Модифициран метод на Ойлер

Както и в предишния явен метод на Ойлер, предполагаме, че се решава следната начална задача (задача на Коши):

$$\begin{aligned} & y'(x) = f(x, y), \qquad x \in [a, b] \\ & y(a) = y_0 \end{aligned} \quad . \tag{1}$$

Използва се отново равномерна мрежа по оста x със стъпка $h = \dfrac{b-a}{n}$:

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, където $x_i = a + i\,h, \quad i = 0, 1, \ldots, n$.

По дадено начално значение y_0 е търсят приближено стойностите на функцията $y(x)$ в избраните точки x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, т.е. решението се намира във вид на таблица от стойности $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Модифицираният метод на Ойлер е също явен метод, но изчисляването на всяка следваща стойност на решението y_{i+1} се извършва с помощтта на две последователни пресмятания по формулите:

$$\begin{aligned} & y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \\ & y_{i+1} = y_i + h\, f_{i+\frac{1}{2}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{2}$$

където сме означили $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \dfrac{h}{2}, \quad f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$

Локалната грешка на модифицирания метод на Ойлер е с един порядък по малка от тази на обикновения метод на Ойлер, т.е. $r_i = O(h^3)$, при предположение за ограниченост на третата производна на решението.

Задача 1. По модифицирания метод на Ойлер решете числено задачата и резултата сравнете с точното решение $y^*(x)$.

$$y' = \frac{2y}{x} + x \ , \quad y(1) = 1, \quad x \in [1, 1.4], \quad n = 4, \quad y^*(x) = x^2 + x^2 \ln(x) \ .$$

i	x_i	y_i	y_i^*
0	1.0	1.00000	1.00000
1	1.1	1.32405	1.32533
2	1.2	1.69982	1.70254
3	1.3	2.12905	2.13340
4	1.4	2.61336	2.61949

Табл. 4 Резултати към задача 1 .

Задача 2. Приложете модифицирания метод на Ойлер за приближено решаване на следните начални задачи:

а) $y' = \exp(-\frac{x}{y})\,(\frac{x}{y}-1)$, $y(0)=1$, $x \in [0, 1]$, $n=5$

б) $y' = x\cos(y) - 2y\sin(x)$, $y(0)=-1$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $n=3$

в) $y' = y + \frac{x}{y}$, $y(-1)=1$, $x \in [-1, 0]$, $n=5$

г) $y' = \frac{2y-x}{x+y}$, $y(2)=0.5$, $x \in [2, 3]$, $n=5$

д) $y' = \sin\left(x^2+y^2\right)$, $y(0)=0$, $x \in [0, 0.3]$, $n=3$

Задача 3. С модифицирания метод на Ойлер интегрирайте задачата:

$$y' = \alpha x^2 + \beta y^2, \quad y(0)=0, \quad x \in [0, 0.8], \ n=4,$$

където коефициентите приемат стойности $\alpha = 1, 2, 3$ и $\beta = 1, 2, 3$.

Задача 4. С помощта на модифицирания метод на Ойлер решете задачата:

$$y' = \frac{\alpha}{x^2+y^2+1}, \quad y(0)=0, \quad x \in [0, 0.4], \quad n=4, \quad \alpha = 1,\ 1.1,\ 1.2$$

Задача 5. По модифицирания метод на Ойлер да се решат задачите:

а) $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = x^2 + \frac{y}{z} \end{cases}$, $y(0)=1$, $z(0)=2$, $0 \le x \le 0.3$, $n=3$

б) $\begin{cases} y' = \alpha + y + z \\ z' = \frac{2z}{y+\beta} \end{cases}$, $y(0)=1$, $z(0)=-1$, $1 \le x \le 1.2$, $n=2$

$\alpha = 0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3$, $\beta = 1,\ 2,\ 3.$

Автор:
Снежана Гочева-Илиева
snow@uni-plovdiv.bg