Линейни уравнения от първи ред. Уравнения на Бернули

Информатика, 2021/2022

Линейни уравнения от първи ред

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{ctg} x$$
$$y' = (2\sin x)\, y + x^3$$
$$y' = 2x^2 y + \ln x$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x)\, y + b(x), \tag{1}$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати функции в даден интервал Δ, се наричат линейни уравнения от първи ред.

- Първо разглеждаме случая $b(x) \equiv 0$ за всяко $x \in \Delta$. Тогава уравнението (1) става с разделящи се променливи

$$y' = a(x)\, y. \tag{2}$$

Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a(x)\, y, \\ \frac{dy}{y} &= a(x)\, dx, \quad y \neq 0, \\ \ln|y| &= \int a(x)\, dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \\ y &= C\, e^{\int a(x)\, dx}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Очевидно $y = 0$ също е решение на (2), което може да се получи от последната формула за y, ако разрешим на C да приема и стойност 0. Тогава общото решение на (2) е

$$y = C\, e^{\int a(x)\, dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Сега ще потърсим и решението на уравнението (1) във вида

$y' = a(x)y + b(x)$

$$y = C(x)\, e^{\int a(x)\, dx}.$$

Функцията $C(x)$ определяме така, че за всяко $x \in \Delta$ да е изпълнено тъждеството

$$\left(C(x)\, e^{\int a(x)\, dx}\right)' \equiv a(x)\left(C(x)\, e^{\int a(x)\, dx}\right) + b(x)\,,$$

т.е.

$\left(e^{\int a(x)\,dx}\right)' = e^{\int a(x)\,dx} \cdot \left(\int a(x)\,dx\right)'$

$$C'(x)\, e^{\int a(x)\, dx} + C(x)\, e^{\int a(x)\, dx}\, a(x) \equiv a(x)\, C(x)\, e^{\int a(x)\, dx} + b(x)\,,$$

откъдето

$$C'(x) = b(x)\, e^{-\int a(x)\, dx}\,.$$

Сега интегрираме двете страни и получаваме

$$C(x) = C + \int b(x)\, e^{-\int a(x)\, dx}\, dx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Следователно решението на линейното уравнение (1) е

$y' = a(x)y + b(x)$

$$y = e^{\int a(x)\,dx}\left(C + \int b(x)\,e^{-\int a(x)\,dx}\,dx\right), \quad C \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$

Задача 1

Да се решат уравненията:

1) $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$;

2) $y = x(y' - x\cos x)$;

3) $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

Решение. 1) Изразяваме y' и намираме

$$y' = -\frac{x+1}{x}y + 3xe^{-x},$$

(136) $xy' - 2y = 2x^4$

$y' = ?$

$y' = a(x)y + b(x)$

$$xy' = 2y + 2x^4$$

$$y' = \frac{2y + 2x^4}{x} = 2\frac{y}{x} + 2x^3 = \frac{2}{x} \cdot y + 2x^3$$

! важно: Не е хомогенно, но ще проверим дали задачата може да се реши с полага-нето

$$\frac{y}{x} = z \quad , \quad z = z(x)$$

$$y = zx \implies y' = z'x + z$$

$$\implies z'x + z = 2z + 2x^3$$

$$z'x = z + 2x^3$$

$$z' = \frac{z + 2x^3}{x} = \frac{z}{x} + 2x^2$$

Пол. $\frac{z}{x} = u \quad , \quad u = u(x)$

$$z = ux \implies z' = u'x + u$$

$$\implies u'x + \cancel{u} = \cancel{u} + 2x^2$$

$$u'x = 2x^2 \quad \Big| : x \quad , \qquad x \neq 0$$

$$u' = 2x$$

$$u = \int 2x\,dx = x^2 + C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z}{x} = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad z = x^3 + Cx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{x} = x^3 + Cx \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x^4 + Cx^2}$$

II начин.

$$y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} y + \underbrace{2x^3}_{b(x)}$$

$$y = e^{\int a(x)\,dx}\left(C + \int b(x)\, e^{-\int a(x)\,dx}\,dx \right)$$

$$y = e^{\int \frac{2}{x}\,dx}\left(C + \int 2x^3 e^{-\int \frac{2}{x}\,dx}\,dx \right)$$

$$= e^{2\ln|x|}\left(C + \int 2x^3 e^{-2\ln|x|}\,dx \right)$$

$$e^{k\ln x} = e^{\ln x^k} = x^k$$

$$= |x|^2 \left(C + \int 2x^3 |x|^{-2}\,dx \right)$$

$$= x^2 \left(C + \int 2x^3 x^{-2}\, dx \right) =$$

$$= x^2 \left(C + \int 2x\, dx \right) =$$

$$= x^2 \left(C + x^2 \right) = x^4 + Cx^2$$

(137) $(2x+1)\, y' = 4x + 2y$

$$y' = \frac{4x+2y}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1} + \frac{2y}{2x+1}$$

$$y' = \underbrace{\frac{2}{2x+1}}_{a(x) =} y + \underbrace{\frac{4x}{2x+1}}_{b(x) =}$$

$$y = e^{\int \frac{2}{2x+1} dx} \left(C + \int \frac{4x}{2x+1} e^{-\int \frac{2}{2x+1} dx} dx \right)$$

$$\left(\int \frac{2}{2x+1} dx = \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = \ln|2x+1| \right)$$

$$= e^{\ln|2x+1|} \left(C + \int \frac{4x}{2x+1} e^{-\ln|2x+1|} dx \right)$$

$$= |2x+1| \left(C + \int \frac{4x}{2x+1} \cdot |2x+1|^{-1} dx \right) =$$

$$= (2x+1)\left(C + \underbrace{\int \frac{4x}{2x+1} \cdot \frac{1}{2x+1}\, dx}_{I} \right)$$

$$I = \int \frac{4x}{(2x+1)^2}\, dx$$

I w. $$\frac{4x}{(2x+1)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2} \quad \ldots$$

II w. $$I = 2\int \frac{2x+1-1}{(2x+1)^2}\, dx =$$

$$= 2 \int \left(\frac{\cancel{2x+1}}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^2} \right) dx =$$

$$= 2 \left(\int \frac{dx}{2x+1} - \int \frac{dx}{(2x+1)^2} \right) =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2} \right)$$

$$= \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (2x+1)\left(C + \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1}\right)}$$

139 $(xy + e^x)\,dx - x\,dy = 0$

$(xy + e^x)\,dx = x\,dy$

$x\,dy = (xy + e^x)\,dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^x}{x} = \underbrace{1}_{a(x)}\,y + \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{b(x)}$$

$$y = e^{\int 1\,dx}\left(C + \int \frac{e^x}{x}\, e^{-\int 1\,dx}\,dx\right)$$

$$= e^x\left(C + \int \frac{\cancel{e^x}}{x}\cdot \cancel{e^{-x}}\,dx\right)$$

$$= e^x\left(C + \int \frac{1}{x}\,dx\right) =$$

$$= e^x\left(C + \ln|x|\right)$$

$$\boxed{y = e^x\left(C + \ln|x|\right)}$$

$$\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

146 $(2e^y - x)\,y' = 1$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{2e^y - x}$$

$$x' = a(y)x + b(y)$$

! $$\frac{dx}{dy} = 2e^{y} - x = \underbrace{(-1)}_{a(y)} x + \underbrace{2e^{y}}_{b(y)}$$

$$x = e^{\int a(y)\,dy}\left(C + \int b(y)e^{-\int a(y)dy}\,dy\right)$$

$$x = e^{\int(-1)\,dy}\left(C + \int 2e^{y} e^{+\int 1\,dy}\,dy\right)$$

$$= e^{-y}\left(C + \int 2e^{y}\cdot e^{y}\,dy\right)$$

$$= e^{-y}\left(C + 2\int e^{2y}\,dy\right) =$$

$$= e^{-y}\left(C + e^{2y}\right) = Ce^{-y} + e^{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = Ce^{-y} + e^{y}}$$

което е уравнение от вида (1) с $a(x) = -\frac{x+1}{x}$ и $b(x) = 3xe^{-x}$.
Тогава по формулата (3) получаваме

$$\begin{aligned}
y &= e^{\int \left(-\frac{x+1}{x}\right) dx} \left(C + \int 3xe^{-x} \, e^{\int \frac{x+1}{x} \, dx} \, dx \right) \\
&= e^{-x-\ln|x|} \left(C + \int 3xe^{-x} \, e^{x+\ln|x|} \, dx \right) \\
&= \frac{e^{-x}}{|x|} \left(C + \int 3x|x| \, dx \right) = \frac{e^{-x}}{x} \left(C + \int 3x^2 \, dx \right) \\
&= \frac{e^{-x}}{x} \left(C + x^3 \right).
\end{aligned}$$

2) Отг. $y = x(C + \sin x)$.

3) Уравнението

$$y' = \frac{1}{\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y},$$

записано по този начин, очевидно не е линейно уравнение, но то е еквивалентно на

$$\frac{dx}{dy} = (\operatorname{ctg} y)x + \sin^2 y,$$

което е линейно по отношение на x. Тогава използваме формулата (3), като разменяме местата на x и y. Получаваме

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \operatorname{ctg} y \, dy} \left(C + \int (\sin^2 y) \, e^{-\int \operatorname{ctg} y \, dy} \, dy \right) \\ &= e^{\ln|\sin y|} \left(C + \int (\sin^2 y) \, e^{-\ln|\sin y|} \, dy \right) \\ &= \sin y \left(C + \int \sin y \, dy \right) = \sin y \, (C - \cos y). \end{aligned}$$

Уравнения на Бернули

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \frac{y}{x} + (\operatorname{ctg} x)\, y^2$$ $m=2$

$$y' = (2\sin x)\, y + \frac{x^3}{y^4}$$ $m=-4$

$$y' = 2x^2 y + (\ln x)\sqrt{y}$$ $m=\frac{1}{2}$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x)\, y + b(x)\, y^m, \quad m \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати функции в даден интервал Δ, се наричат уравнения на Бернули.

- при $m = 0 \Rightarrow$ линейно уравнение;
- при $m = 1 \Rightarrow$ уравнение с разделящи се променливи;

$y' = a(x)y + b(x)y = y\,(a(x) + b(x))$ УРП

Пусть $m \neq 0; 1$

$$y' = a(x)\, y + b(x)\, y^m \quad \Big| : y^m \neq 0$$

$$\frac{y'}{y^m} = a(x)\, \frac{y}{y^m} + b(x)$$

$$\frac{y'}{y^m} = a(x)\, \underbrace{y^{1-m}}_{\substack{\| \text{ нов.} \\ z}} + b(x) \qquad (*)$$

Пол. $y^{1-m} = z$, $\quad z = z(x)$

$$z' = \left(y^{1-m}\right)' = (1-m)\, y^{\cancel{1}-m-\cancel{1}}\, y'$$

$$\Rightarrow \quad z' = (1-m)\, y^{-m}\, y' = (1-m)\, \frac{y'}{y^m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}$$

Зам в $(*)$ $\Rightarrow$ $$\frac{z'}{1-m} = a(x)\, z + b(x)$$

$$z' = \underbrace{(1-m)\, a(x)}_{a_1(x)}\, z + \underbrace{(1-m)\, b(x)}_{b_1(x)}$$

$$\Rightarrow \quad z' = a_1(x)\, z + b_1(x)$$

$$z = e^{\int a_1(x)\,dx}\left(C + \int b_1(x)\, e^{-\int a_1(x)\,dx}\,dx\right)$$

$$\parallel$$

$$y^{1-m}$$

- при $m \neq 0; 1$ първо разделяме двете страни на уравнението (4) с $y^m \neq 0$,

$$\frac{y'}{y^m} = a(x)y^{1-m} + b(x) \tag{5}$$

и полагаме

$$y^{1-m} = z, \quad z = z(x).$$

Диференцираме това равенство спрямо x, като не забравяме, че $y = y(x)$,

$$z' = (1-m)y^{1-m-1}y' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}$$

и заместваме в (5). Получаваме

$$\frac{z'}{1-m} = a(x)z + b(x),$$

откъдето

$$z' = (1-m)a(x)z + (1-m)b(x).$$

(151) $y' + 2y = y^2 e^x$

$m = 2$

$$y' = y^2 e^x - 2y = (-2)\, y + e^x \cdot y^{2}$$

$y = 0$ е решение $\quad (m > 0)$

$$y' = -2y + e^x y^2 \quad \Big| : y^2 \neq 0$$

$$\frac{y'}{y^2} = -2\,\frac{y}{y^2} + e^x$$

$$\frac{y'}{y^2} = -2\,\underset{\overset{\parallel}{z}}{\frac{1}{y}} + e^x \qquad (*)$$

Пол. $\frac{1}{y} = z$, $z = z(x)$

$$z' = \left(y^{-1}\right)' = -1 \cdot y^{-1-1}\, y' = -\frac{y'}{y^2}$$

$$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha\, u^{\alpha - 1}\, u'$$

Заместваме в $(*)$

$$\Rightarrow \quad -z' = -2 . z + e^x$$

$$z' = \underset{\overset{\parallel}{a(x)}}{2z}\ \underset{\overset{\parallel}{b(x)}}{-\, e^x}$$

$$z = e^{\int 2\,dx}\left(C + \int (-e^{x})\, e^{-\int 2\,dx}\,dx\right) =$$

$$= e^{2x}\left(C - \int e^{x}\cdot e^{-2x}\,dx\right) =$$

$$= e^{2x}\left(C - \int e^{-x}\,dx\right) =$$

$$= e^{2x}\left(C + e^{-x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z = e^{2x}\left(C + e^{-x}\right) \Rightarrow \frac{1}{y} = e^{2x}\left(C + e^{-x}\right)$$

Отг: $\frac{1}{y} = e^{2x}\left(C + e^{-x}\right)$;

$y = 0$

160 $\left(2x^2 y \ln y - x\right) y' = y$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{y}{2x^2 y \ln y - x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x^2 y \ln y - x}{y} = 2x^2 \ln y - \frac{1}{y}x$$

$m = 2$

$$x' = \left(-\frac{1}{y}\right)\cdot x + \left(2\ln y\right)\cdot x^{2} \qquad \Big| : x^2$$

$x = 0$ е реш.

$$\frac{x'}{x^2} = -\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} + 2\ln y$$

$$\frac{1}{x} = z \qquad z = z(y)$$

$$z = \frac{1}{x} \Rightarrow z' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2}\cdot x'$$

$$\Rightarrow \quad -z' = -\frac{1}{y}\cdot z + 2\ln y$$

$$z' = \underbrace{\frac{1}{y}}_{a(y)} z \underbrace{- 2\ln y}_{b(y)}$$

$$z = e^{\int \frac{1}{y}dy}\left(c - \int 2\ln y\, e^{-\int \frac{1}{y}dy} dy\right)$$

Последното уравнение е линейно по отношение на z и решенията му можем да опишем с намерената формула. Накрая остана да отбележим, че $y = 0$ също е решение на (4) при $m > 0$.

Задача 2

Да се решат уравненията:

1) $xy' + y = y^2 \ln x$;

2) $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}$;

3) $xy' - 2x^3\sqrt{y} = 4y$;

4) $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$.

Решение. 1) Имаме

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}y^2.$$

Това е уравнение от вида (4) с $m = 2$, $a(x) = -\frac{1}{x}$ и $b(x) = \frac{\ln x}{x}$. Разделяме двете страни на уравнението с $y^2 \neq 0$ и намираме

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{x}.\frac{1}{y} + \frac{\ln x}{x}.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция $z = z(x)$,

$$z = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{1}{y^2}y'$$

и заместваме в последното уравнение. Получаваме

$$-z' = -\frac{1}{x}z + \frac{\ln x}{x},$$

откъдето

$$z' = \frac{1}{x}z - \frac{\ln x}{x}.$$

По формулата (3) намираме

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{dx}{x}}\, dx \right) \\ &= x \left(C - \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx \right) \\ &= x \left(C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right), \end{aligned}$$

след интегриране по части. Като заместим z с $\frac{1}{y}$ получаваме

$$\frac{1}{y} = Cx + \ln x + 1.$$

Очевидно $y = 0$ също е решение на даденото уравнение.

2) Отг. $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$.

3) Отг. $y = x^4(C + x)^2;\ \ y = 0$.

4) Упътване. Имаме

$$y' = -\frac{2y}{x^3 \sin y - x},$$

откъдето

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y}x - \frac{\sin y}{2y}x^3.$$

Това е уравнение на Бернули спрямо x. Разделяме двете страни с $x^3 \neq 0$ и получаваме

$$\frac{x'}{x^3} = \frac{1}{2y}.\frac{1}{x^2} - \frac{\sin y}{2y}.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция $z = z(y)$,

$$z = \frac{1}{x^2}, \quad z' = -\frac{2}{x^3}\,x'.$$

Заместваме и стигаме до линейно уравнение спрямо x, което отново решаваме с помощта на формула (3).
Отг. $x^2(C - \cos y) = y; \ \ y = 0$.

Пример от икономиката

Не малко модели в икономиката се описват с диференциални уравнения.

Пример. Един от първите опростени модели на цикъл на растеж, разглеждан от Haavelno (1956) изглежда по следния начин. Нека производствената функция е

$$Y = KN^{\alpha},$$

където Y е продукцията, $K > 0$ е капиталното вложение (фиксирано), а N е предлаганата работна сила.
Нарастването на заетостта се моделира като

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{Y}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Комбинирайки двете, получаваме нелинейно уравнение от първи ред

$$\dot{N} = \alpha N - \beta \frac{N^{2-\alpha}}{K},$$

което е уравнение на Бернули и се решава точно.