

Числено решаване на обикновени диференциални уравнения

Дадени са следните задачи: (**a** и **b** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния номер)

а) $y' = y - (2 + a)\sin x$, $y(b) = a + b$, $x \in [b; b + 0.5]$

б) $y' = y - \ln(x^2 + 1) + \frac{2x}{x^2 + 1} + b$, $y(a) = a + b$, $x \in [a; a + 0.1]$

1. Да се намерят точните решения.

2. Да се решат по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки за а) при $h = 0.1$,

за б) при $n = 5$. Да се направи сравнение между точното решение и численото приближение.

Да се представи геометрична интерпретация на резултатите.

3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи за всяка от задачите, за да се достигне точност за а) 10^{-4} , за б) 10^{-7} ?

Решение на а)

1. Да се намерят точните решения

Търсим общо решение:

```
In[3]:= Clear[x, y]
DSolve[y'[x] == y[x] - 3 Sin[x], y[x], x]
```

$$\text{Out[4]} = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow e^x c_1 + \frac{3}{2} (\cos[x] + \sin[x]) \right\} \right\}$$

Търсим частно решение:

```
In[7]:= Clear[x, y]
DSolve[{y'[x] == y[x] - 3 Sin[x], y[9] == 10}, y[x], x]
```

$$\text{Out[8]} = \left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9} \right\} \right\}$$

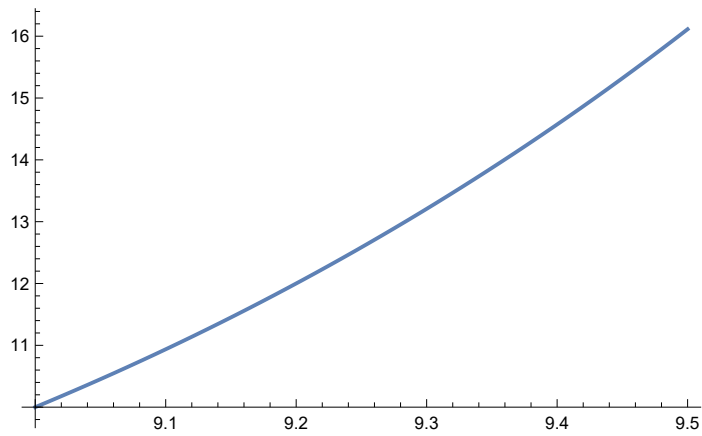
Визуализация на точното решение

```
In[9]:= yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

```

```
Plot[yt[x], {x, 9, 9.5}]
```

Out[10]=



Извод: Не можем да намерим точно решение с аналитичен метод

2. Да се реши по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки при $h = 0.1$:

2.1. Ойлер

```
In[25]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с n = 5. и стъпка h = 0.1

Теоретичната локална грешка е 0.01

Теоретичната глобална грешка е 0.1

i = 0 x_i = 9. y_i = 10. f_i = 8.76364 y_{точно} = 10. Истинска грешка = 0.

i = 1 x_i = 9.1 y_i = 10.8764 f_i = 9.91907 y_{точно} = 10.936 Истинска грешка = 0.0596498

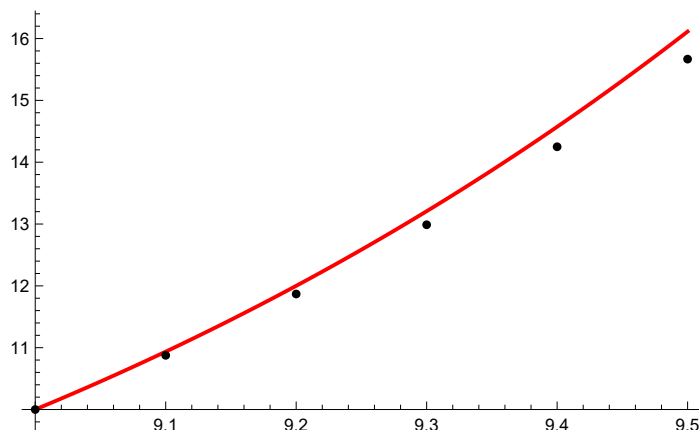
i = 2 x_i = 9.2 y_i = 11.8683 f_i = 11.1996 y_{точно} = 12.0003 Истинска грешка = 0.132067

i = 3 x_i = 9.3 y_i = 12.9882 f_i = 12.6149 y_{точно} = 13.2073 Истинска грешка = 0.219093

i = 4 x_i = 9.4 y_i = 14.2497 f_i = 14.1754 y_{точно} = 14.5725 Истинска грешка = 0.322809

i = 5 x_i = 9.5 y_i = 15.6673 f_i = 15.8927 y_{точно} = 16.1128 Истинска грешка = 0.445567

Out[38]=



2.2. Модифициран метод на Ойлер

```

In[39]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 = x +  $\frac{h}{2}$ ;
  y12 = y +  $\frac{h}{2}$  f[x, y];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " xi+1/2 = ", x12, " yi+1/2 = ", y12, " fi+1/2 = ",
    f[x12, y12], " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$, и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 9$, $y_i = 10$, $f_i = 8.76364$ $x_{i+1/2} = 9.05$

$y_{i+1/2} = 10.4382$ $f_{i+1/2} = 9.33998$ $y_{\text{точно}} = 10$, Истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 9.1$ $y_i = 10.934$ $f_i = 9.9767$ $x_{i+1/2} = 9.15$ $y_{i+1/2} =$

11.4328 $f_{i+1/2} = 10.6188$ $y_{\text{точно}} = 10.936$ Истинска грешка = 0.00201583

$i = 2$ $x_i = 9.2$ $y_i = 11.9959$ $f_i = 11.3272$ $x_{i+1/2} = 9.25$ $y_{i+1/2} =$

12.5622 $f_{i+1/2} = 12.0406$ $y_{\text{точно}} = 12.0003$ Истинска грешка = 0.00445672

$i = 3$ $x_i = 9.3$ $y_i = 13.1999$ $f_i = 12.8266$ $x_{i+1/2} = 9.35$ $y_{i+1/2} =$

13.8413 $f_{i+1/2} = 13.6171$ $y_{\text{точно}} = 13.2073$ Истинска грешка = 0.00738565

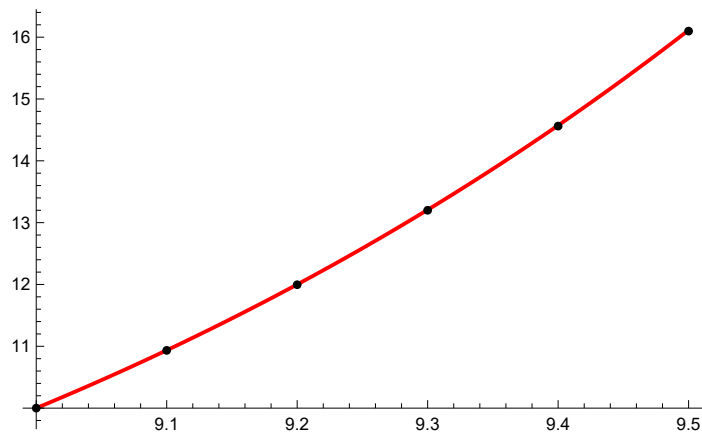
$i = 4$ $x_i = 9.4$ $y_i = 14.5617$ $f_i = 14.4873$ $x_{i+1/2} = 9.45$ $y_{i+1/2} =$

15.286 $f_{i+1/2} = 15.3617$ $y_{\text{точно}} = 14.5725$ Истинска грешка = 0.0108741

$i = 5$ $x_i = 9.5$ $y_i = 16.0978$ $f_i = 16.3233$ $x_{i+1/2} = 9.55$ $y_{i+1/2} =$

16.914 $f_{i+1/2} = 17.2887$ $y_{\text{точно}} = 16.1128$ Истинска грешка = 0.0150034

Out[52]=



2.3. РК32 - Формула (1, 1)

```

In[53]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 9$. $y_i = 10$. $f_i = 8.76364$ $k_1 = 0.876364$ $k_2 = 0.991907$ $y_{\text{точно}} = 10$. Истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 9.1$ $y_i = 10.9341$ $f_i = 9.97684$ $k_1 = 0.997684$ $k_2 = 1.12632$ $y_{\text{точно}} = 10.936$ Истинска грешка = 0.00187858

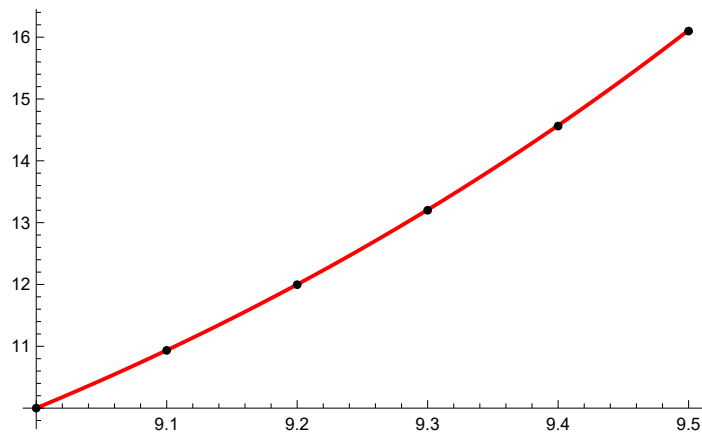
$i = 2$ $x_i = 9.2$ $y_i = 11.9961$ $f_i = 11.3275$ $k_1 = 1.13275$ $k_2 = 1.27555$ $y_{\text{точно}} = 12.0003$ Истинска грешка = 0.00420333

$i = 3$ $x_i = 9.3$ $y_i = 13.2003$ $f_i = 12.8269$ $k_1 = 1.28269$ $k_2 = 1.44087$ $y_{\text{точно}} = 13.2073$ Истинска грешка = 0.00704046

$i = 4$ $x_i = 9.4$ $y_i = 14.5621$ $f_i = 14.4877$ $k_1 = 1.44877$ $k_2 = 1.62363$ $y_{\text{точно}} = 14.5725$ Истинска грешка = 0.0104647

$i = 5$ $x_i = 9.5$ $y_i = 16.0983$ $f_i = 16.3237$ $k_1 = 1.63237$ $k_2 = 1.82536$ $y_{\text{точно}} = 16.1128$ Истинска грешка = 0.0145605

Out[66]=



2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

```

In[67]:= (*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{2}{3}$  * h, y +  $\frac{2}{3}$  * k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{4}$  * k1 +  $\frac{3}{4}$  * k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```


Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 9$. $y_i = 10$. $f_i = 8.76364$ $k_1 = 0.876364$ $k_2 = 0.953273$ $y_{\text{точно}} = 10$. Истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 9.1$ $y_i = 10.934$ $f_i = 9.97675$ $k_1 = 0.997675$
 $k_2 = 1.08334$ $y_{\text{точно}} = 10.936$ Истинска грешка = 0.00196878

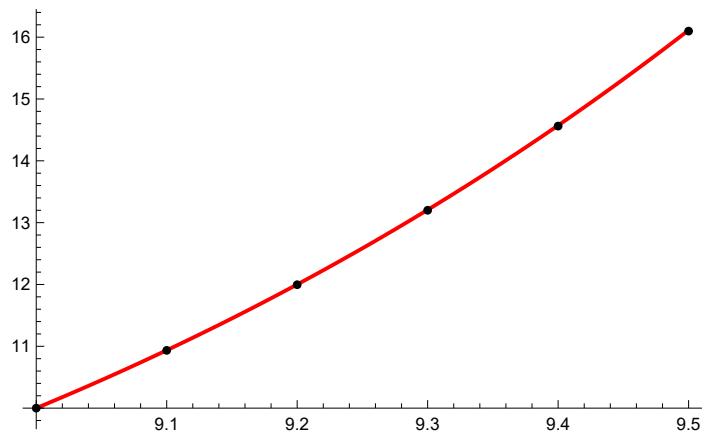
$i = 2$ $x_i = 9.2$ $y_i = 11.996$ $f_i = 11.3273$ $k_1 = 1.13273$
 $k_2 = 1.22788$ $y_{\text{точно}} = 12.0003$ Истинска грешка = 0.00436949

$i = 3$ $x_i = 9.3$ $y_i = 13.2001$ $f_i = 12.8267$ $k_1 = 1.28267$
 $k_2 = 1.38809$ $y_{\text{точно}} = 13.2073$ Истинска грешка = 0.00726616

$i = 4$ $x_i = 9.4$ $y_i = 14.5618$ $f_i = 14.4875$ $k_1 = 1.44875$ $k_2 = 1.56533$ $y_{\text{точно}} = 14.5725$ Истинска грешка = 0.0107314

$i = 5$ $x_i = 9.5$ $y_i = 16.098$ $f_i = 16.3234$ $k_1 = 1.63234$
 $k_2 = 1.76104$ $y_{\text{точно}} = 16.1128$ Истинска грешка = 0.0148474

Out[80]=



2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

```

In[81]:= a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k1}{2}$ ];
  k3 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k2}{2}$ ];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ",
    k4, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

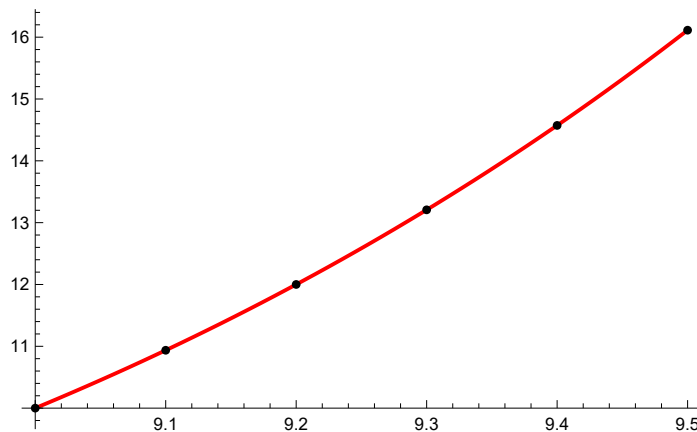
Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.00001

Теоретичната глобална грешка е 0.0001

```
i = 0 xi = 9. yi = 10. fi = 8.76364 k1 = 0.876364 k2 =  
0.933998 k3 = 0.93688 k4 = 0.997959 yточно = 10. Истинска грешка = 0.  
i = 1 xi = 9.1 yi = 10.936 fi = 9.97872 k1 = 0.997872 k2 = 1.06209  
k3 = 1.06531 k4 = 1.13326 yточно = 10.936 Истинска грешка =  $9.16402 \times 10^{-7}$   
i = 2 xi = 9.2 yi = 12.0003 fi = 11.3317 k1 = 1.13317 k2 = 1.20453  
k3 = 1.20809 k4 = 1.28351 yточно = 12.0003 Истинска грешка =  $2.04454 \times 10^{-6}$   
i = 3 xi = 9.3 yi = 13.2073 fi = 12.834 k1 = 1.2834 k2 = 1.36249  
k3 = 1.36644 k4 = 1.44994 yточно = 13.2073 Истинска грешка =  $3.41652 \times 10^{-6}$   
i = 4 xi = 9.4 yi = 14.5725 fi = 14.4982 k1 = 1.44982 k2 = 1.53731  
k3 = 1.54168 k4 = 1.63397 yточно = 14.5725 Истинска грешка =  $5.06867 \times 10^{-6}$   
i = 5 xi = 9.5 yi = 16.1128 fi = 16.3383 k1 = 1.63383 k2 = 1.73044  
k3 = 1.73527 k4 = 1.83711 yточно = 16.1128 Истинска грешка =  $7.04212 \times 10^{-6}$ 
```

Out[94]=



3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи, за да се достигне точност 10^{-4}

2.1. Ойлер

In[104]:=

```
a = 9.; b = 9.5;  
Clear[n]  
Reduce[ $\frac{b-a}{n} \leq 10^{-4}$ ]
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[106]=

```
n < 0 || n ≥ 5000.
```

In[107]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5000; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
Мрежата е с n = 5000 и стъпка h = 0.0001
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-8}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0001

```

2.2. Модифициран метод на Ойлер

In[117]:=

```

a = 9.; b = 9.5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{b - a}{n} \leq 10^{-4}$ ]

```

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[119]=

```
n < 0 || n ≥ 5000.
```

In[120]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5000; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

Мрежата е с n = 5000 и стъпка h = 0.0001
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-12}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $1. \times 10^{-8}$ 

```


2.3. РК32 - Формула (1, 1)

In[130]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-4}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[131]=

$n \leq -50. \mid \mid n \geq 50.$

In[142]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 50; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

Мрежата е с n = 50 и стъпка h = 0.01
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-6}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0001

```


2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

In[152]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-4}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[153]=

$n \leq -50. \mid \mid n \geq 50.$

In[154]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 50; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

Мрежата е с n = 50 и стъпка h = 0.01
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-6}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0001

```


2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

In[164]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^4 \leq 10^{-4}$ , n]

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[165]=

$n \leq -5. \mid n \geq 5.$

In[176]:=

```

a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 3 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{20 e^x - 3 e^x \cos[9] + 3 e^9 \cos[x] - 3 e^x \sin[9] + 3 e^9 \sin[x]}{2 e^9}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]

```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.00001

Теоретичната глобална грешка е 0.0001

Решение на б)

1. Да се намерят точните решения

Търсим общо решение:

In[186]:=

`Clear[x, y]`

`DSolve[y'[x] == y[x] - Log[x^2 + 1] + $\frac{2x}{x^2 + 1}$ + 9, y[x], x]`

Out[187]=

$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -9 + e^x c_1 + \text{Log}[1 + x^2] \right\} \right\}$

Търсим частно решение:

In[190]:=

`Clear[x, y]`

`DSolve[{y'[x] == y[x] - Log[x^2 + 1] + $\frac{2x}{x^2 + 1}$ + 9, y[1] == 10}, y[x], x]`

Out[191]=

$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e} \right\} \right\}$

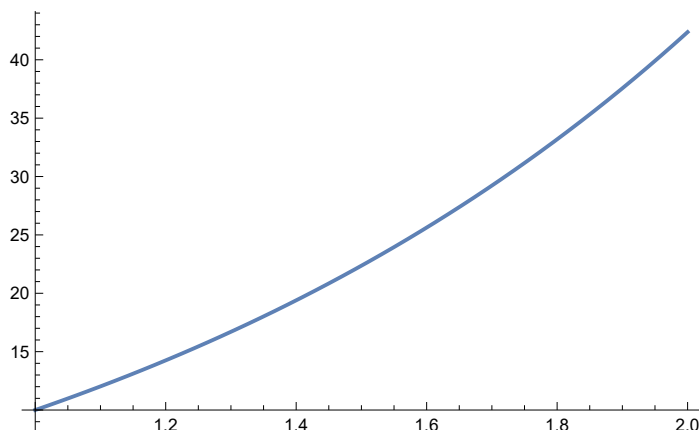
Визуализация на точното решение

In[192]:=

`yt[x_] := $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$`

`Plot[yt[x], {x, 1, 2}]`

Out[193]=



Извод: Не можем да намерим точно решение с аналитичен метод

2. Да се реши по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки при $n = 5$:

2.1. Ойлер

In[208]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

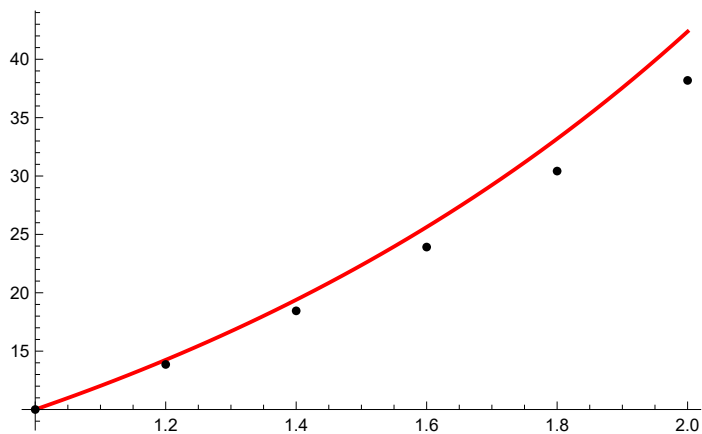
(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

Мрежата е с n = 5 и стъпка h = 0.2
Теоретичната локална грешка е 0.04
Теоретичната глобална грешка е 0.2

i = 0 x_i = 1. y_i = 10. f_i = 19.3069 y_точно = 10. Истинска грешка = 0.
i = 1 x_i = 1.2 y_i = 13.8614 f_i = 22.953 y_точно = 14.252 Истинска грешка = 0.390668
i = 2 x_i = 1.4 y_i = 18.452 f_i = 27.3127 y_точно = 19.3958 Истинска грешка = 0.943838
i = 3 x_i = 1.6 y_i = 23.9145 f_i = 32.5436 y_точно = 25.627 Истинска грешка = 1.71251
i = 4 x_i = 1.8 y_i = 30.4232 f_i = 38.8277 y_точно = 33.1872 Истинска грешка = 2.76398
i = 5 x_i = 2. y_i = 38.1888 f_i = 46.3793 y_точно = 42.3726 Истинска грешка = 4.18384
```

Out[221]=



2.2. Модифициран метод на Ойлер

In[222]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 = x +  $\frac{h}{2}$ ;
  y12 = y +  $\frac{h}{2}$  f[x, y];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " x_{i+1/2} = ", x12, " y_{i+1/2} = ", y12, " f_{i+1/2} = ",
    f[x12, y12], " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 1$, $y_i = 10$, $f_i = 19.3069$ $x_{i+1/2} = 1.1$

$y_{i+1/2} = 11.9307$ $f_{i+1/2} = 21.1332$ $y_{\text{точно}} = 10$. Истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 1.2$ $y_i = 14.2266$ $f_i = 23.3182$ $x_{i+1/2} = 1.3$ $y_{i+1/2} =$

16.5585 $f_{i+1/2} = 25.5355$ $y_{\text{точно}} = 14.252$ Истинска грешка = 0.025405

$i = 2$ $x_i = 1.4$ $y_i = 19.3337$ $f_i = 28.1945$ $x_{i+1/2} = 1.5$ $y_{i+1/2} =$

22.1532 $f_{i+1/2} = 30.8976$ $y_{\text{точно}} = 19.3958$ Истинска грешка = 0.062079

$i = 3$ $x_i = 1.6$ $y_i = 25.5132$ $f_i = 34.1424$ $x_{i+1/2} = 1.7$ $y_{i+1/2} =$

28.9275 $f_{i+1/2} = 37.4431$ $y_{\text{точно}} = 25.627$ Истинска грешка = 0.113777

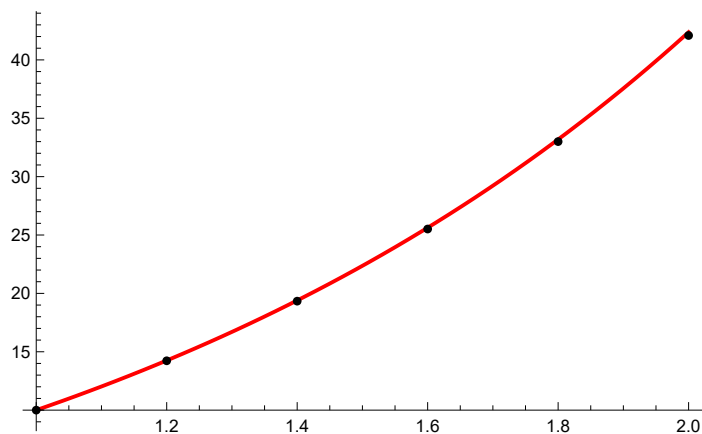
$i = 4$ $x_i = 1.8$ $y_i = 33.0019$ $f_i = 41.4064$ $x_{i+1/2} = 1.9$ $y_{i+1/2} =$

37.1425 $f_{i+1/2} = 45.4386$ $y_{\text{точно}} = 33.1872$ Истинска грешка = 0.185347

$i = 5$ $x_i = 2$, $y_i = 42.0896$ $f_i = 50.2801$ $x_{i+1/2} = 2.1$ $y_{i+1/2} =$

47.1176 $f_{i+1/2} = 55.2057$ $y_{\text{точно}} = 42.3726$ Истинска грешка = 0.283043

Out[235]=



2.3. РК32 - Формула (1, 1)

In[236]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 1$. $y_i = 10$. $f_i = 19.3069$ $k_1 = 3.86137$ $k_2 = 4.5906$ $y_{\text{точно}} = 10$. Истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 1.2$ $y_i = 14.226$ $f_i = 23.3176$ $k_1 = 4.66352$ $k_2 = 5.55005$ $y_{\text{точно}} = 14.252$ Истинска грешка = 0.0260554

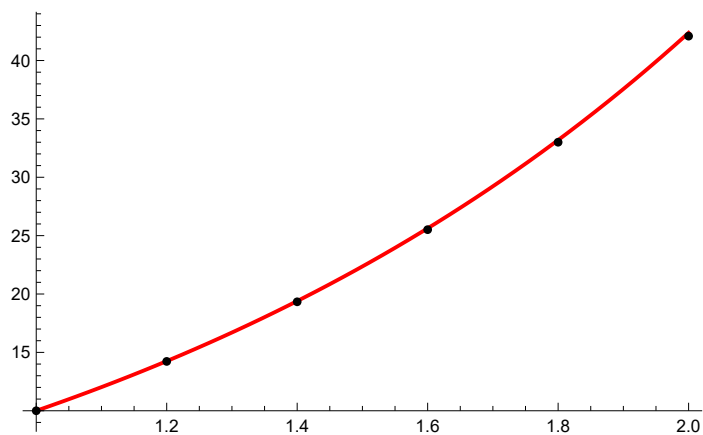
$i = 2$ $x_i = 1.4$ $y_i = 19.3328$ $f_i = 28.1935$ $k_1 = 5.6387$ $k_2 = 6.72012$ $y_{\text{точно}} = 19.3958$ Истинска грешка = 0.0630363

$i = 3$ $x_i = 1.6$ $y_i = 25.5122$ $f_i = 34.1413$ $k_1 = 6.82826$ $k_2 = 8.14899$ $y_{\text{точно}} = 25.627$ Истинска грешка = 0.114842

$i = 4$ $x_i = 1.8$ $y_i = 33.0008$ $f_i = 41.4053$ $k_1 = 8.28106$ $k_2 = 9.89448$ $y_{\text{точно}} = 33.1872$ Истинска грешка = 0.186411

$i = 5$ $x_i = 2$. $y_i = 42.0886$ $f_i = 50.2791$ $k_1 = 10.0558$ $k_2 = 12.0266$ $y_{\text{точно}} = 42.3726$ Истинска грешка = 0.284049

Out[249]=



2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

In[250]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{2}{3}$  * h, y +  $\frac{2}{3}$  * k1];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ", f[x, y], " k_1 = ", k1,
    " k_2 = ", k2, " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{4}$  * k1 +  $\frac{3}{4}$  * k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 1$, $y_i = 10$, $f_i = 19.3069$ $k_1 = 3.86137$ $k_2 = 4.34807$ $y_{\text{точно}} = 10$. Истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 1.2$ $y_i = 14.2264$ $f_i = 23.318$ $k_1 = 4.6636$ $k_2 = 5.25476$ $y_{\text{точно}} = 14.252$ Истинска грешка = 0.0256446

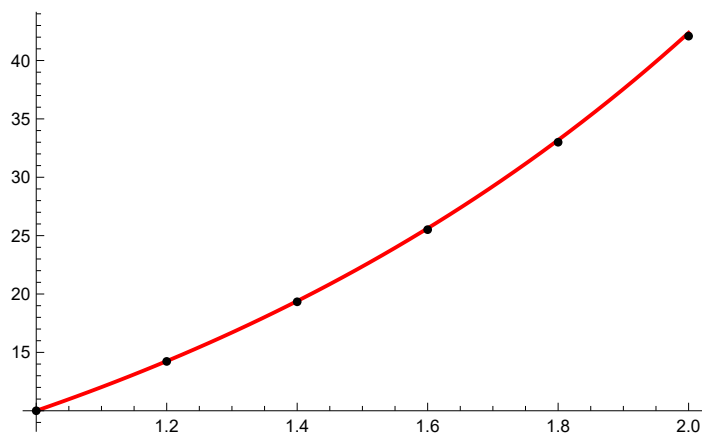
$i = 2$ $x_i = 1.4$ $y_i = 19.3334$ $f_i = 28.1941$ $k_1 = 5.63882$ $k_2 = 6.35968$ $y_{\text{точно}} = 19.3958$ Истинска грешка = 0.0624389

$i = 3$ $x_i = 1.6$ $y_i = 25.5128$ $f_i = 34.1419$ $k_1 = 6.82839$ $k_2 = 7.70868$ $y_{\text{точно}} = 25.627$ Истинска грешка = 0.114188

$i = 4$ $x_i = 1.8$ $y_i = 33.0014$ $f_i = 41.4059$ $k_1 = 8.28119$ $k_2 = 9.35656$ $y_{\text{точно}} = 33.1872$ Истинска грешка = 0.185774

$i = 5$ $x_i = 2$, $y_i = 42.0892$ $f_i = 50.2797$ $k_1 = 10.0559$ $k_2 = 11.3695$ $y_{\text{точно}} = 42.3726$ Истинска грешка = 0.283468

Out[263]=



2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

In[264]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]
(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k1}{2}$ ];
  k3 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k2}{2}$ ];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " k_1 = ", k1, " k_2 = ", k2, " k_3 = ", k3, " k_4 = ",
    k4, " y_точно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

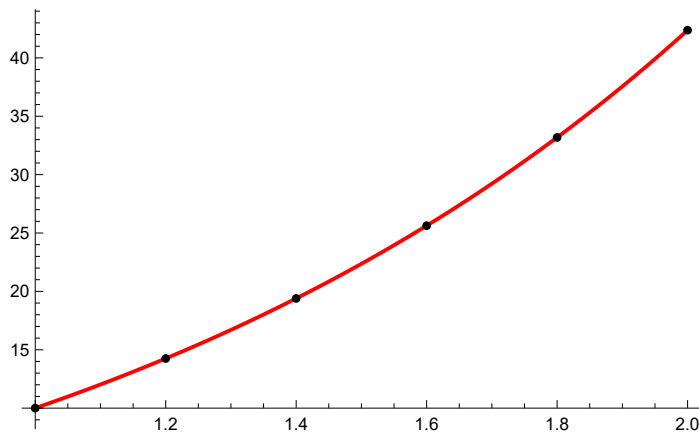
Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.00032

Теоретичната глобална грешка е 0.0016

```
i = 0 xi = 1. yi = 10. fi = 19.3069 k1 = 3.86137 k2 =
4.22663 k3 = 4.26316 k4 = 4.67095 yточно = 10. Истинска грешка = 0.
i = 1 xi = 1.2 yi = 14.252 fi = 23.3436 k1 = 4.66872 k2 = 5.11267
k3 = 5.15706 k4 = 5.65396 yточно = 14.252 Истинска грешка = 0.0000533747
i = 2 xi = 1.4 yi = 19.3957 fi = 28.2564 k1 = 5.65129 k2 = 6.19315
k3 = 6.24733 k4 = 6.85443 yточно = 19.3958 Истинска грешка = 0.000128089
i = 3 xi = 1.6 yi = 25.6268 fi = 34.2559 k1 = 6.85118 k2 = 7.5136
k3 = 7.57984 k4 = 8.32223 yточно = 25.627 Истинска грешка = 0.000231966
i = 4 xi = 1.8 yi = 33.1868 fi = 41.5913 k1 = 8.31827 k2 = 9.12841
k3 = 9.20942 k4 = 10.1174 yточно = 33.1872 Истинска грешка = 0.00037495
i = 5 xi = 2. yi = 42.3721 fi = 50.5626 k1 = 10.1125 k2 = 11.1033
k3 = 11.2024 k4 = 12.3126 yточно = 42.3726 Истинска грешка = 0.000569682
```

Out[277]=



3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи, за да се достигне точност 10^{-7}

2.1. Ойлер

In[278]:=

```
a = 1.; b = 2.;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{b-a}{n} \leq 10^{-7}$ ]
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[280]=

```
n < 0 || n ≥ 1. × 107
```

```
In[311]:=
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 10^7; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
Мрежата е с n = 10000000 и стъпка h = 1.×10-7
Теоретичната локална грешка е 1.×10-14
Теоретичната глобална грешка е 1.×10-7
```

2.2. Модифициран метод на Ойлер

```
In[321]:=
a = 1.; b = 2.;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{b - a}{n} \leq 10^{-7}$ ]

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a
corresponding exact system and numericizing the result.

Out[323]=
n < 0 || n ≥ 1. × 107
```

In[324]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 10^7; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
Мрежата е с n = 10000000 и стъпка h = 1.×10-7
Теоретичната локална грешка е 1.×10-21
Теоретичната глобална грешка е 1.×10-14

```


2.3. РК32 - Формула (1, 1)

In[336]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-7}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[337]=

$n \leq -3162.28 \mid \mid n \geq 3162.28$

```
In[338]:=
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 3163; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

Мрежата е с n = 3163 и стъпка h = 0.000316156
Теоретичната локална грешка е  $3.16011 \times 10^{-11}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $9.99543 \times 10^{-8}$ 
```

2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

```
In[348]:=
Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-7}, n]$ 

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a
corresponding exact system and numericizing the result.

Out[349]=
n ≤ -3162.28 || n ≥ 3162.28
```

In[350]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 3163; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

Мрежата е с n = 3163 и стъпка h = 0.000316156
Теоретичната локална грешка е  $3.16011 \times 10^{-11}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $9.99543 \times 10^{-8}$ 

```


2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

In[360]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^4 \leq 10^{-7}$ , n]

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[361]=

$n \leq -56.2341 \mid \mid n \geq 56.2341$

In[362]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 9

(*Точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-9e + 19e^x - e^x \text{Log}[2] + e \text{Log}[1 + x^2]}{e}$ 

(*Съставяме мрежата*)
n = 57; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]

Мрежата е с n = 57 и стъпка h = 0.0175439
Теоретичната локална грешка е  $1.66198 \times 10^{-9}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $9.47328 \times 10^{-8}$ 

```