Пълна група от събития

Нека е даден опит с пространство S
и събития B1, B2, B3…., Bn

Събитията B1, B2, B3…., Bn образуват **пълна група от събития**, ако
•***те са несъвместими***
• ***сумата им дава цялото пространство***

Примери за пълна група от събития

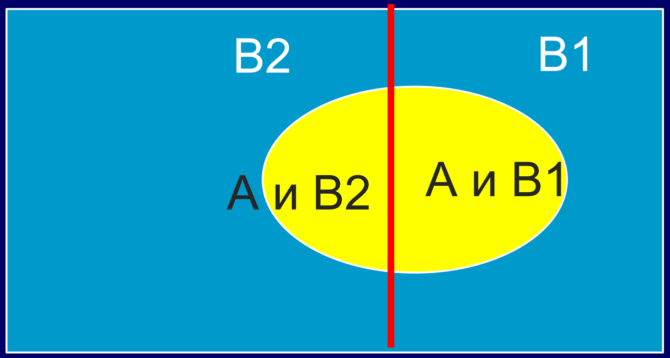
1. **Всяко събитие и неговото допълнение** образуват група от две събития, които са пълна група от събития.

2. Ако в кутия има три вида топки, бели, зелени и червени, и опитът е вадене на една топка.

Събитията
B1=вадим бяла топка
B2=вадим червена топка
B3=вадим зелена топка
образуват **пълна група от събития.**

Формула на пълната вероятност

Използва се когато има **пълна група от събития**.
Да започнем с най-лесния случай- когато пълната група от събития се състои от две събития (едно събитие В1 и неговото допълнение В2)



Нека А е друго събитие в S

А= АиВ1+АиВ2

несъвместими

Р(А)= Р(АиВ1)+Р(АиВ2)

От формулата за умножение на вероятности
Р(А и В)=Р(А|В) Р(В)

Р(АиВ1)=Р(А|В1)Р(В1)
Р(АиВ2)=Р(А|В2)Р(В2)

Р(А)=Р(А|В1)Р(В1) +Р(А|В2)Р(В2)

ПРИМЕР: В две шапки има топчета.
В 1-вата шапка има 4 бели и 6 червени,
а във 2-рата има 5 бели и 5 червени.
Хвърляме монета един път и ако се падне „лице“ вземаме едно топче със затворени очи от първата шапка, ако е „герб“ вземаме топче от втората топка.
Каква е вероятността извадено топче да е бяло?

В1- пада се Л В2 пада се Г
В1 и В2 образуват пълна група.
А=извадено топче е бяло.
Търсим Р(А)=?
От формулата за пълната вероятност

$$P(A)=P(A|B1)P(B1)+P(A|B2)P(B2)=$$
$$= 4/10 \quad ½ \quad + \; 5/10 \quad ½=$$
$$=1/5 \qquad +1/4 =9/20$$

ПРИМЕР:

В група от 40 студента:

30 са от 1-ви курс (10 момичета и 20 момчета)

10 са от 2-ри курс (4 момчета и 6 момичета)

Избират се двама, един по един без връщане.

Каква е вероятността и двамата да са от 1-ви курс?

Дефинираме

A= първият е от 1-ви курс

B= вторият е 1-ви курс

Търсим P(AиB) =?

Решаваме директно P(AиB)= 30*29/(40*39)=29/52

НОВ ВЪПРОС:

В група от 40 студента, 30 са от 1-ви курс (10 момичета 20 момчета) и 10 са от 2 курс (4 момчета и 6 момичета) Избират се двама, един по един без връщане.

Ако се знае, че първият избран е 1-ви курс, то каква е вероятността и вторият да е от 1-ви курс?

A= първият е от 1-ви курс

B= вторият е от 1-ви курс

P(B|A)=? След настъпване на A, остават 39 студента, 29 от първи курс

Директно P(B|A)=29/39

НОВ ВЪПРОС: В група от 40 студента, 30 са от 1-ви курс (10 момичета 20 момчета) и 10 са от 2 курс (4 момчета и 6 момичета) Избират се двама без връщане.

Каква е вероятността вторият да е от 1-ви курс?

B= вторият е от 1ви курс P(B)=?

не може директно, понеже B настъпва когато първият избран е или от 1-ви или от 2-ри и не знаем със сигурност новия състав, т.е. B настъпва, ако едно от събитията A1 или A2 настъпва, където

A1= първият е от 1-ви P(A1)=30/40=3/4

A2= първият е от 2-ри P(A2)=10/40=1/4

Двете събития образуват пълна група

Тогава използваме формулата за пълната верочтност

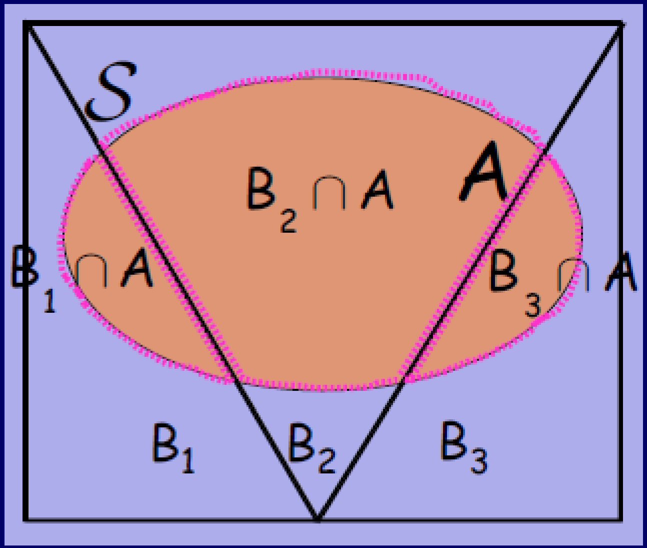
$P(B)=P(B|A1)P(A1)+P(B|A2)\,P(A2)$

B|A1=първият е от 1-ви, останали са 39 студенти, от които 29 от 1-ви=> $P(B|A1)=29/39$

$P(B|A2)=30/39$

$P(B)=P(B|A1)P(A1)+P(B|A2)\,P(A2)= (29/39)*(3/4)+(30/39)*(1/4)= 39/52$

Формула на пълната вероятност



А сега при три събития B1, B2, B3 свързани с даден опит с пространство S и образуващи пълна група от събития.

Нека A е друго събитие в S

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A)$$

несъвместими

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

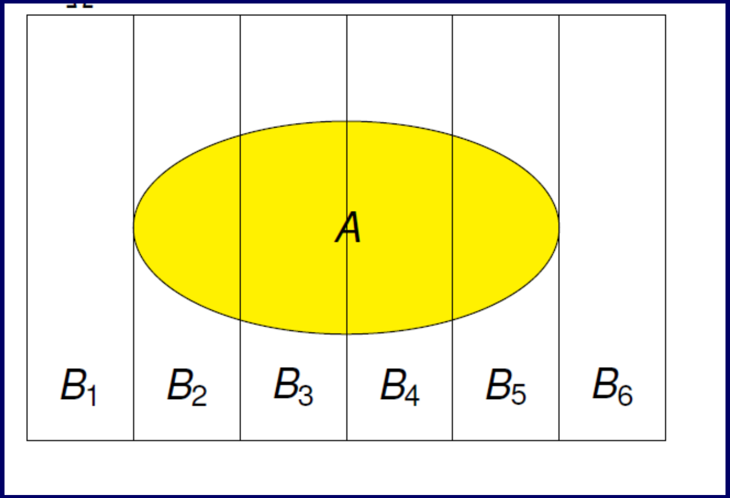
От формулата за умножение на вероятности

P(A и B)=P(A|B) P(B)

$$P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + P(A \mid B_3)P(B_3)$$

Обща формула за пълната вероятност
ОБОБЩЕНИЕ

Нека е даден опит с пространство S и **пълна група** от събития B_1, B_2, ...B_n. Нека A е друго събитие в S



$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2)+\ldots+\mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)$$

пример

На масата има 20 непрозрачни плика, от които единият съдържа 20 лв. Двама студенти един след друг избират по един плик. Кой има по-голям шанс да избере печелившия плик – първия или втория избиращ студент?

A={първия избира печелившия плик}
B ={втория избира печелившия плик}

$P(A)= 1/20$

$P(B)=???$

Разглеждаме събитията A и $\bar{A}$ – те образуват пълна група

$$P(B)= P(B|A)P(A)+ P(B|\bar{A})P(\bar{A})=$$
$$(0)*(1/20) + (1/19)*(1-1/20)= 1/20$$

Шансът на първия да избере печелившия плик = шанса на втория

Формула на Бейс

Нека е даден опит с пространство S и **пълна група** от събития B_1, B_2, ...B_n. Нека A е друго събитие в S

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(B_j)P(A \mid B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$$

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) + \ldots + \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}$$

Пример: Има три локални фирми, които произвеждат ел. крушки и вероятността да купиш крушки от коя да е от тях е една и съща. Дефектните в първата фирма за 5%, във втората 3% и в третата 2%.

Ако сме купили крушка, каква е вероятността да е дефектна?

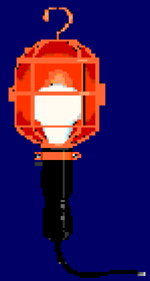
B= крушката е дефектна

Има три събития, които образуват пълна група

A1- произведена в 1-ва фирма

A2- произведена във 2-ра фирма

A3-произведена в 3-та фирма



Използваме формула за пълната вероятност

$$P(B)=P(B|A1)P(A1)+P(B|A2)P(A2)+P(B|A3)P(A3)=$$

$$0{,}05(1/3)+0{,}03(1/3)+0{,}02(1/3)=0{,}333$$

Нов въпрос:

Има три локални фирми, които произвеждат ел. kрушки и вероятността да купиш крушки от коя да е от тях е една и съща. Дефектните в първата фирма за 5%, във втората 3% и в третата 2%.

Ако сме купили крушка, която се е оказала дефектна, то каква е вероятността да е произведена в първата фирма?

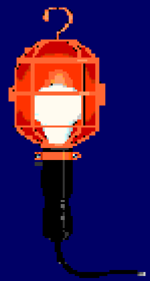
B= крушката е дефектна

Има три събития, които образуват пълна група

A1- произведена в 1-ва фирма

A2- происведена във 2-ра фирма

A3-произведена в 3-та фирма



Търсим P(A1|B)=?=> Използваме формула на Бейс

$$P(A1|B)=\frac{P(B|A1)P(A1)}{P(B|A1)P(A1)+P(B|A2)P(A2)+P(B|A3)P(A3)}=$$

$$\frac{0,05\left(\frac{1}{3}\right)}{0,05\left(\frac{1}{3}\right)+0,03\left(\frac{1}{3}\right)+0,02\left(\frac{1}{3}\right)}=0,5$$

Опити на Бернули

1. **Съвкупност от краен брой *n* опити**

2. Опитите са независими.

3. **Всеки опит трябва да има само два възможни изходи, успех У и неуспех Н.**

4. Вероятността за успех във всеки отделен опит е постоянна:

P(У)=p

Всеки изход от ***n*** **опити на Бернули е наредена** ***n*** –торка от У и Н.

Колко е вероятността да има точно **к** У (успеха)

$$P(S_n=k)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\,p^k(1-p)^{n-k}$$

Кои от следните са опити на Бернули?

Играч хвърля двойка зарчета 10 пъти последователно.

Да

Избор на 5 студента по случаен начин измежду група от 20 студента

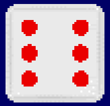
изборът е без връщане

не

Изборът е с връщане

да

ПРИМЕР:



Зарче се подхвърля 5 пъти на масата. Каква е вероятността точно 3 пъти да се падне “шестица”?

5 Бернулиеви опита; Успех=„6“; Р(У)=1/6 ; точно 3 успеха

n=5 **k=3** $\mathrm{P}(S_5=3)=\frac{5.4.3}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3(1-1/6)^2$

Каква е вероятността поне 4 пъти да се падне “шестица”

n=5 **k≥4, т.е. К=4 или к=5**

$$\mathrm{P}(S_5>=4)=\mathrm{P}(S_5=4)+\mathrm{P}(S_5=5)$$
$$=\frac{5.4.3.2}{4!}\left(\frac{1}{6}\right)^4(1-1/6)^1+\frac{5.4.3.2.1}{5!}\left(\frac{1}{6}\right)^5(1-1/6)^0$$

Двойка зарчета (бяло и червено) се подхвърлят 7 пъти на масата. Каква е вероятността точно 5 пъти да се паднат еднакъв брой точки?

7 Бернулиеви опита; Успех=да се паднат еднакъв брой точки ; точно 5 успеха

p=P(У)=6/36=1/6

$$P(S_7 = 5) = C_7^{\,5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^{7-5} = 0{,}00188$$

Каква е вероятността точно 5 пъти сумата от точките на двата зара да е 8?

7 Бернулиеви опита; Успех=сумата от точките е 8 ; точно 5 успеха

p=P(У)=(5)/36

$$P(S_7 = 5) = C_7^{\,5}\left(\frac{5}{36}\right)^5\left(\frac{31}{36}\right)^{7-5} = 0{,}0008$$

К
Р
А
Й