II. **Главни линии на повърхнината $S(u,v)$**

Дадена е повърхнината $S(u,v): \vec{r}(u,v) = \vec{r}\,(\,x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\,)$

Уравненията на главните линии се получават, като се реши диференциалното уравнение:

(4.60) $$\begin{vmatrix} g_{11}.du + g_{12}.dv & g_{12}.du + g_{22}.dv \\ h_{11}.du + h_{12}.dv & h_{12}.du + h_{22}.dv \end{vmatrix} = 0$$

- Тук няма как да знаем, дали съществуват или не съществуват уравненията, тъй като няма НИДУ за това, както при асимптотичните линии.

<u>*Задача*</u> 4.17 <u>*/ стр. 77*</u> Намерете главните линии за повърхнините S в произволна нейна точка и за точка P :

б) $S\,(u,v): \ \vec{r}\,(\,u,\ v,\ uv\,)\ ,\ P\,(u=0,\ v=0)\,.$

<u>*Решение*</u>:

б) Това е повърхнината от задача 4.1 . Взимаме от там резултатите:

$S\,(u,v):\ \ \vec{r}\,(\,u,\ v,\ uv)\ ,\ P\,(u=0,\ v=0)\,.$

$\vec{r}_u(u,v) = \vec{r}_u\,(1,0,v) \ \Rightarrow\ g_{11} = \vec{r}_u^{\;2} = 1 + v^2$

$\vec{r}_v(u,v) = \vec{r}_v\,(0,1,u) \ \Rightarrow\ g_{22} = \vec{r}_v^{\;2} = 1 + u^2 \ \Rightarrow\ g_{12} = \vec{r}_u.\vec{r}_v = uv$

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v(-v,-u,1\,) \Rightarrow |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{v^2 + u^2 + 1}$

$\Rightarrow\ \vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \left(-\frac{v}{\sqrt{v^2+u^2+1}}\,,-\frac{u}{\sqrt{v^2+u^2+1}},\frac{1}{\sqrt{v^2+u^2+1}}\right)$ (1)

$\vec{r}_{uu}\,(0,0,0) \ \Rightarrow\ h_{11} = 0 \quad , \quad \vec{r}_{vv}\,(0,0,0) \ \Rightarrow\ h_{22} = 0$

$\vec{r}_{uv}\,(0,0,1) \ \Rightarrow\ h_{12} = \frac{1}{\sqrt{v^2+u^2+1}}$, Заместваме всички данни в (4.60)

$$\begin{vmatrix} g_{11}.du + g_{12}.dv & g_{12}.du + g_{22}.dv \\ h_{11}.du + h_{12}.dv & h_{12}.du + h_{22}.dv \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} (1+v^2)du + uvdv & uvdu + (1+u^2)dv \\ \frac{dv}{\sqrt{v^2+u^2+1}} & \frac{du}{\sqrt{v^2+u^2+1}} \end{vmatrix} = 0$$

, но $\sqrt{v^2 + u^2 + 1} > 0$

$$\Rightarrow \; du[\,(1+v^2)du + uvdv\,] - dv[\,uvdu + (1+u^2)dv\,] = 0$$

$$\Rightarrow \; (1+v^2)d^2u - (1+u^2)d^2v = 0$$

$$\Rightarrow \; \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{(1+u^2)}{(1+v^2)}$$

1. Случай: $\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+v^2}} \;\Rightarrow\; \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \;\; |.\int \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \quad \Rightarrow \quad a_1: \; ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = ln\left|v+\sqrt{1+v^2}\right| + C_1$$

2. Случай: $\frac{du}{dv} = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1+v^2}} \;\Rightarrow\; \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \;\; |.\int \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \quad \Rightarrow \quad a_2: \; ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = -ln\left|v+\sqrt{1+v^2}\right| + C_2$$

$$P\;(u=v=0) \;\Rightarrow\; {a_{1,2}}^P : \; 0 = 0 + C_{1,2} \Rightarrow \; C_{1,2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$${a_1}^P : ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = ln\left|v+\sqrt{1+v^2}\right|, \quad {a_2}^P : \; ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right| = -ln\left|v+\sqrt{1+v^2}\right|$$

III. Нормална кривина $\nu_M(\lambda)$ в точка M върху повърхнина $S(u,v)$ по допирателно направление на крива $C : u = f(v)$

Дадена е повърхнината $S(u,v) : \vec{r}(u,v) = \vec{r}\,(\,x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\,)$.

Нека е дадена и крива $C : u = f(v)$ с дадено уравнение върху повърхнината $S(u,v)$.

Ако точка $M = M(u_0, v_0) \in S$ е фиксирана точка от повърхнината, а (du, dv) е допирателното направление на кривата $C : u = f(v)$, то скаларна инварианта на C върху S е *нормалната кривина* $\nu_M(\lambda)$ в точка на повърхнината.

Пресмятаме я чрез:

(4.57) $$\nu_M(\lambda) = \frac{II(du,dv)_M}{I(du,dv)_M} = \frac{h_{11}^M\ d^2u + 2h_{12}^M\ dudv + h_{22}^M\ d^2v}{g_{11}^M\ d^2u + 2g_{12}^M\ dudv + g_{22}^M\ d^2v}$$

Задача 4.13 */ стр. 73* Намерете нормалната кривина на повърхнините S в точка P по допирателното направление на крива C върху S, ако:

б) $S\,(u,v):\ \vec{r}\,(\ u^2v,\ \ uv^2,\ \ ln\,(uv)\,)\ ,\ P\,(u=1,\ v=1)\,,\ C:\ u^2+v^2=2$

Решение:

б) $\vec{r}\,(\ u^2v,\ \ uv^2,\ \ ln\,(uv)\,)$

1.

$$\vec{r}_u\ \left(2uv,\ v^2,\ \frac{1}{u}\right)\ \Rightarrow\ \ g_{11}=\vec{r}_u^{\ 2}=4u^2v^2+v^4+\frac{1}{u^2}$$

$$\vec{r}_v\ \left(u^2,\ 2uv,\ \frac{1}{v}\right)\ \Rightarrow\ g_{22}=\vec{r}_v^{\ 2}=u^4+4u^2v^2+\frac{1}{v^2},\quad g_{12}=2u^3v+2uv^3+\frac{1}{uv}$$

$$\Rightarrow\ \ g_{11}{}^P=g_{22}{}^P=6\ ,\ g_{12}{}^P=5\quad(1)$$

$$\vec{r}_u\ \times\ \vec{r}_v(-v,-u,3u^2v^2\,)\ \Rightarrow|\vec{r}_u\ \times\ \vec{r}_v|=\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}$$

$$\Rightarrow\ \vec{N}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}=\left(-\frac{v}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}}\ ,-\frac{u}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}},\ \ \frac{3u^2v^2}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}}\right)\ (2)$$

2. $\vec{r}_{uu}\ \left(2v, 0, -\frac{1}{u^2}\right) \Rightarrow\ h_{11} = -\frac{2v^2}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}} - \ \frac{3v^2}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}}\ \Rightarrow\ {h_{11}}^P = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

$\vec{r}_{uv}\ (2u, 2v, 0)\ \Rightarrow\ h_{12} = -\frac{2uv}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}} - \ \frac{2uv}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}}\ \Rightarrow\ {h_{12}}^P = -\frac{4}{\sqrt{11}}$

$\vec{r}_{vv}\ \left(0, 2u\ , -\frac{1}{v^2}\right)\ \Rightarrow\ h_{22} = -\frac{2u^2}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}} - \ \frac{3u^2}{\sqrt{v^2+u^2+9u^4v^4}}\ \Rightarrow\ {h_{22}}^P = -\frac{5}{\sqrt{11}}$

Заместваме всички данни в (4.57)

$$\nu_P(\lambda)\ = \frac{II(du,dv)_P}{I(du,dv)_P} = \frac{h_{11}^P\ d^2u + 2h_{12}^P\ dudv + h_{22}^P\ d^2v}{g_{11}^P\ d^2u + 2g_{12}^P\ dudv + g_{22}^P\ d^2v} = \frac{-\frac{5}{\sqrt{11}}(d^2u+d^2v) - \frac{8}{\sqrt{11}}dudv}{6d^2u + 2.5.dudv + 6d^2u} \qquad (3)$$

3. $\ C:\ u^2 + v^2 = 2\ \ \Rightarrow\ C:\ \ 2udu + 2vdv = 0\ \ \Rightarrow\ \ udu = -vdv\ \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ \frac{du}{dv} = \frac{-v}{u}\ \ \Rightarrow\ \ C: (du, dv)\ \uparrow\uparrow\ \ (-v, u) \uparrow\uparrow (-1, 1)_P$

$$\Rightarrow\ \ \nu_P(\lambda) = \frac{-\frac{5}{\sqrt{11}}(-1)^2 - \frac{5}{\sqrt{11}}(1)^2 - \frac{8}{\sqrt{11}}(-1).1}{6.(-1)^2 + 10.(-1).1 + 6.1} = -\frac{2}{\sqrt{11}}\ .\frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{11}}\ = -\frac{\sqrt{11}}{11}\ .$$