Числено интегриране. Квадратурни формули на Нютон-Коутс

Вградените възможности на Wolfram Mathematica

In[∘]:= $\int_6^7 \sqrt[7]{\text{Sin}[x+3]^2}\, dx$

Out[∘]=

$$\frac{7}{9}\left(\text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2},\frac{9}{14},\frac{23}{14},\text{Sin}[9]^2\right]\text{Sin}[9]^{9/7}+\text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2},\frac{9}{14},\frac{23}{14},\text{Sin}[10]^2\right](-\text{Sin}[10])^{9/7}\right)$$

In[∘]:= `% // N`

Out[∘]=

0.637467

за по-сложна функция

In[∘]:= $\int_6^7 \frac{\sqrt[7]{\text{Sin}[x+3]^2}}{\text{Tanh}[e^3]}\, dx$

Out[∘]=

$$\frac{7}{9}\text{Coth}[e^3]\left(\text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2},\frac{9}{14},\frac{23}{14},\text{Sin}[9]^2\right]\text{Sin}[9]^{9/7}+\text{Hypergeometric2F1}\left[\frac{1}{2},\frac{9}{14},\frac{23}{14},\text{Sin}[10]^2\right](-\text{Sin}[10])^{9/7}\right)$$

In[∘]:= $\int_6^7 \frac{\sqrt[7]{\text{Sin}[x+3]^2}}{\text{Tanh}[e^3] * \frac{\sqrt{\text{Cos}[x^2]}}{2x}}\, dx$

Out[∘]=

$$\int_6^7 \frac{2\,x\,\text{Coth}[e^3]\left(\text{Sin}[3+x]^2\right)^{1/7}}{\sqrt{\text{Cos}[x^2]}}\, dx$$

In[∘]:=
$$\int_6^7 \frac{\sqrt[7]{\text{Sin}[x+3]^2}}{\text{Tanh}[e^3] * \frac{\sqrt{\text{Cos}[x^2]}}{2x}}\, dx \text{ // N}$$

NIntegrate: Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following: singularity, value of the integration is 0, highly oscillatory integrand, or WorkingPrecision too small.

NIntegrate: NIntegrate failed to converge to prescribed accuracy after 9 recursive bisections in x near {x} = {6.011762995235177}. NIntegrate obtained 7.57483 – 7.12394 *i* and 0.5861823615401939` for the integral and error estimates.

Out[∘]=

7.57483 – 7.12394 i

Съставяне на мрежата

In[∘]:=
```
a = 7.; b = 8;
h = 0.1;
n = (b - a)/h;
Table[a + i * h, {i, 0, n}]
```

Out[∘]=

{7., 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8, 7.9, 8.}

Леви правоъгълници

In[∘]:=
$$f[x\_] := \sqrt[7]{\text{Sin}[x+3]^2}$$
$$\text{Itochno} = \int_a^b f[x]\, dx \text{ // N} (*\text{за сравнение}*)$$
$$\text{I1} = h * \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$$

Out[∘]=

0.618496

Out[∘]=

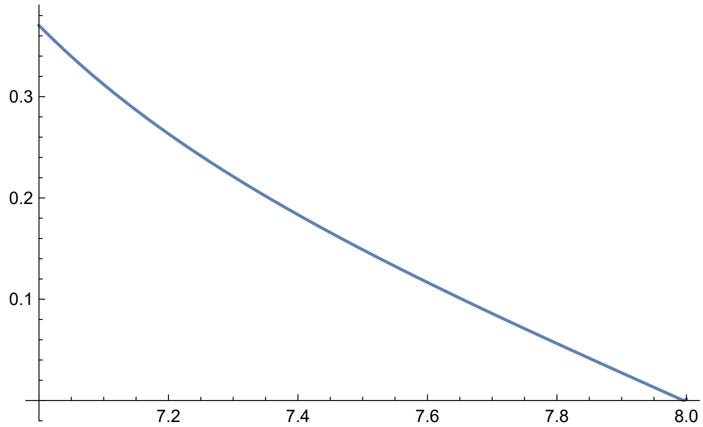
0.941444

Оценка на грешката

Теоретичната грешка

намираме M_1

In[∘]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
M1 = Abs[f'[a]]
```
Out[∘]=

0.37032

In[∘]:=
$$R1 = \frac{(b - a)^2}{2 n} * M1$$
Out[∘]=

0.018516

Истинска грешка

In[∘]:=
```
Abs[I1 - Itochno]
```
Out[∘]=

0.322949

Групираме всичко в една клетка

In[ ]:=

```
a = 7.; b = 8;
h = 0.1;
n = (b - a)/h;
f[x_] := (Sin[x + 3]^2)^(1/7)
Itochno = ∫_a^b f[x] ⅆx // N; (*за сравнение*)
I1 = h * Sum[f[a + i * h], {i, 0, n-1}];
M1 = Abs[f'[a]];
R1 = (b - a)^2/(2 n) * M1;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност                                            е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е    ",
 Abs[I1 - Itochno]]
```

$$n = \frac{b-a}{h};\qquad f[x\_] := \sqrt[7]{\mathrm{Sin}[x+3]^2}\qquad Itochno = \int_a^b f[x]\,dx\qquad I1 = h*\sum_{i=0}^{n-1} f[a+i*h];\qquad R1 = \frac{(b-a)^2}{2n}*M1;$$

```
Мрежата е със стъпка 0.1 и брой подинтервали 10.

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.941444

Точната стойност                                            е 0.618496

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.018516

Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е   0.322949
```

Извод: Имаме несъответствие между истинската и теоретичната грешка. Това се получава, заради липса на гладкост на избраната подинтегрална функция.

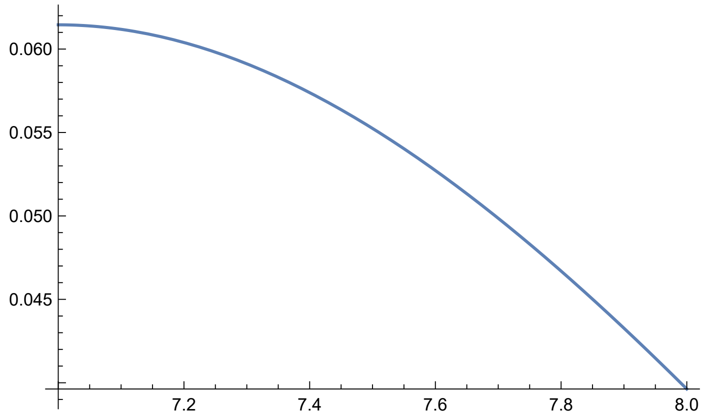
Използваме друга функция за примерите.

Трапеци

намираме M_2

In[ ]:=
```
Plot[Abs[f''[x]], {x, a, b}]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
a = 7.; b = 8;
h = 0.1;
n = (b - a)/h;
f[x_] := π Sin[x]/(x^2 + 2)
Itochno = ∫_a^b f[x] ⅆx // N;(*за сравнение*)
IT = h/2 * (f[a] + 2 Sum[f[a + i * h], {i, 1, n-1}] + f[b]);
M2 = Abs[f''[a]];
RT = (b - a)^3/(12 n^2) * M2;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на трапците е ", IT]
Print["Точната стойност                                 е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на трапците е ", RT]
Print["Истинската грешка по формулата на трапците е    ", Abs[IT - Itochno]]
```

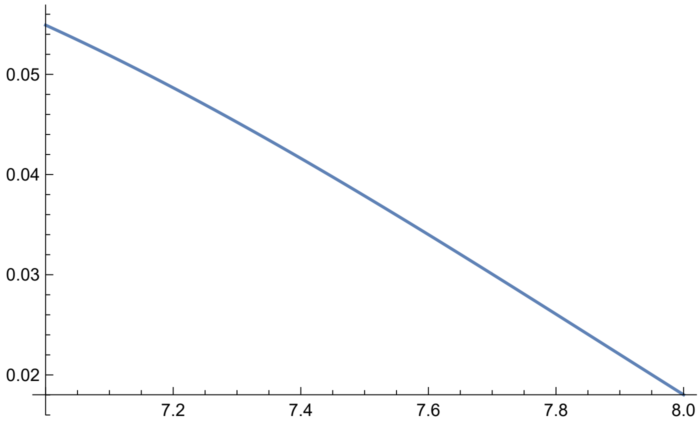
```
Мрежата е със стъпка 0.1 и брой подинтервали 10.

Приближената стойност по формулата на трапците е 0.0482622

Точната стойност                                 е 0.0483069

Теоретичната грешка по формулата на трапците е 0.0000512122

Истинската грешка по формулата на трапците е    0.0000447328
```

Симпсън

Изискване за прилагане на формулата е броят на подинтервалите да е четно число

намираме M_4

In[∘]:=
```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
a = 7.; b = 8;
h = 0.1;
n = (b - a)/h;
m = n / 2;
f[x_] := π Sin[x]/(x^2 + 2)
Itochno = ∫_a^b f[x] ⅆx // N; (*за сравнение*)
IS = h/3 * (f[a] + 4 Sum[f[a + (2 i - 1) * h], {i, 1, m}] + 2 Sum[f[a + (2 i) * h], {i, 1, m-1}] + f[b]);
M4 = Abs[f''''[a]];
RS = (b - a)^5/(180 n^4) * M4;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност                                e ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка по формулата на Симпсън е   ", Abs[IS - Itochno]]
```

Мрежата е със стъпка 0.1 и брой подинтервали 10.

Приближената стойност по формулата на Симпсън е 0.0483069

Точната стойност   e 0.0483069

Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е 3.05089×10^{-8}

Истинската грешка по формулата на Симпсън е 2.07853×10^{-8}

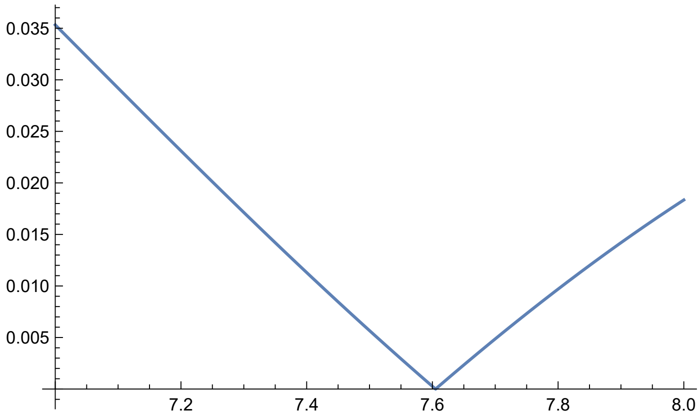
Пресмятане с предварително зададена грешка

Леви правоъгълници

определяме мрежата, n = ?

In[•]:=
```
f[x_] := π Sin[x] / (x^2 + 2)
(*намирамеM4*)
Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
```

Out[•]=



In[•]:=
```
M1 = Abs[f'[a]]
```

Out[•]=

0.0353308

In[•]:=
```
eps = 10^-8;
Clear[n]
Reduce[(b - a)^2 / (2 n) * M1 ≤ eps, n]
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[•]=

$n < 0 \,||\, n \geq 1.76654 \times 10^6$

```
a = 7.; b = 8;
n = 10;
h = (b - a)/n;
f[x_] := π Sin[x]/(x^2 + 2)
Itochno = ∫_a^b f[x] ⅆx // N;(*за сравнение*)
I1 = h * Sum[f[a + i * h], {i, 0, n-1}];
M1 = Abs[f'[a]];
R1 = (b - a)^2/(2 n) * M1;
Print["Мрежата е със стъпка ", h, " и брой подинтервали ", n]
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност                                            е ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка по формулата на левите правоъгълници е   ",
 Abs[I1 - Itochno]]
```