$$a\left(\cancel{x^3}+\cancel{9x^2}+\cancel{18x}+6-\cancel{3x^3}-\cancel{18x^2}-\cancel{18x}\right.$$
$$\left.+\cancel{3x^3}+\cancel{9x^2}-\cancel{x^3}\right)=1$$

$$6a=1$$

$$a=\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \eta = x^3e^x\cdot\frac{1}{6}$$

III ет.
$$y_{\text{неxom}} = y_{\text{xom}} + \eta =$$

$$= C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$$

2) $y'' - 5y' + 6y = \underbrace{6x^2 - 10x + 2}$; $= \underbrace{(6x^2-10x+2)}_{q(x)} e^{\overset{\alpha}{0}.x}$

I ет.
$$y''-5y'+6y=0$$

$\deg q(x) = 2$
$k = 0$

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=3$$

$$y_{\text{xom}} = C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$$

II ет.
$$\eta(x) = x^k r(x) e^{\alpha x} = x^0(ax^2+bx+c)e^{0.x}$$

$$= ax^2 + bx + c$$

$$\eta' = 2ax + b$$

$$\eta'' = 2a$$

Зам. в нехом. ур-е

$$2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 10x + 2$$

$$2a - \underline{10ax} - 5b + 6ax^2 + \underline{6bx} + 6c = 6x^2 - 10x + 2$$

$$6ax^2 + (6b - 10a)x + 2a - 5b + 6c =$$

$$= 6x^2 - 10x + 2$$

$$\begin{cases} 6a = 6 & \Rightarrow a = 1 \\ 6b - 10a = -10 & b = 0 \\ 2a - 5b + 6c = 2 & \end{cases}$$

$$2 - 0 + 6c = 2 \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \eta(x) = 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = x^2$$

III ст.

$$y_{нехом} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x^2$$

$$\text{(533)} \quad y'' - 2y' - 3y = e^{4x} = 1 \cdot e^{\overset{\alpha}{4}x}$$

$q(x)e^{\alpha x}$

$1 \to q(x)$

$\deg q(x) = 0$

$k = 0$

I ст. $\quad y'' - 2y' - 3y = 0$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$y_o = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

II ст. $\quad \eta(x) = x^k r(x) e^{\alpha x} = x^0 \cdot a \cdot e^{4x} = ae^{4x}$

$$\eta' = a e^{4x} \cdot 4 = 4ae^{4x}$$

$$\eta'' = 4ae^{4x} \cdot 4 = 16ae^{4x}$$

зам $\Rightarrow \quad 16ae^{4x} - 2 \cdot 4ae^{4x} - 3ae^{4x} = e^{4x} \quad |: e^{4x}$

$$5a = 1$$

$$a = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \eta(x) = \frac{1}{5} e^{4x}$$

III ст. $\quad y_{нех} = y_{хом} + \eta$

534 $\quad y'' + y = \underbrace{4x}_{q(x)} e^{x} \qquad \alpha = 1 \qquad = 4x e^{1\cdot x}$

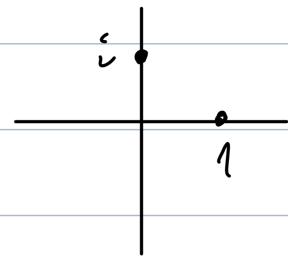
$\deg q(x) = 1$

$k = 0$

I. ét. $\quad y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$



$e^{\lambda_1 x} = e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$y_{hom} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

II. ét. $\quad \eta(x) = x^k \, r(x) e^{\alpha x} = x^0 \cdot (ax+b)e^{x}$

$\deg q(x)$	$r(x)$
0	a
1	$ax+b$
2	ax^2+bx+c
3	ax^3+bx^2+cx+d
4	$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$\eta' = e^{x}(ax + a + b)$

$\eta'' = e^{x}(ax + 2a + b)$

$\Rightarrow \cancel{e^{x}}(ax + 2a + b) + (ax+b)\cancel{e^{x}} = 4x\cancel{e^{x}}$

$2ax + 2a + 2b = 4x + 0$

$$\left| \begin{array}{ll} 2a = 4 & \Rightarrow a = 2 \\ 2a + 2b = 0 & 2b = -4 \Rightarrow b = -2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \eta(x) = (2x-2)e^{x}$$

III сл. ...

$q(x)e^{\alpha x}$

(535) $$y'' - y = 2e^{x} - x^2 = \underbrace{-x^2 + 2e^{x}}_{f_1(x) + f_2(x)}$$

I сл.

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$y_{хом} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

(Т6) $$L[y] = f_1 + f_2 \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{ll} L[y] = f_1 & \eta_1 \\ L[y] = f_2 & \eta_2 \end{array} \right\} + \quad \eta_1 + \eta_2 \text{ е ч. р. на даденото (1)}$$

Док.

$$L[\eta_1] = f_1$$

$$L[\eta_2] = f_2$$

$$L[\eta_1 + \eta_2] = L[\eta_1] + L[\eta_2] = f_1 + f_2$$

$\Rightarrow \eta_1 + \eta_2$ е частно реш. на (1)

ii) ет. $y'' - y = -x^2 = -x^2 \cdot e^{0.x}$

α

$q(x)$

$\eta_1(x) = x^0 \cdot (ax^2+bx+c)\, e^{0.x}$

$\deg q(x) = 2$

$k = 0$

$\eta_1'(x) = 2ax + b, \quad \eta_1'' = 2a$

$\Rightarrow \quad 2a - (ax^2+bx+c) = -x^2$

$-ax^2 - bx + 2a - c = -x^2$

$-a = -1$

$-b = 0$

$-c = 0$

$\alpha = 1$

iii) ет. $y'' - y = 2e^{1x}$

$q(x)$

$\deg q(x) = 0$

$k = 1$

$\eta_2(x) = x^1 \cdot a \cdot e^x$

$\eta_2' = ae^x + axe^x = ae^x(x+1)$

$\eta_2'' = ae^x\,(x+2)$

$ae^x(x+2) - axe^x = 2e^x$

$\cancel{axe^x} + 2ae^x - \cancel{axe^x} = 2e^x \quad \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

iv) ет. $y_{\text{общ.}} = y_{\text{хом}} + \eta_1 + \eta_2$

$y_{\text{общ}} = C_1e^x + C_2e^{-x} + x^2 + xe^x$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x\right)$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$p(x)$ и $q(x)$ – полиноми

$$\eta(x) = x^k e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$$

$\alpha + i\beta \to$ к е кратността на $\alpha+i\beta$ като характер. корен ($k=0$, ако $\alpha+i\beta$ не е характер. корен)

неизвестни

$P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми от степен

$$m = \max(\deg p(x), \deg q(x))$$

537 $\quad y'' - 3y' + 2y = \sin x = e^{\overset{\alpha}{0}.x}\left(\overset{p(x)}{0}.\cos 1x + \overset{q(x)}{1}.\sin 1x\right)$

β

I ст. $\quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$

II ст. $\quad \eta = x^k e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right) =$

$$= x^k e^{0.x}\left(P(x)\cos x + Q(x)\sin x\right)$$

$\alpha + i\beta = 0 + i.1 = i$ не е корен на хар. ур.

$\Rightarrow k = 0$

$P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми от степен

$$m = \max(\deg p(x), \deg q(x)) =$$
$$= \max(-\infty, 0) = 0$$

$$\Rightarrow P(x) = a, \quad Q(x) = b$$

$$\Rightarrow \eta(x) = x^0 \cdot e^{0.x} (a\cos x + b\sin x) =$$
$$= a\cos x + b\sin x$$

Зам в нехом. ур-е

$$\eta' = -a\sin x + b\cos x$$

$$\eta'' = -a\cos x - b\sin x$$

$$(-a\cos x - b\sin x) - 3(-a\sin x + b\cos x) +$$
$$+ 2(a\cos x + b\sin x) = \sin x$$

$$-a\cos x - b\sin x + 3a\sin x - 3b\cos x +$$
$$+ 2a\cos x + 2b\sin x = \sin x$$

$$\left| \begin{array}{l} -a - 3b + 2a = 0 \\ -b + 3a + 2b = 1 \end{array} \right.$$

$$a - 3b = 0 \Rightarrow a = 3b$$

$$+b + 9b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{10} \Rightarrow a = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \eta(x) = \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$$

538 $\quad y'' + y = 4\sin x = e^{\overset{\alpha}{0}.x}\left(\overset{p(x)}{0}.\cos x + \overset{q(x)}{4}\sin x\right)$

$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$

β

$$\eta(x) = x^k e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$$

$\alpha + i\beta = 0 + 1.i = i$ е еднократен корен

$\Downarrow$

$\underline{k = 1}$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = 0 \Rightarrow \deg p(x) = -\infty \\ q(x) = 4 \Rightarrow \deg q(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow m = 0$$

$\Rightarrow P(x)$ и $Q(x)$ са полиноми от ст $m = 0$

$\Rightarrow P(x) = a, \quad Q(x) = b$

$$\Rightarrow \eta(x) = x^{1} e^{0.x}\left(a\cos x + b\sin x\right) =$$

$$= x\left(a\cos x + b\sin x\right)$$

$$\eta' = a\cos x + b\sin x + x(-a\sin x + b\cos x)$$

$$\eta'' = -a\sin x + b\cos x + (-a\sin x + b\cos x) +$$
$$+ x(-a\cos x - b\sin x)$$

Зам y'' с η'' и y с η.

$$-a\sin x + b\cos x - a\sin x + b\cos x -$$
$$- \cancel{ax\cos x} - \cancel{bx\sin x} + \cancel{ax\cos x} + \cancel{bx\sin x} = 4\sin x$$

Сравниваем коэф. перед $\sin x$, $\cos x$, $x\sin x$ и $x\cos x$

перед $\cos x$; $\quad b + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

перед $\sin x$: $\quad -a - a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2$

$$\Rightarrow \quad \eta(x) = x \cdot (2\cos x + 0 \cdot \sin x) = 2x\cos x$$

Метод на неопределените коефициенти

Ако линейното нехомогенно уравнение (1) е с постоянни коефициенти, т.е. $a_i \in \mathbb{R}$, то понякога е удобно да използваме и метода на неопределените коефициенти за намиране на частно решение.

- Нека е дадено уравнение от вида

$$L[y] = q(x)e^{\alpha x}, \tag{11}$$

където $q(x)$ е полином, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава това уравнение допуска частно решение от вида

$$\eta(x) = x^k r(x) e^{\alpha x}, \tag{12}$$

където k е кратността на α като характеристичен корен ($k = 0$, ако α не е характеристичен корен); $r(x)$ е полином от степен, равна на степента на $q(x)$.

- Нека е дадено уравнение от вида

$$L[y] = e^{\alpha x}(q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\sin\beta x), \tag{13}$$

където $q_1(x)$, $q_2(x)$ са полиноми, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогава това уравнение допуска частно решение от вида

$$\eta(x) = x^k e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x), \tag{14}$$

където k е кратността на $\alpha + i\beta$ като характеристичен корен ($k = 0$, ако $\alpha + i\beta$ не е характеристичен корен); $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ са полиноми от степен $m = \max(\deg q_1(x), \deg q_2(x))$.

Задача 2

Да се решат уравненията:

1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x;$

2) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2;$

3) $y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7\sin x);$

4) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x.$

Решение. 1) Характеристичното уравнение

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (11), като $q(x) = 1$, $\alpha = 1$, затова частното решение ще търсим във вида (12). Тъй като полиномът $q(x)$ е степен 0, то полиномът $r(x)$ също трябва да бъде от степен 0, т.е. $r(x) = a$. Освен това, $\alpha = 1$ е трикратен характеристичен корен, откъдето $k = 3$. Тогава

$$\eta(x) = ax^3e^x.$$

Последователно намираме

$$\eta' = ae^x(x^3 + 3x^2), \quad \eta'' = ae^x(x^3 + 6x^2 + 6x),$$

$$\eta''' = ae^x(x^3 + 9x^2 + 18x + 6).$$

Заместваме с изразите за η''', η'', η' и η в уравнението

$$\eta''' - 3\eta'' + 3\eta' - \eta = e^x$$

и получаваме

$$6ae^x = e^x,$$

откъдето следва, че

$$a = \frac{1}{6},$$

$$\eta(x) = \frac{1}{6}x^3e^x.$$

Накрая,

$$y_{\text{нехом}} = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x.$$

2) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (11), като $q(x) = 6x^2 - 10x + 2$, $\alpha = 0$, затова частното решение ще търсим във вида (12). Тъй като полиномът $q(x)$ е втора степен, то полиномът $r(x)$ също трябва да бъде от втора степен, т.е. $r(x) = ax^2 + bx + c$. Освен това, $\alpha = 0$ не е характеристичен корен, откъдето $k = 0$. Тогава

$$\eta(x) = x^0(ax^2 + bx + c)e^{0.x} = ax^2 + bx + c.$$

Последователно намираме

$$\eta' = 2ax + b, \quad \eta'' = 2a.$$

Заместваме с изразите за η'', η' и η в уравнението

$$\eta'' - 5\eta' + 6\eta = 6x^2 - 10x + 2$$

и получаваме

$$2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6x^2 - 10x + 2.$$

Следователно

$$(6a-6)x^2+(6b-10a+10)x+(2a-5b+6c-2)=0$$

е изпълнено за всяко x. Това е възможно тогава и само тогава, когато всички коефициенти на полинома са равни на нула, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} 6a-6=0 \\ 6b-10a+10=0 \\ 2a-5b+6c-2=0. \end{array}\right.$$

Решаваме тази система и намираме $a=1$, $b=0$, $c=0$. Тогава $\eta(x)=x^2$ и

$$y_{\text{нехом}}=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+x^2.$$

3) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

има за корени $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$. Тогава общото решение на съответното хомогенно уравнение е

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Даденото нехомогенно уравнение е от вида (13), като $q_1(x) = 1$, $q_2(x) = -7$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Затова частното решение ще търсим във вида (14). Тъй като полиномите $q_1(x)$ и $q_2(x)$ са от нулева степен, то полиномите $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ също трябва да бъдат от нулева степен, т.е. $Q_1(x) = a$, $Q_2(x) = b$. Освен това, $\alpha + i\beta = 1 + i$ не е характеристичен корен, откъдето $k = 0$. Тогава

$$\eta(x) = x^0 e^x (a\cos x + b\sin x) = e^x (a\cos x + b\sin x).$$

Последователно намираме

$$\eta' = e^x(a\cos x + b\sin x - a\sin x + b\cos x),$$

$$\eta'' = e^x(-2a\sin x + 2b\cos x).$$

Заместваме с изразите за η'', η' и η в уравнението

$$\eta'' + \eta' - 2\eta = e^x(\cos x - 7\sin x)$$

и получаваме

$$\begin{aligned} e^x(-2a\sin x + 2b\cos x) + e^x(a\cos x + b\sin x - a\sin x + b\cos x) \\ -2e^x(a\cos x + b\sin x) = e^x(\cos x - 7\sin x). \end{aligned}$$

Следователно

$$(-3a - b + 7)\sin x + (-a + 3b - 1)\cos x = 0$$

е изпълнено за всяко x. Това е възможно тогава и само тогава, когато коефициентите пред функциите $\sin x$ и $\cos x$ са равни на нула, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} -3a - b + 7 = 0 \\ -a + 3b - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Решаваме тази система и намираме $a = 2$, $b = 1$. Тогава

$$\eta(x) = e^{x}(2\cos x + \sin x),$$

$$y_{\text{нехом}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + e^{x}(2\cos x + \sin x).$$

4) Характеристичното уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

има за корени $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$. От

$$e^{(2+2i)x} = e^{2x}(\cos 2x + i\sin 2x) = e^{2x}\cos 2x + i\,e^{2x}\sin 2x$$

следва, че

$$y_{\text{хом}} = C_1 e^{2x} \cos 2x + C_2 e^{2x} \sin 2x.$$

Дясната част на даденото нехомогенно уравнение не е нито от вида в (11), нито от вида в (13), но представлява сума на две функции, от които първата е от вида в (11), а втората е от вида в (13). В този случай ще използваме следната

Лема. Ако η_1 е частно решение на уравнението $L[y] = f_1$, а η_2 е частно решение на уравнението $L[y] = f_2$, то $\eta = \eta_1 + \eta_2$ е частно решение на уравнението $L[y] = f_1 + f_2$.

Това означава, че трябва да разгледаме две уравнения:

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x},$$

$$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x.$$

За първото търсим частно решение $\eta_1 = ae^{2x}$, а за второто – частно решение $\eta_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$. Сумата $\eta_1 + \eta_2$ е частното решение на даденото нехомогенно уравнение. Така намираме

$$y_{\text{нехом}} = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x}\sin 2x + \eta_1 + \eta_2.$$