Задача 4. ОДУ

Търсим точно решение

In[*]:=
```
Clear[x, y]
```
$$\text{DSolve}\left[y'[x] == y[x] - \text{Log}\left[x^2+1\right] + \frac{2x}{x^2+1} + 4, y[x], x\right]$$

Out[*]=

$$\left\{\left\{y[x] \to -4 + e^x c_1 + \text{Log}\left[1+x^2\right]\right\}\right\}$$

Търсим частно решение

In[*]:=
```
Clear[x, y]
```
$$\text{DSolve}\left[\left\{y'[x] == y[x] - \text{Log}\left[x^2+1\right] + \frac{2x}{x^2+1} + 4, y[6] == 10\right\}, y[x], x\right]$$

Out[*]=

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{-4 e^6 + 14 e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}\left[1+x^2\right]}{e^6}\right\}\right\}$$

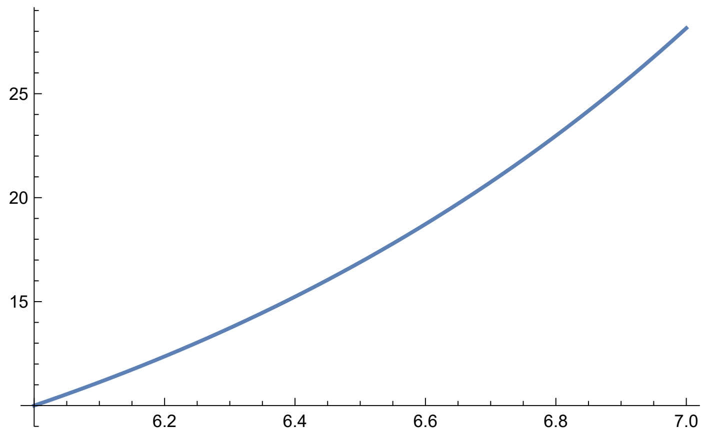
Визуализация на точното решение

In[*]:=

$$\text{yt}[x\_] := \frac{-4 e^6 + 14 e^x - e^x \text{Log}[37] + e^6 \text{Log}\left[1+x^2\right]}{e^6}$$

```
tochno = Plot[yt[x], {x, 6, 7}]
```

Out[*]=



Извод : Не можем да намерим точно решение с аналитичен метод

Търсим Приближено (числено) решение

h = 0.2

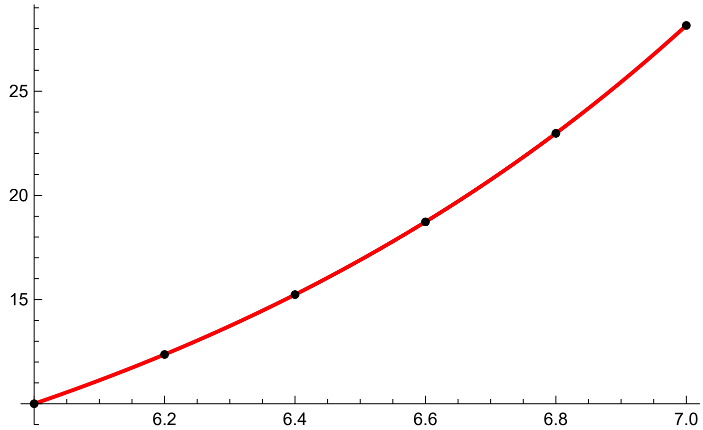
Метод на Рунге - Кута с четири междинни точки

In[•]:=
```
(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 6; b = 7;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] + (2 x)/(x^2 + 1) + 4
(*съставяме мрежата*)
h = 0.2;
n = (b - a)/h;
```

In[•]:=
```
For[i = 0, i ≤ n, i++,
 Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " f(xi, yi) = ",
  f[x, y], " yточно(xi) = ", yt[x], " грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
 k1 = h * f[x, y];
 k2 = h * f[x + 1/2 h, y + 1/2 k1];
 k3 = h * f[x + 1/2 h, y + 1/2 k2];
 k4 = h * f[x + h, y + k3];
 y = y + 1/6 (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
 x = x + h;
 AppendTo[points, {x, y}]
]
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]
grp = ListPlot[points, PlotStyle → {Black}];
grf = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
Show[tochno, grf, grp]
```

```
i = 0 xi = 6 yi = 10. f(xi, yi) = 10.7134 yточно(xi) = 10 грешка = 0.
i = 1 xi = 6.2 yi = 12.364 f(xi, yi) = 13.0036 yточно(xi) = 12.364 грешка = 0.000028465
i = 2 xi = 6.4 yi = 15.2353 f(xi, yi) = 15.8037 yточно(xi) = 15.2354 грешка = 0.000069588
i = 3 xi = 6.6 yi = 18.7269 f(xi, yi) = 19.2262 yточно(xi) = 18.727 грешка = 0.000127575
i = 4 xi = 6.8 yi = 22.9764 f(xi, yi) = 23.409 yточно(xi) = 22.9766 грешка = 0.000207875
i = 5 xi = 7. yi = 28.1522 f(xi, yi) = 28.5201 yточно(xi) = 28.1525 грешка = 0.000317522
Теоретичната локална грешка е 0.00032
Теоретичната глобална грешка е 0.0016
```

Out[∘]=



Модифициран метод на Ойлер

In[∘]:=

```
(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 6; b = 7;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] + 2 x/(x^2 + 1) + 4
(*съставяме мрежата*)
h = 0.2;
n = (b - a)/h;
```

In[•]:=
```
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална  грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
 x12 = x + h/2;
 y12 = y + h/2 * f[x, y];
 Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
  f[x, y], " x_{i+1/2} = ", x12, " y_{i+1/2} = ", y12, " f_{i+1/2} = ", f[x12, y12],
  " y_точно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
 y = y + h * f[x12, y12];
 x = x + h;
 AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[tochno, gryt, grp]
```

Мрежата е с n = 5. и стъпка h = 0.2

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

i = 0 x_i = 6 y_i = 10. f_i = 10.7134 $x_{i+1/2}$ = 6.1 $y_{i+1/2}$ = 11.0713 $f_{i+1/2}$ = 11.7475 $y_{точно}$ = 10 истинска грешка = 0.

i = 1 x_i = 6.2 y_i = 12.3495 f_i = 12.9891 $x_{i+1/2}$ = 6.3 $y_{i+1/2}$ = 13.6484 $f_{i+1/2}$ = 14.2521 $y_{точно}$ = 12.364 истинска грешка = 0.0145277

i = 2 x_i = 6.4 y_i = 15.1999 f_i = 15.7683 $x_{i+1/2}$ = 6.5 $y_{i+1/2}$ = 16.7768 $f_{i+1/2}$ = 17.3103 $y_{точно}$ = 15.2354 истинска грешка = 0.0354807

i = 3 x_i = 6.6 y_i = 18.662 f_i = 19.1614 $x_{i+1/2}$ = 6.7 $y_{i+1/2}$ = 20.5781 $f_{i+1/2}$ = 21.0439 $y_{точно}$ = 18.727 истинска грешка = 0.0649866

i = 4 x_i = 6.8 y_i = 22.8708 f_i = 23.3034 $x_{i+1/2}$ = 6.9 $y_{i+1/2}$ = 25.2011 $f_{i+1/2}$ = 25.6012 $y_{точно}$ = 22.9766 истинска грешка = 0.105799

i = 5 x_i = 7. y_i = 27.991 f_i = 28.359 $x_{i+1/2}$ = 7.1 $y_{i+1/2}$ = 30.8269 $f_{i+1/2}$ = 31.1633 $y_{точно}$ = 28.1525 истинска грешка = 0.161472

Out[ ]=