V_\alpha$ なので $x \in V_\alpha$ である．すなわち $X \subset V_\alpha$ となり $X \in V_{\alpha+1}$ がわかる．よって X は整礎である．

また $\mathrm{rank}(X) \leq \alpha$ は明らかであり，任意の $x \in X$ について $\mathrm{rank}(x) \in \mathrm{rank}(X)$ なので $\mathrm{rank}(x) + 1 \leq \mathrm{rank}(X)$ だから，α の定義から $\alpha \leq \mathrm{rank}(X)$ なので $\mathrm{rank}(X) = \alpha$ である． （証明終）

定義 *4.9*（推移閉包）

集合 X と $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\bigcup^n X$ を；

$$\bigcup{}^n X \coloneqq \begin{cases} X & \text{if } n = 0. \\ \bigcup(\bigcup^{n-1} X) & \text{if } n > 0. \end{cases}$$

として定義する．また；

$$\mathrm{trcl}(X) \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup{}^n X \right)$$

を X の**推移閉包 (transitive closure)** という．

例を計算してみよう．$X = \{\{1\}, \{1, \{1\}\}\}$ とする．ここで $1 = \{0\}$ であることに注意すると，$\bigcup^0 X = \{\{1\}, \{1, \{1\}\}\}, \bigcup^1 X = \{1, \{1\}\} = \{\{0\}, \{1\}\}, \bigcup^2 X = \{0, 1\} = \{0, \{0\}\}, \bigcup^3 X = \{0\}, \bigcup^4 X = \emptyset$ であるので；

$$\mathrm{trcl}(X) = \{0, 1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$$

である．$\mathrm{trcl}(X)$ は推移的な集合であることが簡単に確かめられる（$x \in X$ ならば $x \subset \bigcup X$ であるから）．

以上の準備によって次の定理が証明できる．

定理 *4.10*

次は ZF^- 上同値である．

(i) 正則性公理.
(ii) 任意の集合は整礎である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

X を任意の集合とし，$T := \mathrm{trcl}(X)$ とする．任意の $x \in T$ に対して x が整礎であるとすると，$X \subset T$ なので命題 4.8 により X も整礎である．次に $x \in T$ で x が整礎でないようなものが存在するとする．すると $\left\{x \in T \,\middle|\, x : 整礎でない\right\} \neq \emptyset$ なので正則性公理から $y \in T$ で $y \cap \left\{x \in T \,\middle|\, x : 整礎でない\right\} = \emptyset$ かつ整礎でないようなものが存在する．いま T が推移的なので $y \subset T$ なので，任意の $z \in y$ は整礎である．すると命題 4.8 により y は整礎だがこれは矛盾である．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

X を空でない集合とする．集合 $\{\mathrm{rank}(x) \mid x \in X\}$ は最小元 $\mathrm{rank}(y)$ を持つ．すると $y \cap X \neq \emptyset$ ならば，$z \in y \cap X$ について y の最小性から $\mathrm{rank}(y) \leq \mathrm{rank}(z)$ だが，$z \in y$ なので系 4.6 から $\mathrm{rank}(z) \in \mathrm{rank}(y)$ なので矛盾である．よって $y \cap X = \emptyset$ となる．（証明終）

ここでクラスについて少し述べる．前述の通り真クラスは ZFC で扱うことはできないが，素朴な分出公理；

$$論理式\ \varphi\ について\ \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \varphi(y)).$$

から構成できるメタ論理の対象 $\{x \mid \varphi(x)\}$ をクラスといい，それが集合であるとすると（ZFC において）矛盾するものを真クラスというのであった．ここでクラス $V := \{x \mid x = x\}$ はすべての集合を含むので真クラスである．これを**宇宙 (universe)** または**万有集合 (universal set)** などという．くどいようだがこれは ZFC の対象ではないので $x \in V$ は ZFC の論理式ではないのだが，しかし「x は集合である」の略記として「$x \in V$」と書くのはインフォーマルだが記法としては便利である．同様に $\mathrm{ON} := \left\{x \,\middle|\, x : 順序数\right\}$ とおくと，これも定理 3.10 により真クラスである．この記法のもと，定理 4.10 は次のように表現できる．

$$正則性公理 \Longleftrightarrow V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} V_\alpha.$$

このようにクラスをインフォーマルに導入することで記法が簡略化される（[] などがその代表例である）が，本稿ではなるべくクラスの使用を避けることにしている．ではなぜここでクラスについて言及したのかといえば，Scott のからくりについて説明するためである．

いまクラス C について，任意の集合 X に対して $X \in C$ であるかどうかは ZFC で決定できることに注意する．というのもクラスはある ZFC の論理式 φ を用いて $C = \{x \mid \varphi(x)\}$ とかけるからである．そこで $X \in C$ は $\varphi(X)$ と等価である．さて，X, Y を集合としたとき X から Y への全単射が存在することを $X \sim Y$ とかくことにすると，$\sim$ は反射的かつ対称的かつ推移的であった．このことは「$\sim$ は V 上の同値関係である」とインフォーマルに表現できる．もうすこし正確な形で書いておくと，ZFC の２変数論理式 φ があって，任意の $X, Y, Z \in C$ に対して；

(i) $\varphi(X, X)$ が成り立つ．

(ii) $\varphi(X,Y)$ が成り立つならば $\varphi(Y,X)$ が成り立つ．
(iii) $\varphi(X,Y)$ かつ $\varphi(Y,Z)$ が成り立つならば $\varphi(X,Z)$ が成り立つ．

が証明できるとき，φ を C 上の同値関係という．いつものように関係は $X \sim Y$ などと表される．さて C を同値関係 $\sim$ が定まっているクラスとする．このとき $X \in C$ に対して；

$$[X] \coloneqq \{Y \in C \mid X \sim Y, \forall Z((Z \in C \land X \sim Z) \to \mathrm{rank}(Y) \leq \mathrm{rank}(Z))\}$$

を考えることができ，**これは集合である．** なぜならば，定義から $Y \in [X]$ ならば $\mathrm{rank}\, Y \leq \mathrm{rank}\, X$ なので，$Y \in V_{\mathrm{rank}(Y)+1} \subset V_{\mathrm{rank}(X)+1}$ だから；

$$[X]' \coloneqq \left\{Y \in V_{\mathrm{rank}(X)+1} \,\middle|\, X \sim Y, \forall Z((Z \in C \land X \sim Z) \to \mathrm{rank}(Y) \leq \mathrm{rank}(Z))\right\}$$

とおけばこれは分出公理から構成できる集合でありかつ $Y \in [X] \leftrightarrow Y \in [X]'$ となる．このようにクラス上の同値関係についてその同値類のような集合を考えることができる．このテクニックを **Scott のからくり (Scott's trick)** という．これを用いて ZF における集合の濃度の定義を与えることができる．

定義 *4.11*（ZF における集合の濃度）

X を集合とする．Scott のからくりを $C = V$ として，また $\sim$ を；

$$X \sim Y \iff \text{全単射 } X \to Y \text{ が存在する．}$$

として適用して得られる次の集合；

$$[X] \coloneqq \left\{Y \in V_{\mathrm{rank}(X)+1} \,\middle|\, Y \sim X, \forall Z(X \sim Z \to \mathrm{rank}(Y) \leq \mathrm{rank}(Z))\right\}$$

を集合 X の**濃度 (cardinality)** という．

このとき $[X] = [Y]$ であることと $X \sim Y$ であることが同値であることは容易に確かめられる．しかし命題 3.19 の後半部は一般には成り立たない（$X = 0$ を考えよ）．特に ZFC において定義 3.18 と定義 4.11 は同値な定義ではない．さらに ZF 上では集合の濃度を命題 3.19 が成り立つように定めることができないことが知られている．主張のみ引用しよう．

定理 *4.12*（[, Theorem 11.3.]）

ZF 上において集合の濃度 $[X]$ を，以下の条件；

(i) $[X] = [Y]$ であることと $X \sim Y$ であることは同値．
(ii) 全単射 $X \to [X]$ が存在する．

を両方満たすように定めることはできない．

§5　選択公理と同値な命題群

本節では主に（可換）代数における命題と選択公理の同値性について述べるための準備として，選択公理の同値な形で標準的な（和書の）集合論の教科書ではあまり取り上げられていないものを紹介する．また本節では正則性公理と同値な任意の集合が rank 付けできること（定理 4.10）を用いるが，それを証明に用いる主張が正則性公理抜きで証明できるかどうかは特に問題にしないことにする．

定義 *5.1*（有限性）

X を空でない集合とする．$x \in X$ であることと，任意の有限部分集合 $y \subset x$ について $y \in X$ が成り立つことが同値であるとき，X は**有限性 (finite character)** を持つという．

定理 *5.2*（Tukey の補題，Hausdorff の極大鎖条件）

次は ZF 上同値である．

(i) AC.
(ii) 任意の空でない集合 X について，X が有限性を持つならば包含に関する極大元を持つ（Tukey の補題）．
(iii) 任意の順序集合 $(X, \leq)$ は極大鎖を持つ（Hausdorff の極大鎖条件 (Hausdorff's maximal chain condition)）．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

X を空でない有限性を持つ集合とする．$\mathscr{F}$ を X の包含関係に関する鎖とし，$B := \bigcup \mathscr{F}$ とする．任意の有限部分集合 $A \subset B$ に対して，$\mathscr{F}$ が鎖なのである $C \in \mathscr{F}$ が存在して $A \subset C$ とできる．このとき $C \in X$ だから，X の有限性より $A \in X$ となる．すると再び X の有限性より $B \in X$ となるので，B は $\mathscr{F}$ の上界を与える．よって Zorn の補題から X は極大元を持つ．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

$(X, \leq)$ を順序集合とする．$B := \left\{ Y \subset X \;\middle|\; Y : \text{鎖} \right\}$ は空ではなく，明らかに有限性を持つ．よって Tukey の補題から極大元を持つ．

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

Zorn の補題を示す．$(X, \leq)$ をすべての鎖が上界を持つような順序集合とする．すると極大鎖の上界が X の極大元である．（証明終）

次に多重選択公理 (AMC) について紹介する．これは AC と ZF 上同値であるが，その証明は正則性公理が必要であることが知られている [].

定義・命題 *5.3*（Hartogs 数）

X を集合とする．

$$\Gamma(X) := \left\{ \alpha : \text{順序数} \;\middle|\; \text{単射 } \alpha \to X \text{ が存在する.} \right\}$$

は集合である．$\Gamma(X)$ は順序数をなし，これを X の **Hartogs 順序数 (Hartogs ordinal number)** という．また $\sup \Gamma(X)$ を X の **Hartogs 数 (Hartogs number)** という．

証明.

次の集合；

$$W := \left\{ (Y, \leq) \in \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X \times X) \;\middle|\; (Y, \leq) : \text{整列集合} \right\}$$

を考えると，置換公理より；

$$\Gamma(X)' := \{\alpha \mid \exists (Y, \leq) \in W; \alpha \in \mathrm{ON}, \alpha \cong (Y, \leq)\}$$

が集合である．このとき $\alpha \in \Gamma(X) \leftrightarrow \alpha \in \Gamma(X)'$ となる．（証明終）

定義 5.4（反鎖）

$(X, \leq)$ を順序集合とする．$Y \subset X$ に対して，任意の $x, y \in Y$ について $x \neq y$ ならば $x \nleq y$ かつ $y \nleq x$ が成り立つとき Y を**反鎖 (antichain)** という．

順序集合 X とその上の反鎖 Y について；

$$A(Y) \coloneqq \left\{x \in X \setminus Y \,\middle|\, Y \cup \{x\} : 反鎖\right\}$$

と定める．

定理 5.5（多重選択公理，Kurepa の極大反鎖条件）

次は ZF 上同値である．

(i) AC.

(ii) 任意の集合 X について，$\emptyset \notin X$ ならば写像 $f : X \to \bigcup_{x \in X} \mathfrak{P}(x)$ が存在して，$f(x) \neq \emptyset \in \mathfrak{P}(x)$ かつ $f(x)$ は有限集合である（多重選択公理 (AMC, Axiom of Multiple Choice)）．

(iii) 任意の順序集合は極大な反鎖を持つ（Kurepa の極大反鎖条件 (Kurepa's maximal antichain condition)）．

(iv) 任意の全順序集合は整列可能である．

(v) X を整列集合とすると $\mathfrak{P}(X)$ は整列可能である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$g : X \to \bigcup X$ を選択関数とすると，任意の $x \in X$ について $g(x) \in x$ なので $f : X \to \bigcup \mathfrak{P}(x); x \mapsto \{g(x)\}$ とすればよい．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

X を順序集合とする．$\mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(X) \coloneqq \left\{Y \in \mathfrak{P}(X) \,\middle|\, Y : 有限集合\right\}$ とおくと，$\mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ に AMC を適用して写像 $f : \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to \mathfrak{P}_{\mathrm{fin}}(X) \setminus \{\emptyset\}$ を得る．いま $g(Y) \coloneqq \left\{x \in f(Y) \,\middle|\, x : f(Y) の極小元\right\}$ とおくと $f(Y)$ が有限集合なので $g(Y) \neq \emptyset$ で，また $g(Y)$ は反鎖である．

ここで X が極大反鎖を持たないと仮定する．このとき任意の反鎖 Y に対して $A(Y) \neq \emptyset$ である．ここで $\mathfrak{P}(X)$ の Hartogs 順序数（定義・命題 5.3）からの写像；

$$h : \Gamma(\mathfrak{P}(X)) \to \mathfrak{P}(X); \alpha \mapsto \bigcup_{\beta \in \alpha} h(\beta) \cup g\left(A\left(\bigcup_{\beta \in \alpha} h(\beta)\right)\right)$$

を定めることができる．いま各 $\alpha \in \Gamma(\mathfrak{P}(X))$ について $h(\alpha)$ が反鎖であることに注意する．このとき h は単射である．実際 $h(\alpha) = h(\alpha')$ とすると，$\alpha \neq \alpha'$ ならば $\alpha \in \alpha'$ としてよく，いま $g(A(\bigcup_{\beta \in \alpha'} h(\beta))) \subset h(\alpha)$ かつ；

$$\emptyset \neq g\left(A\left(\bigcup_{\beta \in \alpha'} h(\beta)\right)\right) \subset X \setminus \bigcup_{\beta \in \alpha'} h(\beta)$$

となっているのでこれは矛盾し，$\alpha = \alpha'$ でなければならないからである．すると Hartogs 順序数の定義から $\Gamma(\mathfrak{P}(X)) \in \Gamma(\mathfrak{P}(X))$ となって矛盾する．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

X を全順序集合とする．このとき $Y := \{(A, a) \mid \emptyset \neq A \subset X, a \in A\}$ に対して；

$$(A, a) \leq (B, b) \Longleftrightarrow A = B, a \leq b$$

で順序を定める．ここで Y の極大反鎖 K をとると，任意の $\emptyset \neq A \subset X$ に対してある $a_A \in A$ が一意に存在して $(A, a_A) \in K$ である．よって $\mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ 上の選択関数；

$$f : \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X; A \mapsto a_A$$

が得られる．このとき任意の $\infty \notin X$ をとって，$f(\emptyset) = \infty$ と定めることで f を $f : \mathfrak{P}(X) \to X \cup \{\infty\}$ に延長できる．ここで X の Hartogs 順序数からの写像を超限帰納的に

$$g : \Gamma(X) \to X \cup \{\infty\}; \alpha \mapsto f(X \setminus \{g(\beta) \mid \beta \in \alpha\})$$

と定めると，もし任意の $\alpha \in \Gamma(X)$ に対して $g(\alpha) \neq \infty$ ならば g は単射である．実際 $\alpha \neq \beta \in \Gamma(X)$ とすると $\beta \in \alpha$ としてよく，$g(\alpha) = f(X \setminus \{g(\beta) \mid \gamma \in \alpha\}) \neq \infty$ なので $X \setminus \{g(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\} \neq \emptyset$ だから，f の構成（選択関数の性質）より $g(\alpha) \in X \setminus \{g(\gamma) \mid \gamma \in \alpha\}$ であるから．ところが $\Gamma(X)$ の定義から X への単射は存在し得ないので，$\{\alpha \in \Gamma(X) \mid g(\alpha) = \infty\} \neq \emptyset$ でなければならない．そこで $\gamma := \min\{\alpha \in \Gamma(X) \mid g(\alpha) = \infty\}$ とおくと，$g|_\gamma : \gamma \to X$ が全単射をなす．

(iv) $\Longrightarrow$ (v)

$(X, \leq)$ を整列集合とする．$\mathfrak{P}(X)$ 上に；

$$A <' B \Longleftrightarrow \text{ある } a \in A \setminus B \text{ が存在して，任意の } b \in B \setminus A \text{ に対して } a < b \text{ である．}$$

と定めると，これは狭義全順序をなす．まず明らかに非反射律が成り立つ．次に三分律を示す．もし $A \neq B$ ならば $x := \min(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ が存在する．そこで $x \in A \setminus B$ ならば $A <' B$ で，$x \in B \setminus A$ ならば $B <' A$ である．最後に推移律を示そう．$A <' B$ かつ $B <' C$ と仮定し，$A \not<' C$ としよう．このとき $A = C$ または $C <' A$ である．$A = C$ ならば $A <' B, B <' A$ となるがこれは定義からありえない．そこで $C <' A$ となる．すると，ある $a_0 \in A \setminus B, b_0 \in B \setminus C, c_0 \in C \setminus A$ が存在して；

$$a_0 < \min B \setminus A, b_0 < \min C \setminus B, c_0 < \min A \setminus C$$

を満たす．このとき $a_0 \in C$ ならば $a_0 \in C \setminus B$ なので $b_0 < a_0$ であり，このとき $b_0 \in A$ でなければならず $b_0 \in A \setminus C$ なので $c_0 < b_0$ となる．よって $c_0 \in B$ でなければならず $a_0 < c_0 < b_0 < a_0$ となって矛盾する．よって $a_0 \in A \setminus C$ であり，同様に $b_0 \in B \setminus A, c_0 \in C \setminus B$ である．ゆえに $a_0 < b_0 < c_0 < a_0$ となって結局矛盾する．よって $A <' C$ でなければならない．

(v) $\Longrightarrow$ (i)

整列可能定理を示す．X を任意の集合とする．定理 4.10 によりある順序数 α が存在して $X \in V_{\alpha+1} = \mathfrak{P}(V_\alpha)$ であるので，V_α が整列可能であることを示せばよい．ここで $\beta \in \alpha$ に対して $W_\beta := \{X \in V_\alpha \mid \mathrm{rank}(X) = \beta\}$ とおく．このとき $V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} W_\beta$ であることに注意する．

まず超限帰納法により，任意の $\beta \in \alpha$ について W_β が整列可能であることを示す．任意の $\gamma \in \beta$ に対し $(W_\gamma, \leq_\gamma)$ が整列順序であるとする．このとき $V_\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} W_\gamma$ 上に；

$$X \prec_\beta Y \Longleftrightarrow (\mathrm{rank}(X) \in \mathrm{rank}(Y) \vee (\mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(Y) \wedge X \leq_{\mathrm{rank}(X)} Y))$$

と定めると $(V_\beta, <_\beta)$ は整列順序である．これが順序をなすことは明らかで，任意の $\emptyset \neq A \subset V_\beta$ について $\gamma \coloneqq \min\{\mathrm{rank}(X) \mid X \in A\}$ とおくと $\gamma \in \beta$ であって，$A \cap W_\gamma$ の $\leq_\gamma$ についての最小元を X_0 とすると X_0 は $<_\beta$ について A の最小元となる．よって $(V_\beta, <_\beta)$ が整列集合であることがわかり，ある順序数 ε が一意に存在して順序同型 $V_\beta \cong \varepsilon$ がある．よって自然な全単射 $f : V_{\beta+1} \to \mathfrak{P}(\varepsilon)$ がある．いま仮定から $\mathfrak{P}(\varepsilon)$ は整列可能であり，この全単射によって $V_{\beta+1}$ もそうである．ゆえに $W_\beta \subset V_{\beta+1}$ なのでこれも整列可能．

よって V_α 上に；

$$X \leq Y \iff (\mathrm{rank}(X) \in \mathrm{rank}(Y) \vee (\mathrm{rank}(X) = \mathrm{rank}(Y) \wedge X \leq_{\mathrm{rank}(X)} Y))$$

と定めれば，上と同様にしてこれが整列順序であることが確かめられる．

（証明終）

この定理の (iii) から (iv) の証明により，ある集合 X について $\mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ 上の選択関数があれば X は整列可能であることがわかる．

§6 Tychonoff の定理

本節では，集合のフィルターを導入して AC と Tychonoff の定理が同値であることの証明を行う．AC が Tychonoff の定理を導くことは [] や [] などの標準的な教科書にも述べられていることだが，本稿ではフィルターを利用した証明を与え，次節において Hausdorff 空間に制限した Tychonoff の定理と，可換環の素イデアルの存在が同値であることをみる．

定義 6.1（フィルター）

X を集合とする．$\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ に対して，以下の条件；

(F1) $X \in \mathscr{F}, \emptyset \notin \mathscr{F}$.
(F2) 任意の $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ に対し $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$ である．
(F3) 任意の $F \in \mathscr{F}, G \in \mathfrak{P}(X)$ に対して $F \subset G$ ならば $G \in \mathscr{F}$ である．

をすべて満たすとき，$\mathscr{F}$ を X の**フィルター (filter)** という．

フィルターはその定義から必ず有限交叉性を持つことに注意する．フィルターは [] において点列の収束を議論する際に第二可算公理の仮定を外すために導入され，位相空間論において非常に有用な道具である（[] をみよ）．

X 上のフィルター $\mathscr{F}, \mathscr{G} \subset \mathfrak{P}(X)$ に対して，$\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ であるとき $\mathscr{G}$ は $\mathscr{F}$ の**細分 (refinement)** という．フィルター $\mathscr{F}$ が自分自身以外の細分を持たないとき**超フィルター (ultrafilter)** という．Zorn の補題によって，選択公理を仮定するとすべての集合は超フィルターを持つことがわかる．本節では AC と Tychonoff の定理の ZF 上での同値性をみることを主眼においているから，特に断らない限り超フィルターの存在は仮定しない．

また集合 X に対して $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ が有限交叉性を持つならば；

$$\langle \mathscr{F} \rangle \coloneqq \left\{ G \in \mathfrak{P}(X) \;\middle|\; \text{ある } F_1, \ldots, F_n \in \mathscr{F} \text{ が存在して，} F_1 \cap \cdots \cap F_n \subset G \text{ となる．} \right\}$$

はフィルターをなす．これを $\mathscr{F}$ が生成するフィルターという．

補題 *6.2*

$\mathscr{F}$ を集合 X 上の超フィルターとする．任意の $Y \subset X$ に対して $Y \in \mathscr{F}$ または $X \setminus Y \in \mathscr{F}$ のいずれかが成り立つ．

証明.

$Y \notin \mathscr{F}$ とする．もし任意の $Z \in \mathscr{F}$ に対して $Y \cap Z \neq \emptyset$ ならば $\mathscr{F} \subsetneq \langle \{Y\} \cup \mathscr{F} \rangle$ となるので $\mathscr{F}$ の極大性に矛盾するから，ある $Z \in \mathscr{F}$ が存在して $Y \cap Z = \emptyset$ すなわち $Z \subset X \setminus Y$ である．よって (F3) から $X \setminus Y \in \mathscr{F}$ である．（証明終）

X を位相空間とするとき，点 $x \in X$ の（全）近傍系を $\mathcal{N}_x$ で表すことにする．これは X のフィルターをなすことに注意する．

定義 *6.3*（フィルターの収束）

X を位相空間とする．X のフィルター $\mathscr{F}$ と $x \in X$ に対して $\mathscr{F}$ が $\mathcal{N}_x$ の細分になるとき $\mathscr{F}$ は x **に収束する (converge to** x**)** という．

命題 *6.4*

X を位相空間とする．X 上の超フィルター $\mathscr{F}$ とある点 $x \in X$ に対して，$\mathscr{F}$ が x に収束することと，任意の $Y \in \mathscr{F}$ に対して $x \in \overline{Y}$ であることは同値である（$\overline{Y}$ は Y の閉包を表す）．

証明.

($\Longrightarrow$)

任意の $Y \in \mathscr{F}$ をとる．任意の x の開近傍 U に対して，$\mathscr{F}$ が x に収束するから $U \in \mathscr{F}$ となる．よって $Y \cap U \neq \emptyset$ なので $x \in \overline{Y}$ である．

($\Longleftarrow$)

任意の $N \in \mathcal{N}_x$ に対して，ある開集合 U が存在して $x \in U \subset N$ である．ここで $x \notin X \setminus U$ なので $X \setminus U \notin \mathscr{F}$ である．よって補題 6.2 から $U \in \mathscr{F}$ となり，$N \in \mathscr{F}$ である．（証明終）

AC から Tychonoff の定理を導く際に 1 つの鍵となるのが次の命題である．

命題 *6.5*

位相空間 X がコンパクトならば任意の超フィルターはある点に収束する．

証明.

$\mathscr{F}$ を超フィルターとすると，$\left\{ \overline{Y} \,\middle|\, Y \in \mathscr{F} \right\}$ は有限交叉性を持つ閉集合族なので $\bigcap_{Y \in \mathscr{F}} \overline{Y} \neq \emptyset$ である．よって $x \in \bigcap \overline{Y}$ をとれば命題 6.4 により $\mathscr{F}$ は x に収束する．（証明終）

定理 *6.6*（Tychonoff の定理）

次は ZF 上同値である．

(i) AC.

(ii) コンパクト空間の直積はコンパクトである（Tychonoff の定理）．

証明.

$(\Longrightarrow)$

Step 1. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をコンパクト空間の族とし，$\mathscr{F}$ を $X \coloneqq \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の超フィルターとする．このとき；

$$\mathscr{F}_\lambda \coloneqq \left\{ Y \in \mathfrak{P}(X_\lambda) \;\middle|\; \pi_\lambda^{-1}(Y) \in \mathscr{F} \right\}$$

は X_λ の超フィルターをなす．ここで π_λ は λ 成分への自然な射影である．

Step 2. 命題 6.5 により各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathscr{F}_\lambda$ は収束するから，ある $x \coloneqq (x_\lambda) \in X$ を $\mathcal{N}_{x_\lambda} \subset \mathscr{F}_\lambda$ となるようにとれる．すると任意の $N \in \mathcal{N}_x$ に対して直積位相の定義からある $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ と $\pi_{\lambda_i}(x) = x_{\lambda_i}$ の開近傍 U_i がとれて；

$$\bigcap_{1\le i\le n} \pi_{\lambda_i}^{-1}(U_i) \subset N$$

となり，いま $\mathscr{F}_\lambda$ は x_λ に収束するから $U_i \in \mathscr{F}_{\lambda_i}$ なので $\pi_{\lambda_i}^{-1}(U_i) \in \mathscr{F}$ であり，フィルターの定義から $N \in \mathscr{F}$ である．よって $\mathscr{F}$ は x に収束する．

Step 3. AC のもとで命題 6.5 の逆が成り立つ．対偶を示す．X がコンパクトでないとすると，有限交叉性を持つ閉集合族 $\mathscr{A}$ で $\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = \emptyset$ となるものがある．すると $\langle\mathscr{A}\rangle$ を含む超フィルターを $\mathscr{F}$ とすれば，$\bigcap_{Y\in\mathscr{F}} \overline{Y} \subset \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A = \emptyset$ なので命題 6.4 により $\mathscr{F}$ はどこにも収束しない．

Step 4. 以上より X の任意の超フィルターは収束先を持つので，X はコンパクトである．

$(\Longleftarrow)$

$\emptyset \notin X$ とする．∞ を $\bigcup_{x\in X} x$ に含まれない集合として，各 $x \in X$ について $y_x \coloneqq x \cup \{\infty\}$ とおき，これに $\{\emptyset, y_x, \{\infty\}\}$ を開集合とする位相を定める．このとき y_x はコンパクトであり，仮定から $\prod_{x\in X} y_x$ もコンパクトである．いま $x \subset y_x$ は閉集合なので $\pi_x^{-1}(x)$ も閉であり，これは空ではない．なぜなら適当な $z \in x$ を選べば；

$$f_x : \{y_{x'} \mid x' \in X\} \to \bigcup \{y_{x'} \mid x' \in X\}\,;\, x' \mapsto \begin{cases} z & \text{if } x' = x. \\ \infty & \text{else.} \end{cases}$$

が（選択公理によらずに）定まるからである．このとき $\{\pi_x^{-1}(x)\}$ が有限交叉性を持つことが容易に確かめられ，$\bigcap_{x\in X} \pi_x^{-1}(x) = \prod_{x\in X} x \neq \emptyset$ である．（証明終）

§7　PIT と制限された Tychonoff の定理

本稿では，特に断らない限り環 A といえば 1 を持つ可換環のことを指すとする．また A の素イデアル全体を $\operatorname{Spec} A$ で表す．さて，任意の環が極大イデアルを少なくとも 1 つ持つこと（Krull の極大イデアル存在定理）と選択公理が同値であることはよく知られているが，それより弱い条件である「任意の環は素イデアルを少なくとも 1 つ持つ」は **PIT(Prime Ideal Theorem)** と呼ばれ，選択公理より真に弱いことが知られており（[, A.3], [, N38]）Hausdorff 空間についての Tychonoff の定理と同値である（定理 7.12）．本節ではこれら素イデアルに関する選択公理についての話題を紹介する．まずは Krull の極大イデアル存在定理と選択公理が同値であることを証明しよう．

定理 *7.1*（Krull の極大イデアル存在定理）

次は ZF 上同値である．

(i) AC.
(ii) 任意の 0 でない環は極大イデアルを持つ（Krull の極大イデアル存在定理）．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$I \subsetneq A$ を A のイデアルとする．次の集合；

$$\mathfrak{S} := \left\{ J \subsetneq A : \text{イデアル} \,\middle|\, I \subset J \right\}$$

は I を含むので空ではない．$\mathfrak{S}$ に包含関係で順序を定める．$\mathscr{F}$ を $\mathfrak{S}$ の鎖とすると，$J' = \bigcup_{J \in \mathscr{F}} J$ がイデアルをなし $\mathscr{F}$ の極大元となる．よって Zorn の補題より $\mathfrak{S}$ は極大元をもちそれが I を含む極大イデアルである．

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

ここでは [] による証明の概略を述べる．別証明としては [] のほか，Tukey の補題（定理 5.2）を介した証明が [] により得られていることを言及しておく．

AA（命題 2.4）を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合族とする．k を体とし，$X := \bigcup X_\lambda$ の元を変数とする多項式環 $k[X]$ を考える．各 $f \in k[X]$ について，$f = \sum q_i m_i$ とかけるような $q_i \in k^\times$ と単項式 m_i が存在する．このとき m_i を f-単項式ということにする．さて，次の集合族；

$$\mathfrak{S} := \left\{ A \subset X \,\middle|\, \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } A \cap X_\lambda = \emptyset \text{ または } A \cap X_\lambda \text{ は 1 点.} \right\}$$

を考える．この集合族が包含についての極大元を持てばそれが X の選択集合であるので，その存在を示そう．ここで次が成り立つ．

(i) 任意の $f \in k[X]$ に対して，$f = g_1 X_1 + \cdots + g_r X_r$ $(g_i \in k[X], X_i \in X)$ であるならば，任意の f-単項式 m はある X_i の倍元である．
(ii) 任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して A が $k[X]$ で生成するイデアルを $Ak[X]$ とおく．任意の $f \in Ak[X]$ に対して m を f-単項式とすると $m \in Ak[X]$ である．
(iii) 任意の $A \in \mathfrak{S}$ に対して $Ak[X]$ は素イデアルである．

まず (i) については明らかであろう．(ii) は (i) から容易に従う．また (iii) についても単項式の場合に成り立つことがわかり，一般の場合にも帰納的に示せる．このとき $S := k[X] \setminus \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} Ak[X]$ は積閉である．すると仮定から $S^{-1}k[X]$ は極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ．$\mathfrak{n} := \mathfrak{m} \cap k[X]$ とおく．$\mathfrak{n}$ は $\bigcup_{A \in \mathfrak{S}} Ak[X]$ に含まれるイデアルのなかで極大なものであることに注意する．ここで $E := \mathfrak{n} \cap X$ とおくとき $Ek[X] = \mathfrak{n}$ であることを示す．

$\subset$ は明らかである．任意の $f \in \mathfrak{n}$ をとり，m を f-単項式とする．任意の $g \in \mathfrak{n}$ について，$n \geqq 0$ を十分大きく取れば m^n はすべての g-単項式を割り切らないようにできる．$h := fm^n + g \in \mathfrak{n} \subset \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} Ak[X]$ なので，ある $A \in \mathfrak{S}$ がとれて $h \in Ak[X]$ である．すると (ii) から $m^{n+1}, g \in Ak[X]$ である．また (iii) から $Ak[X]$ は素イデアルなので $m \in Ak[X]$ だから，任意の $h' \in k[X]$ について $h'm + g \in Ak[X]$ である．よって $\mathfrak{n} + (m) \subset \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} Ak[X]$ だから，$\mathfrak{n}$ の極大性より $m \in \mathfrak{n}$ である．すると $\mathfrak{n}$ は素イデアルなので m は $\mathfrak{n} \cap X$ の元の倍元だから $m \in (\mathfrak{n} \cap X)k[X]$ である．よって $f \in (\mathfrak{n} \cap X)k[X]$ となり，$Ek[X] = \mathfrak{n}$ が示された．

ここで $E \in \mathfrak{S}$ である．実際各 $\lambda \in \Lambda$ について $X_1, X_2 \in E \cap X_\lambda$ であったとすると，$X_1 + X_2 \in \mathfrak{n}$ だから，ある $A \in \mathfrak{S}$ によって $X_1 + X_2 \in Ak[X]$ で，先程の議論と同様に $X_1, X_2 \in Ak[X]$ なので $X_1, X_2 \in A \cap E_\lambda$ だから

$X_1 = X_2$ である．よって $E \in \mathfrak{S}$ であり，$Ek[X] = \mathfrak{n}$ だから $\mathfrak{n}$ の極大性より E は $\mathfrak{S}$ で極大である．よってこれが求める選択集合である．（証明終）

以上により，ZF 上で；

$$\text{AC} \iff \text{Tychonoff の定理} \iff \text{Krull の極大イデアル存在定理}$$

が成り立つことがわかった．次はこれらの条件を弱めることを考えてみよう．集合 $\{0,1\}$ に離散位相を入れる．集合 X について $\prod_{x\in X}\{0,1\} = \mathrm{Map}(X,\{0,1\})$ に直積位相を定めたものを $\{0,1\}^X$ で表し，X を添数集合とする**一般 Cantor 空間 (generalised Cantor space)** という．

定理 7.2

ZF 上において，次が成り立つ．

A を 0 でない環とする．A を添数集合とする一般 Cantor 空間 $\{0,1\}^A$ がコンパクトならば $\mathrm{Spec}\,A \neq \emptyset$ である．

証明.

各 $S \in \mathfrak{P}(A)$ に対して，特性関数；

$$\chi_S : A \to \{0,1\}; a \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } a \in S. \\ 0 & \text{if } a \notin S. \end{cases}$$

を対応させることで，自然な全単射 $\mathfrak{P}(A) \to \{0,1\}^A$ がある．このとき，$f \in \{0,1\}^A$ が真のイデアル I に対応することと，次の条件；

(i) $f(0) = 1$.

(ii) $f(1) = 0$.

(iii) 任意の $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ に対して，$f(a_1) = 0$ または $f(a_2) = 0$ または $f(a_1b_1 + a_2b_2) = 1$ が成り立つ．

をすべて満たすことは同値である．$\mathcal{I} \coloneqq \left\{\chi_I \;\middle|\; I : A \text{ のイデアル}\right\}$ とおく．また各 $a, b \in A$ に対して；

$$F_{a,b} \coloneqq \left\{f \in \mathcal{I} \;\middle|\; f(a) = 1 \text{ または } f(b) = 1 \text{ または } f(ab) = 0 \text{ である．}\right\}$$

とおく．この定義から $f \in F_{a,b}$ に対応する $\mathfrak{P}(A)$ の点 $f^{-1}(\{1\})$ は，$ab \in f^{-1}(\{1\})$ ならば $a \in f^{-1}(\{1\})$ または $b \in f^{-1}(\{1\})$ を満たすような A のイデアルである．よって；

$$\bigcap_{a,b\in A} F_{a,b} \neq \emptyset$$

であれば，その元が A の素イデアルとなる．これを示すには $\{F_{a,b}\}_{a,b\in A}$ が有限交叉性を持つ閉集合族であればよい．まず $F_{a,b}$ は $\{0,1\}^A$ の閉集合をなすことを示そう．

$$\begin{aligned} {F_{a,b}}^c = \Big\{f \in \{0,1\}^A \;\Big|\; &\text{ある } a_1, a_2, b_1, b_2 \in A \text{ が存在して，} f(0) = 0 \text{ または } f(1) = 1 \text{ または} \\ &f(a_1) = 1, f(a_2) = 1, f(a_1b_1 + a_2b_2) = 0 \text{ または } f(a) = 0, f(b) = 0, f(ab) = 1 \text{ を満たす．}\Big\} \end{aligned}$$

であり，直積位相の定義から $\left\{f \in \{0,1\}^A \;\middle|\; f(0) = 0\right\} = \{0\} \times \{0,1\}^{A\setminus\{0\}}$ は開集合であり，$1, a_1, a_2, a_1b_1 + a_2b_2$ についても同様なので $F^c_{a,b}$ はこれらの有限共通部分の和となり開集合である．

次に有限交叉性を持つことを示せば証明が終了する．有限個の A の元の組 $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ をとる．$S \coloneqq \{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ とおき，部分集合 $T \subset S$ が生成する A のイデアルを $\langle T \rangle$ と表すことにすると $\{\langle T \rangle \mid T \subset S, \langle T \rangle \neq A\}$ は空でない（$\langle \emptyset \rangle = (0)$ となる）．また有限集合なので，包含関係についての極大元 $\langle T_0 \rangle$ がとれる．任意の $1 \leq i \leq n$ について $\chi_{\langle T_0 \rangle} \in F_{a_i, b_i}$ であることを示す．$F_{a,b}$ の定義より $a_i \in \langle T_0 \rangle$ または $b_i \in \langle T_0 \rangle$ ならば $\chi_{\langle T_0 \rangle} \in F_{a_i, b_i}$ である．$a_i, b_i \notin \langle T_0 \rangle$ とする．このとき $\{a_i\} \cup T_0 \subset S$ であって，$\langle T_0 \rangle$ の極大性から $\langle \{a_i\} \cup T_0 \rangle = A$ なのである $r \in A$ と $c \in \langle T_0 \rangle$ が存在して $1 = ra_i + c$ とかける．よって $ra_i b_i + b_i c = b_i \notin \langle T_0 \rangle$ だから $a_i b_i \notin \langle T_0 \rangle$ でなければならず，このときも $\chi_{\langle T_0 \rangle} \in F_{a_i, b_i}$ となる．よって $\chi_{\langle T_0 \rangle} \in \bigcap F_{a_i, b_i}$ となり有限交叉性を持つ．（証明終）

よって，ZF 上でコンパクト Hausdorff 空間の直積がコンパクトならば $\mathrm{Spec}\, A \neq \emptyset$ となることがわかった．これの逆が ZF 上で成り立つことを証明しよう．

まずは束を定義する．$(L, \leq)$ を順序集合とする．部分集合 S に対して，$a \in L$ が S の上界の中で最小であるとき $a = \vee S$ と書いて a を S の**結び (join)** といい，S の下界で最大のものを**交わり (meet)** という．特に２元集合 $\{a, b\} \subset L$ に対して $\vee\{a, b\} = a \vee b, \wedge\{a, b\} = a \wedge b$ と表す．

定義 *7.3*（束）

順序集合 $(L, \leq)$ について，L の任意の有限部分集合が結びと交わりを持つとき L を**束 (lattice)** という．

L を束とする．$S = \emptyset$ について考えることで $\vee S$ が L の最小元，$\wedge S$ が L の最大元となる．これを $0, 1$ で表す．任意の $a, b \in L$ について；

$$a \wedge (a \vee b) = a, a \vee (a \wedge b) = a$$

が成り立つ．これを**吸収律 (absorption law)** という．束 L について，任意の $a, b, c \in L$ に対して；

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

が成り立つとき L を**分配束 (distributive lattice)** という．また $a \in L$ に対して，$\neg a \in L$ で $a \wedge (\neg a) = 0, a \vee (\neg a) = 1$ を満たすものが存在するとき $\neg a$ を a の**補元 (complement)** という．

定義 *7.4*（Boole 束）

任意の元が補元を持つような分配束を **Boole 束 (Boolean lattice)** という．

Boole 束は $\vee, \wedge$ を演算と思うことで代数構造とみなすことができる．

定義 *7.5*

集合 B 上に可換で結合的な二項演算 $\vee, \wedge$ が定まっており，次の条件；

(B1) 任意の $a, b \in B$ に対して $a \vee (a \wedge b) = a, a \wedge (a \vee b) = a$ が成り立つ（吸収律）．

(B2) 任意の $a, b, c \in B$ に対して $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ が成り立つ（分配律）．

(B3) ある $0, 1 \in B$ が存在して，任意の $a \in B$ に対して $a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a$ が成り立つ．

(B4) 任意の $a \in B$ に対してある $\neg a \in B$ が存在して $a \vee (\neg a) = 1, a \wedge (\neg a) = 0$ が成り立つ．

をすべて満たすとき，代数構造 $(B, \vee, \wedge)$ を **Boole 代数 (Boolean algebra)** という．

簡単な計算から補元は一意的であり，$\neg(\neg a) = a$（二重否定除去）が成り立つことがわかる．

B を Boole 代数とすると；

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$$

と定めることで $(B, \leq)$ は順序集合になり，Boole 束になる．このように順序集合としての定義と代数構造としての定義を行き来できるわけだが，Boole 代数は適切に加法と乗法を定めれば可換環になり，またこれも論理的に等価な概念である．

定義 *7.6*（Boole 環）

B を環とする．任意の $a \in B$ に対して $a^2 = a$ が成り立つとき B を **Boole 環 (Boolean ring)** という．

B を Boole 環とすると任意の $a \in B$ に対して $a = a^2 = (-a)^2 = -a$ なので，$a + a = 0$ であることに注意する．特に B の標数は 2 である．Boole 環 B に対して；

$$a \vee b \coloneqq a + b + ab, a \wedge b = ab$$

と定めれば B は Boole 代数をなす．逆に B を Boole 代数とすると；

$$a + b \coloneqq (a \wedge (\neg b)) \vee (b \wedge (\neg a)), ab \coloneqq a \wedge b$$

とすれば B は Boole 環をなす．よって Boole 環と Boole 代数は論理的に等価である．これまで見てきた Boole 束，代数，環としての構造を特に断りなく行き来しながら用いることにする．

Boole 代数 B において，a の補元 $\neg a$ を考えると $a + \neg a = 1, a(\neg a) = 0$ となることが確かめられる．そこで $\neg a = 1 - a$ であり，任意の $a \in B$ に対して $a(1 - a) = 0$ となることがわかる．すると次の命題が証明できる．

命題 *7.7*

B を Boole 代数とすると，真のイデアル P について $P \in \operatorname{Spec} B$ であることと，任意の $a \in B$ に対して $a \in P$ または $\neg a \in P$ であることが同値である．

証明.

任意の $a \in B$ に対して $a \in P$ または $\neg a \in P$ ならば $P \in \operatorname{Spec} B$ であることを示せば十分である．$a \notin P$ とすると，$\neg a = 1 - a \in P$ であるので，$a + P = 1 + P$ となって $A/P \cong \mathbb{F}_2$ がわかり，$P \in \operatorname{Spec} B$ である．（証明終）

この証明から直ちに次が従う（AC を仮定しない状況においては素イデアルが存在しないかもしれないことを注意しておく）．

系 *7.8*

B を Boole 代数とすると，すべての素イデアルは極大である．

これは余談だが，（ZFC において）環 A について $\operatorname{Spec} A$ が Hausdorff 空間になることと $\dim A = 0$ であることは同値であった．上の命題により Boole 代数 B について $\operatorname{Spec} B$ は Hausdorff になり，さらに完全不連結である（非自明な連結部分集合を持たない）ことが証明できる．完全不連結なコンパクト Hausdorff 空間を Stone 空間といい，関手 Spec(−) によって Boole 代数のなす圏と Stone 空間のなす圏の間に圏同値があることが知られている（Stone 双対，[]）．また Boole 代数は特殊な分配束で，Stone 空間は特殊なスペクトラル空間だが，分配束とスペクトラル空間の間にも [] によって双対性があることが示されている（詳しくは [] をみよ）．

次に Boole 環の（非自明な）イデアルが Boole 代数，束の部分集合とどう対応するかをみよう．Boole 代数 B の部分集合 I について，次の条件；

(IA1) $0 \in I, 1 \notin I$.
(IA2) 任意の $a, b \in I$ に対して $a \vee b \in I$ である．
(IA3) 任意の $a \in I, b \in B$ に対して $a \wedge b \in I$ である．

をすべて満たすことと，次の条件；

(IL1) $\emptyset \subsetneq I \subsetneq B$.
(IL2) 任意の $a, b \in I$ に対して，ある $c \in I$ が存在して $a \leq c, b \leq c$ である．
(IL3) 任意の $a \in I, b \in B$ に対して $b \leq a$ ならば $b \in I$ である．

を満たすことが同値であることを確かめることができる．またこれは Boole 環として I がイデアルをなすことと同値であり，これら同値な条件を満たすものを Boole 代数のイデアルという．

Boole 代数の重要な例を 1 つ述べておく．集合 X に対して $\mathfrak{P}(X)$ に包含関係で順序を入れると，$Y, Z \in \mathfrak{P}(X)$ に対し $Y \vee Z = Y \cup Z, Y \wedge Z = Y \cap Z$ となり $\neg Y = X \setminus Y$ によって $\mathfrak{P}(X)$ は Boole 代数になる．ここで $\mathfrak{P}(X)$ が Boole 束になることに着目して，フィルターの概念を Boole 代数に一般化しよう．

定義 *7.9*

B を Boole 代数とする．部分集合 $F \subset B$ に対して，次の条件；

(FB1) $\emptyset \subsetneq F \subsetneq B$.
(FB2) 任意の $a, b \in F$ に対して，ある $c \in F$ が存在して $c \leq a, c \leq b$ である．
(FB3) 任意の $a \in F, b \in B$ に対して $a \leq b$ ならば $b \in F$ である．

をすべて満たすとき，F を B のフィルターという．

同値な書き換えとして；

(FA1) $0 \in F, 1 \notin F$.
(FA2) 任意の $a, b \in F$ に対して $a \wedge b \in F$ である．
(FA3) 任意の $a \in F, b \in B$ に対して $a \vee b \in F$ である．

をすべて満たすもの，と言い換えることもできる．定義をみればわかるように，Boole 代数においてイデアルとフィルターは等価な概念になっており，次のように互いに移りあう．

命題 *7.10*

B を Boole 代数とすると，B のイデアル全体とフィルター全体の間には；

$$I \mapsto I^* := \{a \in B \mid \neg a \in I\}$$

で与えられる包含関係を保つ全単射がある．

証明.

B のフィルター F に対して；

$$F^* := \{a \in B \mid \neg a \in F\}$$

と定めるとこれは B のイデアルをなし，$I^{**} = I, F^{**} = F$ となるので 1 対 1 の対応を与える．　（証明終）

Boole 代数の素イデアルは必ず極大なことから，素イデアルに対応するフィルターは超フィルターである．また，次の命題により定理 6.6 の Step 2. での選択公理の使用を Hausdorff 空間上では回避できる．

命題 7.11

位相空間 X について，X が Hausdorff であることと，任意のフィルター $\mathscr{F}$ について $\mathscr{F}$ が収束するならば収束先が一意に定まることは同値である．

証明.

($\Longrightarrow$)

$\mathscr{F}$ を X のフィルターとし，$\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y \subset \mathscr{F}$ とする．もし $x \neq y$ ならば，開集合 $x \in U, y \in V$ が存在して $U \cap V = \emptyset$ である．このとき $U, V \in \mathscr{F}$ なので $\emptyset = U \cap V \in \mathscr{F}$ となって矛盾する．よって $x = y$ である．

($\Longleftarrow$)

対偶を示そう．X が Hausdorff でないと仮定する．するとある $x \neq y \in X$ が存在して，任意の $Y \in \mathcal{N}_x, Z \in \mathcal{N}_y$ に対して $Y \cap Z \neq \emptyset$ である．このとき $\mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_y$ は有限交叉性を持ち，$\left\langle \mathcal{N}_x \cup \mathcal{N}_y \right\rangle$ は x, y に収束するフィルターである． （証明終）

これらの準備によって，PIT と Hausdorff 空間についての Tychonoff の定理が ZF で同値であることを証明しよう．

定理 7.12

ZF 上で次は同値である．

(i) 任意の環 A に対して $\mathrm{Spec}\, A \neq \emptyset$ である（PIT）．

(ii) 任意の Boole 代数 B に対して $\mathrm{Spec}\, B \neq \emptyset$ である（BPIT）．

(iii) 任意の集合 X に対して，有限交叉性を持つ集合族 $\mathscr{F} \subset \mathfrak{P}(X)$ はある超フィルターに含まれる．

(iv) コンパクト Hausdorff 空間の直積はコンパクトである．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

明らか．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

$\mathscr{F}$ を有限交叉性を持つ集合族とすると，$\langle \mathscr{F} \rangle$ は $\mathfrak{P}(X)$ のフィルターである．$\mathfrak{P}(X)$ のイデアル $\langle \mathscr{F} \rangle^*$ を考えると，剰余環 $\mathfrak{P}(X)/\langle \mathscr{F} \rangle^*$ も Boole 代数であるので素イデアルを持つ．それを $\mathfrak{P}(X)$ の素イデアルに引き戻したものは $\langle \mathscr{F} \rangle^*$ を含み，対応する超フィルターは $\langle \mathscr{F} \rangle$ を含む．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

$\{X_\lambda\}$ をコンパクト Hausdorff 空間の族とし，$X := \prod X_\lambda$ とする．$X = \emptyset$ のときは示すことはない．$X \neq \emptyset$ とする．$\mathscr{F}$ を X の超フィルターとすると，定理 6.6 の証明と全く同様に；

$$\mathscr{F}_\lambda := \left\{ Y \in \mathfrak{P}(X_\lambda) \,\middle|\, \pi_\lambda^{-1}(Y) \in \mathscr{F} \right\}$$

は X_λ の超フィルターをなす．ここで命題 6.5 により各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathscr{F}_\lambda$ は収束し，命題 7.11 により収束先は一意に定まるからそれを x_λ とすると $x := (x_\lambda) \in X$ を $\mathcal{N}_{x_\lambda} \subset \mathscr{F}_\lambda$ となるようにとれる．すると $\mathscr{F}$ は x に収

束する．またこの仮定のもとで定理 6.6 の証明の Step 3，すなわち命題 6.5 の逆も選択公理によらずに成り立つ．いま X の任意の超フィルターは収束先を持つので，X はコンパクトである．

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

定理 7.2.　（証明終）

§ 8　選択公理と加群論

線型代数とは体 k 上の加群論なので，可換代数に包含されるものとして取り扱うことに違和感のあるものはいないだろう．次の定理はよく知られているが，正則性公理を使わない証明が存在するかどうかなどは未解決である．

命題 *8.1*

次は ZF 上同値である．

(i) AC.

(ii) 任意の線型空間は基底を持つ．

証明.

($\Longrightarrow$)

V を（有限次元とは限らない）線型空間とする．

$$\mathcal{S} := \left\{ X \subset V \,\middle|\, X : \text{一次独立} \right\}$$

とおく．ここで $X \subset V$ が一次独立であるとは，任意の有限部分集合 $\{x_1, \ldots, x_r\} \subset X$ について，$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = 0$ ならば任意の i について $a_i = 0$ であることをいう．このとき $\mathcal{S}$ に Zorn の補題または Tukey の補題を適用することで極大元が存在することがわかり，それが V の基底となる．

($\Longleftarrow$)

AMC（定理 5.5）を示す．$\emptyset \notin X$ について，写像 $f : X \to \bigcup_{x \in X} \mathfrak{P}(x)$ で，任意の $x \in X$ について $f(x) \in \mathfrak{P}(x)$ で，$f(x)$ が有限であるものの存在を示す．ここで命題 2.4 の証明から，X は任意の異なる 2 元が互いに素であるとしてよい．k を体とし，多項式環 $k[\bigcup X]$ を考える．単項式 $\alpha := a e_1^{n_1} \ldots e_r^{n_r}$ と $x \in X$ について；

$$x\text{-}\deg \alpha := \sum \begin{cases} n_i & \text{if } e_i \in x. \\ 0 & \text{if } e_i \notin x. \end{cases}$$

とおく．$f \in k[\bigcup X]$ に対しすべての項の x-deg が等しいとき f を x 斉次式と呼ぶ．また $h := f/g \in k(\bigcup X)$ について f, g が x 斉次式のとき $x\text{-}\deg h := x\text{-}\deg f - x\text{-}\deg g$ と定義する．ここで；

$$K := \left\{ h \in k(\bigcup X) \,\middle|\, \text{任意の } x \in X \text{ に対して } x\text{-}\deg h = 0 \text{ である.} \right\}$$

と定義する．このとき体の拡大 $k(\bigcup X)/K$ により $k(\bigcup X)$ は K 上の線型空間とみなせる．V を K 上 $\bigcup X$ が生成する $k(\bigcup X)$ の部分空間とする．仮定からこれは K 上の基底 $\mathcal{B}$ を持つ．さて，$x \in X$ について，任意の $y \in x$ に対して $y \in V$ だからある $\mathcal{B}_y \subset \mathcal{B}$ により；

$$y = \sum_{b \in \mathcal{B}_y} \alpha_{b,y} b \ (\alpha_{b,y} \in K^{\times})$$

と一意に表示できる．このとき $\mathscr{B}_y$ が有限集合であることに注意する．また $y' \in x$ をとって；

$$y = y/y' \cdot y' = \sum_{b \in \mathscr{B}_{y'}} \frac{y}{y'} \alpha_{b,y'} b$$

とかけるから，$y/y' \in K$ なので表示の一意性から $\mathscr{B}_y = \mathscr{B}_{y'}$ であり，これを $\mathscr{B}_x$ とおく．また任意の $b \in \mathscr{B}_x$ に対して上と同様に $\alpha_{b,y}/y = \alpha_{b,y'}/y'$ であるので $\beta_{b,x} := \alpha_{b,y}/y \in k(\bigcup X)$ とおくと，$\alpha_{b,y} \in K$ なので $x\text{-}\deg \beta_{b,x} = -1$ である．よって $k(\bigcup X)$ において $\beta_{b,x}$ を既約分数表示すると，分母には x の元がただ 1 つ現れる．それを y_b とおく．このとき；

$$f(x) := \left\{ y \in x \,\middle|\, \text{ある } b \in \mathscr{B}_x \text{ に対して } y = y_b \text{ である.} \right\}$$

とおくと $f(x)$ は有限集合なので，写像 $f : X \to \bigcup \mathscr{P}(x); x \mapsto f(x)$ によって AMC が満たされる． （証明終）

線型空間 V について，$\mathscr{B}$ を V の基底としたとき $\dim V := \#\mathscr{B}$ と次元を定めるのが標準的と思われるが，実はこれが（もちろん無限次元の場合に）well-defined であることを証明することにも選択公理が必要である．それればかりか次の事実が知られている．

命題 *8.2*（[, Satz 1.]）

ある線型空間 V であって，２つの基底であって濃度の異なるものを持つものが存在するような ZF のモデルが存在する．

実際には選択公理より弱い PIT のもとで次元が well-defined であることを証明できる．まずは Hall の結婚定理を紹介するところから始めよう．

定義 *8.3*

S を有限集合からなる集合とする．任意の有限部分集合 $T \subset S$ に対して，$\#T \leq \#\bigcup_{x \in T} x$ が成り立つとき，S は**結婚条件 (marriage condition)** を満たすという．

命題 *8.4*

S を有限集合からなる集合とすると，単射な選択関数 $f : S \to \bigcup S$ が存在するならば S は結婚条件を満たす．

証明.

結婚条件を満たさないとすると，有限部分集合 $T \subset S$ が存在して $\#\bigcup T < \#T$ となる．よって S の選択関数 f で単射なものが存在すれば $f|_T : T \to \bigcup T$ が単射なので矛盾する． （証明終）

この条件のもと，f の像を S の**完全代表系 (system of distinct representative)** や**横断集合 (transversal)** という．PIT を課すとこの逆も成り立つというのが Hall の結婚定理である．まず PIT は有限集合についての選択公理を導くことを注意しておく．主張「S を空でない有限集合からなる集合とすると，S は選択関数を持つ」を AC(fin) で表すことにする．

命題 *8.5*

ZF 上で，PIT は AC(fin) を導く．

証明.

大筋は定理 6.6 と同様である．$\emptyset \notin X$ を有限集合からなる集合とすると，∞ を $\bigcup_{x\in X} x$ に含まれない集合として $y_x := x \cup \{\infty\}$ とすれば y_x も有限集合だから，離散位相によってコンパクト Hausdorff 空間になる．よって $\prod_{x\in X} y_x$ はコンパクトであり，有限交叉性をもつ閉集合族 $\{\pi_x^{-1}(x)\}$ によって $\prod_{x\in X} x = \bigcap_{x\in X} \pi_x^{-1}(x) \neq \emptyset$ である． （証明終）

主張「S を有限集合からなる集合とする．S が結婚条件を満たすことと，単射な選択関数 $f : S \to \bigcup S$ が存在することは同値である.」を **Hall の結婚定理 (Hall's marriage theorem)** といい HM で表すことにする.

命題 *8.6*（Hall の結婚定理）

ZF 上で PIT $\Longrightarrow$ HM が成り立つ.

証明.

命題 8.4 により，結婚条件から単射な選択関数の存在が従うことを見ればよい．まず S が有限集合のとき，$\#S$ についての帰納法で示す．$\#S = 1$ のときは明らか．$\#S < n$ まで正しいとする．$S = \{x_1, \dots, x_n\}$ とおこう.

(i) 任意の真部分集合 $T \subsetneq S$ について $\#T < \#\bigcup T$ であるとき.

任意の $y \in x_n$ を 1 つ固定しておく．仮定よりすべての x_i は singleton でないことに注意する．さて $S' := \{x_1 \setminus \{y\}, \dots, x_{n-1} \setminus \{y\}\}$ とおく．部分集合 $T' \subset S'$ について $T' = \{x_1 \setminus \{y\}, \dots, x_k \setminus \{y\}\}$ としてよい．いま仮定から $k = \#\{x_1, \dots, x_k\} < \#(x_1 \cup \cdots \cup x_k)$ であって，構成から $\#(x_1 \cup \cdots \cup x_k) - 1 \leq \#\bigcup T'$ なので $\#T' \leq k \leq \#\bigcup T'$ がわかる．ゆえに S' は結婚条件を満たし，帰納法の仮定から単射な選択関数 $f' : S' \to \bigcup S'$ が存在する．これによって；

$$f : S \to \bigcup S; x_i \mapsto \begin{cases} f'(x_i \setminus \{y\}) & \text{if } 1 \leq i \leq n-1. \\ y & \text{if } i = n. \end{cases}$$

とすればよい.

(ii) ある真部分集合 $T \subsetneq S$ が存在して $\#T = \#\bigcup T$ であるとき.

$T = \{x_1, \dots, x_k\}$ としてよい．T は明らかに結婚条件を満たすので，帰納法の仮定から単射な選択関数 $f_T : T \to \bigcup T$ がある．このとき $\bigcup T = \{f_T(x_1), \dots, x_T(x_k)\}$ に注意する．もしある $k < j \leq n$ について $x_j \subset \{f_T(x_1), \dots, x_T(x_k)\}$ ならば $k + 1 = \#(T \cup \{x_j\}) > k = \#\bigcup(T \cup \{x_j\})$ となるので S の結婚条件に矛盾する．よって各 $k < j \leq n$ について $x'_j := x_j \setminus \{f_T(x_1), \dots, x_T(x_k)\} \neq \emptyset$ である．さて $S' := \{x'_{k+1}, \dots, x'_n\}$ とおく．任意の $T' \subset S'$ について $T' = \{x'_{k+1}, \dots, x'_{k+l}\}$ としてよい．このとき $U := \{x_1, \dots, x_{k+l}\}$ とすれば；

$$\#T' \leq \#U - k \leq \#\bigcup U - k \leq \bigcup T'$$

となるので S' は結婚条件を満たし単射な選択関数 $f' : S' \to \bigcup S'$ がとれる．これによって；

$$f : S \to \bigcup S; x_i \mapsto \begin{cases} f_T(x_i) & \text{if } 1 \leq i \leq k. \\ f'(x'_i) & \text{if } k < i \leq n. \end{cases}$$

とすればよい.

以上で S が有限の場合が証明された.

次に S が無限集合の時を考える．$G \coloneqq \prod_{x \in S} x$ とおく．命題 8.5 により $G \neq \emptyset$ であり，また各 x に離散位相を入れると x はコンパクト Hausdorff 空間なので G もコンパクトである（定理 7.12）．さて任意の有限部分集合 $T = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$ に対して；

$$H_T \coloneqq \left\{ (y_x) \in G \,\middle|\, \text{任意の } 1 \leq i \neq j \leq n \text{ に対して } y_{x_i} \neq y_{x_j} \text{ が成り立つ.} \right\}$$

とおくと，有限の場合についての証明から $H_T \neq \emptyset$ である．すると $\mathscr{F} \coloneqq \left\{ T \in \mathscr{P}(S) \,\middle|\, T : \text{有限集合} \right\}$ とおいたとき，$\{H_T\}_{T \in \mathscr{F}}$ は有限交叉性を持ち，G がコンパクトなので $\bigcap_{T \in \mathscr{F}} H_T \neq \emptyset$ である．よってその元が S の単射な選択関数を定める．（証明終）

有限集合についての Hall の定理については明らかに ZF でも成り立つ．さて Hall の結婚定理の証明に PIT が AC(fin) を導くことを用いたが，HM は単体で AC(fin) を導くことを見ておこう．

命題 *8.7*

ZF 上で PIT $\Longrightarrow$ HM $\Longrightarrow$ AC(fin) が成り立つ．

証明.

ZF 上で Hall の結婚定理が AC(fin) を導くことを見ればよい．$\emptyset \notin S$ を有限集合の族とする．命題 2.4 の証明から S は任意の異なる２元が互いに素であるとしてよい．$T \subset S$ を有限部分集合とする．T は有限なので選択関数 $f_T : T \to \bigcup T$ を持つ．すると $x \neq y \in T$ に対して仮定から $x \cap y = \emptyset$ なので f は単射である．よって $\#T \leq \#\bigcup T$ となり結婚条件を満たす．ゆえに仮定より S は選択関数を持つ．（証明終）

命題 8.7 について各含意の逆が成り立つかどうかは未解決である．一方で AC(fin) が成り立つが PIT を満たさないような ZF のモデル（[], [, M43]）が存在するので両方の逆が成り立つことはありえない．

さて，次元の well-defined 性を証明しよう．ここでは選択公理を仮定しないので，集合の濃度として定義 4.11 を考えるが，選択公理を仮定して定義 3.18 を採用した場合も全く同様に証明できる．

命題 *8.8*

ZF+HM において，任意の線型空間の基底の濃度は（存在すれば）一定である．

証明.

V を体 k 上の線型空間とする．その基底 $W, W' \subset V$ をとる．任意の $x \in W$ に対して $x = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_r y_r$ $(\alpha_i \in k, y_i \in W')$ と表示する．この表示は一意的で $W'_x \coloneqq \{y_1, \ldots, y_r\}$ とおくと $\{W'_x\}_{x \in W}$ は有限集合からなる集合族である．W, W' が基底であることから $\{W'_x\}_{x \in W}$ は結婚条件を満たし，単射な選択関数 $\{W'_x\}_{x \in W} \to \bigcup_{x \in W} W'_x \subset W'$ が存在する．よって $\#W \leq \#W'$ が成り立ち，同様に $\#W' \leq \#W$ なので濃度が一定である．（証明終）

次に加群の射影的，入射的といった性質と選択公理の関連についてみていこう．A 加群 M が**可除 (divisible)** であるとは，任意の零因子でない $a \in A$ に対して $a \cdot : M \to M$ が全射であることをいう．

命題 *8.9*

次は ZF 上同値である．

(i) AC.

(ii) A を環とする．射影加群の直和もまた射影的である．

(iii) A を環とする．自由加群は射影加群である．

(iv) ある環 A が存在して，自由加群は射影加群である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$\{P_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を射影的 A 加群の族とし，$P \coloneqq \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ とおく．A 加群の間の全射な線型写像 $\varphi : M \to N$ に対して，各 λ について次の図式；

$$\begin{tikzcd}
P_\lambda \arrow[d, "\iota_\lambda"] \arrow[ddr, dashed, "\widetilde{f_\lambda}"] & & \\
P \arrow[d, "f"] & & \\
M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を可換にするような $\widetilde{f_\lambda}$ が存在する．すなわち；

$$H_\lambda \coloneqq \{f \in \mathrm{Hom}_A(P_\lambda, N) \mid f = \varphi \circ f \circ \iota_\lambda\} \neq \emptyset$$

である．よって選択公理により $\prod_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda \neq \emptyset$ であり，その元をとれば直和の普遍性から $\widetilde{f} : P \to N$ で $\varphi \circ f = \widetilde{f}$ であるようなものがとれる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

明らか.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

明らか.

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

AMC（定理 5.5）を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素であるような非空集合の族とする．$X \coloneqq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とおき，F, M をそれぞれ Λ, X で生成される自由 A 加群とする．$x \in X_\lambda$ について $\varphi(x) = \lambda$ とすることで定まる全射 $\varphi : M \to F$ を考える．F が射影的なので，次の図式；

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[d, dashed, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\
M \arrow[r, "\varphi"] & F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

を可換にするような $f : F \to M$ がある．$f(\lambda) = \sum_{x\in X} \alpha_{\lambda,x} x$ とおく．$\varphi(f(\lambda)) = \lambda$ なので $\sum_{x\in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x} = 1$ なので；

$$\left\{x \in X_\lambda \;\middle|\; \alpha_{\lambda,x} \neq 0\right\} \neq \emptyset$$

であって，これは有限集合なのでこれを対応させせることで AMC が成り立つ．　（証明終）

命題 *8.10*

次は ZF 上同値である．

(i) AC.
(ii) 任意の環 A と $E \in \mathrm{Mod}(A)$ に対して，任意のイデアル I と線型写像 $\varphi : I \to E$ に対して，ある $\widetilde{\varphi} : A \to E$ で $\widetilde{\varphi}|_I = \varphi$ となるものが存在するならば，E は入射的である（Baer's criteron).
(iii) A を PID とすると，可除 A 加群は入射的である．
(iv) 可除 Abel 群は入射的である．

証明.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

$M \subset N$ を A 加群とし，$\varphi : M \to E$ とする．ここで，Zorn の補題から N' を $M \subset N' \subset N$ なる加群のうちで φ を拡張できる極大のものとしてとれる．ここで $N' \neq N$ を仮定する．任意の $x \in N \setminus N'$ をとる．ここで $I \coloneqq \{a \in A \mid ax \in N'\}$ は A のイデアルとなる．このとき $I \to N'; a \mapsto ax$ と $\varphi' : N' \to A$ の合成は，仮定より $\psi : A \to E$ に持ち上がる．ここで；

$$\varphi'' : N' + Ax \to E : n' + an \mapsto \varphi'(n') + \psi(a)$$

はその構成から N' に制限すると φ に一致する．これは N' の極大性に矛盾．よって E は入射的となる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

A を PID とし，M を可除 A 加群とする．任意の $a \in A$ をとって $\varphi : (a) \to M$ を考える．いま M が可除的なので，ある $x \in M$ が存在して $\varphi(a) = ax$ とかける．そこで $\widetilde{\varphi} : A \to M; a \mapsto ax$ と定めれば，これは φ の拡張である．よって Baer's criterion により M は入射的である．

(iii) $\Longrightarrow$ (iv)

明らか.

(iv) $\Longrightarrow$ (i)

主張「集合 X について，任意の $x \in X$ に対して $\#x \geq 2$ を満たすならば，写像 $f : X \to \bigcup_{x \in X} \mathfrak{P}(x)$ が存在して，任意の $x \in X$ に対して $\emptyset \neq f(x) \subsetneq x$ かつ $f(x)$ は有限集合である.」が成り立つことを示す．この主張は明らかに AMC を導き，定理 5.5 により AC が成り立つ（AMC は ZF^- では AC を導けないことが知られている [] が，実はこの主張は ZF^- において選択公理を導くことができる [, Theorem 2.1]）.

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\#X_\lambda \geq 2$ であるような集合族とする．$\{X_\lambda\}$ の異なる 2 元は互いに素であるとしてよい．$X \coloneqq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とする．X を基底とする $\mathbb{Q}$ 線型空間 V を考える．これを単に Abel 群とみるとこれは可除 Abel 群で，また部分群；

$$G \coloneqq \left\langle x - y \;\middle|\; \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ について } x, y \in X_\lambda \text{ である.} \right\rangle$$

を考えると，剰余群 $H \coloneqq V/G$ も可除である．各 λ について X_λ の元を代表元とする H の元はすべて等しいので，それを $\overline{\lambda}$ で表す．ここで Λ で生成される自由 Abel 群を F とする．また；

$$m_\lambda \coloneqq \begin{cases} \#X_\lambda & \text{if } \#X_\lambda < \infty. \\ 2 & \text{if } \#X_\lambda = \infty. \end{cases}$$

とおくと，群準同型 $f : F \to F; \lambda \mapsto m_\lambda \lambda, g : F \to H; \lambda \mapsto \overline{\lambda}$ が定まり，f は単射である．すると H が入射的

なので，次の図式；

$$\begin{tikzcd} & & H \\ 0 \arrow[r] & F \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & F \arrow[u, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

を可換にするような $h : F \to H$ が存在する．このとき $\overline{\lambda} = m_\lambda h(\lambda)$ であることに注意する．また $h(\lambda) = \overline{u_\lambda}$ となるような $u_\lambda \in V$ が存在し，X が V の線型空間としての基底であることから；

$$u_\lambda = \sum_{x \in X} \alpha_{\lambda,x} x \ (\alpha_{\lambda,x} \in \mathbb{Q})$$

と一意的に表示できる．このとき $\overline{\lambda} = m_\lambda h(\lambda)$ であるから，任意の $x_\lambda \in X_\lambda$ について $x_\lambda - \sum_{x \in X} m_\lambda \alpha_{\lambda,x} x \in H$ なので，任意の $x \in X_\lambda$ について $m_\lambda \alpha_{\lambda,x} \in \mathbb{Z}$ でなければならない．すると；

$$\overline{\lambda} = \overline{\sum_{x \in X} m_\lambda \alpha_{\lambda,x} x} = \overline{\sum_{x \in X_\lambda} m_\lambda \alpha_{\lambda,x} x}$$

であるので $\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x} = 1/m_\lambda$ である．ここで；

$$n_\lambda \coloneqq \min \left\{ n > 0 \;\middle|\; \text{ある } x \in X_\lambda \text{ に対して } \alpha_{\lambda,x} \equiv \frac{n}{m_\lambda} \pmod{\mathbb{Z}} \text{ である.} \right\}$$
$$F_\lambda \coloneqq \left\{ x \in X_\lambda \;\middle|\; \alpha_{\lambda,x} \equiv \frac{n_\lambda}{m_\lambda} \pmod{\mathbb{Z}} \right\}$$

とおくと，F_λ は空でない有限集合である．$F_\lambda \subsetneq X_\lambda$ を示せばよい．$F_\lambda = X_\lambda$ とすると，$m_\lambda = \# X_\lambda$ であることに注意して；

$$\frac{1}{m_\lambda} = \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x} \equiv \frac{n_\lambda}{m_\lambda} m_\lambda = n_\lambda \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$$

だがこれは矛盾である．（証明終）

最後に，可換環論のいくつかの事実が選択公理無しでは証明できないということを（証明はせずに）紹介して，本節を締めくくろう．環を A とする．条件；

A_1: A は組成列を持つ．

A_2: A はイデアルの極小条件を満たす．

A_3: A はイデアルの降鎖律を満たす．

N_1: A はイデアルの極大条件を満たす．

N_2: A のすべてのイデアルは有限生成である．

N_3: A はイデアルの昇鎖律を満たす．

について，A_1, A_2, A_3 は Artin 性の同値条件で N_1, N_2, N_3 は Noether 性の同値条件であることは広く知られているが，次が成り立つ．

定理 *8.11*（[, Sect 3.1, Theorem 1]）

A を環とする．ZF 上では；

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \Longrightarrow & N_1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A_2 & & N_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ A_3 & & N_3 \end{array}$$

は成り立つが，各含意の逆は証明できない．

これに関連して，「PID 上ではイデアルの極大条件が成り立つことを選択公理を仮定せずとも使用できる」という（筆者が実際に聞いたことのある）言説は誤りであることがわかる．また PID についても次が知られている．

定理 *8.12*（[, Theorem 5]）

PID ならば UFD であることは ZF では証明できない．実際体でない PID で，素元を持たないものが存在するような ZF のモデルが存在する．

付録—Grothendieck 宇宙

—Appendix

現代的な代数学では，もはや圏論の言葉なしに議論を展開することは困難である．この付録では圏の定義と，それに伴う集合論的な問題について触れることにしよう．圏の定義をクラス抜きに正当化するための **Grothendieck 宇宙**について多少詳しく扱う．

§ A　圏と Grothendieck 宇宙

本節ではクラスを使わない圏の定義を紹介するが，紙数の都合もあり具体的な圏論については述べることはできない．例えば関手などについても一切触れない．詳細に興味がある場合は例えば [], [] などの標準的な教科書を見よ．

定義 *A.1*（圏）

集合 $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ について，任意の $A, B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ に対して集合 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ が存在して，以下の条件；

(C1) 任意の $A, B, C \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ について，結合的な演算；

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C); (g, f) \mapsto g \circ f$$

が定義されている（これを**合成 (composition)** という）．

(C2) 任意の $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ について $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A)$ が存在して，任意の $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ と $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ について $f = f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f$ が成り立つ（この id_A を A 上の**恒等射 (identity)** という）．

をみたすとき，組 $(\mathrm{ob}(\mathscr{A}), \{\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)\}_{A,B \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})}, \circ)$ を単に $\mathscr{A}$ とかいて，$\mathscr{A}$ は**圏 (category)** であるという．

誤解のおそれがないときは $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ は単に $\mathrm{Hom}(A, B)$ とかく．また簡単のために $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ を $A \in \mathscr{A}$, $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ を $f : A \to B$ とかく．$A \in \mathscr{A}$ を $\mathscr{A}$ の**対象 (object)** といい，$f : A \to B$ を A から B への**射 (morphism, map, arrow)** という．

圏の定義のモチベーションは，ある数学的対象の全体と，その間の（構造を保つような）写像，つまり代数構造なら準同型，位相構造なら連続写像などの全体，その組を 1 つのデータとして扱おうというところが大きい．

例 A.2

Set . . . . 集合全体，写像.
Top . . . . 位相空間全体，連続写像.
Ab . . . . Abel 群全体，準同型写像.
Ring . . . . （1 を持つ可換）環全体，準同型写像.
$\mathrm{Mod}(A)$ . . . . . A 加群全体，A 線型写像.

などはすべて圏をなす．ここでは 1 つの対象のみからなる圏など，いかにも圏論チックな例は扱わない．

ここで「集合全体の集合」によって圏 **Set** を定義しているが，これを ZFC において集合として扱うことはできないということは本稿で散々述べてきたことである．このような「素朴には集まりとして考えられるが集合ではないもの」を「クラス」と読んでいたが，次の **Grothendieck 宇宙**というアイデアを使用すると，ZFC に 1 つの公理を追加することで，**Set** などを集合の上に定義することができるようになる．

定義 *A.3*（Grothendieck 宇宙）

集合 U であって，次の性質；

(GU1) $x \in y, y \in U$ ならば $x \in U$ である．
(GU2) $x, y \in U$ ならば $\{x, y\} \in U$ である．
(GU3) $x \in U$ ならば $\mathfrak{P}(x), \bigcup x \in U$ である．
(GU4) 任意の全射 $f : x \to y$ について，$x \in U$ かつ $y \subset U$ ならば $y \in U$ である．

を満たすものを **Grothendieck 宇宙 (universe)** という．

この定義によって $\mathbb{N} \in U$ でありさえすれば U は普段扱うような対象をすべて含んでいることがわかる．ただし $U \notin U$ であることに注意が必要であり，これによって Cantor のパラドックスを防いでいる．$\emptyset$ は Grothendieck 宇宙である．また定義 4.2 における V_ω は正則性公理のもとで遺伝的有限集合の集合とよばれ，Grothendieck 宇宙になる．しかしながらこれらは $\omega = \mathbb{N}$ を元として持たない．これらを自明な Grothendieck 宇宙という．そのため定義に $\mathbb{N} \in U$ を課す流儀もある（例えば []）．じつは ZFC では $\emptyset, V_\omega$ 以外の Grothendieck 宇宙の存在を証明できない．なぜならば $\mathbb{N} \in U$ を満たす Grothendieck 宇宙はその定義から ZFC のモデルとなり，Gödel の第二不完全性定理に反する（自明な Grothendieck 宇宙は ZFC から無限公理を抜いた公理系のモデルとなる）．そこで，我々は ZFC に基づいた公理系の上で圏論を行う際に次の公理を採用する（真クラスを扱うことのできる VGB (von Neumann–Gödel–Bernays) などの公理系を採用するという手もある）．

公理 10.（宇宙公理）

任意の集合 X に対して，$X \in U$ となる Grothendieck 宇宙 U が存在する．

宇宙公理は単に U で略される．これにより，十分大きな Grothendieck 宇宙 U をとることで，望む限りの大きさを持った集合を実現できる．そのため，Grothendieck 宇宙 U を 1 つ固定し，その U を集合全体だと思うことにすれば，圏 **Set** をクラスを扱わずに定義することができる．このとき $x \in$ **Set** であるような集合を**小 (small)** であるという．正則性公理により **Set** は集合だが小ではない．この公理のもと，圏 $\mathscr{C}$ が**小**であるとは $\mathscr{C} \in$ **Set** であることをいう．$\mathscr{C}$ について，任意の $A, B \in \mathscr{C}$ に対して $\mathrm{Hom}(A, B) \in$ **Set** であるとき $\mathscr{C}$ は**局所小 (locally small)** であるという．

この流儀ではもはや U の元でないものは **Set** の対象ではないが，望むだけ U を大きくすればよいので大きな問題ではない．ただし，宇宙を取り替える際に今までの宇宙に依存していた議論が破綻する可能性があるため，$\mathfrak{P}$(**Set**) などを考える際には慎重にならなければならない．

宇宙公理と ZFC の関係性についてだが，実は微妙な問題で「ZFC が無矛盾ならば，ZFC+U は無矛盾である」の証明は ZFC では定式化できない（[, II.17]）．しかしながら，現状多くの研究が ZFC+U の上で行われているのも事実である．例えば，Grothendieck 宇宙は [SGA4] にトポス理論とともに詳しく述べられており，これらに基づく数論幾何系の研究は ZFC+U の上で行われることになる．それは [] による Fermat's Last Theorem の証明も例外ではない．詳しくは [] をみよ．

さて，宇宙公理は ZFC 上で「非自明な強到達不能基数が存在する」という主張と同値であり，これのあらすじを述べて本稿を締めくくろう．

§ B　強到達不能基数

本節以降は本稿において述べてきた事項を多く活用する．特に本稿の §4 までの知識を仮定する．必要に応じて参照してもらいたい．

定義 *B.1*（基数）

順序数 α に対して，$\alpha = \min\left\{\beta \in \mathrm{ON} \,\middle|\, \text{全単射 } \alpha \to \beta \text{ が存在する.}\right\}$ であるとき，α を**基数 (cardinal number)** という．

これも英語では単に Cardinal と書かれることが多い．選択公理のもと，順序数の節で議論したように任意の集合 X に対してその濃度；

$$\#X \coloneqq \min \mathrm{ON}_X$$

が定義され（定義 3.18）これは基数である．そこで濃度とは集合に対応する基数のことであると表現できる．

κ を任意の基数とすると，Cantor の定理より $\#\kappa < \#\mathfrak{P}(\kappa)$ なので κ より大きい基数は少なくとも 1 つ存在する．それの中で最小のものを κ^+ で表す．基数 κ について，どんな基数 λ によっても λ^+ の形で表せないものを**極限基数**といい，κ^+ を κ の**後続型基数**という．ω は最小の無限基数であり，これを $\aleph_0$ とも表す．$\aleph_1$ を $\aleph_0$ より大きい基数のなかで最小のものとし（すなわち $\aleph_1 = \aleph_0^+$），これを繰り返すことでアレフ系列；

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \cdots < \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} < \cdots \quad (\alpha \in \mathrm{ON})$$

を得る．

定義 *B.2*

α を順序数とする．部分集合 $u \subset \alpha$ に対して $\sup u = \alpha$（定義・命題 4.7）であるとき，u を**共終 (cofinal)** であるという．

後続型順序数は共終部分集合を持たない．

定義 *B.3*（正則基数）

α を極限順序数とする．

$$\mathrm{cf}(\alpha) \coloneqq \min\left\{\beta \in \mathrm{ON} \,\middle|\, \text{共終な } u \subset \alpha \text{ が存在して，} \beta \text{ は } u \text{ の順序型である.}\right\}$$

を α の**共終数 (cofinality)** という．$\alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$ であるとき α を**正則 (regular)** であるといい，$\alpha > \mathrm{cf}(\alpha)$ であるとき**特異 (singular)** という．正則な順序数は必ず基数になるので，正則基数と呼ばれる．

ω は正則基数である．正則でない順序数の例として，$\omega + \omega$ を挙げておく．実際非自明な共終部分集合として $\{\omega + n \mid n \in \omega\} \subset \omega + \omega$ を持ち，$\{\omega + n \mid n \in \omega\}$ の順序型は ω である．特異基数の例としては $\aleph_\omega$ を挙げておく．実際 $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$ である．

定義 *B.4*（弱到達不能基数）

正則な極限基数を**弱到達不能基数 (weakly inaccessible cardinal)** という．

ω は弱到達不能基数だが，これを自明な弱到達不能基数という．到達不能というのは，非可算な弱到達不能基数の存在は ZFC では証明できない（[, Corollary 4.13]）ことによる．次に強到達不能基数について述べる．そのために基数の演算について考える必要があるが，その議論は [] の濃度の演算の議論そのものであるのでここでは省略する．定義だけ復習しておくと，基数 κ, λ, μ に対してそれぞれ；

$$\kappa + \lambda \coloneqq \#((\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \lambda))$$
$$\kappa \cdot \lambda \coloneqq \#(\kappa \times \lambda)$$
$$\kappa^{\lambda} \coloneqq \#\operatorname{Map}(\lambda, \kappa)$$

と定めればよいのであった．また選択公理を仮定せずに基数演算を考えると何が起こるのかについては [, 4.3] を参照のこと．その節タイトルが “Disasters in Cardinal Arithmetic” であることから察していただきたい．ちなみに，基数（濃度）の冪については上のように定義するのが標準的だが，実はかなり自由に定義することができることが知られている．というのも，次の定理が成り立つ．

定理 *B.5*（[, Chap. VIII, §4]）

κ を正則基数とするとき，冪 2^{κ} は単調性（すなわち $\kappa < \lambda$ ならば $2^{\kappa} \leq 2^{\lambda}$）と König の補題（すなわち $\kappa < \operatorname{cf}(2^{\kappa})$）を満たしさえすれば，どのように定めても ZFC と矛盾しない．

余談はそこそこにして強到達不能基数を定義してしまおう．

定義 *B.6*（強到達不能基数）

κ を基数とする．任意の $\lambda < \kappa$ に対して $2^{\lambda} < \kappa$ であるとき，κ を**強極限基数 (strong limit cardinal)** という．正則な強極限基数を**強到達不能基数 (strong inaccessible cardinal)** という．

ω も自明な強到達不能基数であり，非可算な強到達不能基数を非自明であるという．さて Cantor の定理より κ を基数としたとき $\kappa^{+} \leq 2^{\kappa}$ であることに注意すると，強極限基数は極限基数なので，強到達不能基数は弱到達不能基数でもある．よって非自明な強到達不能基数の存在は ZFC では証明できない．また κ が非自明な強到達不能基数ならば V_{κ} が ZFC のモデルになる（[, Theorem 6.6]）ことからも ZFC では強到達不能基数の存在を証明できないことがわかる（V_{ω} は ZF から無限公理を抜いた公理系のモデルになる）．

次の補題は強到達不能基数の性質を確認するよい演習問題である．

補題 *B.7*

κ を強到達不能基数とすると，$\lambda < \kappa$ ならば $\#V_{\lambda} < \kappa$ である．

証明.

超限帰納法によって示す．0 については明らかである．$\#V_{\lambda} < \kappa$ としたとき，κ が強極限なので $\#V_{\lambda+1} = \#\mathfrak{P}(V_{\lambda}) < \kappa$ となって $\lambda + 1$ についても正しい．また λ を極限順序数とするときは $V_{\lambda} = \bigcup_{\mu \in \lambda} V_{\mu}$ なので，$\#V_{\mu}, \lambda < \kappa$ だから $\#V_{\lambda} < \kappa$ となる．（証明終）

自明な Grothendieck 宇宙の例として V_{ω} があるが，これは**遺伝的有限集合の集合**とよばれる．集合 X と無限基数 κ に対して $\#\operatorname{trcl}(X) < \kappa$ であるとき X は**遺伝的に濃度が κ 未満 (hereditarily of cardinality $< \kappa$)** であるという．遺伝的に濃度が κ 未満の集合全体を $H_{\kappa} \coloneqq \{X \mid \#\operatorname{trcl}(X) < \kappa\}$ で表すことにする．まずはこれが集合になることを確かめねばならない．

補題 *B.8*

任意の無限基数 κ に対して $H_\kappa \subset V_\kappa$ である．

証明.

任意の $X \in H_\kappa$ をとる．$\mathrm{rank}(X) < \kappa$ を示せばよい．$T \coloneqq \mathrm{trcl}(X)$ とおく．$S \coloneqq \{\mathrm{rank}(Y) \mid Y \in Y\}$ について S は順序数である．実際 $\alpha \coloneqq \min\{\beta \in \mathrm{ON} \mid \beta \notin S\}$ とおくと $\alpha \subset S$ であって，もし $\alpha \subsetneq S$ ならば $\beta \coloneqq \min S \setminus \alpha$ が存在して，$\beta = \mathrm{rank}(Y)$ と書いたとき任意の $Z \in Y$ に対して $\mathrm{rank}(Z) < \beta$ だから T が推移的なので $\mathrm{rank}(Z) \in \alpha$ となり $\beta = \mathrm{rank}(Y) = \sup\{\mathrm{rank}(Z) + 1 \mid Z \in Y\} \leq \alpha$ となって矛盾する．よって S は順序数となり，定義から $X \subset T \subset V_S$ だから $\mathrm{rank}(X) \leq S$ である．また $\#T < \kappa$ より $S < \kappa$ なので，$\mathrm{rank}(X) < \kappa$ が示された．（証明終）

定義から H_κ は推移的であることに注意しよう．次の命題により V_ω が遺伝的有限集合全体の集合であることが確かめられる．

命題 *B.9*

κ を正則基数とする．$H_\kappa = V_\kappa$ であることと，κ が強到達不能基数であることは同値．

証明.

$(\Longrightarrow)$

対偶を示す．κ を強到達不能ではない正則基数とすると，ある $\lambda < \kappa$ で $\kappa \leq 2^\lambda$ となるものが存在するので $\mathfrak{P}(\lambda) \in V_\kappa \setminus H_\kappa$ となる．

$(\Longleftarrow)$

任意の $X \in V_\kappa$ に対して，$\alpha \coloneqq \mathrm{rank}(X) < \kappa$ に対して $\mathrm{trcl}(X) \subset V_\alpha$ なので補題 B.7 から $\#\,\mathrm{trcl}\,X < \kappa$ となり $X \in H_\kappa$ である．（証明終）

また H_κ については次の性質も大切である．

補題 *B.10*

κ を正則基数とすると，任意の X に対して $X \in H_\kappa$ であることと $X \subset H_\kappa$ でありかつ $\#X < \kappa$ であることは同値である．

証明.

$(\Longrightarrow)$

$X \in H_\kappa$ とすると H_κ は推移的なので $X \subset H_\kappa$ であって，また $X \subset \mathrm{trcl}(X)$ だから $\#X < \kappa$ である．

$(\Longleftarrow)$

$X \subset H_\kappa$ かつ $\#X < \kappa$ とすると，$\mathrm{trcl}(X) = X \cup \bigcup\{\mathrm{trcl}\,Y \mid Y \in X\}$ なので，$\#\,\mathrm{trcl}(Y) < \kappa$ だから $\#\,\mathrm{trcl}(X) < \kappa$ である．（証明終）

§C　宇宙公理の同値性

さて，求めていたのは次の定理であった．

定理 *C.1*

集合 U に対して，ZFC 上で次は同値である．

(i) $U \neq \emptyset$ は Grothendieck 宇宙である．
(ii) ある強到達不能基数 κ が存在して，$U = V_\kappa$ である．

まずは補題を示す．

補題 *C.2*

U を Grothendieck 宇宙とすると，ある強到達不能基数 α_U が存在して，任意の集合 X に対して $X \in U$ であることと，$X \subset U$ かつ $\#X < \alpha_U$ が成り立つことが同値である（実は逆も成り立つ．[] をみよ）．

証明.

U を Grothendieck 宇宙とする．

$$\alpha_U \coloneqq \min\left\{\beta \in \mathrm{ON} \,\middle|\, \text{任意の } X \in U \text{ に対し } \#X < \beta \text{ が成り立つ．}\right\}$$

とおく．このとき α_U は強到達不能である．実際 $\kappa < \alpha_U$ とすると，ある $X \in U$ が存在して $\kappa \leq \#X$ とならなければならず，$X \in U$ なので $\mathfrak{P}(X) \in U$ であり，また $\mathfrak{P}(X) \subset U$ でもあるから $2^\kappa \leq \#\mathfrak{P}(X) < \alpha_U$ である．よって α_U は強極限基数で，また定義から $\alpha_U = \sup\{\#X \mid X \in U\} \subset \alpha_U$ であるから，α_U は正則となり強到達不能基数である．さて明らかに $X \in U$ ならば $X \subset U$ かつ $\#X < \alpha_U$ を満たす．逆に $X \subset U$ かつ $\#X < \alpha_U$ とすると，ある $Y \in U$ によって $\#X \leq \#Y$ であるから全射 $Y \to X$ が存在するので，(GU4) より $X \in U$ である．（証明終）

定理 *C.1* の証明.

($\Longrightarrow$)

補題 C.2 により定まる α_U に対して $U = V_{\alpha_U}$ であることを示す．まず超限帰納法によって $V_{\alpha_U} \subset U$ を示す．$\beta < \alpha_U$ について，$\gamma < \beta$ に対して $V_\gamma \subset U$ ならば $V_\beta \subset U$ を示せばよい．$\beta = 0$ のときは明らかである．$\beta = \gamma + 1$ とかけるとき，$V_\gamma \subset U$ とすると補題 B.7 により $\#V_\gamma < \alpha_U$ であり，補題 C.2 により $V_\gamma \in U$ である．すると $V_\beta = \mathfrak{P}(V_\gamma) \in U$ である．U は推移的なので $V_\beta \subset U$ である．β が極限型のときは明らかだろう．ゆえに $V_{\alpha_U} \subset U$ である．

次に $U \setminus V_{\alpha_U} \neq \emptyset$ であるとする．正則性公理により $X \in U \setminus V_{\alpha_U}$ で $X \cap (U \setminus V_{\alpha_U}) = \emptyset$ であるものが存在する．$X \in U$ より α_U の定義から $X \subset U$ かつ $\#X < \alpha_U$ である．また $X \cap (U \setminus V_{\alpha_U}) = \emptyset$ により $X \subset V_{\alpha_U}$ でなければならず，補題 B.10 により $X \in V_{\alpha_U}$ となるがこれは矛盾である．よって $U = V_{\alpha_U}$ であることがわかった．

($\Longleftarrow$)

上でも述べたように V_κ は ZFC の公理をすべて満たし（[, Theorem 6.6]），Grothendieck 宇宙となる（$\kappa = \omega$ のときは ZFC から無限公理を抜いたもの）．（証明終）

索引

参考文献