

Числено интегриране.

Квадратурни формули на

Нютон-Коутс

Задача: (**a** и **b** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния номер)

Дадена е функцията $f(x) = \frac{b+2-x}{2x^2+a+1}$

1. Табулирайте функцията $f(x)$ в интервала $[a, a+b+1]$, като разделите интервала на $b+5$ равни части.

2. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **левите правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

3. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **десните правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

4. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **средните правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

5. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **трапеците**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

6. Може ли по построената в 1 таблица да се използва квадратурната формула на **Симпсън** за изчисляване на интеграла $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$? Обосновайте отговора си. Ако може, го изчислете и пресметнете каква е грешката на полученото приближение?

7. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **левите правоъгълници** с точност 0.00001.

8. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **десните правоъгълници** с точност 0.00001.

9. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **средните правоъгълници** с точност 0.00001.

10. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **трапеците** с точност 0.00001.

11. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **Симпсън** с точност 0.00001.

Съставяне на мрежата

```
In[*]:= f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2x^2 + 2}$ 
a = 1.; b = 11.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
xt = Table[a + i * h, {i, 0, n}]

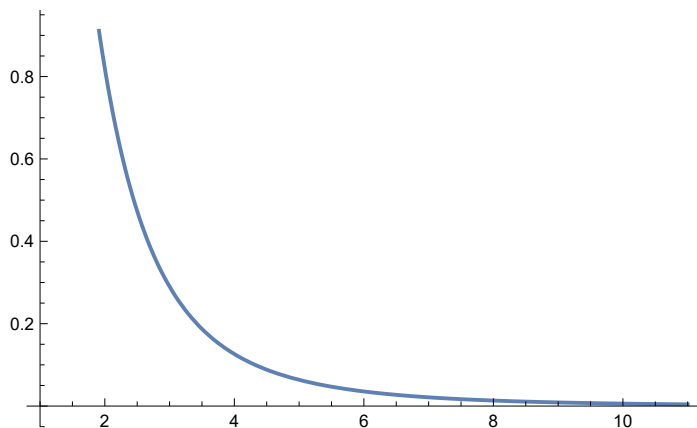
Мрежата е с брой подинтервали n = 14 и стъпка h = 0.714286

Out[*]=
{1., 1.71429, 2.42857, 3.14286, 3.85714, 4.57143, 5.28571,
 6., 6.71429, 7.42857, 8.14286, 8.85714, 9.57143, 10.2857, 11.}

In[*]:= f[xt]
Out[*]=
{2.5, 1.17876, 0.621302, 0.361163, 0.224936, 0.146785, 0.0987306, 0.0675676,
 0.0465013, 0.0317835, 0.021225, 0.0134857, 0.00771265, 0.00334416, 7.28015 × 10-18}
```

Леви правоъгълници

```
In[*]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
Out[*]=
```



```

In[*]:= a = 1.; b = 11.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2 x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I1 = h *  $\sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
M1 = Abs[f'[a]];
R1 =  $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M1$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
      Abs[I1 - Itochno]]

```

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 3.80235

Точната стойност е 2.79334

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 9.82143

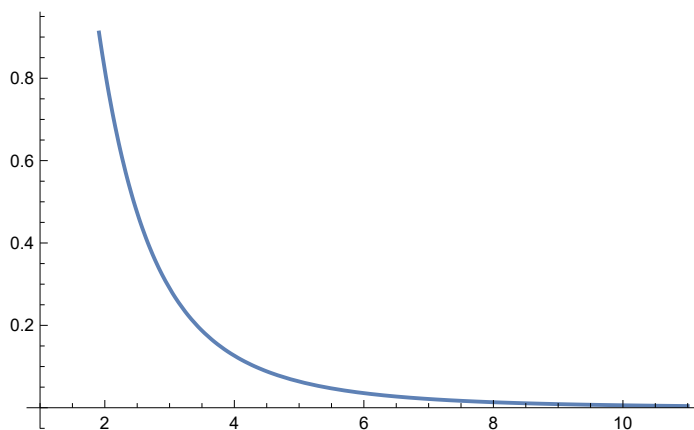
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 1.00901

Десни правоъгълници

```

In[*]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
Out[*]=

```



```

In[*]:= a = 1.; b = 11.;
        h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
        n = 14;
        f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2 x^2 + 2}$ 
        Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
        I2 = h *  $\sum_{i=0}^n f[a + i * h]$ ;
        M2 = Abs[f'[a]];
        R2 =  $\frac{(b - a)^2}{2 n}$  * M2;
        Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
        Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I2]
        Print["Точната стойност                               е ", Itochno]
        Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R2]
        Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
              Abs[I2 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 3.80235

Точната стойност                               е 2.79334

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 9.82143

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 1.00901

```

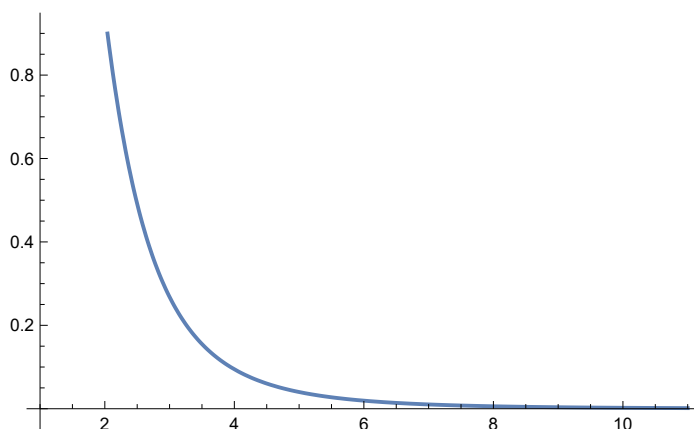
Средни правоъгълници

```

In[*]:= Plot[Abs[f' '[x]], {x, a, b}]

```

Out[*]=



```

In[*]:= a = 1.; b = 11.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I3 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + i * h + \frac{h}{2}\right]$ ;
M3 = Abs[f' '[a]];
R3 =  $\frac{(b - a)^3}{24 n^2} * M3$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
      Abs[I3 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 2.73552

Точната стойност е 2.79334

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.637755

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.0578239

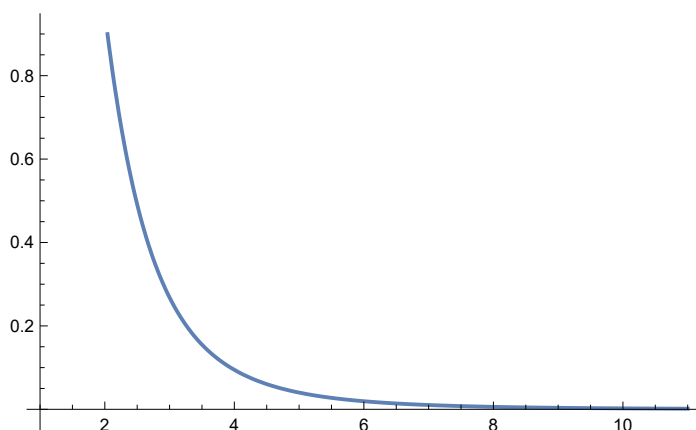
```

Трапеци

```

In[*]:= Plot[Abs[f' '[x]], {x, a, b}]
Out[*]=

```



```

In[ ]:= a = 1.; b = 11.;
      h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
      n = 14;
      f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2 x^2 + 2}$ 
      Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
      IT =  $\frac{h}{2} * \left( f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[a + i * h] + f[b] \right)$ ;
      M2 = Abs[f''[a]];
      RT =  $\frac{(b - a)^3}{12 n^2} * M2$ ;
      Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
      Print["Приближената стойност по формулата на трапците е ", IT]
      Print["Точната стойност е ", Itochno]
      Print["Теоретичната грешка по формулата на трапците е ", RT]
      Print["Истинската грешка по формулата на трапците е ", Abs[IT - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14
Приближената стойност по формулата на трапците е 2.90949
Точната стойност е 2.79334
Теоретичната грешка по формулата на трапците е 1.27551
Истинската грешка по формулата на трапците е 0.116153

```

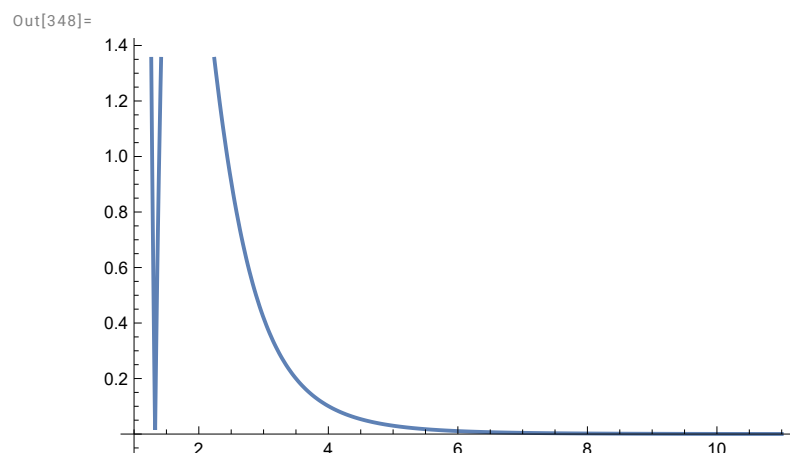
СИМПСЪН

Може да използваме формулата на Симпсън, тъй като броят на подинтервалите е **четно** число - в случая 14.

```

In[348]:= Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]

```



```

In[1]:= a = 1.; b = 11.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2 x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
m = n / 2;
IS =  $\frac{h}{3} * \left( f[a] + 4 \sum_{i=1}^m f[a + (2 i - 1) * h] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2 i) * h] + f[b] \right)$ ;
M4 = Abs[f''''[a]];
RS =  $\frac{(b - a)^5}{180 n^4} * M4$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка по формулата на Симпсън е ", Abs[IS - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14

Приближената стойност по формулата на Симпсън е 2.79818
Точната стойност е 2.79334
Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е 0.216924
Истинската грешка по формулата на Симпсън е 0.00483789

```


Пресмятане с предварително зададена точност

Леви правоъгълници

```

In[345]:= eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M1 \leq \text{eps}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```

Out[347]= n < 0 || n ≥ 1.375 × 107

```

```

In[54]:= a = 1.; b = 11.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n =  $1.375 \times 10^7$ ;
f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2 x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I1 =  $h \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
M1 = Abs[f'[a]];
R1 =  $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M1$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I1 - Itochno]]
Мрежата е със стъпка  $7.27273 \times 10^{-7}$  и брой подинтервали  $1.375 \times 10^7$ 
Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 2.79334
Точната стойност е 2.79334
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.00001
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е  $9.11591 \times 10^{-7}$ 


```

Десни правоъгълници

```

In[329]:= eps =  $10^{-5}$ ;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M2 \leq \text{eps}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```

Out[331]= n < 0 || n ≥  $1.5 \times 10^7$ 

```


In[332]:=

```

a = 1.; b = 11.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n =  $1.5 \times 10^7$ ;
f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I2 = h *  $\sum_{i=0}^n f[a + i * h]$ ;
M2 = Abs[f'[a]];
R2 =  $\frac{(b - a)^2}{2n} * M2$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n] // N
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I2]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R2]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
  Abs[I2 - Itochno]]
Мрежата е със стъпка  $6.66667 \times 10^{-7}$  и брой подинтервали  $1.5 \times 10^7$ 
Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 2.79334
Точната стойност е 2.79334
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е  $9.16667 \times 10^{-6}$ 
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е  $8.35833 \times 10^{-7}$ 

```


Средни правоъгълници

In[323]:=

```

eps =  $10^{-5}$ ;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^3}{24n^2} * M3 \leq \text{eps}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[325]=

$n \leq -3535.53 \mid \mid n \geq 3535.53$

```

a = 1.; b = 11.;

n = 3535.53;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;

f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2 x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I3 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + i * h + \frac{h}{2}\right]$ ;
M3 = Abs[f''[a]];
R3 =  $\frac{(b - a)^3}{24 n^2} * M3$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I3 - Itochno]]

```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[239]=

```

n ≤ -3535.53 || n ≥ 3535.53

Мрежата е със стъпка 0.00282843 и брой подинтервали 3535.53
Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 2.79334
Точната стойност е 2.79334
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.00001
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 9.17408×10-7

```

Трапеци

In[307]:=

```

eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^3}{12 n^2} * M3 \leq \text{eps}, n]$ 

```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[309]=

```

n ≤ -5000. || n ≥ 5000.

```

In[310]:=

```

a = 1.; b = 11.;

n = 5000;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;

f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2 x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
IT =  $\frac{h}{2} * \left( f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[a + i * h] + f[b] \right)$ ;
M2 = Abs[f''[a]];
RT =  $\frac{(b - a)^3}{12 n^2} * M2$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на трапците е ", IT]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на трапците е ", RT]
Print["Истинската грешка по формулата на трапците е ", Abs[IT - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.002 и брой подинтервали 5000
Приближената стойност по формулата на трапците е 2.79334
Точната стойност е 2.79334
Теоретичната грешка по формулата на трапците е 0.00001
Истинската грешка по формулата на трапците е  $9.17801 \times 10^{-7}$ 

```


Симпсън

In[290]:=

```

eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b - a)^5}{180 n^4} * M4 \leq \text{eps}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[292]=

$n \leq -169.904 \mid \mid n \geq 169.904$

In[293]:=

```

a = 1.; b = 11.;
n = 169.904;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
f[x_] :=  $\frac{11 - x}{2 x^2 + 2}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
m = n / 2;
IS =  $\frac{h}{3} * \left( f[a] + 4 \sum_{i=1}^m f[a + (2 i - 1) * h] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2 i) * h] + f[b] \right)$ ;
M4 = Abs[f''''[a]];
RS =  $\frac{(b - a)^5}{180 n^4} * M4$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка по формулата на Симпсън е ", Abs[IS - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.0588568 и брой подинтервали 169.904

Приближената стойност по формулата на Симпсън е 2.79331
Точната стойност е 2.79334
Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е 0.0000100001
Истинската грешка по формулата на Симпсън е 0.0000352253

```