Метод на Якоби (простата итерация) за решаване на СЛАУ

Задача 2: Дадена е системата линейни алгебрични уравнения (в случая p = 1, q = 9)

$10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = p$

$-x_1 + 10x_2 - x_3 = q$

$-3x_1 + 18x_3 + x_4 = p + q$

$2x_1 - x_2 + 21x_4 = -10$

а) Запишете итерационния процес за метод на Якоби

б) Сходящ ли е итерационния процес и ако да, защо?

в) Изберете начално приближение за итерационния процес.

г) Изчислете приближеното решение с точност 10^{-3} по метода на Якоби. Представете резултатите в таблица. Ако сте направили повече от 5 итерации, запишете само първите 2 и последните 2 в таблицата.

д) С колко знака се представя крайния резултат и с колко знака е необходимо да извършваме междинните изчисления?

In[∘]:=
$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 10 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 18 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 21 \end{pmatrix}; \quad b = \{1, 9, 10, -10\};$$

```
In[∘]:= Print["За сравнение точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

```
За сравнение точното решение е {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365}
```

1. Конструиране на метода - получаване на матрицата **B** и вектора **c**

```
In[∘]:= n = Length[A];
```

```
In[∘]:= c = Table[0, n];
```

```
In[∘]:= B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
```

In[∘]:= For[i = 1, i ≤ n, i++,

$$B[[i]] = -\frac{A[[i]]}{A[[i, i]]};$$

$$B[[i, i]] = 0;$$

$$c[[i]] = \frac{b[[i]]}{A[[i, i]]}$$

]

2. Проверка за сходимост на итерационния процес

```
In[•]:= Print["Итерационния процес е x^(k+1) = ",
  N[B // MatrixForm], ".x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

Итерационния процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0. & 0.1 & -0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0. & 0.1 & 0. \\ 0.166667 & 0. & 0. & -0.0555556 \\ -0.0952381 & 0.047619 & 0. & 0. \end{pmatrix} .x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.9 \\ 0.555556 \\ -0.47619 \end{pmatrix}$

Извод: Итерационния процес е сходящ, защото елементите от главния диагонал на матрицата A са по-големи от всички останали елементи на матрицата A.

3. Избор на начално приближение

```
In[•]:= x = {-6, 12.4, 11, -6.5};
```

4. Изчислете приближеното решение с точност 10^{-3} по метода на Якоби

Първа норма

```
In[•]:= N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]]]
```

$$N\left[\mathrm{Max}\left[\mathrm{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]\right]$$

Out[•]=

0.6

Втора норма

```
In[•]:= N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]]]
```

$$N\left[\mathrm{Max}\left[\mathrm{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]\right]$$

Out[•]=

0.361905

Трета норма

In[•]:=

$$N\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B[[i, j]]^2}\right]$$

Out[•]=

0.449669

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е втора.

Извършваме итерациите

In[•]:=
```
N[10^-3]
```
Out[•]=
```
0.001
```

In[•]:=
$$\text{normB} = N\left[\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]\right];$$

In[•]:=
```
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
```

In[•]:=
$$\text{For}\Big[k = 0,\ k \le 20,\ k{+}{+},$$
$$\text{Print}\left[\text{"k = ", k, " } x^{(k)} \text{ = ", N[x], " } \varepsilon_k \text{ = ", eps} = \text{normB}^k\left(\text{normx0} + \frac{\text{normc}}{1 - \text{normB}}\right)\right];$$
$$x = B.x + c$$
$$\Big]$$

k = 0 $x^{(k)}$ = {-6., 12.4, 11., -6.5} ε_k = 39.0841

k = 1 $x^{(k)}$ = {-2.81, 1.4, -0.0833333, 0.685714} ε_k = 14.1447

k = 2 $x^{(k)}$ = {0.462381, 0.610667, 0.049127, -0.141905} ε_k = 5.11904

k = 3 $x^{(k)}$ = {0.10867, 0.951151, 0.640503, -0.491147} ε_k = 1.8526

k = 4 $x^{(k)}$ = {-0.0803297, 0.974917, 0.600953, -0.441247} ε_k = 0.670466

k = 5 $x^{(k)}$ = {-0.055073, 0.952062, 0.566681, -0.422115} ε_k = 0.242645

k = 6 $x^{(k)}$ = {-0.0447646, 0.951161, 0.569828, -0.425609} ε_k = 0.0878144

k = 7 $x^{(k)}$ = {-0.0465322, 0.952506, 0.57174, -0.426634} ε_k = 0.0317804

k = 8 $x^{(k)}$ = {-0.0470875, 0.952521, 0.571502, -0.426401} ε_k = 0.0115015

k = 9 $x^{(k)}$ = {-0.0469688, 0.952441, 0.571397, -0.426348} ε_k = 0.00416245

k = 10 $x^{(k)}$ = {-0.0469395, 0.952443, 0.571413, -0.426363} ε_k = 0.00150641

k = 11 $x^{(k)}$ = {-0.0469473, 0.952447, 0.571419, -0.426366} ε_k = 0.000545177

k = 12 $x^{(k)}$ = {-0.0469488, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 0.000197302

k = 13 $x^{(k)}$ = {-0.0469483, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 0.0000714045

k = 14 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 0.0000258416

k = 15 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 9.35221×10^{-6}

k = 16 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 3.38461×10^{-6}

k = 17 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 1.22491×10^{-6}

k = 18 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 4.433×10^{-7}

k = 19 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 1.60432×10^{-7}

k = 20 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 5.80612×10^{-8}

Извод: За достигане на точност 10^{-3} при начално приближение $x^{(0)} = (-7,\ 11.4,\ 16,\ -8.5)^T$ са необходими 11 итерации.

Краен резултат:

k = 0 $x^{(k)}$ = {-6., 12.4, 11., -6.5} ε_k = 39.0841

k = 1 $x^{(k)}$ = {-2.81, 1.4, -0.0833333, 0.685714} ε_k = 14.1447

k = 10 $x^{(k)}$ = {-0.0469395, 0.952443, 0.571413, -0.426363} ε_k = 0.00150641

k = 11 $x^{(k)}$ = {-0.0469473, 0.952447, 0.571419, -0.426366} ε_k = 0.000545177