Линейни нехомогенни системи диференциални уравнения.
Метод на Лагранж.
Метод на неопределените коефициенти

Информатика, 2021/2022

Линейни нехомогенни системи диференциални уравнения

- Система от вида

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y + a_{13}(t)\,z + f_1(t) \\ \dot{y} = a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y + a_{23}(t)\,z + f_2(t) \\ \dot{z} = a_{31}(t)\,x + a_{32}(t)\,y + a_{33}(t)\,z + f_3(t), \end{array}\right. \tag{1}$$

с неизвестни функциите $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, където $f_i(t)$, $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ са непрекъснати функции в интервала (α, β), се нарича линейна нехомогенна система диференциални уравнения.

Ако въведем означенията

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

то системата (1) може да се запише във вида

$$\dot{X} = AX + F. \tag{2}$$

- За решаването на системата (2) следваме следния алгоритъм:

I. Разглеждаме съответната на (2) хомогенна система

$$\dot{X} = AX \tag{3}$$

и намираме общото й решение

$$X_{\text{хом}} = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3.$$

II. Намираме едно частно решение

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{pmatrix}$$

на нехомогенната система (2).

III. Общото решение на нехомогенната система (2) е равно на сумата от общото решение на хомогенната система (3) и намереното частно решение $\eta(t)$, т.е.

$$X_{\text{нехом}} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \eta(t).$$

Метод на Лагранж

Нека

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}^{\chi_1} + c_2 \overbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}^{\chi_2} + c_3 \overbrace{\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}}^{\chi_3},$$

където c_1, c_2, c_3 са произволни реални константи, е общото решение на хомогенното уравнение (3).

Частно решение на (2) по метода на Лагранж търсим във вида

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = c_1(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3(t) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

където $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ са решения на системата

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0$$
$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0$$
$$c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = f$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left| \begin{array}{l} \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 + \dot{c}_3 x_3 = f_1 \\ \dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 + \dot{c}_3 y_3 = f_2 \\ \dot{c}_1 z_1 + \dot{c}_2 z_2 + \dot{c}_3 z_3 = f_3. \end{array} \right.$$

За всяко $t \in (\alpha, \beta)$ можем да намерим $\dot{c}_1(t)$, $\dot{c}_2(t)$ и $\dot{c}_3(t)$, а след това чрез интегриране от производните да получим и самите функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$. С това частното решение $\eta(t)$ е намерено.

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + f_1 \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + f_2 \end{cases}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$X_{хом} = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Търсим

$$\eta = c_1(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$ където

$c_1(t)$ и $c_2(t)$ са решения на системата

$$\begin{cases} \dot{c}_1 x_1 + \dot{c}_2 x_2 = f_1 \\ \dot{c}_1 y_1 + \dot{c}_2 y_2 = f_2 \end{cases}$$

$\dot{c}_1$ и $\dot{c}_2$

$$c_1 = \int \dot{c}_1(t)\,dt, \quad c_2 = \int \dot{c}_2(t)\,dt$$