

Упражнение 4

Формула за пълната вероятност.

Формула на Бейс.

Биномна вероятност.

Пълна група от събития, ако

1. Те са несъвместими
2. Сумата им дава цялото пространство

При наличие на пълна група от събития $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ се използват

Формула за пълната вероятност:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B | A_k) P(A_k)$$

$$P(B) = P(B | A_1) P(A_1) + P(B | A_2) P(A_2)$$

$$P(B) = P(B | A_1) P(A_1) + P(B | A_2) P(A_2) + P(B | A_3) P(A_3)$$

Формула на Бейс:

$$P(A_j | B) = \frac{P(B | A_j) P(A_j)}{\sum_{k=1}^n P(B | A_k) P(A_k)}$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1) P(A_1)}{P(B | A_1) P(A_1) + P(B | A_2) P(A_2)}$$

$$P(A_1 | B) = \frac{P(B | A_1) P(A_1)}{P(B | A_1) P(A_1) + P(B | A_2) P(A_2) + P(B | A_3) P(A_3)}$$

6.1. В 2 урни има съответно: 6 бели и 4 черни топки в първата и 5 бели и 5 черни топки във втората. От първата урна вадим случайна топка и я преместваме във втората урна. След това от втората урна вадим случайна топка. Каква е вероятността извадената топка да е бяла?

Решение:

A1=вадим бяла от първата кутия $P(A1)=6/10$

A2=вадим черна от първата кутия $P(A2)=4/10$

Пълна група

B=вадим бяла от втората кутия

$P(B|A1)=6/11$

$P(B|A2)=5/11$

6.4. Тест се състои от въпроси с по 4 отговора за всеки от тях (само един от отговорите е верен). Студент или знае отговора на въпроса или го избира случайно. Ако студентът знае верните отговори на $2/3$ от въпросите на теста, то каква е вероятността вярно маркиран от този студент отговор да не е избран по случаен начин?

Упътване

A_1 = знае избрания въпрос $P(A_1) = 2/3$

A_2 = не знае избрания въпрос $P(A_2) = 1/3$

Образуват пълна група

B = маркиран верен отговор на избрания въпрос

вероятността вярно маркиран от този студент отговор да не е избран по случаен начин =
 $P(\text{да знае избрания въпрос, ако е маркиран верно отговора}) = P(A_1 | B)$

$P(B | A_1) = P(\text{да маркира верен отговор, ако е от въпросите които знае}) = 1$

$P(B | A_2) = P(\text{да маркира верен отговор, ако е от въпросите, които не знае}) =$ при въпрос ,
който не знае избира отговора по случаен начин, като P да улови е $= 1/4$

6.3. Дадена марка телевизори се произвеждат в 3 завода. В първия 2% от телевизорите имат скрит дефект, във втория 1% от телевизорите имат скрит дефект, а в третия 3% от телевизорите имат скрит дефект. Магазин е зареден със 100 телевизора от първия завод, 200 телевизора от втория завод и 300 телевизора от третия завод.

а/ Каква е вероятността ако си купим телевизор от този магазин, той да се окаже изправен?

Упътване:

A1-произведено в 1ви завод $P(A1)=100/600=1/6$

A2-произведено в 2ри завод $P(A2)=200/600=1/3$

A3-произведено в 3ти завод $P(A3)=300/600=1/2$

B- телевизорът е изправен/редовен

$P(B|A1)=0.98$ $P(B|A2)=0.99$ $P(B|A3))=0.97$

а/ Търсим $P(B)=?$ Формула за пълната вероятност

Биномна вероятност

Вероятността на k успеха в n опита на Бернули

$$p^k (1-p)^{n-k} \frac{n!}{k!(n-k)!} = P(k = 2)$$

7.10. Иванчо има 10 зелени, 6 червени и 4 жълти топчета. Той ги слага в кутийка и започва да избира по случаен начин **с връщане** по едно топче. Каква е вероятността измежду първите 7 избрани топчета да има точно 2 червени?

Решение. 7 опита по схемата на Бернули, отделен опит= избира едно топче и го връща; във всеки отделен опит Y =червено топче

$P(\text{червено топче}) = 6/20 = 0.3$

$P(\text{два успеха от 7 опита})$ формула на биномна вероятност с $n=7, k=2, p=0.3$

$$P = \frac{7!}{2!5!} 0.3^2 (1-0.3)^5 = 0.31765$$

7.2. Зар се хвърля 4 пъти. Намерете вероятността на събитията:

$A = \{\text{да се падне само първи път „шестица“}\}$

$B = \{\text{да се падне само трети път „шестица“}\}$

$C = \{\text{да се падне точно една „шестица“}\}$

$D = \{\text{да се паднат две „шестици“}\}$

$E = \{\text{да се падне поне един път „шестица“}\}$

$P(A) = ?$

9.17. Баскетболист стреля в коша 5 последователни пъти. Предполагаме, че всяка стрелба в коша е независима от другите с вероятност за улучване при всяка отделна стрелба 0,7.

- а) Каква е вероятността да улучи само при третата стрелба.
- б) Каква е вероятността да улучи точно три пъти.
- в) Каква е вероятността да улучи поне три пъти.