Упражнение 6

Непрекъснати сл.в. Плътност. Ф.р.
Числови характеристики. Основни видове непрекъснати разпределения: равномерно, експоненциално
Нормално разпределение. ЦГТ

10.25. Точките на теста IQ са нормално разпределени със средна стойност 100 и стандартно отклонение 15. Каква е вероятността случайно избран човек, който е взел теста да има:

а) под 120 точки;

б) над 125 точки;

в) между 90 и 110 точки?

Решение: $\boldsymbol{Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-100}{15}}$

а/ $P(X<120)=P(\frac{X-100}{15}<\frac{120-100}{15})=P(Z<1.33)$

$=0.9082$

б/ $P(X>125)=P(\frac{X-100}{15}>\frac{125-100}{15})=P(Z>1.67)=1-P(Z<1.67)=1-0.9525$

в/Търсим $P(90<X<110)$ Използваме $\boldsymbol{Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-100}{15}}$

$=P(\frac{90-100}{15}<\frac{X-100}{15}<\frac{110-100}{15})=P(-0.67<Z<0.67)$

$P(a<Z<b)=P(Z<b)-P(Z<a)=$ $P(Z<0.67)-P(Z<-0.67)=$

От таблицата, но -0.67 го няма, тогава

$= P(Z<0.67)-P(Z>0.67)$

Понеже в таблицата са само вероятности наляво

$= P(Z<0.67)-(1-P(Z<0.67))=2P(Z<0.67)-1=2*0.7486-1=0.4972$

10.23.Случайната величина X е нормално разпределена с параметри $\mu=1$ и $\sigma=2$. Намерете вероятността P{0.5< X <2}.

Решение: ***Използваме*** $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-1}{2}$

$P\{0.5< X <2\}= P\{\frac{0.5-1}{2}< \frac{X-1}{2} <\frac{2-1}{2}\}=P(-0.25<Z<0.5)$

P(a<Z<b)=P(Z<b)-P(Z<a)

=P(Z<0.5)-P(Z<-0.25)=

От таблицата, но понеже -0.25 го няма то P(Z<-0.25)=P(Z>0.25)=1- P(Z<0.25)=1-0.5987=0.4013

Тогава

=0.6915-0.4013

=0.2902

12.1 Нека случайната величина *X* е нормално разпределена със средна стойност 1,5 и дисперсия 4.

а) Намерете точка, такава че 60% от стойностите на случайната величина да са по-малки от нея.

б) Намерете интервала с най-къса дължина, който съдържа 90% от стойностите на разпределението.

Решение: а/ Търсим числото А, за което вероятността P{X<A}=0.6

Използваме $\boldsymbol{Z}=\frac{\boldsymbol{X-\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\boldsymbol{X-1.5}}{\boldsymbol{2}}$

Тогава P{X<A}=P($\frac{\boldsymbol{X-1.5}}{\boldsymbol{2}} < \frac{\mathrm{A}-\boldsymbol{1.5}}{\boldsymbol{2}}$)=P(Z< $\frac{\mathrm{A}-\boldsymbol{1.5}}{\boldsymbol{2}}$)=0.6

От таблицата намираме число наляво от което лицето/вероятността е 0.6

Това е ≈0.26, т.е. $\frac{\mathrm{A}-\boldsymbol{1.5}}{\boldsymbol{2}}$=0.26 или A= 2(0.26)+1.5= 2.02

Решение: б/ Използваме $\boldsymbol{Z}=\frac{\boldsymbol{X-\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\boldsymbol{X-1.5}}{\boldsymbol{2}}$. За сл.в. Z както в предишната задача построяваме интервал (-A,A) , който съдържа 90% от стойностите на разпределението Z. От предишната задача това е интервалът (-1.64,1.64).
От транформацията по горе за двата края на интервал имаме:

1.64= $\frac{\mathrm{B}-\boldsymbol{1.5}}{\boldsymbol{2}}$=> B=1.5+1.64*2=1.5+3.28=4.78

И

- 1.64= $\frac{\mathrm{B}-\boldsymbol{1.5}}{\boldsymbol{2}}$=> B=1.5-1.64*2=1.5-3.28=-1.78

Търсеният интервал е (-1.78, 4.78)

10.26. Ако е известно, че средната месечната заплата в страната е нормално разпределена случайна величина X~*N*(610,120²). Да се определи колко % в страната получават

а/ повече от 610 лв?

б/ повече от 800 лв?

в/ между 500 и 800 лв?

Решение:

А/ Търсим P{X> 610}. Понеже 610 е мода медиана, (върха на камбанката), то веднага може да се каже, че P{X> 610}=0.5, т.е. 50%

б/ Търсим вероятността P{X> 800}.

Използваме $\boldsymbol{Z}=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-610}{120}$

$P(X>800)=P(\frac{X-610}{120} > \frac{800-610}{120})=P(Z>1.58)=1-P(Z<1.58)=1-0.9429=0.0571$. т.е. само 5.7%

в/ Търсим вероятността P{500<X<800}

$=P(\frac{500-610}{120} < \frac{X-610}{120} < \frac{800-610}{120})=P(Z<1.58)-P(X<-0.97)=0.9429-(1-P(X<0.97))=$

$)=0.9429-1+0.834=0.7769$, т.е. 78%

10.26продължение.Ако е известно, че средната месечната заплата в страната е нормално разпределена случайна величина $X \sim N(610, 120^2)$. Да се определи колко % в страната получават повече

г/ повече от 490 лв?

д/ Коя е онази заплата,за която 20% от населението получават повече от нея.

Решение:

г/ Търсим вероятността P{X> 490}.

Използваме $\boldsymbol{Z}=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-610}{120}$

$P(X>490)=P\left(\frac{X-610}{120}>\frac{490-610}{120}\right)=P(Z>-1)=P(Z<1)=0.84$. т.е. 84%

д/ Търсим числото А, за което вероятността P{X>A}=0.2

Използваме $\boldsymbol{Z}=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-610}{120}$

Тогава $P\{X>A\}=P\left(\frac{X-610}{120}>\frac{A-610}{120}\right)=P\left(Z>\frac{A-610}{120}\right)=0.2$

Или $1-P\left(Z<\frac{A-610}{120}\right)=0.2 \Rightarrow P\left(Z<\frac{A-610}{120}\right)=1-0.2=0.8$

От таблицата намираме число наляво от което лицето/вероятността е 0.8

Това е ≈0.84, т.е. $\frac{A-610}{120}=0.84$ или $A= 120(0.84)+610=710.70$ лв