Явен метод на Ойлер

Ще разглеждаме началната задача:

$$(1)\qquad \begin{aligned} & y'(x) = f(x, y), \qquad x \in [a, b] \\ & y(a) = y_0 \end{aligned} .$$

Нека интервалът $[a,b]$ е разделен на n еднакви по дължина подинтервала с помощта на равномерна стъпка $h = \dfrac{b-a}{n}$, така че да имаме точките:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_i = a + i\,h, \quad i = 0, 1, \ldots, n .$$

По дадено начално значение y_0 се търсят приближено стойностите на функцията $y(x)$ в избраните точки x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, т.е. решението се търси във вид на таблица от стойности $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Явният метод на Ойлер е от групата на най-простите едностъпкови методи, при които по известно y_0 се намира приближено стойността на решението y_1 в следващата точка x_1; от y_1 по същата процедура се намира y_2 и т.н. до y_n.

За решаване на задача (1) приближените значения на търсената функция се изчисляват по рекурентната формула:

$$(2)\qquad y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 .$$

При предположение, че функцията $f(x,y)$ е непрекъсната и има ограничени първи частни производни в $[a,b]$, такива че:

$$(3)\qquad |f| \le M_1, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le M_2, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le M_3,$$

може да се покаже, че методът на Ойлер има сравнително голяма локална грешка:

$$(4)\qquad r_i = |y(x_i) - y_i| \le C\,h^2 \quad \text{или} \quad r_i = O(h^2),$$

където $C = \dfrac{M_2 + M_1 M_3}{2}$ е константа, независеща от стъпката h. Кратко казано, локалната грешка от явния метод на Ойлер при не много силно растящи дясна част на уравнението и съответните й частни производни е пропорционална на h^2.

За глобалната теоретична грешка в интервала $[x_0, x_i]$ е валидна оценката:

$$(4)\qquad r(x_i) = |y(x_i) - y_i| \le \bar{C}\,h \quad \text{или} \quad r = O(h).$$

В случая на системи обикновени уравнения, формула (2) се записва за всяка координата на векторите. Например за началната задача за система от две уравнения

$$\begin{cases} y' = f(x,y,z) \\ z' = g(x,y,z) \end{cases}, \qquad a \le x \le b$$

(5) $$y(a) = y_0$$
$$z(a) = z_0$$

съответните формули за последователно изчисляване на $y_{i+1},\ z_{i+1}$ са:

(6) $$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + hg(x_i, y_i, z_i) \end{cases}, \qquad i = 0, 1, 2, \ \dots\ , n-1$$

Задача 1. По явния метод на Ойлер да се намери приближеното решение $y(x)$ на следните начални задачи при различни стойности на стъпката h. Получените резултати да се сравнят с точните решения.

а) $y' = 0.2y$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 0.5]$, $h = 0.1$; $y^*(x) = \exp(0.2x)$

б) $y' = 10y$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 0.5]$, $h = 0.1$, $h = 0.05$; $y^*(x) = \exp(10x)$.

Решение: а) Тъй като $h = 0.1,\ a = 0,\ b = 0.5$, то $n = 5$ и възлите на интегриране са съответно $x_0 = 0,\ x_1 = 0.1,\ x_2 = 0.2,\ x_3 = 0.3,\ x_4 = 0.4,\ x_5 = 0.5$. Знаем $y_0 = 1$. По формула (2) изчисляваме $y_1 = y_0 + 0.2\,y_0 = 1 + 0.2 = 1.02$, след това аналогично y_2 и т.н. Получените резултати, както и точните стойности на решението са подредени в Табл.1. Независимо от точността на междинните изчисления, съгласно (3) методът осигурява малка точност. За разглежданата задача при $h = 0.1$ теоретичната оценка на грешката е $r_i \approx 0.01$. Следователно при несилното изменение на решението за краен резултат взимаме стойностите на y с два знака след десетичната точка, напр. $y(0.5) = 1.1$. Сравнете с точното решение.

Табл. 1. Решение на задачата $y' = 0.2y,\ y(0) = 1$ по метода на Ойлер със стъпка $h = 0.1$.

i	x_i	$f(x_i, y_i)$	y_i	y_i^* точно реш.
0	0.0	0.2	1	1.000000
1	0.1	0.204	1.02	1.020201
2	0.2	0.20808	1.0404	1.040811
3	0.3	0.212242	1.06121	1.061837
4	0.4	0.216486	1.08243	1.083287
5	0.5	-	1.10408	1.105171

б) Въпреки, че уравнението е подобно на случая а), виждаме, че решението се отдалечава от точното с нарастването на аргумента (Табл.2). Грешката на метода расте много бързо, тъй като производните (4) са големи. Такъв тип задача се отнася към т.н. неустойчиви (твърди) диференциални задачи. Удовлетворителни резултати могат да се получат например, при достатъчно малка стъпка. На Табл.3 са дадени стойностите на решението, получени с помощта на компютър при междинна стъпка $h = 0.001$ и $h = 0.000001$.

Табл. 2. Решения на задачата 1б), изчислени по метода на Ойлер със стъпки $h = 0.1$ и $h = 0.05$, отпечатани в необходимите точки.

x_i	$f(x_i, y_i)$ при $h = 0.1$	y_i при $h = 0.1$	$f(x_i, y_i)$ при $h = 0.05$	y_i при $h = 0.05$	y_i^* точно реш.
0.0	10	1.000	10.0000	1.00000	1.000000
0.1	20	2.000	22.5000	2.25000	2.718282
0.2	40	4.000	50.6250	5.06250	7.389056
0.3	80	8.000	113.9060	11.39060	20.085540
0.4	1600	16.000	256.2890	25.62890	54.598150
0.5	-	32.000	-	57.66500	148.413200

Табл.3. Решения на задачата 1б), изчислени по метода на Ойлер със стъпка $h = 0.001$ и $h = 0.000001$, отпечатани в необходимите точки.

x_i	y_i $h = 0.001$	y_i $h = 0.000001$	y_i^* - точно реш.
0.0	1.00000	1.00000	1.000000
0.1	2.70481	2.71823	2.718282
0.2	7.31602	7.38880	7.389056
0.3	19.78851	20.08440	20.085540
0.4	53.52412	54.59430	54.598150
0.5	144.77304	148.40000	148.413200

Задача 2. По метода на Ойлер да се намери приближеното решение $y(x)$ на следната начална задача при дадените стойности на стъпката h. Сравнете резултатите с точното решение $y^*(x)$.

$y' = y - 2\sin(x)$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 0.5]$, $h = 0.1$ и $h = 0.05$; $y^*(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

Задача 3. По метода на Ойлер да се решат следните задачи и получените резултати да се сравнят със съответните точни решения $y^*(x)$:

а) $y' = \dfrac{y}{x} + 1$, $y(1) = 0$, $x \in [1, 2]$, $n = 10$; $y^*(x) = x\ln(x)$

б) $y' = \dfrac{y - \alpha}{x} + 1$, $y(1) = \alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$; $x \in [1, 2]$, $n = 5$; $y^*(x) = x\ln(x) + \alpha$.

Задача 4. По метода на Ойлер да се решат следните задачи:

а) $y' = \dfrac{x + y}{x + y^2}$, $y(1) = 1$, $x \in [1, 2]$, $n = 5$

б) $y' = \alpha \dfrac{x-y}{x+y}$, $y(0) = \alpha > 0$, $x \in [0, 1]$, $n = 10$

в) $y' = x + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(0) = 0.1$, $x \in [0, 0.5]$, $n = 5$

г) $y' = x \ln(y)$, $y(1) = 2$, $x \in [1, 2]$, $n = 10$

д) $y' = \cos(x) - \alpha \sin(y + x)$, $y(2) = 1$, $\alpha = 1.1, 1.2, 1.3$, $x \in [2, 3]$, $n = 5$

Задача 5. Проверете устойчивостта на метода на Ойлер за решаване на дадените начални задачи. Определете при каква стойност на стъпката h се гарантира грешка на приближението $\varepsilon = 0.001$.

а) $y' = 3y - 1$, $y(1) = 0$, $x \in [1, 2]$

б) $y' = -0.5\, y + 2$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 2]$

в) $y' = -100\, y$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 10]$

Задача 6. Приложете метода на Ойлер за интегриране на задачите:

а) $y'' = 3y' + 5xy + \alpha$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, $x \in [0, 0.3]$, $h = 0.1$

б) $y'' = x y' + y^2$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $x \in [1, 1.3]$, $h = 0.1$

в) $\begin{cases} y' = x - yz \\ z' = 5x - z \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $0 \le x \le 0.4$, $n = 4$

г) $\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2} + z \\ z' = y - \dfrac{z}{2} \end{cases}$, $y(0) = 1$, $z(0) = 0$, $0 \le x \le 1$, $n = 5$.

Автор:
Снежана Гочева-Илиева
snow@uni-plovdiv.bg