Метод на Гаус-Жордан за решаване на системи линейни алгебрични уравнения (СЛАУ)

конструираме разширената матрица **(A|b)**

In[ ]:=
```
A = (1  2  -1  3
     2  -1  3  4
     3  1  -1  10)
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Out[ ]=

```
{{1, 2, -1, 3}, {2, -1, 3, 4}, {3, 1, -1, 10}}
```

Основни действия с елементите на матрицата

Прилагане на метода на Гаус-Жордан постъпково

правим толкова стъпки, колкото са броя на редовете в матрицата

първа стъпка - първият стълб да стане като на единичната матрица

първи етап - получаване на единицата $a_{11} = 1$

делим първия ред на елемента от главния диагонал

In[ ]:=

$$A[[1]] = \frac{A[[1]]}{A[[1, 1]]}$$

Out[ ]=

```
{1, 2, -1, 3}
```

В случая нямаме промяна, защото главният елемент е единица.

втори етап - получаване на нулите

за втория ред

In[ ]:=

```
A[[2]] = A[[2]] - A[[1]] * A[[2, 1]]
```

Out[ ]=

```
{0, -5, 5, -2}
```

за третия ред

In[∘]:=
```
A[[3]] = A[[3]] - A[[1]] * A[[3, 1]]
```
Out[∘]=

$\{0, -5, 2, 1\}$

In[∘]:=
```
A // MatrixForm
```
Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

втора стъпка

първи етап - получаване на единицата $a_{22} = 1$

In[∘]:=

$$A[[2]] = \frac{A[[2]]}{A[[2, 2]]}$$

Out[∘]=

$$\left\{0, 1, -1, \frac{2}{5}\right\}$$

In[∘]:=
```
A // MatrixForm
```
Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

втори етап - получаване на нулите

за първия ред

In[∘]:=
```
A[[1]] = A[[1]] - A[[2]] * A[[1, 2]]
A // MatrixForm
```
Out[∘]=

$$\left\{1, 0, 1, \frac{11}{5}\right\}$$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

за третия ред

въвеждане **i - номер на реда; j - номер на колоната (съвпада с номера на стъпката)**

In[∘]:=
```
i = 3; j = 2;
A[[i]] = A[[i]] - A[[j]] * A[[i, j]]
A // MatrixForm
```
Out[∘]=

{0, 0, -3, 3}

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

трета стъпка

първи етап - получаване на единицата

In[∘]:=
```
i = 3;
A[[i]] = A[[i]] / A[[i, i]];
A // MatrixForm
```
Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

втори етап - получаване на нулите

за първи ред

In[∘]:=
```
i = 1; j = 3;
A[[i]] = A[[i]] - A[[j]] * A[[i, j]]
A // MatrixForm
```
Out[∘]=

$\left\{1, 0, 0, \frac{16}{5}\right\}$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

за втория ред

In[∘]:=

```
i = 2; j = 3;
A[[i]] = A[[i]] - A[[j]] * A[[i, j]]
A // MatrixForm
```

Out[∘]=

$$\left\{0, 1, 0, -\frac{3}{5}\right\}$$

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Отг. $x_1 = \frac{16}{5}$, $x_2 = \frac{-3}{5}$, $x_3 = -1$

Създаване на програмен код

In[∘]:=

```
A = (1  2 -1  3
     2 -1  3  4
     3  1 -1 10);
n = Length[A];
For[j = 1, j ≤ n, j++,
 A[[j]] = A[[j]] / A[[j, j]]; (*първи етап-получаване на единицата*)
 Print[A // MatrixForm];
 For[i = 1, i ≤ n, i++,
  If[i ≠ j,
   A[[i]] = A[[i]] - A[[j]] * A[[i, j]] (*втори етап-получаване на нулите*)
  ]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавяме пресмятане на детерминантата

In[∘]:=

```
A = ( 1  2 -1  3
      2 -1  3  4
      3  1 -1 10 );
n = Length[A];
deter = 1;
For[j = 1, j ≤ n, j++,
 deter = deter * A[[j, j]];
 A[[j]] = A[[j]] / A[[j, j]]; (*първи етап-получаване на единицата*)
 For[i = 1, i ≤ n, i++,
  If[i ≠ j,
   A[[i]] = A[[i]] - A[[j]] * A[[i, j]] (*втори етап-получаване на нулите*)
  ]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
Print["Детерминантата на матрицата A e ", deter]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Детерминантата на матрицата A е 15

Добавяме пресмятане на обратната матрица

In[◦]:=

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

```
n = Length[A];
deter = 1;
For[j = 1, j ≤ n, j++,
 deter = deter * A[[j, j]];
 A[[j]] = A[[j]] / A[[j, j]]; (*първи етап-получаване на единицата*)
 For[i = 1, i ≤ n, i++,
  If[i ≠ j,
   A[[i]] = A[[i]] - A[[j]] * A[[i, j]] (*втори етап-получаване на нулите*)
  ]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
Print["Детерминантата на матрицата A е ", deter]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Детерминантата на матрицата A е 15

Отг.: Обратата матрица е $\begin{matrix} -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix}$