Метод на последователните приближения за решаване на СЛАУ

In[∘]:=
```
A = {{1.1, 0.1, -0.02}, {0, 0.9, 0.1}, {-0.13, 0, 1.13}}; b = {7, 1, 0.5};
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 & -0.02 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \\ -0.13 & 0 & 1.13 \end{pmatrix}$$

За сравнение, точното решение е {6.29563, 0.981472, 1.16675}

Построяване на метода

In[∘]:=
```
n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
B = IM - A;
c = b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 & 0.02 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0.13 & 0 & -0.13 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Някои пояснения относно Wolfram

In[∘]:= `E`

Out[∘]=

e

In[∘]:= `E // N`

Out[∘]=

2.71828

In[∘]:= `Pi`

Out[∘]=

π

In[∘]:= `IM = IdentityMatrix[n] // MatrixForm`

Out[∘]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка на сходимостта ||B|| < 1

първа норма

In[∘]:=
```
Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]]
```
$$\mathrm{Max}\left[\mathrm{Table}\left[\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Abs}[B[\![i, j]\!]], \{i, n\}\right]\right]$$

Out[∘]=

0.26

втора норма

In[∘]:=

$$\mathrm{Max}\left[\mathrm{Table}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Abs}[B[\![i, j]\!]], \{j, n\}\right]\right]$$

Out[∘]=

0.25

трета норма

In[∘]:=

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B[\![i, j]\!]^2}$$

Out[∘]=

0.272397

Извод:

Нормата на матрицата B е по-малка от единица. Следователно процесът ще бъде сходящ при всеки избор на начално приближение.

Избираме втора норма, защото е най-малката.

Итерационен процес - окончателен код в една клетка

```
In[•]:= A = ( 1.1   0.1  -0.02
              0     0.9   0.1
             -0.13  0     1.13 ); b = {7, 1, 0.5};

n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
B = IM - A;
c = b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]

(*проверка на сходимост
 и избор на норма - отделно*)

x = {9, 12, 1/2}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]];
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 5, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 & 0.02 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0.13 & 0 & -0.13 \end{pmatrix} . \; x^{(k)} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

k = 0 $x^{(k)}$ = $\left\{9, 12, \frac{1}{2}\right\}$ ε_k = 32.8333

k = 1 $x^{(k)}$ = {4.91, 2.15, 1.605} ε_k = 8.20833

k = 2 $x^{(k)}$ = {6.3261, 1.0545, 0.92965} ε_k = 2.05208

k = 3 $x^{(k)}$ = {6.28053, 1.01249, 1.20154} ε_k = 0.513021

k = 4 $x^{(k)}$ = {6.29473, 0.981095, 1.16027} ε_k = 0.128255

k = 5 $x^{(k)}$ = {6.29562, 0.982083, 1.16748} ε_k = 0.0320638

За сравнение, точното решение е {6.29563, 0.981472, 1.16675}

Определяне на брой итерации за достигане на

точност 10^{-5}

In[∘]:=
$$\frac{\text{Log}\left[\frac{10^{-5}}{\text{normx0}+\frac{\text{normc}}{1-\text{normB}}}\right]}{\text{Log}[\text{normB}]}$$

Out[∘]=

10.8234

Необходимият брой итерации е 11.

За проверка и сравнение:

In[∘]:=
$$A = \begin{pmatrix} 1.1 & 0.1 & -0.02 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \\ -0.13 & 0 & 1.13 \end{pmatrix}; \; b = \{7, 1, 0.5\};$$

```
n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
B = IM - A;
c = b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]

(*проверка на сходимост
 и избор на норма - отделно*)

x = {9, 12, 1/2}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]];
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 15, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.1 & 0.02 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \\ 0.13 & 0 & -0.13 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

k = 0 $x^{(k)} = \left\{9, 12, \frac{1}{2}\right\}$ $\varepsilon_k = 32.8333$

k = 1 $x^{(k)} = \{4.91, 2.15, 1.605\}$ $\varepsilon_k = 8.20833$

k = 2 $x^{(k)} = \{6.3261, 1.0545, 0.92965\}$ $\varepsilon_k = 2.05208$

k = 3 $x^{(k)} = \{6.28053, 1.01249, 1.20154\}$ $\varepsilon_k = 0.513021$

k = 4 $x^{(k)} = \{6.29473, 0.981095, 1.16027\}$ $\varepsilon_k = 0.128255$

k = 5 $x^{(k)} = \{6.29562, 0.982083, 1.16748\}$ $\varepsilon_k = 0.0320638$

k = 6 $x^{(k)} = \{6.29558, 0.98146, 1.16666\}$ $\varepsilon_k = 0.00801595$

k = 7 $x^{(k)} = \{6.29563, 0.98148, 1.16676\}$ $\varepsilon_k = 0.00200399$

k = 8 $x^{(k)} = \{6.29562, 0.981472, 1.16675\}$ $\varepsilon_k = 0.000500997$

k = 9 $x^{(k)} = \{6.29563, 0.981472, 1.16675\}$ $\varepsilon_k = 0.000125249$

k = 10 $x^{(k)} = \{6.29563, 0.981472, 1.16675\}$ $\varepsilon_k = 0.0000313123$

k = 11 $x^{(k)} = \{6.29563, 0.981472, 1.16675\}$ $\varepsilon_k = 7.82808 \times 10^{-6}$

k = 12 $x^{(k)} = \{6.29563, 0.981472, 1.16675\}$ $\varepsilon_k = 1.95702 \times 10^{-6}$

k = 13 $x^{(k)} = \{6.29563, 0.981472, 1.16675\}$ $\varepsilon_k = 4.89255 \times 10^{-7}$

k = 14 $x^{(k)} = \{6.29563, 0.981472, 1.16675\}$ $\varepsilon_k = 1.22314 \times 10^{-7}$

k = 15 $x^{(k)} = \{6.29563, 0.981472, 1.16675\}$ $\varepsilon_k = 3.05784 \times 10^{-8}$

За сравнение, точното решение е $\{6.29563, 0.981472, 1.16675\}$

Пример за несходящ (разходящ) процес

```
In[◦]:= A = ( 11     0.1  -0.02
              0      9     0.1
             -0.13   0     113  ); b = {7, 1, 0.5};

n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
B = IM - A;
c = b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]

(*проверка на сходимост
 и избор на норма - отделно*)

x = {9, 12, 1/2}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]];
Print["Нормата ||B|| = ", normB]
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 5, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -10 & -0.1 & 0.02 \\ 0 & -8 & -0.1 \\ 0.13 & 0 & -112 \end{pmatrix} .\ x^{(k)} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

Нормата ||B|| = 112.12

k = 0 $x^{(k)}$ = $\{9, 12, \frac{1}{2}\}$ ε_k = 21.4235

k = 1 $x^{(k)}$ = {-84.19, -95.05, -54.33} ε_k = 2402.

k = 2 $x^{(k)}$ = {857.318, 766.833, 6074.52} ε_k = 269 313.

k = 3 $x^{(k)}$ = {-8521.38, -6741.12, -680 234.} ε_k = 3.01953×10^{7}

k = 4 $x^{(k)}$ = $\{72\,290.2, 121\,953., 7.61851\times10^{7}\}$ ε_k = 3.3855×10^{9}

k = 5 $x^{(k)}$ = $\{788\,611., -8.59413\times10^{6}, -8.53272\times10^{9}\}$ ε_k = 3.79582×10^{11}

За сравнение, точното решение е {0.635363, 0.111054, 0.00515573}

модифициран метод при положително определена матрица A

In[ ]:=
```
A = {{11, 0.1, -0.02}, {0, 9, 0.1}, {-0.13, 0, 113}};
PositiveDefiniteMatrixQ[A]
```

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0.1 & -0.02 \\ 0 & 9 & 0.1 \\ -0.13 & 0 & 113 \end{pmatrix};$$

Out[ ]=
```
True
```

In[ ]:=
```
Eigenvalues[A]
```

Out[ ]=
```
{113., 11., 8.99999}
```

In[ ]:=
```
Norm[A]
```

Out[ ]=
```
113.
```

Избираме ρ да е по-голямо от нормата на матрицата A.

```
In[•]:= A = (11    0.1  -0.02
             0     9     0.1
             -0.13 0     113); b = {7, 1, 0.5};

n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
ro = 200;
B = IM - 2/ro A;
c = 2/ro b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]

(*проверка на сходимост
 и избор на норма - отделно*)

x = {9, 12, 1/2}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]];
Print["Нормата ||B|| = ", normB]
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 5, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{89}{100} & -0.001 & 0.0002 \\ 0 & \frac{91}{100} & -0.001 \\ 0.0013 & 0 & -\frac{13}{100} \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{7}{100} \\ \frac{1}{100} \\ 0.005 \end{pmatrix}$

Нормата ||B|| = 0.911

k = 0 $x^{(k)}$ = $\{9, 12, \frac{1}{2}\}$ ε_k = 22.4551

k = 1 $x^{(k)}$ = {8.0681, 10.9295, -0.0483} ε_k = 20.4566

k = 2 $x^{(k)}$ = {7.23967, 9.95589, 0.0217675} ε_k = 18.6359

k = 3 $x^{(k)}$ = {6.50335, 9.06984, 0.0115818} ε_k = 16.9773

k = 4 $x^{(k)}$ = {5.84892, 8.26354, 0.0119487} ε_k = 15.4663

k = 5 $x^{(k)}$ = {5.26728, 7.52981, 0.0110503} ε_k = 14.0898

За сравнение, точното решение е {0.635363, 0.111054, 0.00515573}

In[∘]:=

$$\frac{\text{Log}\left[\frac{10^{-5}}{\text{normx0}+\frac{\text{normc}}{1-\text{normB}}}\right]}{\text{Log}[\text{normB}]}$$

Out[∘]=

156.894