Метод на хордите

Задача 1:

Задача : Дадено е уравененето :

$x^2 + px - (q + 50)\cos x - 2(p + q) = 0,$

където **p** и **q** са съответно предпоследната и последната

цифра от факултетния ни номер (в случая $p = 0$ а $q = 8$)

$x^2 + x - 58\cos x - 16 = 0$

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението.
2. Да се локализира най – големия реален корен в интервала [a, b].
3. Да се проверят условията за приложение на метода на хордите.
   - – проверка на сходимост
   - – избор на начално приближение и постоянна точка
   - – итерациите
4. Да се изчисли корена по метода на хордите с точност 10^{-4}. Представете таблица с изчисленията.
5. Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност.
6. Да се направи сравнение кой метод е по – ефективен за избрания интервал.

```
f[x_] := x^2 + x - 58 Cos[x] - 16
```

In[◦]:=
```
f[x]
```

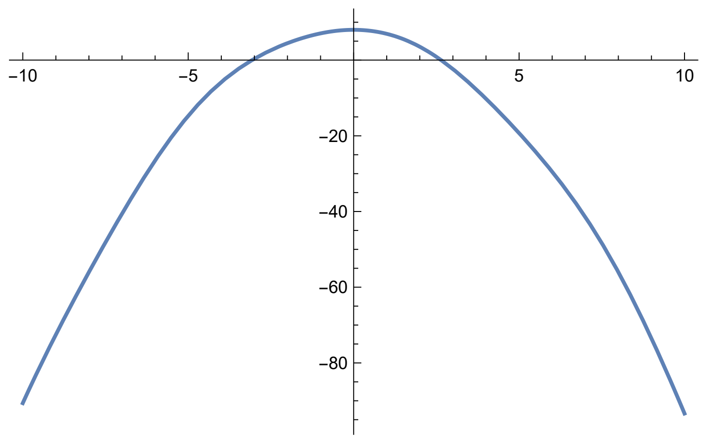
Out[◦]=

$$8 - x^2 - \frac{9x}{9 + x^2} + \mathrm{Sin}[x]$$

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението

In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

Out[ ]=

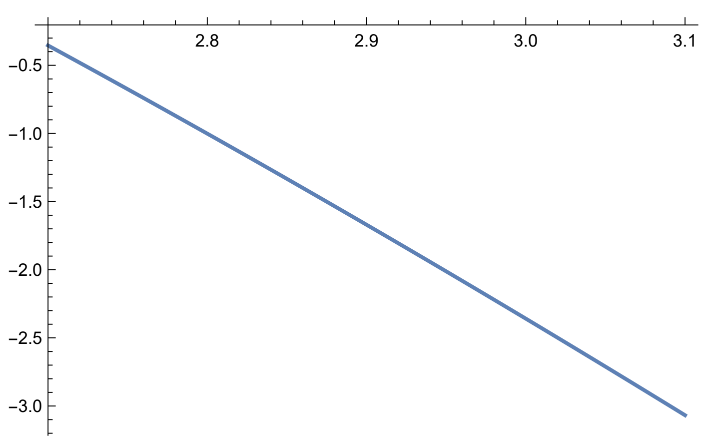


Брой корени: 2

2. Да се локализира най-големия реален корен в интервала [a, b]

In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, 2.7, 3.1}]
```

Out[ ]=




```
f[2.7]
```

Out[ ]=

-8.48023

In[◦]:=
```
f[3.1]
```
Out[◦]=
```
-3.06761
```

Извод:

(1) Функцията е непрекъсната, защото е сума от непрекъснати функции (полином и синус).

(2) f(5) = -8.48023 ... < 0

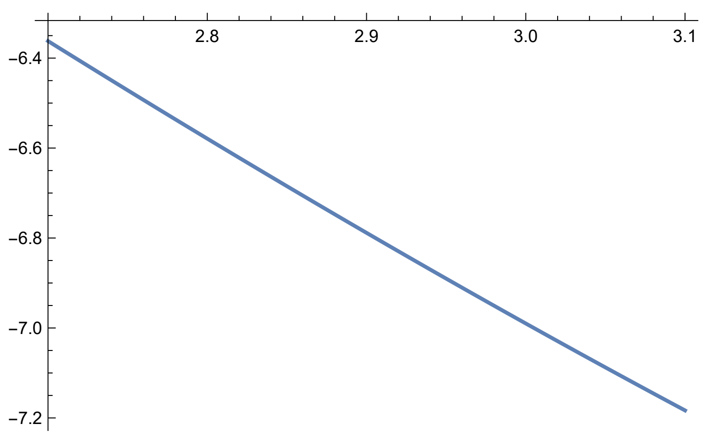
f(7) = -3.06761 ... < 0

3. Да се проверят условията за приложение на метода на хордите

Проверка на сходимост

Графика на първата производна

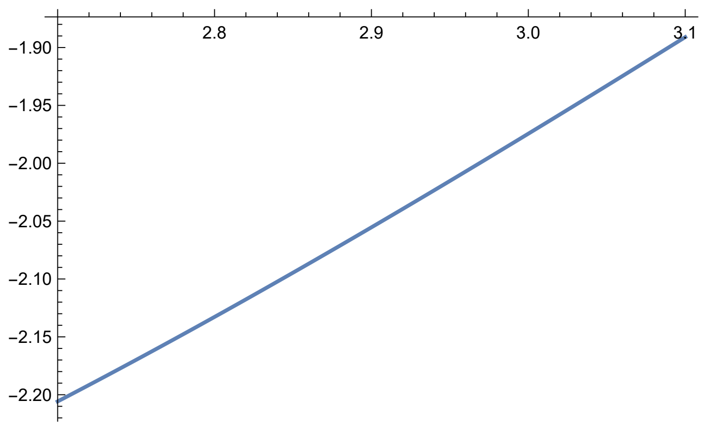
In[◦]:=
```
Plot[f'[x], {x, 2.7, 3.1}]
```
Out[◦]=



Извод: (1) Стойностите на първата производна в разглеждания интервал [2.7,3.1] са между -6.3 и -7.2. Следователно първата f'(x) > 0 в целия разглеждан интервал [2.7,3.1].

Графика на втората производна

In[∘]:=
```
Plot[f''[x], {x, 2.7, 3.1}]
```
Out[∘]=



Извод : (2) Стойностите на втората производна в разглеждания интервал [2.7,3.1] са между -1.9 и -2.2. Следователно втората f'' (x) > 0 в целия разглеждан интервал [] .

Извод: От (1) и (2) следва, че първата и втората производна имат постоянни знаци в разглеждания интервал [2.7,3.1]. Следователно условията за сходимост на метода на хордите са изпълнени.

Избор на начално приближение и постоянна точка

Нужно е да е изпълнено условието f(x0).f’’(x) < 0

В нашия случай f’’(x) >0. Следователно е нужно f(x0) <0

In[∘]:=
```
p = 2.7
```
Out[∘]=
```
2.7
```

In[∘]:=
```
x0 = 3.1
```
Out[∘]=
```
3.1
```

Итериране

In[∘]:=
```
For[n = 0, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0] / (f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1];
 x0 = x1
]
```

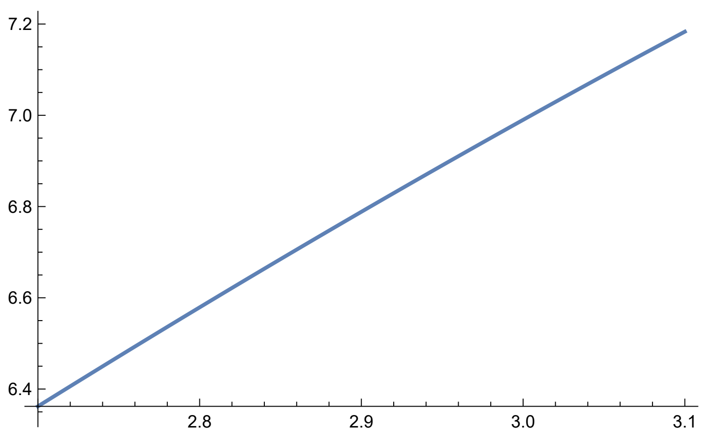
```
n = 0 x_n = 2.64776
n = 1 x_n = 2.64379
n = 2 x_n = 2.64375
n = 3 x_n = 2.64375
n = 4 x_n = 2.64375
n = 5 x_n = 2.64375
n = 6 x_n = 2.64375
n = 7 x_n = 2.64375
n = 8 x_n = 2.64375
n = 9 x_n = 2.64375
n = 10 x_n = 2.64375
```

4. Да се изчисли корена по метода на хордите с точност 10^{-4}

Изчисляване на постоянните величини

In[ ]:= `Plot[Abs[f'[x]], {x, 2.7, 3.1}]`

Out[ ]=



От геометрично съображение минимума на абсолютната стойност на първата производна се достига в левия край на интервала, а максимума - в десния.

In[ ]:= `M1 = Abs[f'[2.7]]`

Out[ ]=

6.36207

In[ ]:= `m1 = Abs[f'[3.1]]`

Out[ ]=

7.18328

In[∘]:=
$$R = \frac{M1 - m1}{m1}$$

Out[∘]=

-0.182644

In[∘]:=
```
f[x_] := x^2 + x - 58 Cos[x] - 16
p = 2.7; x0 = 3.1;
M1 = Abs[f'[2.7]];
m1 = Abs[f'[3.1]];
R = (M1 - m1)/m1;
For[n = 0, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1, " f(x_n) = ", f[x1], " ε_n = ", eps = R * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

n = 0 x_n = 0.444565 f(x_n) = -67.7201 ε_n = 5.96094

n = 1 x_n = 1.78266 f(x_n) = 1.15674 ε_n = 3.00376

n = 2 x_n = 1.75922 f(x_n) = -0.282088 ε_n = 0.0526187

n = 3 x_n = 1.7649 f(x_n) = 0.0671473 ε_n = 0.0127544

n = 4 x_n = 1.76354 f(x_n) = -0.0160774 ε_n = 0.00304041

n = 5 x_n = 1.76387 f(x_n) = 0.00384412 ε_n = 0.000727727

n = 6 x_n = 1.76379 f(x_n) = -0.00091944 ε_n = 0.000174015

n = 7 x_n = 1.76381 f(x_n) = 0.000219895 ε_n = 0.0000416201

n = 8 x_n = 1.76381 f(x_n) = -0.0000525914 ε_n = 9.95398×10^{-6}

n = 9 x_n = 1.76381 f(x_n) = 0.000012578 ε_n = 2.38065×10^{-6}

n = 10 x_n = 1.76381 f(x_n) = -3.00823×10^{-6} ε_n = 5.69369×10^{-7}

Цикъл със стоп-критерий при определена точност (в случая ε_n = 0.0001)

```
f[x_] := x^2 + x - 58 Cos[x] - 16
p = 2.7; x0 = 3.1;
M1 = Abs[f'[2.7]];
m1 = Abs[f'[3.1]];
R = (M1 - m1)/m1;
epszad = 0.0001;
eps = 1;
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " f(xn) = ", f[x0]];
For[n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " xn = ", x1, " f(xn) = ", f[x1], " εn = ", eps = R * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

n = 0 x_n = 7.3 f(x_n) = 9.55143

n = 1 x_n = 7.14109 f(x_n) = −0.451213 ε_n = −0.0290241

5. Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност.

In[∘]:= $\text{Log2}\left[\frac{3.1 - 2.7}{0.0001}\right] - 1$

Out[∘]= 10.9658

6. Да се направи сравнение кой метод е по-ефективен за избрания интервал

Извод: По метода на разполовяването биха били необходими 11 итерации за достигане на исканата точност. А по метода на хордите беше необходима само 1 итерация. Следователно методът на хордите е по-ефективен за избрания интервал [2.7,3.1].

Задача 2:

Задача : Дадено е уравенението :

$\frac{\sqrt{x^3} - (1+p+q)*\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$, където **p** и **q** са съответно предпоследната

и последната цифра от факултетния ни номер (в случая p = 0 a q = 8)

$\frac{\sqrt{x^3} - 9*\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението.
2. Да се локализира най – малкия реален корен в интервала [a, b].
3. Да се проверят условията за приложение на метода на хордите.
   – проверка на сходимост
   – избор на начално приближение и постоянна точка
   – итерациите
4. Да се изчисли корена по метода на хордите с точност 0,
000 001. Представете таблица с изчисленията.
5. Да се провери колко итерации биха били необходими,
ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност.
6. Да се направи сравнение кой метод е по – ефективен за избрания интервал.

In[2]:=
```
f[x_] := (Sqrt[x^3] - 9)/(2 - Sin[x])
```

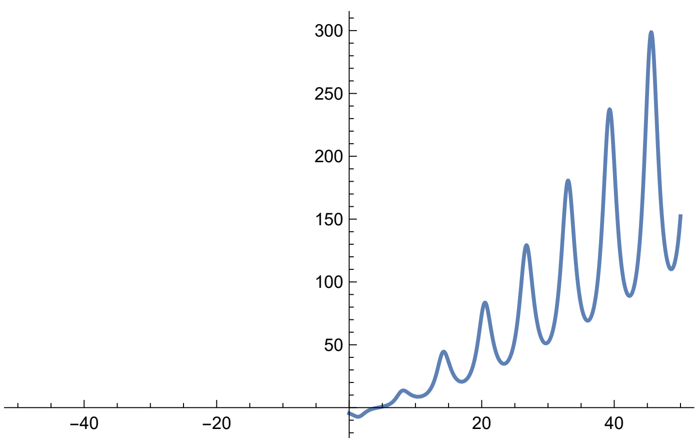
In[3]:=
```
f[x]
```

Out[3]= $\frac{-9+\sqrt{x^3}}{2-\mathrm{Sin}[x]}$

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението

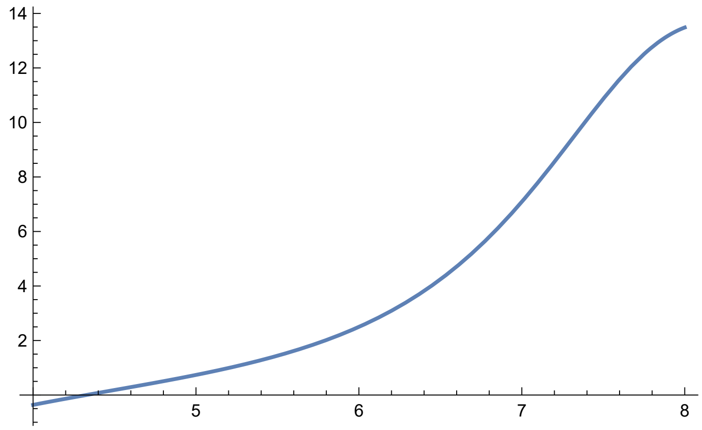
In[5]:=
```
Plot[f[x], {x, -50, 50}]
```

Out[5]=



In[6]:= `Plot[f[x], {x, 4, 8}]`

Out[6]=



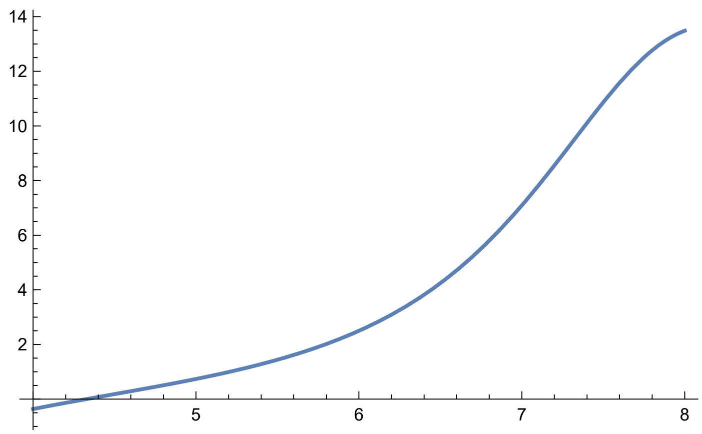
Брой корени: 1

---

2. Да се локализира най-малкия реален корен в интервала [a, b]

In[7]:= `Plot[f[x], {x, 4, 8}]`

Out[7]=



In[8]:= `f[4.]`

Out[8]= `-0.362739`

In[9]:= `f[8.]`

Out[9]= `13.4839`

Извод:

(1) Функцията е непрекъсната, защото е сума от непрекъснати функции.

(2) f(5) = -0.362739 < 0

f(7) = 13.4839 > 0

=> Функцията има различни знаци в двата края на разглеждания интервал [4; 8].

От (1) и (2) следва, че функцията има поне един корен в разглеждания интервал [4; 8].

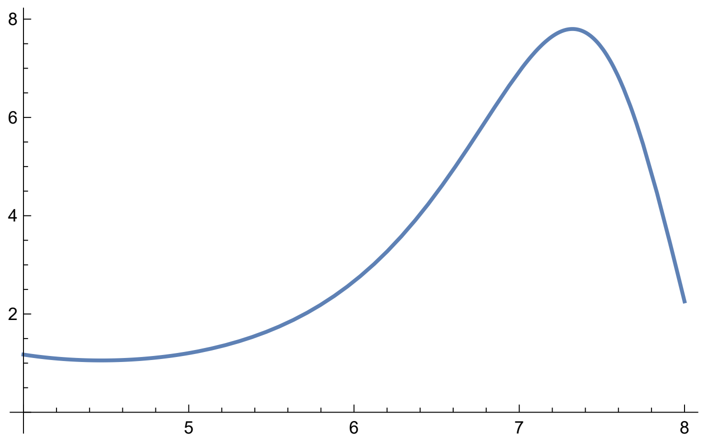
3. Да се проверят условията за приложение на метода на хордите

Проверка на сходимост

Графика на първата производна

In[11]:=
```
Plot[f'[x], {x, 4, 8}]
```

Out[11]=

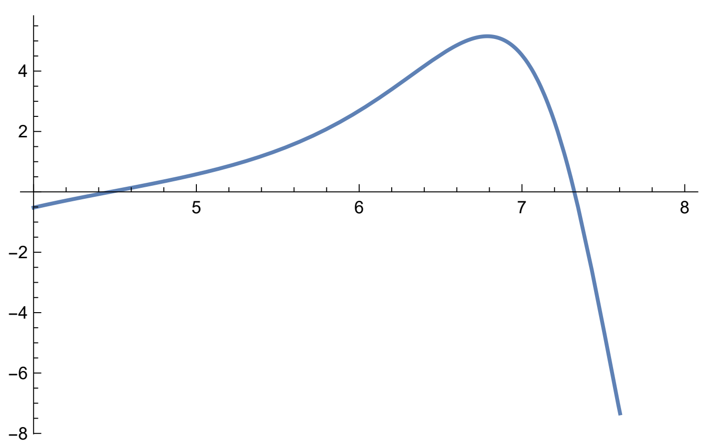


Извод: (1) Стойностите на първата производна в разглеждания интервал [4; 8] са между 1 и 7.8 Следователно първата f'(x) > 0 в целия разглеждан интервал [4; 8].

Графика на втората производна

In[14]:=
```
Plot[f''[x], {x, 4, 8}]
```

Out[14]=



Извод : (2) Стойностите на втората производна в разглеждания интервал [4; 8] са между -0.5 и -7. Следователно втората производна няма постоянна стойност в разглеждания интервал [4, 8] .