Случайни величини

Определение

Нека S е множеството от всички елементарни събития.

Случайна величина е числова функция, дефинирана върху множеството S,

т.е. тя съпоставя на всеки елементарен изход реално число

Примери:

Опит: Хвърляне на монета един път

S= {Л, Г}

X={брой лица} 0 1

Y={брой гербове} 1 0

Теорема . ***Линейна комбинация, произведение, минимум, максимум и функция на сл.в. е сл.в.***

Видове случайни величини

Дискретни

Случайна величина, която приема само краен брой или изброимо стойности

Дискретната случайна величина обикновено е случайна величина, чийто стойности са резултат от броене.

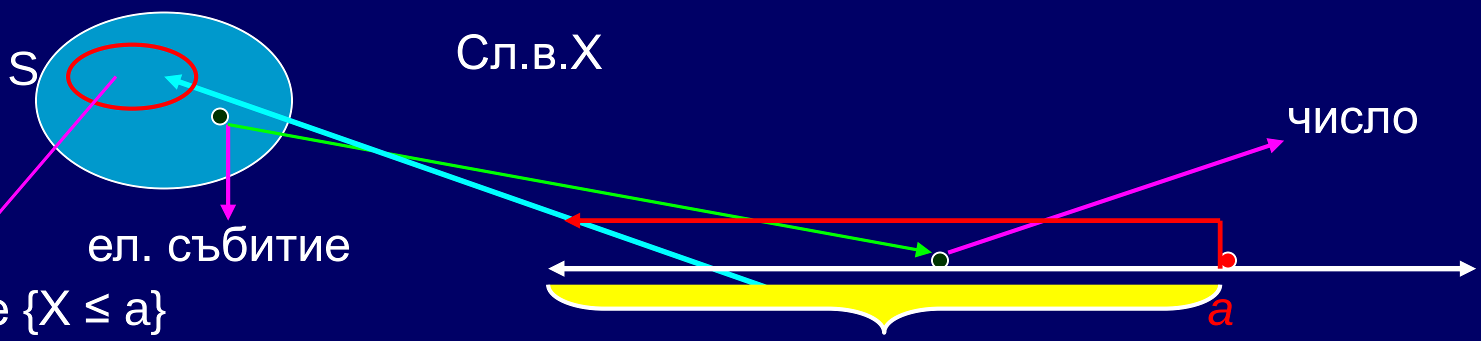
Непрекъснати

Случайна величина, чийто стойности са всички числа от даден интервал (или интервали), които могат да са крайни или безкрайни

Непрекъсната случайна величина обикновено е случайна величина, чийто стойности са резултат от измервания.

Функция на разпределение

Нека X е сл.в., дефинирана в пространството от ел.изходи S и със стойности в множеството D от реални числа (крайно, изброимо или неизброимо)



Събитие {X ≤ a}

вероятност

Нека *a* е произволно число => M={всички числа от D, които са ≤ a}

F(a)=P(X≤a) { дефиниционно множество: всяко реално a
множество от стойности: [0.1]

F(a)=P(X≤a) => вероятност

Дефиниция: Ф.р. на една сл. в. X е F(x)=P(X≤x) за всяко реално x

Свойства на ф.р.

Дефиниция: Ф.р. на една сл. в. X е F(x)=**P(X ≤ x)** за всяко реално x

Свойство 1.

Дефиниционно множество : множеството на реалните числа

Свойство 2.

Множество от стойности : [0,1]

Свойство 3.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

Понеже P(X < - ∞)=0 и P(X < + ∞)=1

F (- ∞) = 0

F (+ ∞) = 1

Свойство 4. $P(X > a) = 1 - F(a)$

От дефиницията $P(X>a)=1-P(X\le a)=1-F(a)$

Свойство 5.

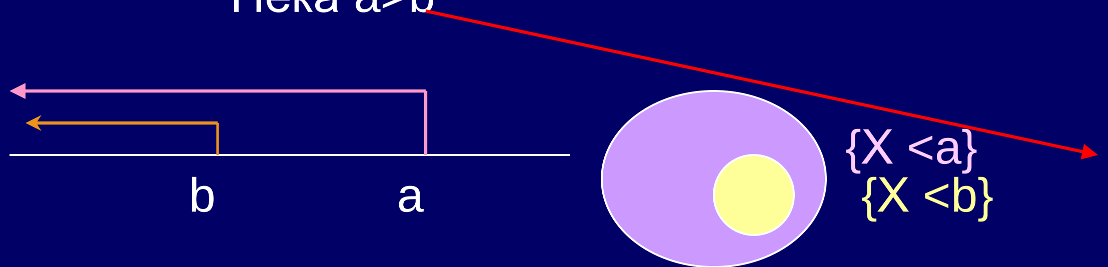
$$P(a < X \le \text{в}) = F(b)-F(a)$$

Свойство 6.

Функцията на разпределение F(x) е НЕНАМАЛЯВАЩА

$$\Rightarrow F(a)=P(X \le a) \ge P(X \le b) = F(b)$$

Нека a>b



ВАЖНО!!!

Нека функцията на разпределение F(x) е константа в даден интервал (а,в)

$$P(a<X \leq b)=F(b)-F(a)=0$$

Случайната величина X не приема стойности в интервала (а,в)

Дискретни разпределения

Дискретна случайна величина = която приема **краен брой** или **изброимо много** стойности

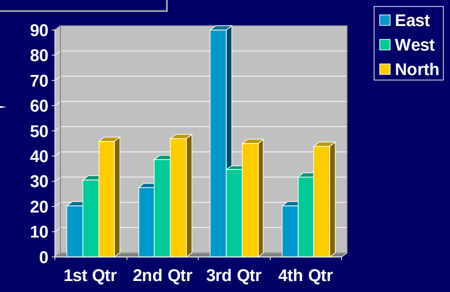
Вероятностното разпределение на дискретна сл.в. може да бъде във формата на

- таблица

Ред на разпределение

стойност (x)	x1	x2	…….	xn
вероятност (p)	P(X=x1)	P(X=x2)	……	P(X=xn)

- графика



- математическа формула

$$P(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Свойства на реда на разпределение

стойност (x)	x_1	x_2	…….	x_n
вероятност (p)	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	……	$P(X=x_n)$

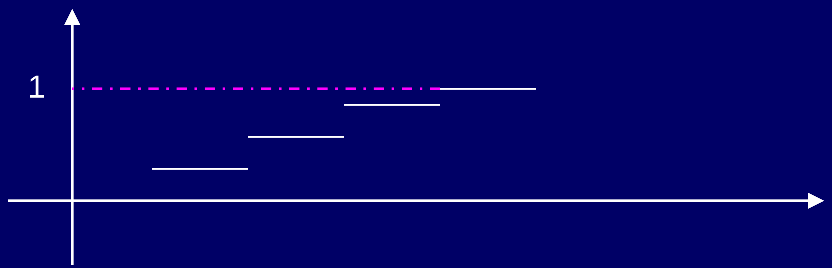
Свойство 1. $x_i \neq x_k$

Свойство 2. $\sum_i p_i = 1$ $\quad 0 \le p_i = P(X = x_i) \le 1$

Функция на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < x_1 \\ p_1 & \text{при} \quad x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{при} \quad x_2 \le x < x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 & \text{при} \quad x_3 \le x < x_4 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1 & \text{при} \quad x \ge x_n \end{cases}$$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{j;\, x_j \le x} p_j$$



Примери

Опит: Хвърляне на монета един път

X={брой лица}

Y={брой гербове}

стойност (x)	0	1
вероятност (p)	0.5	0.5

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при & x<0 \\ 0{,}5 & при & 0\le x< \\ 1 & при & x\ge 1 \end{cases}$$

Да намерим ф.р.

F(-2)=P(X<-2)=няма стойности <-2= P(невъзможното)=0
F(-1000)=0
F(-1)=0
Изобщо, F(x)=0   при x<0

F(1/2)=P(X<1/2) = има една стойност на X която е <1/2, това е 0, която се съпоставя на изход Г=P(герб)=1/2
F(1/3)=1/2
F(3/4)=1/2
Изобщо, F(x)=1/2   при x между 0 и 1, т.е. 0<=x<1

F(2)=P(X<2) = всички стойности на X са <2=P(достоверното)=1
F(100)=1
Изобщо, F(x)=1   при x>1

Пример

Опит: Хвърляне на зар два пъти

X={максималните точки, които се появяват на зара в двете хвърляния}

Стойности на X=> 1,2,3,4,5,или 6

(1,1)

(2,1) (1,2), (2,2)

(3,1) (1,3), (3,2) (2,3), (3,3)

x	1	2	3	4	5	6
p	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1 \\ 1/36 & \text{при} \quad 1\le x<2 \\ 4/36 & \text{при} \quad 2\le x<3 \\ 9/36 & \text{при} \quad 3\le x<4 \\ 16/36 & \text{при} \quad 4\le x<5 \\ 25/36 & \text{при} \quad 5\le x<6 \\ 1 & \text{при} \quad x\ge 6 \end{cases}$$

У={минималните точки, които се появяват на зара в двете хвърляния}

Стойности на У=> 1,2,3,4,5,или 6

x	1	2	3	4	5	6
p	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

Задача:

Сл. в. X има ф.р.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} & x<-1 \\ 0{,}02 & \text{при} & -1\le x<0 \\ 0{,}08 & \text{при} & 0\le x<3 \\ 0{,}1 & \text{при} & 3\le x<7 \\ 0{,}3 & \text{при} & 7\le x<10 \\ 0{,}6 & \text{при} & 10\le x<16 \\ 1 & \text{при} & x\ge 16 \end{cases}$$

Какъв тип е сл.в.?

Дискретен

Стойности: -1; 0; 3; 7; 10; 16

Ред на разпределение

x	-1	0	3	7	10	16
p	0,02	0,06	0,02	0,2	0,3	0,4

0.08=0.02+P(X=0)

0.1=0.08+P(X=3)

Средна стойност (математическо очакване)

$$EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Свойства

$$E(c) = c$$

E(cX)=c(EX)

$$E(X+Y) = EX + EY$$

$$E(X.Y) = EX.EY \ \ ako \ \ X \ и \ У \ \ са \, независими$$

Моделиране на хазартни игри

Том и Ники играят игра: Том хвърля зар един път. Ако се паднат 5 точки, Том плаща 1 лев на Ники, в противен случай Ники плаща 1 лев на Том.

Колко е очакваната печалба на Том ?

Нека X={печалба на Том}

Разпределение

стойност(х) (лв)	**- 1**	**1**
вероятност (р)	**1/6**	**5/6**

EX= (- 1) (1/6)+(1) (5/6)=4/6=.6666

Интерпретация: Ако двете момчета играят тази игра много пъти, то в някои от тях Том ще плати 1 лв, в някои ще получи 1 лв, но в крайна сметка средната му печалба ще бъде 67 ст.

Пример

Полица”Живот” осигурява плащането на определена сума при смърт на притежателя на полица. Нека например, застраховка “Живот” за 49 годишен мъж е 35 лв за година, като в случай на злополука се изплащат 25 000 лв. Ако е известно, че смъртността при 49-годишните мъже в съответния регион е 135 на 100 000, пресметнете очакваната печалба на застрахователната компания.

Нека X={печалба на компанията}

Стойности на X: 35 и (35-25 000)

Разпределение

стойност(x) (лв)	**35**	**-24965**
вероятност (p)	**0,99865**	**0,00135**

EX=35(0,99865)-24965(0,00135)=1,25 лв. печалба от всеки застрахован

Специален пример

X

x	0
p	1

EX=0

Y

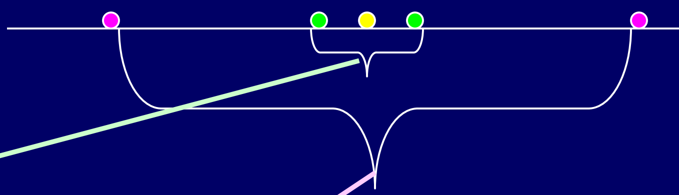
X	- 1	1
p	0,5	0,5

EY=0

Z

X	- 100	100
p	0,5	0,5

EZ=0

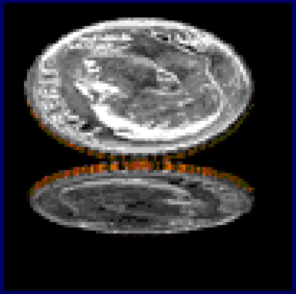


Характеристиката, която ги разграничава

Дисперсия

$$\sigma^2 = E(X - EX)^2$$

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - EX)^2 p_i$$



Дисперсията измерва степента на разсейване на стойностите на разпределението.

Свойства

$$\sigma^2(c) = 0$$

$$\sigma^2(cX) = c^2 \quad \sigma^2(X)$$

$$\sigma^2(X + У) = \sigma^2(X) + \sigma^2(У) \quad ако \quad X \, и \, У \, са \, независими$$

Стандартно отклонение = квадратен корен от σ^2.

Видове дискретни разпределения

Равномерно дискретно

стойност (x)	X_1	X_2	…….	X_n
вероятност (p)	1/n	1/n	……	1/n

математическо очакване

$$EX = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Средно аритметично

Пример: Хвърляне на зарче един път.

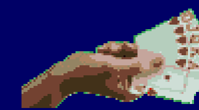
X={брой паднали се точки}

Бернулиево разпределение

Опит: Два възможни изхода : У (успех) и Н(неуспех)

Р(У)=р   Р(Н)=1-р

Х=брой успехи



случайна величина

стойност	0	1
вероятност	1-р	р

ЕХ=р

Дисперсия = р(1-р)

Пример: Избор на карта от колода от 52 карти.

стойност	0	1
вероятност	48/52=12/13	4/52=1/13

Брой дами измежду избраните

ЕХ=4/52

Дисперсия = 12/169

Биномно разпределение

Bi(n,p)

Разглеждаме *n* опити на Бернули:

1. Опитите са независими.

2. **Всеки опит има само два възможни изходи, У и Н.**

3. Вероятността за успех във всеки отделен опит е постоянна: ***P(У)=p***

X=брой успехи при тези опити

x	0	1	2	3	…	*n*
p	p_0	p_1	p_2	p_3	…..	p_n

$$p_k = P(S_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\dots,n$$

$X_к$=брой успехи при к-тия опит

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$EX=EX_1+EX_2+...+EX_n=p+p+...+p=np$

Дисперсия= p(1-p)+ p(1-p)+...+ p(1-p)= np(1-p)

Бернулиево разпределение

Биномно разпределение

Bi(n,p)

Функция на разпределение

X=брой успехи при n опита на Бернули

x	0	1	2	3	...	***n***
p	p_0	p_1	p_2	p_3	.....	p_n

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad при \;\; x<0 \\ p_0 \quad при \;\; 0\le x<1 \\ p_0+p_1 \quad при \;\; 1\le x<2 \\ p_0+p_1+p_2 \quad при \;\; 2\le x<3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 \quad при \;\; x\ge n \end{cases}$$

$$p_k=P(S_n=k)=\frac{n!}{(n-k)!k!}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\dots,n$$