Метод на хордите

<u>Задача:</u> Да се реши уравнението
(1. Да се намери броя на корените,
2. Да се уточни най-малкия корен по **метода на хордите (да се проверят условията за сходимост, да се определи началното приближение, да се извършат итерациите)**,
3. Да се направи оценка на грешката)

$$x^3 + 45\cos x + 6x - 76 = 0$$

Да се изчисли предварително броят на стъпките (итерациите) за достигане на точност 0.00001 за определения по време на локализацията интервал по **метода на разполовяването и да се направи сравнение между двата метода**.

Графично представяне на функцията

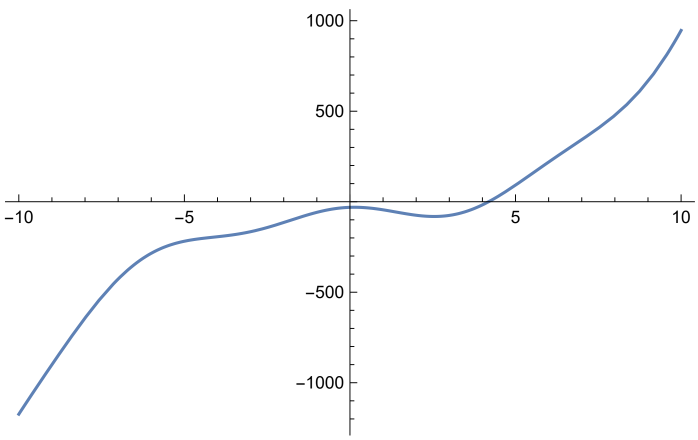
Дефиниция на функция

In[∘]:=
```
f[x_] := x^3 + 45 Cos[x] + 6 x - 76
```

Графика на функция

In[∘]:=
```
Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Plot[function, {var, min, max}]
```

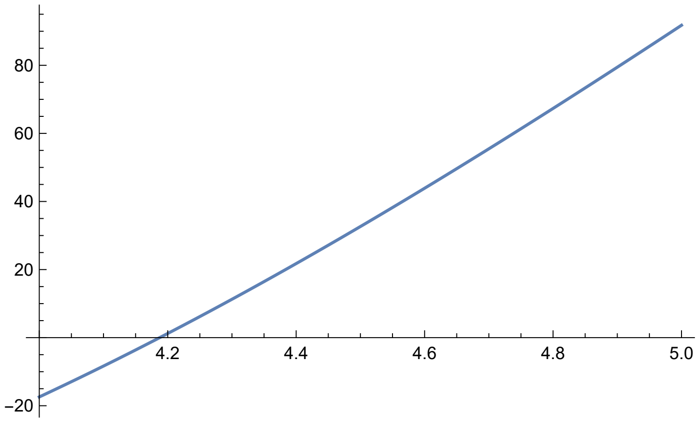
Plot: Limiting value min in {var, min, max} is not a machine-sized real number.

Out[∘]=
```
Plot[function, {var, min, max}]
```

Извод: Уравнението има един корен.

Локализация на корен

In[◦]:=
```
Plot[f[x], {x, 4, 5}]
```
Out[◦]=



In[◦]:=
```
f[4]
```
Out[◦]=

12 + 45 Cos[4]

In[◦]:=
```
f[4.]
```
Out[◦]=

-17.414

In[◦]:=
```
f[5.]
```
Out[◦]=

91.7648

Извод:

Функцията f(x) е непрекъсната, защото е сума от непрекъснати функции (полиним и косинус).

f(4) = -17.4... < 0

f(5) = 91.76... > 0

Функцията има различни знаци в двата края на разглеждания интервал [4; 5].

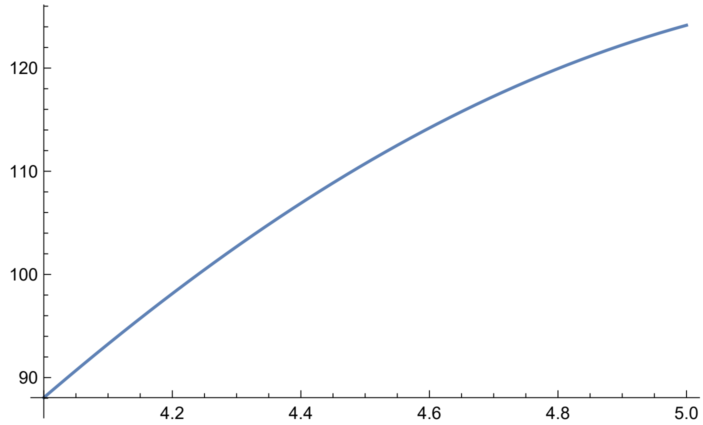
Следователно в този интервал [4; 5] функцията има корен.

Уточняване на корен по метода хордите

да се проверят условията за сходимост

проверка знака на първата производна

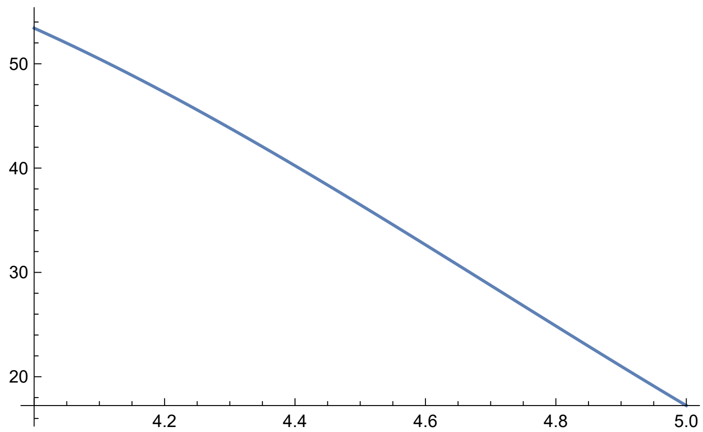
In[∘]:=
```
Plot[f'[x], {x, 4, 5}]
```
Out[∘]=



Извод: (1)Първата производна има стойности между 80 и 130. Следователно те са изцяло положителни. f'(x) > 0 за целия интервал [4; 5]

проверка знака на втората производна

In[∘]:=
```
Plot[f''[x], {x, 4, 5}]
```
Out[∘]=



Извод: (2) Втората производна има стойности между 10 и 60. Следователно те са изцяло положителни. f''(x) > 0 за целия интервал [4; 5]

От (1) и (2) следва, че са изпълнени условията на метода на хордите.

да се определи началното приближение

Нужно е да е изпълнено условието $f(x_0)$.f''(x) < 0

В нашия случай f''(x) >0. Следователно е нужно $f(x_0)$ <0

In[◦]:=
```
f[4.]
```
Out[◦]=
```
-17.414
```

In[◦]:=
```
f[5.]
```
Out[◦]=
```
91.7648
```

In[◦]:=
```
x0 = 4.
```
Out[◦]=
```
4.
```

да се извършат итерациите

BASIC VARIANT

In[◦]:=
```
f[x_] := x^3 + 45 Cos[x] + 6 x - 76
a = 4.; b = 5.;
x0 = a; p = b;
For[
 n = 1, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1, " f(x_n) = ", f[x1]];
 x0 = x1
]
```

n = 1 x_n = 4.1595 f(x_n) = -2.70936

n = 2 x_n = 4.1836 f(x_n) = -0.376508

n = 3 x_n = 4.18694 f(x_n) = -0.0514479

n = 4 x_n = 4.1874 f(x_n) = -0.00701377

n = 5 x_n = 4.18746 f(x_n) = -0.000955868

n = 6 x_n = 4.18747 f(x_n) = -0.000130264

n = 7 x_n = 4.18747 f(x_n) = -0.0000177521

n = 8 x_n = 4.18747 f(x_n) = -2.41921×10^{-6}

n = 9 x_n = 4.18747 f(x_n) = -3.29684×10^{-7}

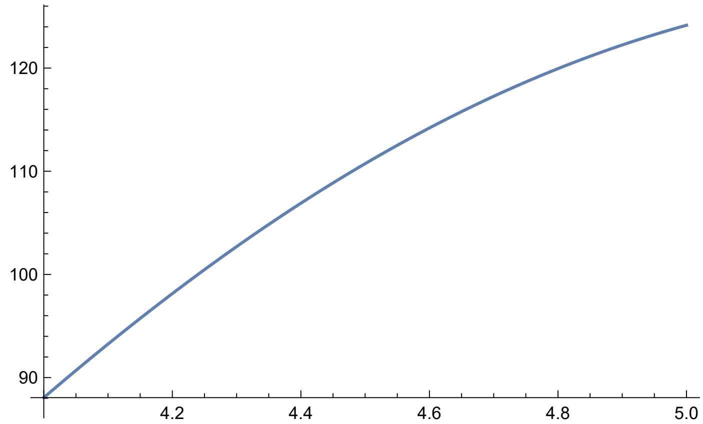
n = 10 x_n = 4.18747 f(x_n) = -4.49286×10^{-8}

оценка на грешката

пресмятане на предварително зададените константи

M_1, m_1

In[ ]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, 4, 5}]
```
Out[ ]=



по геометрични съображения:

In[ ]:=
```
M1 = Abs[f'[5.]]
m1 = Abs[f'[4.]]
```
Out[ ]=
```
124.152
```
Out[ ]=
```
88.0561
```
In[ ]:= $P = \frac{M1 - m1}{m1}$

Out[ ]=
```
0.409915
```
f(p)

In[ ]:=
```
f[p]
```
Out[ ]=
```
91.7648
```

In[∘]:=
```
f[x_] := x^3 + 45 Cos[x] + 6 x - 76
a = 4.; b = 5.;
x0 = a; p = b;
M1 = Abs[f'[5.]];
m1 = Abs[f'[4.]];
P = (M1 - m1)/m1;
Print["n = ", 0, " x_n = ", x0, " f(x_n) = ", f[x0]];
For[
 n = 1, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1,
  " f(x_n) = ", f[x1], " ε_n = ", eps = P * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

$n = 0$ $x_n = 4.$ $f(x_n) = -17.414$

$n = 1$ $x_n = 4.1595$ $f(x_n) = -2.70936$ $\varepsilon_n = 0.0653812$

$n = 2$ $x_n = 4.1836$ $f(x_n) = -0.376508$ $\varepsilon_n = 0.00988064$

$n = 3$ $x_n = 4.18694$ $f(x_n) = -0.0514479$ $\varepsilon_n = 0.00136746$

$n = 4$ $x_n = 4.1874$ $f(x_n) = -0.00701377$ $\varepsilon_n = 0.000186752$

$n = 5$ $x_n = 4.18746$ $f(x_n) = -0.000955868$ $\varepsilon_n = 0.0000254575$

$n = 6$ $x_n = 4.18747$ $f(x_n) = -0.000130264$ $\varepsilon_n = 3.46942\times10^{-6}$

$n = 7$ $x_n = 4.18747$ $f(x_n) = -0.0000177521$ $\varepsilon_n = 4.72806\times10^{-7}$

$n = 8$ $x_n = 4.18747$ $f(x_n) = -2.41921\times10^{-6}$ $\varepsilon_n = 6.44329\times10^{-8}$

$n = 9$ $x_n = 4.18747$ $f(x_n) = -3.29684\times10^{-7}$ $\varepsilon_n = 8.78076\times10^{-9}$

$n = 10$ $x_n = 4.18747$ $f(x_n) = -4.49286\times10^{-8}$ $\varepsilon_n = 1.19662\times10^{-9}$

за проверка на изчисленията на ръка:

In[∘]:=
$$4 - \frac{-17.414}{-17.414 - 91.7648} * (4 - 5)$$

Out[∘]=
4.1595

цикъл при достигане на предварително зададена точност:

In[•]:=
```
epszad = 0.00001;
f[x_] := x^3 + 45 Cos[x] + 6 x - 76
a = 4.; b = 5.;
x0 = a; p = b;
M1 = Abs[f'[5.]];
m1 = Abs[f'[4.]];
P = (M1 - m1)/m1;
Print["n = ", 0, " x_n = ", x0, " f(x_n) = ", f[x0]];
eps = Infinity;
For[
 n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1,
  " f(x_n) = ", f[x1], " ε_n = ", eps = P * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

n = 0 x_n = 4. $f(x_n)$ = −17.414

n = 1 x_n = 4.1595 $f(x_n)$ = −2.70936 ε_n = 0.0653812

n = 2 x_n = 4.1836 $f(x_n)$ = −0.376508 ε_n = 0.00988064

n = 3 x_n = 4.18694 $f(x_n)$ = −0.0514479 ε_n = 0.00136746

n = 4 x_n = 4.1874 $f(x_n)$ = −0.00701377 ε_n = 0.000186752

n = 5 x_n = 4.18746 $f(x_n)$ = −0.000955868 ε_n = 0.0000254575

n = 6 x_n = 4.18747 $f(x_n)$ = −0.000130264 ε_n = 3.46942×10^{-6}

Извод: Необходими са **6** на брой итерации за достигане на точност 0.00001 по метода на хордите.

за метод на разполовяването:

In[•]:=
```
Log2[(5 - 4)/0.00001] - 1
```

Out[•]=
```
15.6096
```

Извод: Необходими са **16** на брой итерации за достигане на точност 0.00001 по метода на разполовяването.

Извод: Методът на хордите е по-бърз отколкото методът на разполовяването.