Дискретна математика

доц. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

2

Математически основи

Съдържание:

- Теория на множествата
- Релации
- Функции

Теория на множествата

- Почти всичко в математиката и теоретичната информатика може да се формализира с понятията от теорията на множествата.

Множество М: Съвкупност от еднотипни обекти на нашите възприятия или на нашето мислене (Кантор). Обектите наричаме елементи на множеството

Означения:

- Елемент на М: $a \in M$
- Не принадлежи на М: $a \notin M$
- Елементи на М: $a,b \in M$
- Не принадлежат на М: $a,b \notin M$
- Празно и универсално множества: $\emptyset$, $\mathbb{U}$

Теория на множествата

Дефиниции:

- ***Еднакви множества:***

когато съдържат едни и същи елементи ($M_1 = M_2$)

- **Различни множества:**

Когато съществува поне един елемент, който принадлежи та едното, но не принадлежи на другото множество ($M_1 \neq M_2$)

- **Повторяемост**:

Един елемент не може да се повтаря в едно множество

- **Наредба:**

Елементите на едно множество не са подредени

Георг Кантор

Георг Фердинад Лудвиг Филип Кантор
(*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*)

- Роден: 3.03.1845 в Санкт Петербург, Русия
- Починал: 6.01.1918 в Хале, Германия
- Алма матер: Швейцарска висша техническа школа в Цюрих, Хумболдтовия университет в Берлин
- Работил: Университет Хале-Витенберг
- Немски математик, най-известен като създател на съвременната теория на множествата – фундаментална теория в математиката.

Представяне на множества

Съществуват два начина за дефиниране елементите на множествата:

- Чрез явно изброяване, ако са краен брой
- Чрез определена зависимост, на които тези елементи трябва да отговарят.

Например:

а)M={a,b,c,…,x,y,z};

б) M е множеството на всички положителни реални числа

Примери

? Множества

? Представяния

$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \}$

$\mathbb{N}_0 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$

$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

$M_1 = \{ 2, 4, 6, 8, 10, \dots \}$

$M_2 = \{ 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots \}$

$M_3 = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 1 \}$

$M_4 = \{ n^2 \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$

Отношения между множества

Подмножества:

$M_1 \subseteq M_2 \;:\Leftrightarrow\;$ от $a \in M_1$ следва $a \in M_2$

Празното множество е подмножество на всяко друго множество:
$\emptyset \subseteq M$

$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2$ и $M_2 \subseteq M_1$

Истински подмножества:

$M_1 \subset M_2 \;:\Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2$ и $M_1 \neq M_2$

<u>Пример:</u>

A={1,3,5};
B={1,2,3,4,5}.
Тогава $A \subseteq B$.

Обвивка на множество

- **Теорема 1.** За всяко произволно множество A е вярно: $\varnothing \subseteq A$.
- В много случаи се налага да разгледаме всички подмножества на дадено множество.
- Дефиниция: Множеството от всички подмножества на A се нарича ***обвивка*** на A. Означаваме я с P(A) и:

$$P(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$$

Пример: *$A=\{2,3\}$. Тогава: $P(A)=\{\varnothing,\{2\},\{3\},\{2,3\}\}$*

Мощност на множество

- Често се налага да определим колко е голямо едно множество, т.е. колко елемента има.
- Ако множеството A има краен брой елементи, то A е крайно и ***мощността*** му е броя на тези елементи, т.е. $|A|=n$.
- Всяко множество, което не е крайно се нарича ***безкрайно*** и е предмет на разглеждане в други математически дисциплини.

Структурирани множества

Структурираните множества са:
- наредените n-орки;
- матриците;
- низовете.

Наредени двойки и n-торки

- ***Дефиниция***: ***Наредената двойка*** е последователност от два обекта, разгледани в определен ред. Записваме (x,y). В някои случаи **x** и **y** се наричат координати.
- Наредените двойки (a,b) и (c,d) са еквивалентни $\Leftrightarrow$ a=c и b=d.
- ***Дефиниция:*** Декартово произведение на множествата A и B е множеството от наредени двойки с първи елемент от A и втори – от B. Бележим с AxB.
  $AxB=\{(a,b) \mid a\in A \wedge b\in B\}$
- Забележете, че множествата {a,b}={b,a},но наредените двойки $(a,b) \neq (b,a)$.

Наредени двойки и n-торки

- ***Дефиниция***: ***Наредена n-орка*** $(a_1,a_2,\dots a_n)$ е последователност от n- наредени обекта. Две n-орки са еквивалентни $(a_1,a_2,\dots a_n) = (b_1,b_2,\dots b_n) \Leftrightarrow a_i=b_i$ за $\forall i=1..n$
- Декартово произведение на множествата $A_1 x A_2 x \dots A_n = \{(a_1,a_2,\dots a_n) \mid a_i \in A_i$ за $\forall i=1..n\}$
- Наредената n-орка $(a_1,a_2,\dots a_n)$ се нарича още крайна последователност или ***нареден списък.***

Низове и последователности

- Всеки елемент в множеството се съдържа само веднъж в него, а елементите му са неподредени.
- Обекти, подобни на множествата, в които даден елемент може да се срещне няколко пъти ще наричаме ***списък.***
- В списъците реда на елементите не е фиксиран и затова ще ги наричаме ***неподредени***.
- Ако елементите на списъка са подредени, ще го наричаме ***подреден списък*** или ***последователност.***

Низове и последователности

- Ако броят на елементите в n-орката е безкраен, получаваме безкраен списък или безкрайна последователност.
- Формално една безкрайна последователност от едно множество A е подреден списък от елементи на A, индексирани посредством положителни цели числа.Бележим $\{a_1,a_2,\ldots a_i\ldots\}$, $i=1..\ \infty$, a_i се наричат ***терми***.
- Понякога е удобно поредицата да започва с 0, а не с 1.

Низове и последователности

- Често се налага да вземем определени терми от една последователност и да образуваме нова последователност, която наричаме ***подпоследователност*** на оригиналната.

- Особено важни в компютърните науки са ***крайните списъци.***

Матрици

- Един начин да генерализираме понятието списък е като увеличим неговата размерност.
- За да подредим елементите в двумерното поле ще използваме наредени двойки от естествени числа(индекси).
- Такова подреждане наричаме ***матрица.*** Т.е., ако $m,n \in N$, а S е множество, то A е $(m x n)$ матрица с елементи от S:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

съкратено $A=(a_{ij})$

Матрици

- Матрицата има m- реда и n- стълба индексирани чрез множеството:

  I={1,2,3…m}x{1,2,3…n}.

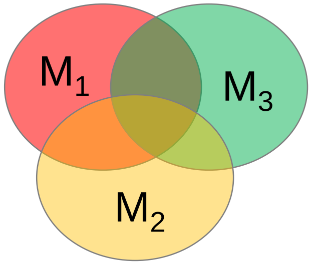
Т.е. можем да говорим за това, как елементите могат да бъдат индексирани чрез индексни множества, за да се получат списъци или матрици:

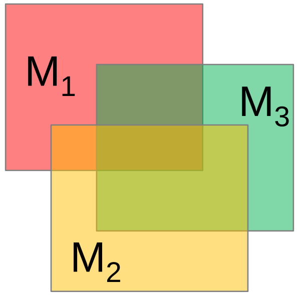
$$X = \{x_i \text{ , където } i \in I\}$$

Операции с множества

Върху множествата могат да бъдат дефинирани различни операции

Много релации и операции с множества могат да бъдат онагледени интуитивно посредством диаграмите на Вен





Джон Вен

Джон Вен (*John Venn*)

Роден: 04.08.1834 в Хъл, Йоркшър, Англия

Починал: 04.04.1923, Кембридж, Англия

- Британски логик и философ
- Известен е с представянето на диаграми на Вен
- Използват се в различни области, включително теория на множествата, теория на вероятности, логика, статистика и компютърните науки.

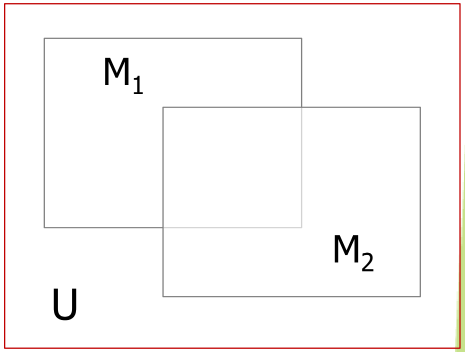
Операции с множества

Обединение:

$$M_1 \cup M_2 := \{\, a \mid a \in M_1 \text{ или } a \in M_2 \,\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup \ldots \cup M_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots$$

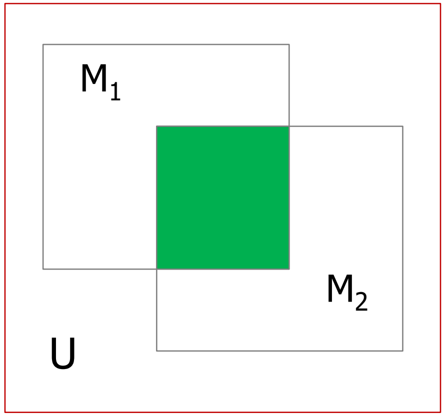


Сечение:

$$M_1 \cap M_2 := \{\, a \mid a \in M_1 \text{ и } a \in M_2 \,\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cap \ldots \cap M_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i := M_1 \cap M_2 \cap \ldots$$



Примери

- *<u>Пример: </u>Нека A е множеството на простите числа, а B – множеството на естествените числа, които при деление на 4 дават остатък 1. Тогава:*

  $A=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\ldots\}$

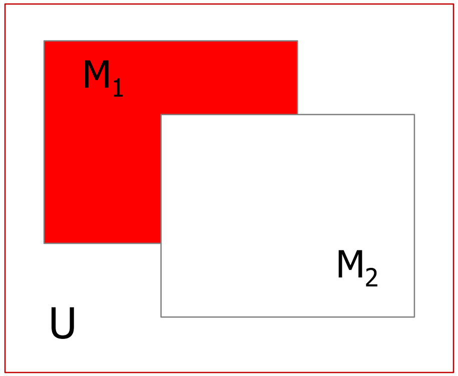
  $B=\{5,9,13,17,21,25,29\ldots\}$

  $A \cup B=\{2,3,5,7,9,11,13,17,19,21,23,25,29\ldots\}$

  $A \cap B=\{5,13,17,29\ldots\}$

Операции с множества

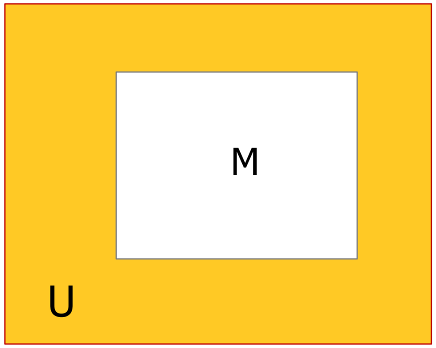
Разлика:



$$M_1 \setminus M_2 := \{\, a \mid a \in M_1 \text{ или } a \notin M_2 \,\}$$

Допълнение/Комплимент:

$$\overline{M} := \mathbb{U} \setminus M$$



Джордж Бул

Джордж Бул (*George Boole*)

Роден: 2 ноември 1815 г., Линкълн, Великобритания и Северна Ирландия

Починал: 8 декември 1864 г.

- Британски математик и философ
- Изобретател на Булевата алгебра, която е в основата на цялата съвременна компютърна аритметика
- Приема се като един от основателите на компютърната наука

Закони за множества

Комутативен: $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$

$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$

Дистрибутивен: $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

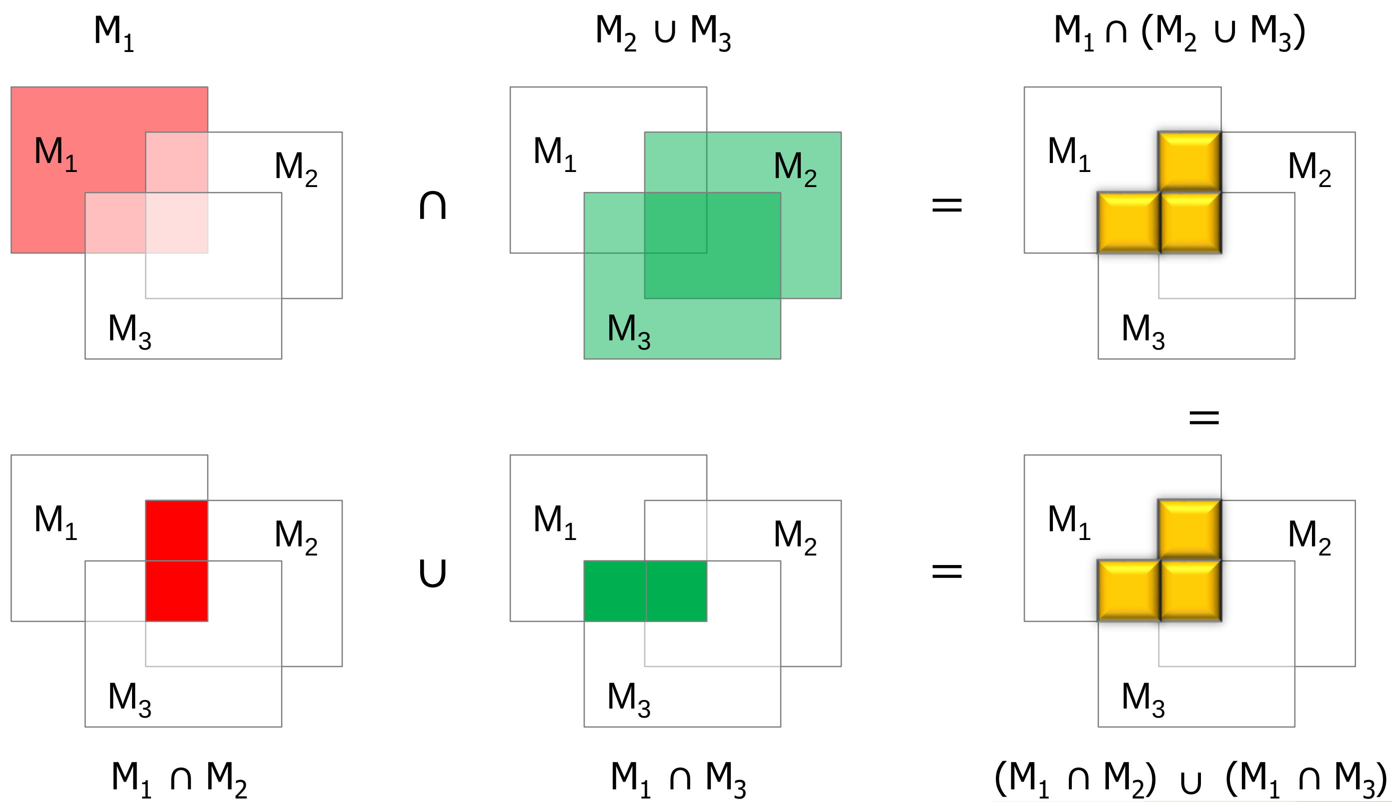
Неутрални елементи: $M \cup \emptyset = M$

$M \cap \mathbb{U} = M$

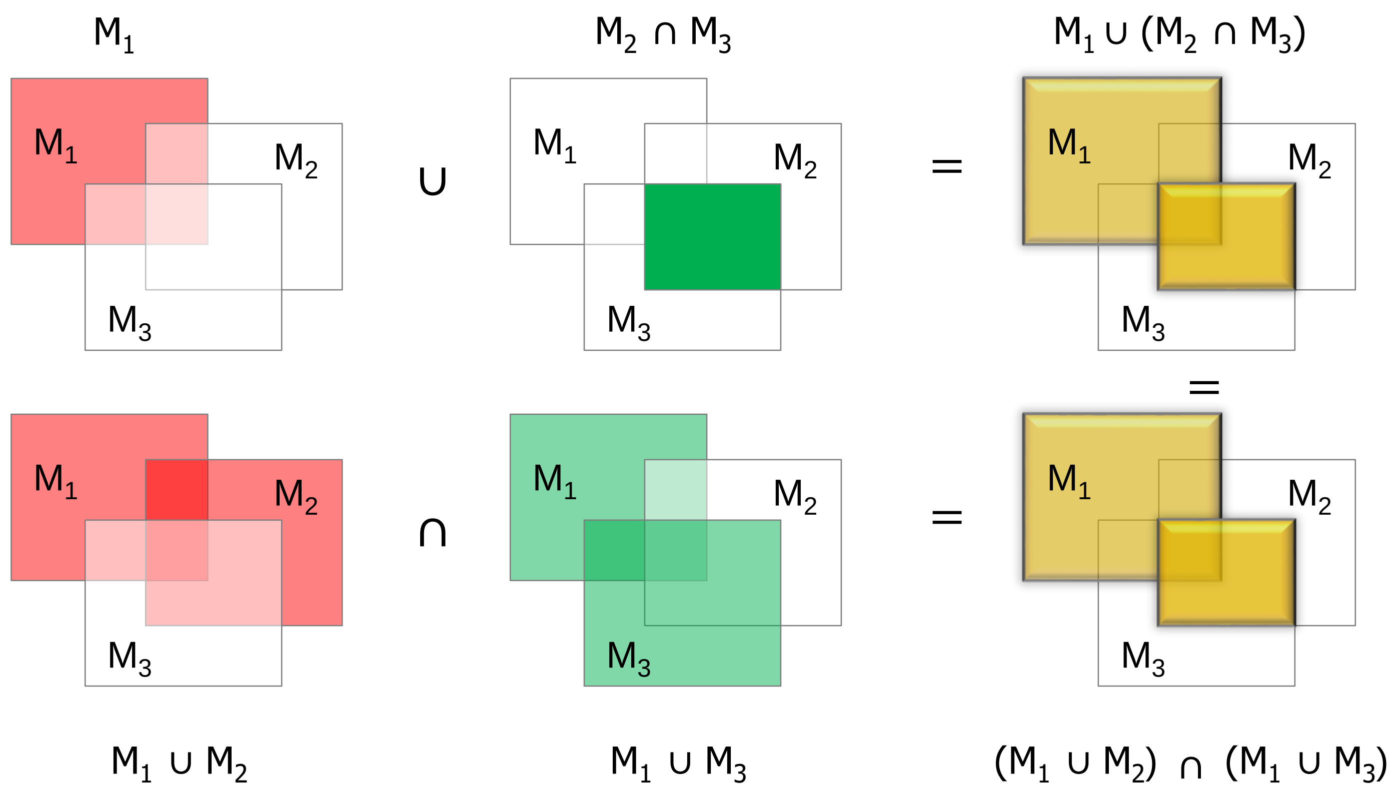
Инверсни елементи: $M \cup \overline{M} = \mathbb{U}$

$M \cap \overline{M} = \emptyset$

Вен- диаграми за Дистрибутивния Закон



Вен-диаграми за Дистрибутивния Закон



Закони за множества

Идемпотентност:

$$M \cup M = M$$

$$M \cap M = M$$

Асоциативност:

$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$$

$$M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$$

Абсорбация:

$$M_1 \cup (M_1 \cap M_2) = M_1$$

$$M_1 \cap (M_1 \cup M_2) = M_1$$

Де Морган:

$$\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$$

$$\overline{M_1 \cap M_2} = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$$

Де Морган

Август Де Морган

(*Augustus De Morgan*)

Роден: 1806 г., Англия

Починал: 1871 г., Англия

- Британски математик
- Принадлежи към един от значимите създатели на математическата логика
- Дефинира понятието за пълна индукция

Закони за множества

Поглъщане:

$M \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

$M \cap \emptyset = \emptyset$

Двойно отрицание:

$\overline{\overline{M}} = M$

Релации

Нека M е произволно множество.
Множеството M x M ≔ { (x, y) | x, y ∈ M } наричаме декартово произведение на M.

- Следователно, декартовото произведение M x M е множеството на всички подредени двойки (x, y) на елементите от M

Нека M е произволно множество.
Всяко множество R ⊆ M x M наричаме **релация** в M.

- Всяка релация може да се разглежда като подмножество на M x M. Бележим с $x \sim_R y$

Означения:

- $x \sim_R y$, ако $(x, y) \in R$
- $x \nsim_R y$, ако $(x, y) \notin R$

Представяне на релации

Множество:

R := {(1, 1), (1,4), (2,1), (3,1), (4,3)}

Граф:

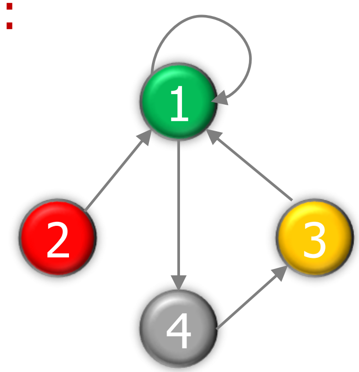


Таблица:

	1	2	3	4
1	1	0	0	1
2	1	0	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	1	0

Матрица:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Свойства на Релациите

Дефиниции:

- ***Рефлексивна***: ако $x \sim x$ за всички $x \in M$
- ***Симетрична***: ако от $x \sim y$ следва винаги, че $y \sim x$
- ***Асиметрична***: ако от $x \sim y$ следва винаги $y \nsim x$
- ***Транзитивна:*** ако от $x \sim y$ и $y \sim z$ следва винаги $x \sim z$

Функции

Дефиниция: Една функция $f:A \rightarrow B$ е правило, според което на всеки елемент x от A се съпоставя точно един елемент $f(x)$ от B.

- От гледна точка на множествата една функция от A към B е подмножество на AxB, удовлетворяващо следното условие:

$$\{\forall a \in A : \exists b \in B : (a,b) \in f\} \wedge$$

$$\{\forall a \in A : \forall b_1, b_2 \in B : ([(a,b_1) \in f \wedge (a,b_2) \in f] \rightarrow b_1 = b_2)\}$$

Примери

f: R $\rightarrow$ R, f(x)= x^2 за всяко x от R или в множествено-теоретичен аспект:

$f=\{(x,x^2) \mid x\in R\}$.

Т.е. f съдържа наредени двойки като (5,25);
(-5,25);$(-\pi , \pi ^2)$,но не съдържа (36,6) или (2,-4).

Функции

<u>Дефиниция</u>: Две функции са ***еквивалентни***, тогава и само тогава, когато и трите им множества са съответно еквивалентни.

Т.е. $f, g: A \to B$ са еквивалентни $\Leftrightarrow \forall x \in A: f(x)=g(x)$

- Разгледаните до тук функции са функции на един аргумент.
- Нека $A_1, A_2 \dots A_n, B$ са множества.

Тогава: $f: A_1 x A_2 x \dots x A_n \to B$ е функция на n-променливи или аргументи.

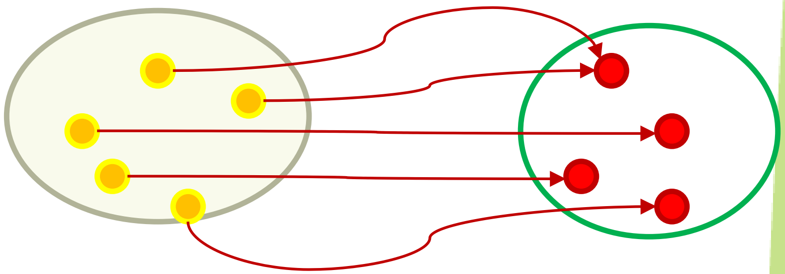
Теоретични понятия за функция

- Всички елементи от дефиниционната област на една функция се появяват като първа координата на подредената двойка на функцията, но не всички елементи на кообластта се появяват като втора координата.
- Дефиниция: За $f: A \to B$ ***рангът*** на функцията е: $range(f)=\{b \in B \mid \exists a \in A:(a,b) \in f\}$ или $range(f)=\{f(a) \mid a \in A\}$
- С други думи рангът на една функция е подмножество на множеството на стойности на тази на функцията.

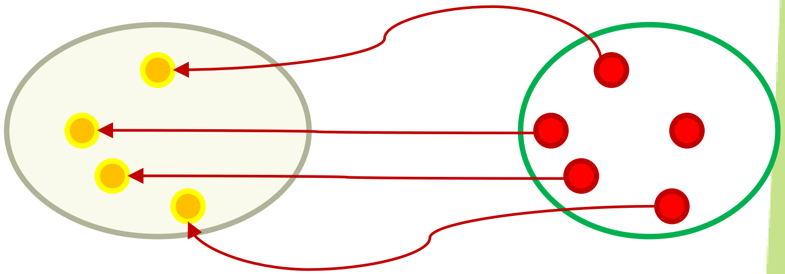
Видове функции

Една тотална функция f: M → N се нарича:

Сюрекция: ако за всички $y \in N$ съществува $x \in M$, така че $f(x) = y$
Т.е. всеки елемент от N е изображение на един или повече елементи от M.



Инекция: ако от $f(x) = f(y)$ винаги следва, че $x = y$



Примери

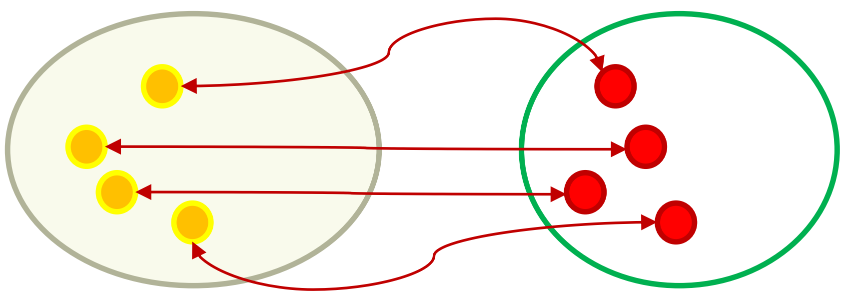
- <u>Пример 1:</u> $f:R \to R$, $f(x)=x^2$, $\forall x \in R$ не е сюрекция, защото рангът на функцията е множеството на реалните неотрицател-ни числа. Ако, обаче, я запишем така:

  $f:R \to R+ \cup \{0\}$, тогава тя е сюрекция.

- <u>Пример 2:</u> $f:R \to R$, $f(x)=x^2$, $\forall x \in R$ не е инекция, защото $f(5)=25$; $f(-5)=25$.
  ($5 \neq -5$,а $25=25$)

Видове функции

Биекция: ако f е едновременно инекция и сюрекция, казваме, че е биекция.
Това е взаимно-еднозначно съответствие между елементите на дефиниционното и целевото множества



Операции върху функции

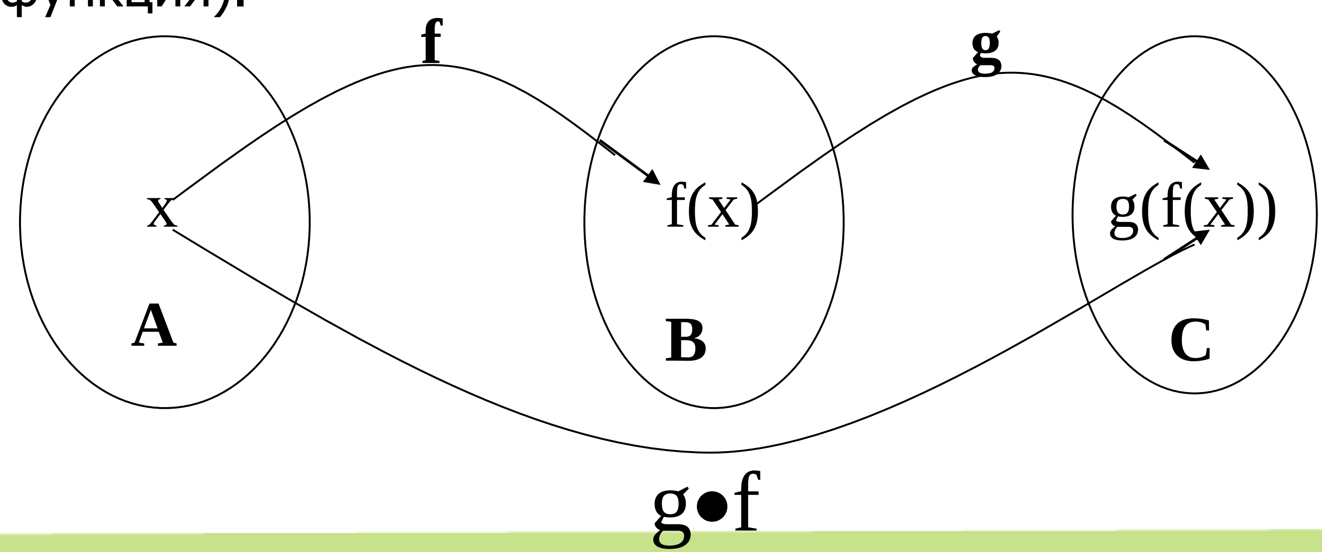
Да въведем операции над функции, като в резултат получим отново функция, т.е. да вдигнем нивото на абстракция. Нека f и g: $A \to B$ са функции. Тогава:

1) ***Сума*** (по елементи) $f+g=s$ е функция, която за $\forall x \in A$: $s(x)=f(x)+g(x)$.
2) ***Произведение*** (по елементи) $f.g=p$ е функция, която за $\forall x \in A$: $p(x)=f(x).g(x)$.

<u>Забележка:</u> Тези действия са възможни, само ако тези функции са дефинирани в една и съща кообласт.

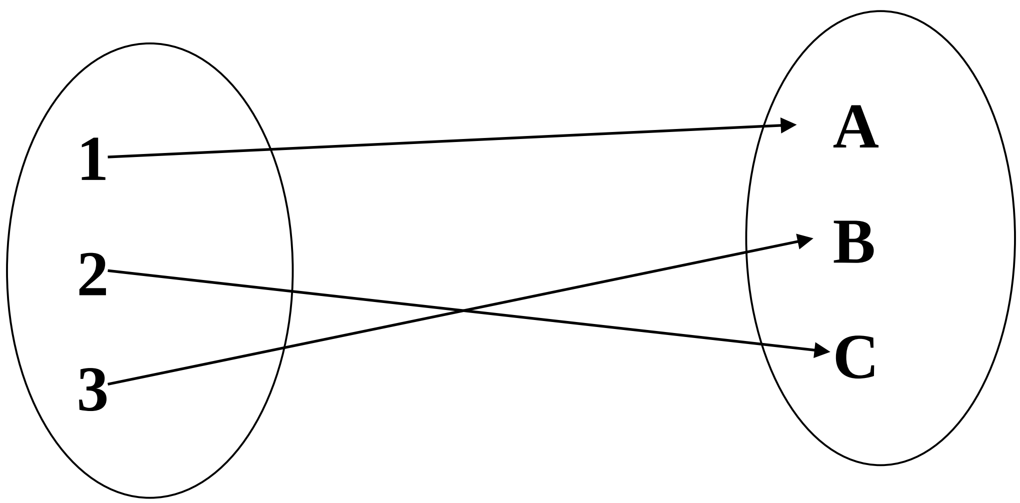
Операции върху функции

<u>Дефиниция:</u> Нека $f:A\to B$; $g:B\to C$. Тогава $g\bullet f:A \to C$, такава че за $\forall x\in A$: $(g\bullet f)(x)= g(f(x))$ се нарича ***суперпозиция*** на функциите. Така образуваме съставни функции(или функция във функция).



Операции върху функции

- **Дефиниция:** Нека $f: A \to B$ е биекция. Тогава обратната функция $f^{-1}: B \to A$ е също биекция и се задава с правилото: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.



Операции върху функции

- ***Дефиниция***: Функция, която изобразява $\forall x \in A$ в себе си се нарича ***идентитет***. Бележим $i_A(x)=x$.

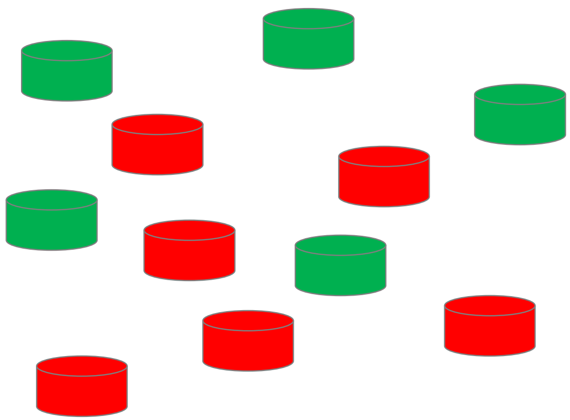
- **Теорема:** Нека $f:A \rightarrow B$; $g:B \rightarrow C$ са биективни функции. Тогава:

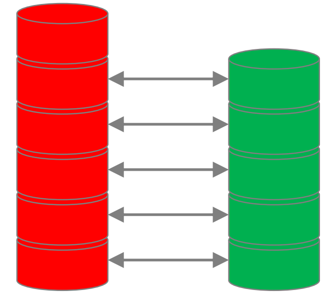
  A) $f^{-1} \bullet f = i_A$; $f \bullet f^{-1} = i_B$;

  B) $(g \bullet f)^{-1} = f^{-1} \bullet g^{-1}$;

Разбиране на безкрайността: Сравняване на множества

? Ако не можем да броим, можем ли и как да установим кои пулове са повече





Идея: сравняване мощност на множества посредством съществуване на ***биекция***

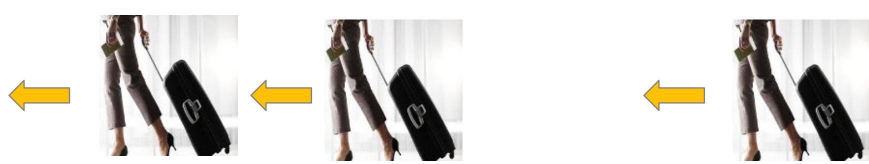
Разбиране на безкрайността: Хилбертов хотел

? Можем ли да го настаним да

? Как ще го настаним

Хилбертов хотел: хотел с безкрайно много стаи

- Всички стаи са заети
- Пристига нов гост

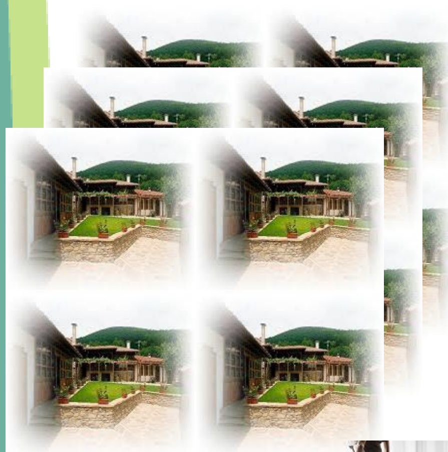


n+1 n n-1 2 1

Хилбертов хотел

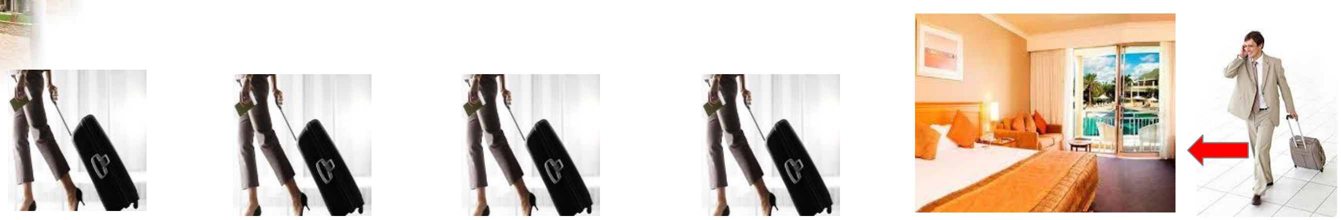
? Можем ли да го настаним **да**

? Как ще го настаним



Хилбертов хотел: хотел с безкрайно много стаи

- Всички стаи са заети
- Пристига нов гост



n+1 **n** **n-1** **2** **1**

Формално обяснение (доказателство)

Множествата N и N\{1} са равномощни понеже: съществува биекция (преместване на гост в съседна стая)

$f: n \to n+1$ от N към N\{1}

Давид Хилберт

Давид Хилберт (*David Hilbert*):
Роден: 23 януари 1862, Кьонигсберг, Източна Прусия
Починал: 14 февруари 1943, Гьотинген, Германия

- Немски математик сред най-влиятелните на 19 и 20 век.
- Своята известност на велик математик дължи на създаването и развиването на голям кръг математически теории като теорията на инвариантите, аксиомизация на геометрията
- Идеята за хилбертовото пространство е в основите на функционалния анализ.
- Хилберт и неговите студенти развиват съществени части от математическата инфраструктура, необходима за квантовата механика и общата теория на относителността.

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. *Дискретна математика*. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. *Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика.* Университетско издателство "Паисий Хилендарски", Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, *Машина Поста*, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, *Discrete Mathematics – Elementary and Beyond*, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, *A Short Course in Discrete Mathematics*, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An *Introduction to Formal Languages and Automata,* Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- ***http://www.jflap.org/*** - софтуерна среда