

# Линейни хомогенни диференциални уравнения от $n$ -ти ред с постоянни коефициенти

*Информатика, 2021/2022*

## ► Уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

където  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , се нарича линейно хомогенно диференциално уравнение от  $n$ -ти ред с постоянни коефициенти.

► Ще покажем, че за това уравнение съществуват частни решения от вида  $y = e^{\lambda x}$ , където  $\lambda$  е константа. Наистина, като заместим в (1) получаваме

$$(e^{\lambda x})^{(n)} + a_1 (e^{\lambda x})^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (e^{\lambda x})' + a_n e^{\lambda x} \equiv 0.$$

От  $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$  следва, че горното равенство е еквивалентно на

$$e^{\lambda x} (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) \equiv 0.$$

Делим двете страни на  $e^{\lambda x}$  и получаваме за  $\lambda$  уравнението

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (2)$$

което се нарича **характеристично уравнение** за (1), а неговите корени – **характеристични корени**.

► Възможни са няколко случая за характеристичните корени.

**I случай.** Всички корени  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  са различни. Тогава функциите

$$y_i = e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

са  $n$  на брой решения на (1). Ще докажем, че те са линейно независими. За целта пресмятаме детерминантата на Вронски

$$\begin{aligned}
W[e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\
&= e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j).
\end{aligned}$$

Очевидно, щом  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , то горната детерминанта е различна от 0.

Тогава, съгласно Теорема 3 от Лекция 7, функциите

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$$

са линейно независими и следователно образуват фундаментална система решения. Съгласно Теорема 7 от Лекция 7, общото решение на (1) е

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x},$$

където  $C_1, C_2, \dots, C_n$  са произволни константи.

**Забележка.** (i) Ако уравнението (1) има за решение комплекснозначната функция  $y(x) = u(x) + i v(x)$ , то функциите  $u(x)$  и  $v(x)$  също са решения на това уравнение.

(ii) Ако характеристичното уравнение (2) има комплексен корен  $p + iq$ , то за решението  $y = e^{(p+iq)x}$  по формулата на Ойлер имаме

$$e^{(p+iq)x} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$$

и като отделим реалната от имагинерната част получаваме, че реалните функции  $e^{px} \cos qx$  и  $e^{px} \sin qx$  също са решения на (1). Освен това непосредствено се проверява, че те са линейно независими (докажете го!).

Следователно, ако характеристичното уравнение (2) има комплексно спрегнати корени  $p \pm iq$ , то двойката комплекснозначни линейно независими функции

$$e^{(p+iq)x}, e^{(p-iq)x}$$

може да бъде заменена с двойката

$$e^{px} \cos qx, e^{px} \sin qx.$$

**II случай.** Характеристичното уравнение (2) има кратни корени. Нека  $\lambda$  е негов  $k$ -кратен корен. Означаваме

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Тогава са изпълнени равенствата

$$\chi(\lambda) = \chi'(\lambda) = \cdots = \chi^{(k-1)}(\lambda) = 0, \quad \chi^{(k)}(\lambda) \neq 0. \quad (3)$$

Означаваме също така

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y.$$

Лесно се вижда, че

$$\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1 \left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \left(e^{\lambda x}\right)_x' + a_n e^{\lambda x} \equiv \chi(\lambda) e^{\lambda x}.$$

Диференцираме двете страни на горното твърдение относно  $\lambda$  като вземаме предвид, че

$$\left(\left(e^{\lambda x}\right)_x^{(n)}\right)'_{\lambda} = \left(\left(e^{\lambda x}\right)'_{\lambda}\right)_x^{(n)} = \left(x e^{\lambda x}\right)_x^{(n)}. \quad (4)$$

Получаваме

$$\begin{aligned} \left(xe^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1 \left(xe^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \cdots + a_n \left(xe^{\lambda x}\right) \\ \equiv \chi'(\lambda)e^{\lambda x} + \chi(\lambda)xe^{\lambda x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ако  $\lambda$  е  $k$ -кратен характеристичен корен, то съгласно равенствата (3), дясната страна на полученото тъждество е равна на 0, т.е.

$$\left(xe^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1 \left(xe^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \cdots + a_n \left(xe^{\lambda x}\right) \equiv 0$$

или

$$L[xe^{\lambda x}] \equiv 0.$$

Последното тъждество показва, че функцията  $xe^{\lambda x}$  също е решение на уравнението (1).



Диференцираме още веднъж двете страни на тъждеството (5) относно  $\lambda$  и след прилагане на формулите (4) получаваме, че

$$\begin{aligned} \left(x^2 e^{\lambda x}\right)_x^{(n)} + a_1 \left(x^2 e^{\lambda x}\right)_x^{(n-1)} + \cdots + a_n \left(x^2 e^{\lambda x}\right) \\ \equiv \chi''(\lambda) e^{\lambda x} + 2\chi'(\lambda) x e^{\lambda x} + \chi(\lambda) x^2 e^{\lambda x}, \end{aligned} \quad (6)$$

откъдето, след отчитане на равенствата (3),

$$L[x^2 e^{\lambda x}] \equiv 0.$$

Ясно е, че след  $(k-1)$ -то диференциране на основното тъждество (5) относно  $\lambda$  и след прилагане на формулите (4), ще получим тъждество, лявата страна на което е  $L[x^{(k-1)} e^{\lambda x}]$ , а в дясната му страна ще участват събираеми, всяко от които съдържа или полинома  $\chi(\lambda)$ , или неговата производна до  $(k-1)$ -ви ред.

Съгласно (3), за  $k$ -кратния характеристичен корен  $\lambda$  получаваме, че дясната страна е равна на 0, откъдето

$$L[x^{(k-1)}e^{\lambda x}] \equiv 0.$$

Следователно функциите от системата

$$\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$$

са решения на уравнението (1). При това, поради условието  $\chi^{(k)}(\lambda) \neq 0$ , функцията  $x^k e^{\lambda x}$  не е решение на (1).

## Задача 1

Да се решат уравненията:

1)  $y'' + 6y' + 5y = 0$ ;

2)  $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ ;

3)  $y''' + 6y'' + 9y' = 0$ ;

4)  $y'' + 4y = 0$ .

**Решение.** 1) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$$

с корени  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -5$ . Тъй като корените са реални и различни, конструираме фундаментална система решения от функциите

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-5x}.$$

Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x},$$

където  $C_1$  и  $C_2$  са произволни реални константи.

2) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

или

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

с корени  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ . Тъй като имаме случай на трикратен корен, конструираме фундаментална система решения от функциите

$$y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x e^{-x}, \quad y_3 = x^2 e^{-x}.$$

Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x},$$

където  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  са произволни реални константи.

3) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

или

$$\lambda(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = 0$$

с корени  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ . Конструираме фундаментална система решения, в която на еднократния реален корен  $0$  съответства функцията  $y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$ , а на двукратния реален корен  $-3$  съответстват функциите  $y_2 = e^{-3x}$  и  $y_3 = xe^{-3x}$ . Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 x e^{-3x},$$

където  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  са произволни реални константи.

4) Характеристичното уравнение на даденото диференциално уравнение е

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

с корени  $\lambda_1 = 2i$ ,  $\lambda_2 = -2i$ . Конструираме фундаментална система решения, като използваме само единия от двата комплексно спрегнати корени – например  $\lambda_1 = 2i$ . По формулата на Ойлер имаме

$$e^{(2i)x} = e^{(2x)i} = \cos 2x + i \sin 2x.$$

Реалната част  $y_1 = \cos 2x$  и имагинерната част  $y_2 = \sin 2x$  образуват реална фундаментална система решения на даденото уравнение. Общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,$$

където  $C_1$  и  $C_2$  са произволни реални константи.