Хомогенни диференциални уравнения

Информатика, 2021/2022

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2$$

$$y' = e^{\frac{y}{x}}$$

$$y' = \operatorname{tg}\frac{y}{x} - 2$$

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

където f е дадена непрекъсната функция, се наричат хомогенни уравнения.

- Хомогенните уравнения могат да се сведат до уравнения с разделящи се променливи чрез въвеждане на нова неизвестна функция
$$z = \frac{y}{x}, \quad z = z(x).$$
Имаме $y = zx$, откъдето $y' = z'x + z$. Тогава като заместим в даденото уравнение получаваме
$$z'x + z = f(z),$$
откъдето
$$z' = \frac{f(z) - z}{x},$$
което очевидно е уравнение с разделящи се променливи.

Задача 1

Да се решат уравненията:

1) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;

2) $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$;

3) $(y^2 - 2xy)\, dx + x^2\, dy = 0$.

Решение. 1) Първо трябва да изразим производната y'. При $x \neq 0$ имаме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}.$$

Това уравнение е хомогенно, защото дясната му страна е функция на $\frac{y}{x}$.

Полагаме

$$\frac{y}{x} = z, \quad z = z(x),$$
$$y' = z'x + z.$$

След заместването получаваме

$$z'x + z = z - e^z,$$
$$z'x = -e^z.$$

Последното уравнение е уравнение с разделящи се променливи. Записваме $z' = \frac{dz}{dx}$ и намираме

$$-\frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x},$$
$$-\int e^{-z}\,dz = \int \frac{dx}{x} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$
$$e^{-z} = \ln|x| + \ln e^{C_1},$$
$$e^{-z} = \ln(Cx), \quad C \neq 0.$$

Сега заместваме z с $\frac{y}{x}$ и получаваме

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln(Cx),$$

откъдето

$$y = -x \ln \ln Cx, \quad C \neq 0,$$

което е общото решение на даденото диференциално уравнение.

2) Отг. $\operatorname{ctg} \frac{\ln \frac{y}{x}}{2} = \ln Cx; \quad y = e^{2k\pi}x, \ k \in \mathbb{Z}$.

3) Отг. $\frac{y}{x-y} = Cx; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad y = x$.

- Да разгледаме уравненията от вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

където f е дадена непрекъсната функция, а a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2)$ са дадени реални числа.

I случай. Ако $c_1 = c_2 = 0$, то имаме

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right).$$

Изваждайки x пред скоби в числителя и знаменателя, след съкращаване получаваме

$$y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right),$$

дясната страна на което е от вида $g\left(\frac{y}{x}\right)$. Следователно полученото уравнение е хомогенно.

II случай. Нека $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$.
1) Ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то съществува константа k, такава че $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$.
Тогава

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ka_1x + kb_1y + c_2}\right) = f\left(\frac{(a_1x + b_1y) + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

Полагаме $z = a_1x + b_1y$, $z = z(x)$. Оттук

$$y = \frac{z - a_1x}{b_1}, \quad y' = \frac{z' - a_1}{b_1}.$$

Тогава

$$\frac{z' - a_1}{b_1} = f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right).$$

Решаваме последното уравнение спрямо z' и получаваме

$$z' = a_1 + b_1\, f\left(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\right),$$

което е уравнение с разделящи се променливи, защото дясната страна е функция само на z.

2) Ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то съществува единствена двойка числа (x_0, y_0), за които

$$\left|\begin{array}{l} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0. \end{array}\right.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция v и нова независима променлива u с равенствата

$$\left|\begin{array}{l} x = u + x_0 \\ y = v + y_0. \end{array}\right.$$

Тъй като $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+y_0)}{d(u+x_0)} = \frac{dv}{du}$, то получаваме

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= f\left(\frac{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}{a_2(u+x_0)+b_2(v+y_0)+c_2}\right)\\ &= f\left(\frac{a_1u+a_1x_0+b_1v+b_1y_0+c_1}{a_2u+a_2x_0+b_2v+b_2y_0+c_2}\right)\\ &= f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right),\end{aligned}$$

заради избора на x_0 и y_0. Оттук нататък работим както в I случай.

Задача 2

Да се решат уравненията:

1) $(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$;

2) $(2x-4y+6)\,dx + (x+y-3)\,dy = 0$;

3) $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$.

Решение. 1) Започваме с изразяване на $\frac{dy}{dx}$. Имаме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+1}{2x+2y-1}.$$

Очевидно сме във II случай, 1), тъй като $\Delta = 0$. Тогава

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$$

и полагаме $x+y=z$, $z=z(x)$, $y'=z'-1$.

След заместване последователно получаваме

$$z' - 1 = -\frac{z+1}{2z-1},$$

$$z' = \frac{z-2}{2z-1},$$

$$\frac{2z-1}{z-2}\,dz = dx, \quad z \neq 2,$$

$$\int \frac{2z-1-3+3}{z-2}\,dz = \int dx + C_1,$$

$$\int \left(2 + \frac{3}{z-2}\right) dz = x + C_1,$$

$$2z + 3\ln|z-2| = x + C_1,$$

$$\ln|z-2|^3 + C_2 = x - 2z,$$

$$\ln C(z-2)^3 = x - 2z.$$

От $z = x + y$ следва, че

$$\ln C(x + y - 2)^3 = -x - 2y.$$

Накрая ще отбележим, че $z = 2 \Leftrightarrow x + y = 2$ и след заместване в даденото уравнение се вижда, че $y = 2 - x$ също е решение.

2) Имаме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}.$$

Тъй като $\Delta \neq 0$, то уравнението е от вида във II случай, 2). Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{array} \right.$$

и намираме $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Въвеждаме нова неизвестна функция v и нова независима променлива u с равенствата

$$\left|\begin{array}{l} x = u + 1 \\ y = v + 2. \end{array}\right.$$

Тогава

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2u - 4v}{u + v}.$$

Това уравнение е от вида в I случай. Записваме

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2 - 4\frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}$$

и полагаме $\frac{v}{u} = z$, $z = z(u)$. Сега $v' = z'u + z$ и след заместване

$$z'u + z = -\frac{2 - 4z}{1 + z}.$$

Оттук

$$z'u = -\frac{z^2 - 3z + 2}{1 + z},$$

$$\frac{1+z}{(z-1)(z-2)}\,dz = -\frac{du}{u},$$

$$\int \left(\frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} \right) dz = -\frac{du}{u} + C_1,$$

$$3 \ln|z-2| - 2\ln|z-1| = -\ln|u| + \ln e^{C_1},$$

$$u(z-2)^3 = C(z-1)^2.$$

Връщаме се към променливата v като заместваме $z = \frac{v}{u}$, а след това заместваме и $u = x - 1$, $v = y - 2$. След преобразуване на последното равенство намираме общото решение

$$(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2.$$

Накрая добавяме и решенията $y = x + 1$, $y = 2x$, които се пораждат съответно от $z = 1$ и $z = 2$.

3) Имаме

$$y' = \frac{y - 2x + 2x + 2}{x + 1} + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1},$$

откъдето

$$y' = \frac{y - 2x}{x + 1} + 2 + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1}.$$

Това уравнение е от вида във II случай, 2).
Отг. $\sin \frac{y-2x}{x+1} = C(x + 1)$.