Метод на хордите

Условията, които трябва да са изпълнени, за да е сходящ методът на хордите са:

1) $f \in C^2[a,b]$

2) $f(a)f(b) < 0$

3) $f'(x),\ f''(x)$ имат постоянен знак в $[a,b]$.

Тогава итерационният процес:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(p)}(x_n - p); \qquad n = 0, 1, \ldots$$

е сходящ към единствения корен x^*, където x_0 е онзи край на интервала, за който $f(x_0)f''(x) < 0$, а p-постоянната точка, през която минават всички хорди, т.е. другият край на интервала.

За оценка на грешката имаме:

$$\left|x^* - x_n\right| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right| = \varepsilon_n\ ,$$

където $M_1 = \max\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|,\ m_1 = \min\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$.

Пример. По метода на хордите да се намери с точност $0{,}01$ коренът на уравнението $x^3 + x - 1 = 0$.

Решение:

Тъй като $f(x) = x^3 + x - 1$ е полином, ще локализираме корена като пресмятаме стойностите на му за целочислени стойности на аргумента. Тъй като $f(0) = -1$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$, то можем да локализираме корен в положителната част на абсцисната ос. Имаме

$f(1) = 1+1-1 = 1>0$, т.е. $x^* \in [0,1]$,

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \quad f''(x) = 6x > 0$ за $x \in (0,1)$.

Избор на x_0: $f(0)f''(x) < 0$, откъдето $x_0 = 0$, $p = 1$.

Тогава итерационният процес е:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(1)}(x_n - 1); \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$M_1 = \max_{[0,1]}\left|3x^2 + 1\right| = 4, \quad m_1 = \min_{[0,1]}\left|3x^2 + 1\right| = 1,$$

$$\varepsilon_n = \frac{4-1}{1}\left|x_n - x_{n-1}\right| = 3\left|x_n - x_{n-1}\right|.$$

Изчисленията са представени в следната таблица, като закръглянето е до третия знак след десетичната запетая.

n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = 3\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$
0	0	-1	-
1	0,5	-0,375	1,5
2	0,636	-0,107	0,408
3	0,671	-0,027	0,106
4	0,680	-0,006	0,027
5	0,682		0,006 $< 0{,}01$

Отговор: $x^* \approx x_5 = 0{,}682$.

Подробните пресмятания са:

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{-1-1}(0-1) = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$$

$$\varepsilon_1 = 3\left|0{,}5 - 0\right| = 1{,}5 > 0{,}01\ ;\ f(0{,}5) = -0{,}375$$

$$x_2 = 0{,}5 - \frac{-0{,}375}{-0{,}375 - 1}(0{,}5 - 1) = 0{,}6363\ldots \approx 0{,}636$$

$$\varepsilon_2 = 3\left|0{,}636 - 0{,}5\right| = 0{,}408 > 0{,}01\ ;\ f(0{,}636) = -0{,}1077$$

$$x_3 = 0{,}636 - \frac{-0{,}107}{-0{,}107 - 1}(0{,}636 - 1) = 0{,}67118\ldots \approx 0{,}671$$

$$\varepsilon_3 = 3\left|0{,}671 - 0{,}636\right| = 0{,}1055\ldots > 0{,}01\ ;\ f(0{,}671) = -0{,}027$$

$$x_4 = 0{,}671 - \frac{-0{,}027}{-0{,}027 - 1}(0{,}671 - 1) = 0{,}680$$

$$\varepsilon_4 = 3\left|0{,}680 - 0{,}671\right| = 0{,}027 > 0{,}01 \;;\; f(0{,}680) = -0{,}006$$

$$x_5 = 0{,}680 - \frac{-0{,}006}{-0{,}006 - 1}(0{,}680 - 1) = 0{,}682$$

$$\varepsilon_5 = 3\left|0{,}682 - 0{,}680\right| = 0{,}006 < 0{,}01$$

Автор: Дойчин Бояджиев, dtb@pu.acad.bg