

Числено интегриране.

Квадратурни формули на

Нютон-Коутс

Задача: (**a** и **b** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния номер)

Дадена е функцията $f(x) = \frac{b+2-x}{2x^2+a+1}$

1. Табулирайте функцията $f(x)$ в интервала $[a, a+b+1]$, като разделите интервала на $b+5$ равни части.

2. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **левите правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

3. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **десните правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

4. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **средните правоъгълници**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

5. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **трапеците**, използвайки точките получени в 1. Каква е грешката на полученото приближение?

6. Може ли по построената в 1 таблица да се използва квадратурната формула на **Симпсън** за изчисляване на интеграла $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$? Обосновайте отговора си. Ако може, го изчислете и пресметнете каква е грешката на полученото приближение?

7. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **левите правоъгълници** с точност 0.00001.

8. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **десните правоъгълници** с точност 0.00001.

9. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **средните правоъгълници** с точност 0.00001.

10. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **трапеците** с точност 0.00001.

11. Пресметнете $\int_a^{a+b+1} f(x) dx$ по формулата на **Симпсън** с точност 0.00001.

Съставяне на мрежата

```
In[22]:= f[x_] :=  $\frac{10 - x}{2x^2 + 1}$ 
a = 0.; b = 10.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
xt = Table[a + i * h, {i, 0, n}]

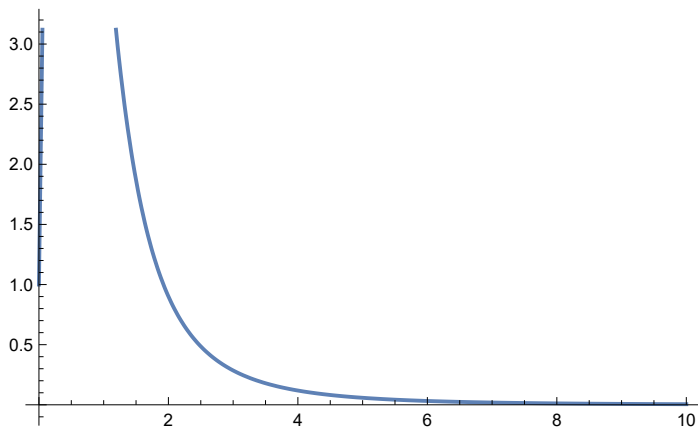
Мрежата е с брой подинтервали n = 14 и стъпка h = 0.714286
```

```
Out[27]= {0., 0.714286, 1.42857, 2.14286, 2.85714, 3.57143, 4.28571,
5., 5.71429, 6.42857, 7.14286, 7.85714, 8.57143, 9.28571, 10.}
```

```
In[28]:= f[xt]
Out[28]= {10., 4.59596, 1.68675, 0.771543, 0.41225, 0.242494, 0.151433, 0.0980392,
0.0646353, 0.0426933, 0.0277283, 0.0172159, 0.0096565, 0.00411813, 8.8376 × 10-18}
```

Леви правоъгълници

```
In[29]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
Out[29]=
```



```

In[30]:= a = 0.; b = 10.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
f[x_] :=  $\frac{10 - x}{2 x^2 + 1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I1 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
M1 = Abs[f'[a]];
R1 =  $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M1$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ", Abs[I1 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 12.9461
Точната стойност е 9.28221
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 3.57143
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 3.66387

```

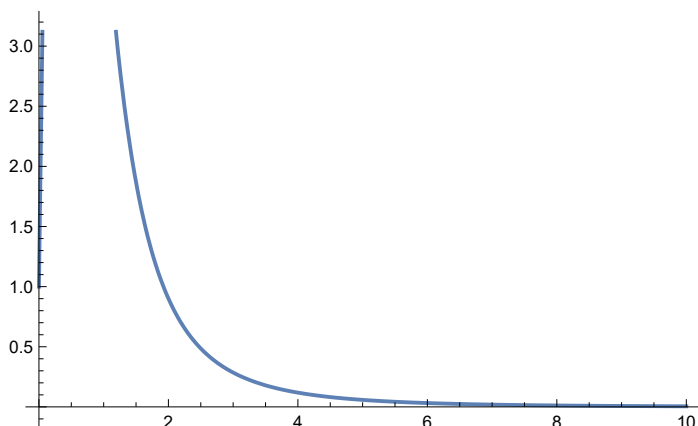
Десни правоъгълници

```

In[43]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]

```

Out[43]=



In[181]:=

```

a = 0.; b = 10.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
f[x_] :=  $\frac{10 - x}{2 x^2 + 1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$ ;
I2 =  $h * \sum_{i=0}^n f[a + i * h]$ ;
M2 = Abs[f'[a]];
R2 =  $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M2$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I2]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R2]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ", Abs[I2 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.0588568 и брой подинтервали 14

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 6.28534
Точната стойност е 9.28221
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 3.57143
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 2.99688

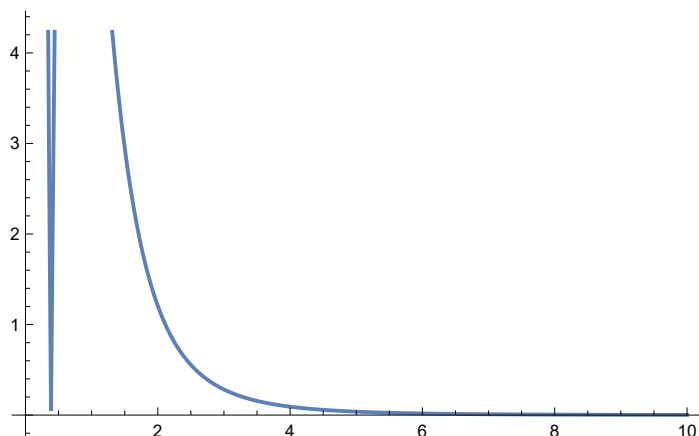
```

Средни правоъгълници

In[194]:=

```
Plot[Abs[f''[x]], {x, a, b}]
```

Out[194]=



In[195]:=

```

a = 0.; b = 10.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
f[x_] :=  $\frac{10 - x}{2 x^2 + 1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ;
I3 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + i * h + \frac{h}{2}\right]$ ;
M3 = Abs[f''[a]];
R3 =  $\frac{(b - a)^3}{24 n^2} * M3$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ", Abs[I3 - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 9.21174

Точната стойност е 9.28221

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 8.5034

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.0704732

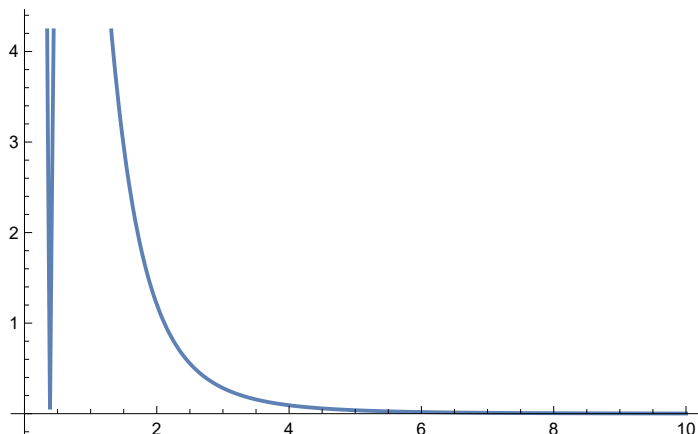
```

Трапеци

In[208]:=

```
Plot[Abs[f''[x]], {x, a, b}]
```

Out[208]=



In[209]:=

```

a = 0.; b = 10.;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
n = 14;
f[x_] :=  $\frac{10 - x}{2 x^2 + 1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ;
IT =  $\frac{h}{2} * \left( f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[a + i * h] + f[b] \right)$ ;
M2 = Abs[f''[a]];
RT =  $\frac{(b - a)^3}{12 n^2} * M2$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на трапците е ", IT]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на трапците е ", RT]
Print["Истинската грешка по формулата на трапците е ", Abs[IT - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14
Приближената стойност по формулата на трапците е 9.37465
Точната стойност е 9.28221
Теоретичната грешка по формулата на трапците е 17.0068
Истинската грешка по формулата на трапците е 0.0924405

```

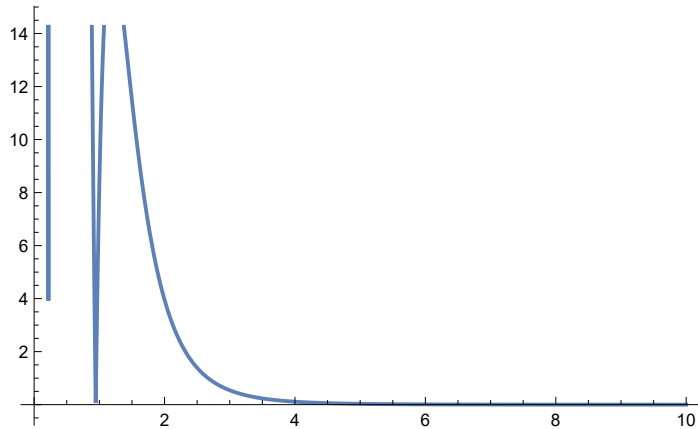
Симпсън

Може да използваме формулата на Симпсън, тъй като броят на подинтервалите е **четно** число - в случая 14.

In[222]:=

Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]

Out[222]=



In[223]:=

a = 0.; b = 10.;**h = $\frac{b - a}{n}$;****n = 14;****f[x_] := $\frac{10 - x}{2 x^2 + 1}$** **Itochno = $\int_a^b f[x] \, dx$;****m = n / 2;****IS = $\frac{h}{3} * \left(f[a] + 4 \sum_{i=1}^m f[a + (2 i - 1) * h] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2 i) * h] + f[b] \right)$;****M4 = Abs[f''''[a]];****RS = $\frac{(b - a)^5}{180 n^4} * M4$;****Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]****Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]****Print["Точната стойност е ", Itochno]****Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]****Print["Истинската грешка по формулата на Симпсън е ", Abs[IS - Itochno]]**

Мрежата е със стъпка 0.714286 и брой подинтервали 14

Приближената стойност по формулата на Симпсън е 8.99837

Точната стойност е 9.28221

Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е 13.8831


Истинската грешка по формулата на Симпсън е 0.283842

Пресмятане с предварително зададена точност

Леви правоъгълници

In[237]:=

```
eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b-a)^2}{2n} * M1 \leq \text{eps}, n]$ 
```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[239]=

$n < 0 \mid \mid n \geq 1.375 \times 10^7$

In[240]:=

```
a = 0.; b = 10.;
h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
n = 1.375 * 107;
f[x_] :=  $\frac{10-x}{2x^2+1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ;
I1 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f[a+i*h]$ ;
M1 = Abs[f'[a]];
R1 =  $\frac{(b-a)^2}{2n} * M1$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ", Abs[I1 - Itochno]]
```


Мрежата е със стъпка 7.27273×10^{-7} и брой подинтервали 1.375×10^7

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 9.28222

Точната стойност е 9.28221

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 3.63636×10^{-6}

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 3.63636×10^{-6}

Десни правоъгълници

In[253]:=

```
eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b-a)^2}{2n} * M2 \leq \text{eps}, n]$ 
```

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numerizing the result.

Out[255]=

$n < 0 \mid \mid n \geq 2. \times 10^8$

In[256]:=

```
a = 0.; b = 10.;
h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
n =  $1.5 \times 10^7$ ;
f[x_] :=  $\frac{10-x}{2x^2+1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ;
I2 =  $h \sum_{i=0}^n f[a+i*h]$ ;
M2 = Abs[f'[a]];
R2 =  $\frac{(b-a)^2}{2n} * M2$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n] // N
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I2]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R2]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ", Abs[I2 - Itochno]]
Мрежата е със стъпка  $6.66667 \times 10^{-7}$  и брой подинтервали  $1.5 \times 10^7$ 
Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 9.28222
Точната стойност е 9.28221
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е  $3.33333 \times 10^{-6}$ 
Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е  $3.33333 \times 10^{-6}$ 
```

Средни правоъгълници

In[269]:=

```
eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b-a)^3}{24 n^2} * M3 \leq \text{eps}, n]$ 
```

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[271]=

$n \leq -12909.9 \mid \mid n \geq 12909.9$

In[272]:=

```
a = 0.; b = 10.;

n = 3535.53;
h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
f[x_] :=  $\frac{10-x}{2 x^2 + 1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ;
I3 =  $h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + i * h + \frac{h}{2}\right]$ ;
M3 = Abs[f''[a]];
R3 =  $\frac{(b-a)^3}{24 n^2} * M3$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е ",
Abs[I3 - Itochno]]
```

Мрежата е със стъпка 0.00282843 и брой подинтервали 3535.53

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 9.28221

Точната стойност е 9.28221

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.000133334

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е 3.37267×10^{-7}

Трапеци

In[285]:=

```
eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b-a)^3}{12 n^2} * M3 \leq \text{eps}, n]$ 
```

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[287]=

$n \leq -18257.4 \mid \mid n \geq 18257.4$

In[288]:=

```
a = 0.; b = 10.;

n = 5000;
h =  $\frac{b-a}{n}$ ;

f[x_] :=  $\frac{10-x}{2 x^2 + 1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ;

IT =  $\frac{h}{2} * \left( f[a] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f[a+i*h] + f[b] \right)$ ;

M2 = Abs[f'[a]];
RT =  $\frac{(b-a)^3}{12 n^2} * M2$ ;

Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на трапците е ", IT]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на трапците е ", RT]
Print["Истинската грешка по формулата на трапците е ", Abs[IT - Itochno]]

Мрежата е със стъпка 0.002 и брой подинтервали 5000
Приближената стойност по формулата на трапците е 9.28221
Точната стойност е 9.28221
Теоретичната грешка по формулата на трапците е 0.000133333
Истинската грешка по формулата на трапците е  $3.31675 \times 10^{-7}$ 
```

Симпсън

In[301]:=

```
eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b-a)^5}{180 n^4} * M4 \leq \text{eps}, n]$ 
```

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numerizing the result.

Out[303]=

$n \leq -480.562 \mid \mid n \geq 480.562$

In[304]:=

```
a = 0.; b = 10.;
n = 169.904;
h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
f[x_] :=  $\frac{10-x}{2 x^2 + 1}$ 
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ;
m = n / 2;
IS =  $\frac{h}{3} * \left( f[a] + 4 \sum_{i=1}^m f[a + (2 i - 1) * h] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2 i) * h] + f[b] \right)$ ;
M4 = Abs[f''''[a]];
RS =  $\frac{(b-a)^5}{180 n^4} * M4$ ;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка по формулата на Симпсън е ", Abs[IS - Itochno]]
```

Мрежата е със стъпка 0.0588568 и брой подинтервали 169.904

Приближената стойност по формулата на Симпсън е 9.28217

Точната стойност е 9.28221

Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е 0.000640006

Истинската грешка по формулата на Симпсън е 0.0000437095