3.1 Б – **сплайн функции. Основни свойства**

Нека са дадени реалните числа $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m$ $(m \in N)$, които принадналежат на интервала $[0,1]$. Тези числа ще наричаме *възли*.

Възлите, които са $m+1$ на брой, ако се обединят в една ненамаляваща числова редица, като записваме:

$$U = \{\ u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, u_m\ \},\quad u_i \in [0,1]$$

а U наричаме *възлов вектор* (*възлова редица*).

- Ако някой възел u_i участва само веднъж във възловия вектор U, то той има кратност $k = 1$ и се нарича *прост* или *еднократен възел*.

- В случай, че кратността на възела u_i е $k \geq 2$, то той се нарича *многократен* $(k-$кратен) *възел* и записваме във възловия вектор $u_i\,[\,k\,]$.

$$U = \{\ u_0, u_1, u_2, \ldots,\ u_i\,[k], \ldots, u_{m-1}, u_m\ \}$$

Една Б $-$ сплайн функция $N_{i,p}(u)$ от степен p над възловия вектор U се дефинира чрез *формулите на Кокс – де Боор* по следния начин:

- Ако функцията е от нулева степен, т.е. при $p = 0$, тя се определя от формула:

(3.1) $$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [u_i, \quad u_{i+1}) \\ 0, & u \notin [u_i, \quad u_{i+1}) \end{cases},$$

а ако тя е от по- висока степен $p \geq 1$, се пресмята чрез:

(3.2) $$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Важни свойства на Б $-$ *сплайн функции*

- Реалният произволен параметър (*аргумент*) u се изменя в интервала $[0,1]$.
- Ако в $[u_i, \ u_{i+1})$ $u_i \equiv u_{i+1}$, т.е. $\nexists \ u \in [u_i, \ u_{i+1}) \Rightarrow N_{i,0}(u) \equiv 0$.
- За произволно $u_0 \in [0,1]$ сумата от всички Б $-$ сплайн функции $N_{i,p}(u)$ от степен p е равна на единица.

Задача 3.2* / *стр. 44* Изчислете посочената Б − сплайн функция $N_{i,p}(u)$ при съответния възлов вектор и начертайте графиката ѝ.

а) $N_{1,2}(u)$, $U = \{0\,;0{,}25\,;0{,}4\,;0{,}6\,;1\}$.

Решение: Посочените пет възли ги подреждаме в таблица. Търсим явния вид на посочената Б − сплайн функция $N_{1,2}(u)$ и после чертаем нейната графика.

$\begin{vmatrix} u_0 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ 0{,}25 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_2 \\ 0{,}4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_3 \\ 0{,}6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_4 \\ 1 \end{vmatrix}$ ⇒ всички възли ги разпределяме в последователни интервали:

$$\begin{array}{lllll}
[\,u_0\,,u_1\,) \equiv [0\,;0{,}25) & \rightarrow & N_{0,0} & & \\
 & & & N_{0,1} & N_{0,2} \\
[\,u_1\,,u_2\,) \equiv [0{,}25\,;0{,}4) & \rightarrow & N_{1,0} & & \\
 & & & N_{1,1} & N_{1,2} \\
[\,u_2\,,u_3\,) \equiv [0{,}4\,;0{,}6) & \rightarrow & N_{2,0} & & \\
 & & & N_{2,1} & \\
[\,u_3\,,u_4\,) \equiv [0{,}6\,;1] & \rightarrow & N_{3,0} & &
\end{array}$$

1. $N_{1,0}(u) = \begin{cases} 1\,, & u \in [0{,}25\,;\ 0{,}4) \\ 0\,, & u \notin [0{,}25\,;\ 0{,}4) \end{cases}$, $N_{2,0}(u) = \begin{cases} 1\,, & u \in [0{,}4\,;\ 0{,}6) \\ 0\,, & u \notin [0{,}4\,;\ 0{,}6) \end{cases}$

$$N_{3,0}(u) = \begin{cases} 1\,, & u \in [0{,}6\,;\ 1) \\ 0\,, & u \notin [0{,}6\,;\ 1) \end{cases}$$

2. $N_{1,1}(u) = ?,\ \ N_{2,1}(u) = ?$ като функции на аргумента u.

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

$$N_{1,1}(u) = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} N_{1,0}(u) + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) = \frac{u - 0{,}25}{0{,}4 - 0{,}25} N_{1,0}(u) + \frac{0{,}6 - u}{0{,}6 - 0{,}4} N_{2,0}(u)$$

$$N_{1,1}(u) = \frac{5}{3}(4u - 1) N_{1,0}(u) + (3 - 5u) N_{2,0}(u)$$

$$N_{1,1}(u) = \begin{cases} \frac{5}{3}(4u - 1), & u \in [0{,}25\,;\ 0{,}4) \\ (3 - 5u), & u \in [0{,}4\,;\ 0{,}6) \\ 0, & u \notin [0{,}25\,;\ 0{,}6) \end{cases}$$

$$N_{2,1}(u) = \frac{u - u_2}{u_3 - u_2} N_{2,0}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_3} N_{3,0}(u) = \frac{u - 0{,}4}{0{,}6 - 0{,}4} N_{2,0}(u) + \frac{1 - u}{1 - 0{,}6} N_{3,0}(u)$$

$$N_{2,1}(u) = (5u - 2) N_{2,0}(u) + \frac{5}{2}(1 - u) N_{3,0}(u)$$

$$N_{2,1}(u) = \begin{cases} (5u - 2), & u \in [0{,}4\,;\ 0{,}6) \\ \frac{5}{2}(1 - u), & u \in [0{,}6\,;\ 1] \\ 0, & u \notin [0{,}4\,;\ 1] \end{cases}$$

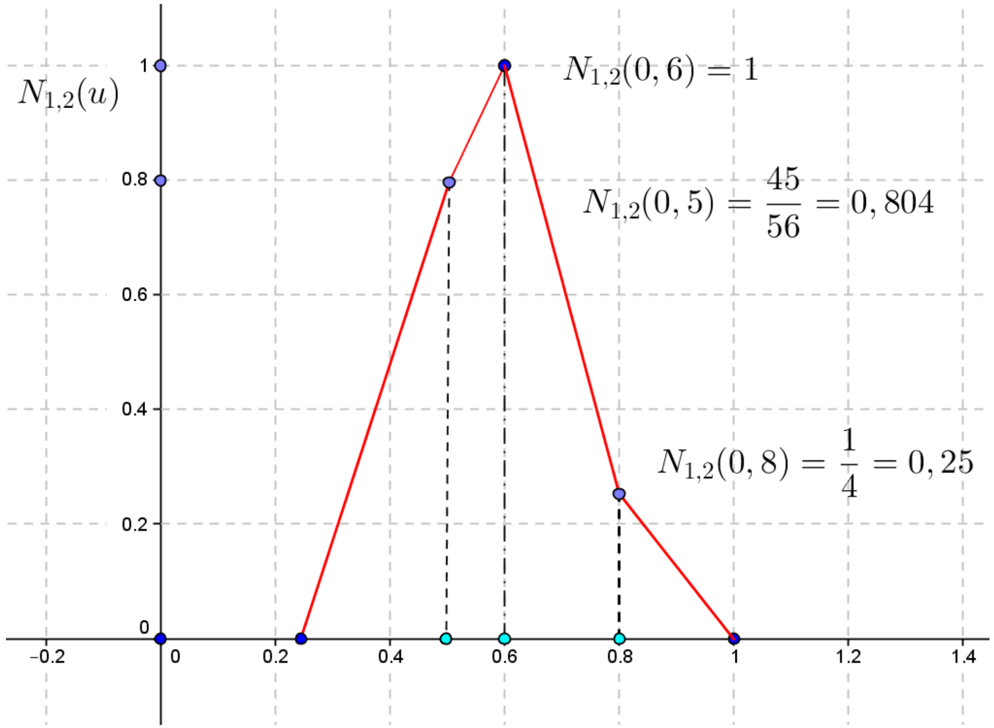
3. $N_{1,2}(u) = \ ?$ като функция на аргумента u .

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

$$N_{1,2}(u) = \frac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,1}(u) + \frac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,1}(u) = \frac{u - 0{,}25}{0{,}6 - 0{,}25} N_{1,1}(u) + \frac{1 - u}{1 - 0{,}4} N_{2,1}(u)$$

$$N_{1,2}(u) = \frac{5}{7}(4u - 1)N_{1,1}(u) + \frac{5}{2}(1 - u)N_{2,1}(u)$$

$$N_{1,2}(u) = \begin{cases} \frac{25}{21}(4u-1)^2, u \in [0{,}25\ ;\ 0{,}4) \\ *,\ u \in [0{,}4\ ; 0{,}6) \\ \frac{25}{4}(1-u)^2,\ u \in [0{,}6\ ;\ 1] \\ 0\ , \qquad u \notin [0{,}25\ ;\ 1] \end{cases}$$



$$* = \frac{5}{7}(4u - 1)(3 - 5u) + \frac{5}{2}(1 - u)(5u - 2)$$

Задача 3.3 / стр. 45 Нека $U = \{0\,;0{,}2\,;0{,}4\,;0{,}5\,;0{,}8\,;0{,}9\,;1\}$ е даден възлов вектор. Намерете стойностите на ненулевите основни Б – сплайн функции от втора степен $N_{i,2}(u)$ и тяхната сума при:

б) $u_0 = 0{,}6$

Решение: Посочените 7 възли ги подреждаме в таблица.

$\left|\begin{matrix} u_0 \\ 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u_1 \\ 0{,}2 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u_2 \\ 0{,}4 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u_3 \\ 0{,}5 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u_4 \\ 0{,}8 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u_5 \\ 0{,}9 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u_6 \\ 1 \end{matrix}\right|$ $\Rightarrow$ всички възли ги разпределяме в последователни интервали (всички функции $\boldsymbol{N_{i,j}(u_0) \equiv 0}$):

$$\begin{array}{rlccc}
 & [\,u_0\,,u_1\,) \equiv [0\,;0{,}2) \rightarrow & \boldsymbol{N_{0,0}} & \boldsymbol{N_{0,1}} & \boldsymbol{N_{0,2}} \\
 & [\,u_1\,,u_2\,) \equiv [0{,}2\,;0{,}4) \rightarrow & \boldsymbol{N_{1,0}} & \boldsymbol{N_{1,1}} & \\
 & [\,u_2\,,u_3\,) \equiv [0{,}4\,;0{,}5) \rightarrow & \boldsymbol{N_{2,0}} & N_{2,1} & N_{1,2} \\
0{,}6 \in & [\,u_3\,,u_4\,) \equiv [0{,}5\,;0{,}8) \rightarrow & N_{3,0} & N_{3,1} & N_{2,2} \\
 & [\,u_4\,,u_5\,) \equiv [0{,}8\,;0{,}9) \rightarrow & \boldsymbol{N_{4,0}} & \boldsymbol{N_{4,1}} & N_{3,2} \\
 & [\,u_5\,,u_6\,) \equiv [0{,}9\,;1] \rightarrow & \boldsymbol{N_{5,0}} & &
\end{array}$$

1. $N_{3,0}(0{,}6) \equiv 1,\ u \in [0{,}5\,;0{,}8)$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

2. $N_{2,1}(0{,}6) = \frac{u_4 - 0{,}6}{u_4 - u_3} N_{3,0}(0{,}6) = \frac{0{,}8 - 0{,}6}{0{,}8 - 0{,}5} \, .1 = \frac{2}{3}$

- За произволно $u_0 \in [0{,}1]$ сумата от всички Б $-$ сплайн функции $N_{i,p}(u)$ от степен p е равна на единица.

$$N_{2,1}(0{,}6) + N_{3,1}(0{,}6) = 1 \;\Rightarrow\; N_{3,1}(0{,}6) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

3. $N_{1,2}(0{,}6) = \frac{u_4 - 0{,}6}{u_4 - u_2} N_{2,1}(0{,}6) = \frac{0{,}8 - 0{,}6}{0{,}8 - 0{,}4} \, . \frac{2}{3} = \frac{2.2}{4.3} = \frac{1}{3}$

$$N_{3,2}(0{,}6) = \frac{0{,}6 - u_3}{u_5 - u_3} N_{3,1}(0{,}6) = \frac{0{,}6 - 0{,}5}{0{,}9 - 0{,}5} \, . \frac{1}{3} = \frac{1.1}{4.3} = \frac{1}{12}$$

$$N_{1,2}(0{,}6) + N_{2,2}(0{,}6) + N_{3,2}(0{,}6) = 1 \;\Rightarrow\; N_{2,2}(0{,}6) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{12}$$

3.2 Б – сплайн криви. Основни свойства

Една Б – сплайн крива $C(u)$, $u \in [0,1]$ с дадена степен p , е дефинирана чрез възлов вектор
$U = \{\ u_0, u_1, u_2, \dots, u_m\ \}$, $u_i \in [0,1]$ и контролни точки $P_0\ , P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$.

Общото уравнение на тази крива се определя от равенството:

(3.13) $$C(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u) \,.\, P_i = N_{0,p}(u) \,.\, P_0 + N_{1,p}(u) \,.\, P_1 + \cdots + N_{n,p}(u) \,.\, P_n \ ,$$

където $m = p + n + 1$, т.е. *степента на кривата* $+$ *броя на контролните точки* $=$ *броят на възлите* $- 1$.

Основни свойства на Б – *сплайн кривите*

- ***Силно свойство на изпъкналата обвивка***: Дъгата от кривата, дефинирана в интервала $[\,u_i\ ,\ \ u_{i+1})$ се съдържа в изпъкналата обвивка на контролните точки $P_i\ , P_{i-1}, P_{i-2}, \dots, P_{i-p}$, т.е. тези точки се наричат *засегнати*.

$$u_0 \in [\,u_i\ ,\ \ u_{i+1}) \rightarrow \quad P_i\ , P_{i-1}, P_{i-2}, \dots, P_{i-p}\ \ , \ p - \text{ степен на кривата}$$

<u>*Задача 3.7 / стр. 49*</u> Дадена е Б – сплайн кривата $C(u)$ от втора степен, дефинирана чрез контролни точки $P_0(-2,-2)$, $P_1(-2,0)$, $P_2(0,4)$, $P_3\,(4,4)$ и възлов вектор $U = \{0\,;0{,}2\,;0{,}4\,;0{,}5\,;0{,}8\,;0{,}9\,;1\}$.
Намерете точката от кривата, съответстваща на $u_0 = 0{,}6$.

<u>*Решение*</u>*:*

Броят на контролните точки е *четири*, а степента на кривата е $p = 2$.
Възлите са *седем*, а от тук следва, че $m - 1 = 6$.

степента на кривата $+$ *броя на контролните точки* $=$ *броят на възлите* $- 1$.

$$2 + 4 = 6$$

$$u_0 = 0{,}6 \in [\,u_3\,, u_4\,) \equiv [0{,}5\,;0{,}8) \;\rightarrow\; P_3\,, P_2, P_1 - \text{ засегнати}$$

Само те участват в общото уравнение на тази крива, и в случая използваме формула (3.13):

$$C(u) \;=\; N_{3,2}(u)\,.\,P_3 + N_{2,2}(u)\,.\,P_2 + N_{1,2}(u)\,.\,P_1$$

$$C(0{,}6) \;=\; N_{3,2}(0{,}6)\,.\,P_3 + N_{2,2}(0{,}6)\,.\,P_2 + N_{1,2}(0{,}6)\,.\,P_1$$

$$C(0{,}6) \;=\; \frac{1}{12}(4,4) + \frac{7}{12}(0,4) + \frac{1}{3}(-2,0) = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3} + \frac{7}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$$