Б-сплайн повърхнини: Конструиране

Дадено:

1. матрица от m+1 реда и n+1 стълба с контр. т. $\mathbf{P}_{i,j}$, $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$;
2. възл. в-р от h + 1 възела по u-напр., $U = \{u_0, u_1, ..., u_h\}$;
3. възл. в-р от k + 1 възела по v-напр., $V = \{v_0, v_1, ..., v_k\}$;
4. степента p по u-напр.; и
5. степента q по v-напр.

Б-сплайн повърхнината **S**:

$$\mathbf{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}$$

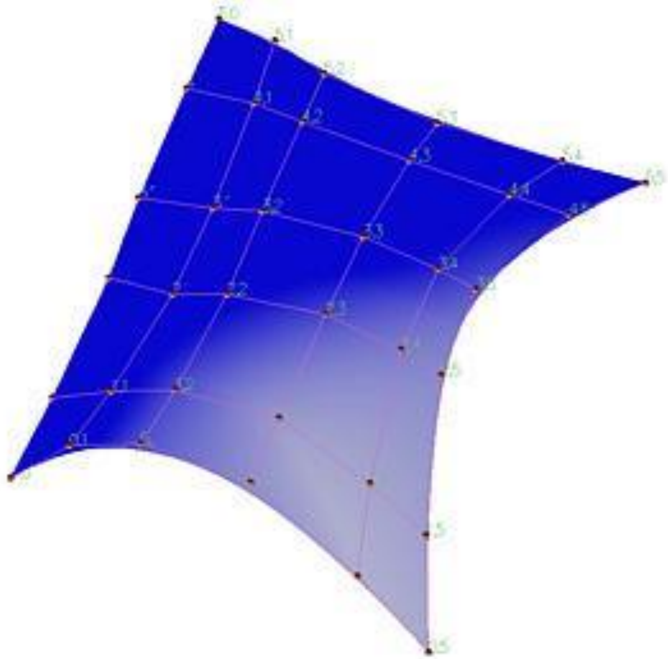
$N_{i,p}(u)$, $N_{j,q}(v)$ – осн. Б-спл. ф-ии съотв. от ст. p, q.

Осн. тъждества (по u-напр. и v-напр.): $\boxed{h = m + p + 1}$ и $\boxed{k = n + q + 1}$

$\Pi := \{\mathbf{P}_{i,j}\}$ – ***контр. мрежа***, $u, v \in [0, 1]$.

$\Rightarrow$ Б-спл. пов. **S**: $[0,1]\times[0,1] \to$ правоъг. къс (парче) от пов.

Напр. Б-спл. пов., деф. чрез 6 x 6 Π



U = {0[4]; 0,25; 0,5; 0,75; 1[3]} и p=2,

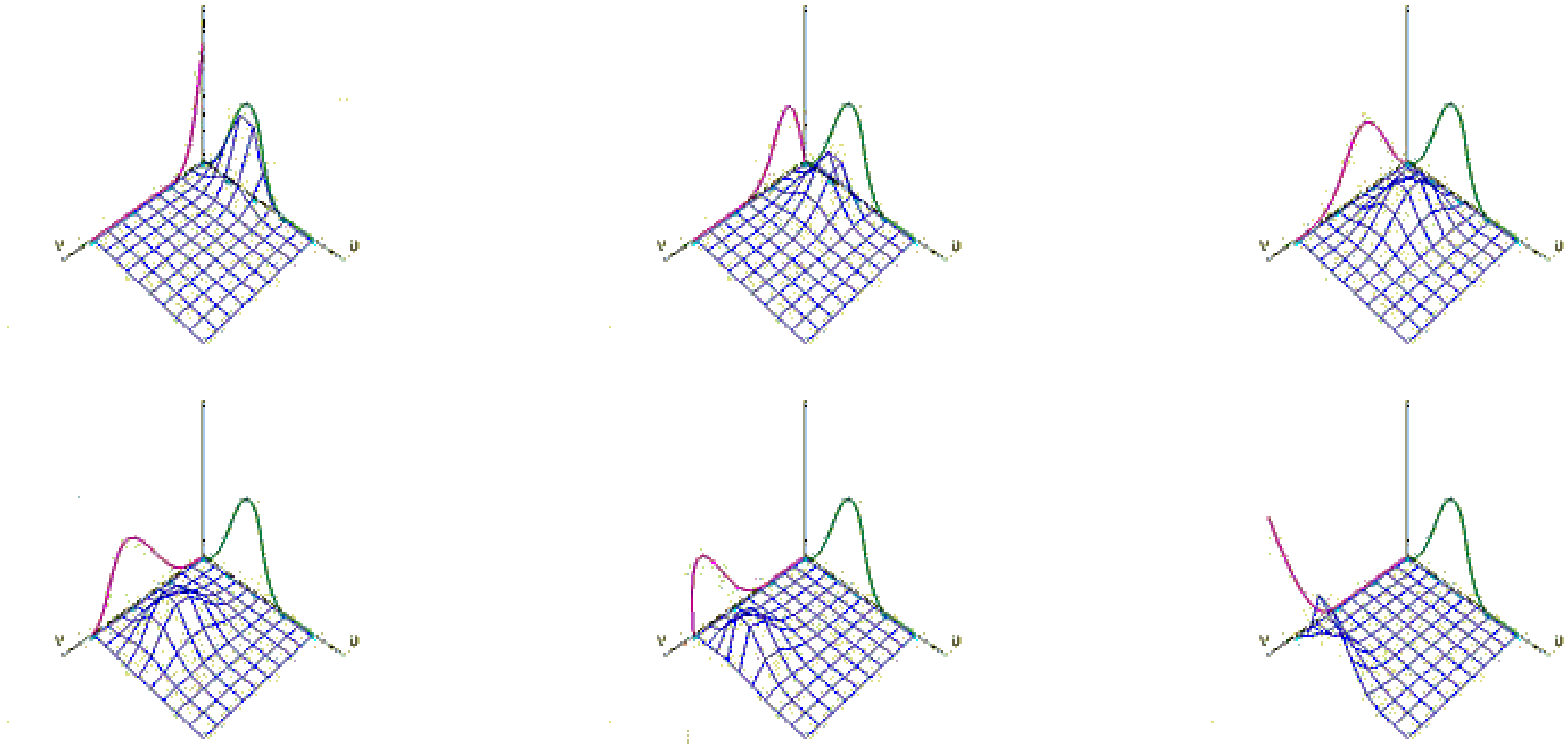
V = {0[4]; 0,33; 0,66; 1[4]} и q=3.

Основни функции

Коеф. на $\mathbf{P}_{i,j}$ е $N_{i,p}(u).N_{j,q}(v)$ – 2-мерна Б-спл. ф-ия (пов. къс)

$N_{i,p}(u).N_{j,q}(v) > 0$ *локално*.

Осн. ф-ии на $\mathbf{P}_{2,0}$, $\mathbf{P}_{2,1}$, $\mathbf{P}_{2,2}$, $\mathbf{P}_{2,3}$, $\mathbf{P}_{2,4}$, $\mathbf{P}_{2,5}$:



Стегнати, затворени и отворени Б-сплайн повърхнини

Б-сплайн пов. **S** – стегн., затв. или отв. по $\forall$ напр.

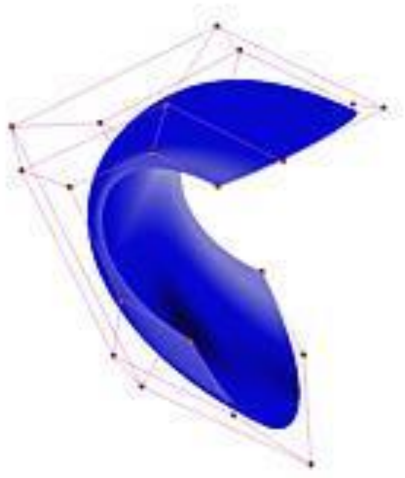
Ако **S** е стегн. и по 2-те напр., то **S** z $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{m,0}$, $\mathbf{P}_{0,n}$, $\mathbf{P}_{m,n}$ и е доп. към 8-те рамена на Π в тях.

Ако **S** е затв. по 1 напр., то $\forall$ пар. лин. по това напр. е затв. и **S** става тръба.

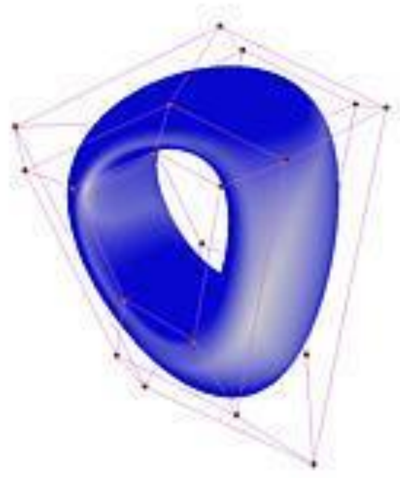
Ако **S** е отв. и по 2-те напр., то **S** не минава през $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{m,0}$, $\mathbf{P}_{0,n}$, $\mathbf{P}_{m,n}$.

Ако **S** е затв. и по 2-те напр.

Напр. 3 Б-спл. пов. от еднакъв тип по 2-те напр. в/у Π; възл. в-ри са различни.



стегната



затворена

отворена

Б-сплайн повърхнини: Важни свойства

Б-спл. пов. **S**, *p* – ст. по *u*-напр., и *q* – ст. по *v*-напр., Π – контр. мрежа (*m*+1)x(*n*+1):

$$\mathbf{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)\mathbf{P}_{i,j}$$

- **Неотрицателност:** $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) \geq 0$, $\forall$ *p*, *q*, *i*, *j*; *u*, *v* $\in$[0;1].
- **Разделяне на цялото:** $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) = 1$, $\forall$ *u*, *v* $\in$ [0;1].
- **Силно свойство на изпъкналата обвивка:** Ако $(u,v) \in [u_i,u_{i+1})$ x $[v_j,v_{j+1})$, то $P(u,v)$ $\in$ изп. обв. на $\{P_{h,k}\}$, $i-p <= h <= i$ и $j-q <= k <= j$.

  За *u*-напр., ако $u \in [u_i,u_{i+1})$, то $\exists \leq p+1$ ненул. осн. ф-ии:

  $N_{i,p}(u)$, $N_{i-1,p}(u)$, ..., $N_{i-p,p}(u)$ $\Rightarrow$ контр. т. от ред *i*-*p* до ред *i* имат ненул. $N(u)$.

Аналог., за $v \in [v_j, v_{j+1})$, $\exists \leq q+1$ ненул. осн. ф-ии: $N_{j,q}(v)$, $N_{j-1,q}(v)$, ..., $N_{j-q,q}(v)$

$\Rightarrow$ контр. т. от стълб j-q до стълб j имат ненул. $N(v)$.

$\therefore$ само контр. т. от ред i-p до ред i и от стълб j-q до стълб q имат ненул. N.

От „неотрицателността“ и „разделянето на цялото“

$\Rightarrow$ т. $\mathbf{P}(u,v) \in$ изп. обв. на тези контр. т.

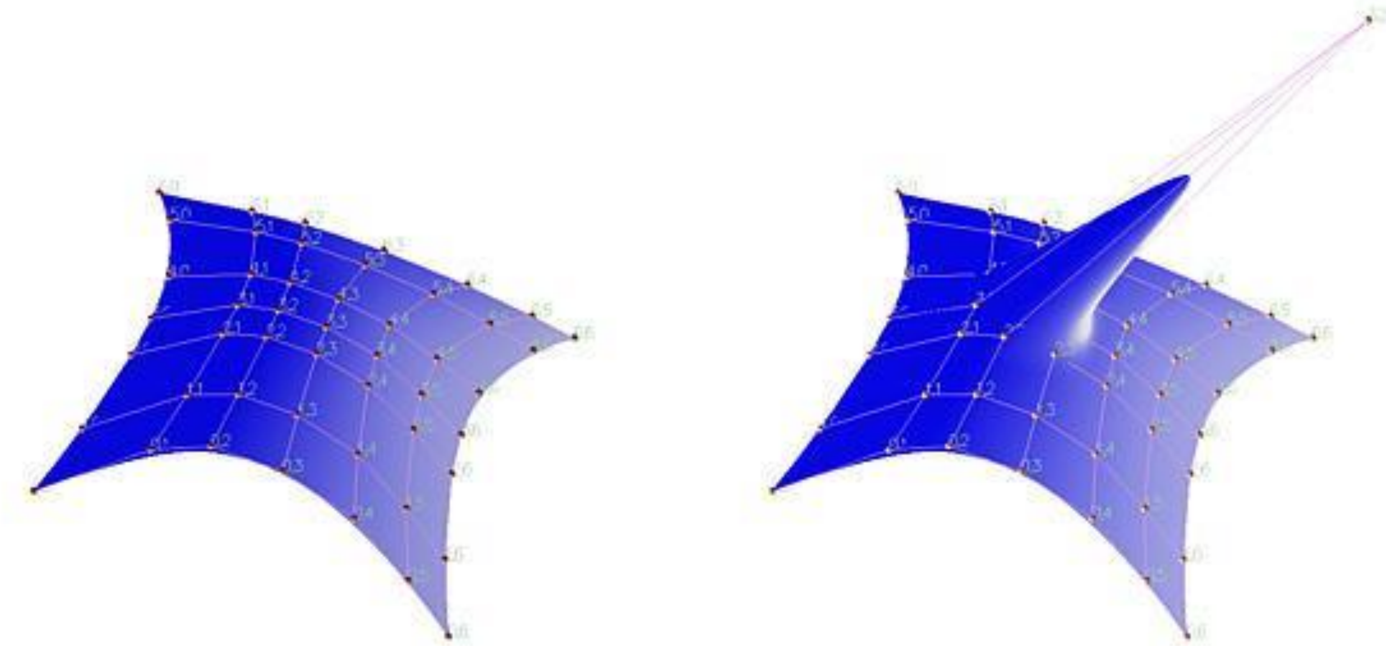
$\Rightarrow$ **S** в/у $[u_i, u_{i+1})$ x $[v_j, v_{j+1}) \subset$ същата изп. обв.

- **Локална модификационна схема:**

$N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) \neq 0$, $\forall\ (u,v) \in (u_i, u_{i+p+1})$ x (v_j, v_{j+q+1}).

По u-напр. $N_{i,p}(u) > 0$ в/у $[u_i, u_{i+p+1})$, по v-напр. $N_{j,q}(v) > 0$ в/у $[v_j, v_{j+q+1})$. $\Rightarrow$ за **S**.

Напр. ако $\mathbf{P}_{3,2} \to \mathbf{P}_{3,2}^*$, то само съседната област на тази контр. т. от **S** си променя формата.



- **S е C^{p-s}- (съотв. C^{q-t}-) непрек. по *u*- (съотв. *v*-) напр., ако *u* (съотв. *v*) е възел с кр. *s* (съотв. *t*).**
- **Афинна инвариантност**
- **$\nexists$ „променливо намаляване“ за В-спл. пов.**

- **Ако $m = p$, $n = q$ и $U = \{0, 0, ..., 0, 1, 1, ..., 1\}$, то Б-спл. пов. става Безие пов.**

Б-сплайн повърхнини: Алгоритъм на дьо Боор

Ако **S**:

$$\mathbf{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m} N_{i,p}(u)\left(\sum_{j=0}^{n} N_{j,q}(v)\mathbf{P}_{i,j}\right)$$

$$\mathbf{Q}_i(v) = \sum_{j=0}^{n} N_{j,q}(v)\mathbf{P}_{i,j}$$

то за $\forall i$ кр. $\mathbf{Q}_i(v)$ е Б-спл. крива, деф. чрез контр. т. от ред *i* на Π.

$\therefore$ $\mathbf{Q}_i(v^*)$ е т., съотв. на v^* в/у Б-спл. кр., деф. чрез контр. т. от ред *i*.

Ако $v^* \in [v_d, v_{d+1})$, то $q+1$ контр. т. от ред *i* уч. при изч. на $\mathbf{Q}_i(v^*)$, q е ст. на $N_{j,q}(v)$.

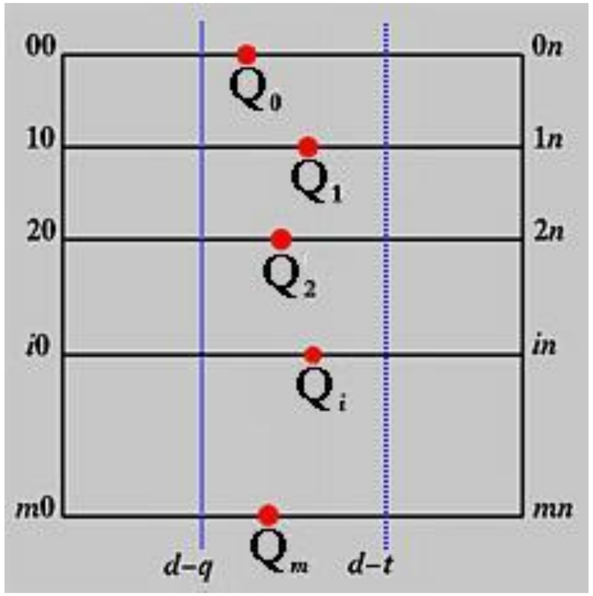
Тези контр. т. са $\mathbf{P}_{i,d}$, $\mathbf{P}_{i,d-1}$, ..., $\mathbf{P}_{i,d-q}$, ако $v^* \neq v_d$.

Ако $v^* = v_d[t]$, то изп. т. са $\mathbf{P}_{i,d-t}$, $\mathbf{P}_{i,d-t-1}$, ..., $\mathbf{P}_{i,d-q}$.

$\Rightarrow$ изп. контр. т. от стълб $d\text{-}q$ до стълб $d\text{-}t$;

прил. алг. дБ за $\forall$ ред

и пол. m+1 *нови* т. $\mathbf{Q}_0(v^*)$, $\mathbf{Q}_1(v^*)$, ..., $\mathbf{Q}_m(v^*)$:



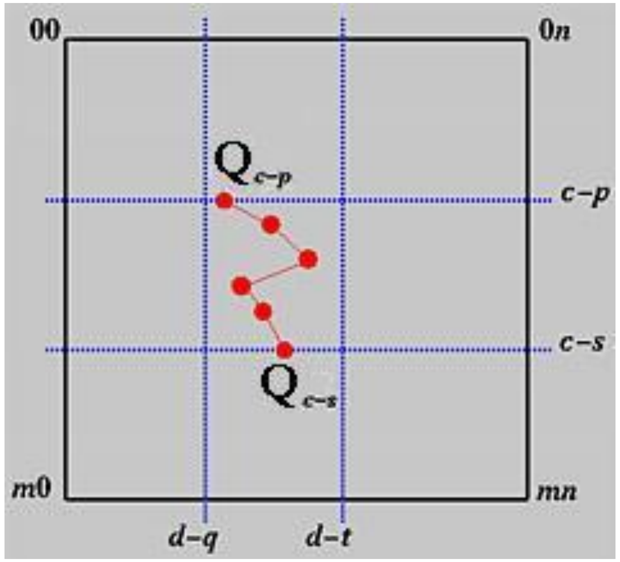
Зам. $\mathbf{Q}_i(v^*)$ и $\Rightarrow$

$$\mathbf{P}(u^*, v^*) = \sum_{i=0}^{m} N_{i,p}(u^*)\mathbf{Q}_i(v^*)$$

$\therefore$ $\mathbf{P}(u^*,v^*)$ е т. $\in$ Б-спл. кр. **C**, деф. чрез $\mathbf{Q}_0(v^*)$, $\mathbf{Q}_1(v^*)$, ..., $\mathbf{Q}_m(v^*)$.

За да нам. $\mathbf{P}(u^*,v^*)$, е необх. да нам. т. в/у **C**, съотв. на u^* чрез алг. дБ.

Нека $u^*\in[u_c,u_{c+1})$.



От лок. мод. схема $\Rightarrow$ само p+1 контр. т. се изп. при изч. на Б-спл. кр. от ст. p.

Ако $u^* \neq u_c$, изп. т. са $\mathbf{Q}_c(v^*)$, $\mathbf{Q}_{c\text{-}1}(v^*)$, ..., $\mathbf{Q}_{c\text{-}p}(v^*)$.

Ако $u^* = u_c[s]$, изп. т. са $\mathbf{Q}_{c\text{-}s}(v^*)$, $\mathbf{Q}_{c\text{-}s\text{-}1}(v^*)$, ..., $\mathbf{Q}_{c\text{-}p}(v^*)$.

$\therefore$ за $\mathbf{Q}_i(v^*)$ са необх. само p+1 реда.

Извод. За да намерим т. $\mathbf{P}(u^*,v^*)$, $u^*\in[u_c,u_{c+1})$, $v^*\in[v_d,v_{d+1})$ в/у Б-спл. пов.,

прил. алг. дБ за $\mathbf{P}_{i,d\text{-}q}$, $\mathbf{P}_{i,d\text{-}q+1}$, ..., $\mathbf{P}_{i,d\text{-}t}$ от $\forall$ ред i на Π, $i\in[c\text{-}p, c\text{-}s]$,

и пол. по 1 *нова* т. $\mathbf{Q}_i(v^*)$.

После прил. алг. дБ за $\mathbf{Q}_{c\text{-}p}(v^*)$, $\mathbf{Q}_{c\text{-}p+1}(v^*)$, ..., $\mathbf{Q}_{c\text{-}s}(v^*)$ и рез. е $\mathrm{P}(u^*,v^*)$

Напр. Б-спл. пов. **S**, деф. чрез 5×5 контр. т.

и $U = V = \{0[4]; 0,5; 1[4]\}$, т.е. ст. е 3x3.

u^*, v^* не са възли, а $u^* < 0,5$, $v^* \in [0,5; 1)$

$\Rightarrow$ $\mathbf{P}_{i,1}$, $\mathbf{P}_{i,2}$, $\mathbf{P}_{i,3}$, $\mathbf{P}_{i,4}$ се изп. в изч. по алг. дБ.

$u^* \in [0; 0,5)$ $\Rightarrow$ по u-напр. редове 0, 1, 2, 3

се изп. – зелените полигони за $\mathbf{Q}_i(v^*)$,

а жълтия полигон за т. $\mathbf{P}(u^*, v^*)$

(малката бяла сфера) в/у пов. **S**.