

**ПУ „Паисий Хилендарски”, ФМИ**  
**Задачи за самостоятелни упражнения по ЛААГ**  
**за специалност ИНФОРМАТИКА**

1. Относно координатна система  $K$  в равнината са дадени точките  $A(1, -3)$ ,  $B(8, 0)$ ,  $C(4, 8)$  и  $D(-3, 5)$ .

- а) Да се провери дали  $A$ ,  $B$  и  $C$  са колинеарни.
- б) Да се докаже, че четириъгълникът  $ABCD$  е успоредник.
- в) Да се намерят координатите на медицентъра  $G$  на  $\triangle ABC$ .

2. Установете за всяка от следните системи вектори дали е линейно зависима или линейно независима:

- а)  $(1, -1, 1)$ ,  $(1, 0, 5)$ ,  $(2, -1, 6)$ ; б)  $(2, 1, 0)$ ,  $(0, -2, 4)$ ,  $(1, 0, 1)$ .

3. Установете кое от следните множества е векторно пространство:

а) множеството  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, x - y - z = 0\}$ ;

б) множеството на матриците от вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+c \end{pmatrix}$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{R})$ ;

в) множеството на матриците от вида  $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & a-c \end{pmatrix}$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{R})$ .

Определете размерността на векторните пространства.

4. Нека  $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$  е координатна система в пространството. Да се докаже, че правата  $AB$  пресича равнината  $CDE$ , ако  $\vec{OA} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$ ,  $\vec{OB} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ ,  $\vec{OC} = \vec{e}_2$ ,  $\vec{OD} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ ,  $\vec{OE} = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ . Да се намерят координатите на пресечната им точка  $M$  спрямо  $K$ .

5. Ако  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$ ,  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ , да се пресметнат  $\vec{a}\vec{b}$ ,  $\vec{a}^2$ ,  $\vec{b}^2$ ,  $(\vec{a} - \vec{b})^2$ ,  $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$ .

6. Да се пресметне  $(\vec{a} + \vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$ , ако  $\vec{a}(1, -1, 0)$ ,  $\vec{b}(-2, 0, 3)$  относно декартова координатна система. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите  $\vec{p} = (\vec{a} + \vec{b})$  и  $\vec{q} = (3\vec{a} - \vec{b})$ .

7. Да се пресметнат детерминантите:

а)  $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ ; б)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ ; в)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -5 & 8 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ; г)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 7 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ .

8. Да се намери обратната матрица  $A^{-1}$  на  $A$  ако съществува.

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; в)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ; г)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

9. Да се намери рангът на матриците:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**10.** Да се решат следните системи линейни уравнения:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases} \\ & & \text{г) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases} \end{array}$$

**11.** Да се решат матричните уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

**12.** Да се намери уравнението на права:

- а) през точка  $A(-1, -1)$  и сключва ъгъл  $\varphi=45^\circ$  с правата  $g: 2x + 3y - 6 = 0$ ;
- б) през точка  $B(-1, 3)$  и успоредна на  $p: 3x + 4y - 8 = 0$ ;
- в) през точка  $C(1,3)$  и перпендикулярна на  $l: 3x + 4y + 11 = 0$ ;
- г) през точка  $D(1,0)$  и точка  $E(2,2)$ .

**13.** Даден е триъгълник  $ABC$  с върхове  $A(-1, -2)$ ,  $B(3, -1)$  и  $C(0, 4)$ . Да се намерят:

- а) уравненията на страните на триъгълника;
- б) уравнението на медианата през върха  $A$ ;
- в) уравнението на височината през върха  $A$ .

**14.** Относно декартова координатна система са дадени точките  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 1)$  и  $M(2, -1)$ . Да се намерят:

- а) правата  $p$  минаваща през точките  $A$  и  $B$ ;
- б) ортогонално симетричната точка  $C$  на  $M$  спрямо правата  $p$ ;
- в) ъглите и лицето на триъгълник  $ABC$ .

**15.** Да се определи кои от следните линии са окръжности и на тези окръжности да се намерят центровете и радиусите:

- а)  $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$ ; б)  $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6 = 0$ ;
- в)  $x^2 - 2y^2 + x + 2y + 5 = 0$ ; г)  $x^2 + y^2 + 5x + y + 7 = 0$ .