

Упражнение 7

Що е статистика. Основни понятия.

Точкови оценки на средна стойност, дисперия, пропорция. Доверителни интервали за средна стойност

12.3. Нека е направена случайна извадка от 576 жители на дадена област с цел да се установи количеството портокалов сок, консумирано от жителите дневно. Получено е, че средната дневна консумация на тези жители е 133 грама. Знае се, че дневната консумация е нормално разпределена със стандартно отклонение 96 грама на ден.

Постройте 90% доверителен интервал на дневната консумация.

Решение: Интерпретация на дадените данни

576 - обем на извадката n

133— извадково средно \bar{X} (статистика)

96 - популационно стандартно отклонение σ (параметър)

Търсим 90 % ДИ, т.е. $\alpha=0.1$



Използваме z-разпределението и z- таблицата

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Z се намира от таблицата. Това е точка за която лицето/вероятността наляво е $=1-\alpha/2=1-0.1/2=1-0.05=0.95$
Т.е. $Z=1.64$

$$\left(133 - 1.64 \frac{96}{\sqrt{576}}, 133 + 1.64 \frac{96}{\sqrt{576}} \right)$$

$$(126.508, 139.492)$$

12.3 продължение. Нека е направена случайна извадка от 576 жители на дадена област с цел да се установи количеството портокалов сок, консумирано от жителите дневно. Получено е, че средната дневна консумация на тези жители е 133 грама. Знае се, че дневната консумация е нормално разпределена със стандартно отклонение 96 грама на ден.

Постройте 99% доверителен интервал за дневната консумация.

Решение: Интерпретация на дадените данни

576 - обем на извадката n

133 – извадково средно \bar{X} (статистика)

96 - популационно стандартно отклонение σ (параметър)

Търсим 99 % ДИ, т.е. $\alpha=0.01$

Използваме z-разпределението и z- таблицата

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Z се намира от таблицата. Това е точка за която лицето/вероятността наляво е $=1-\alpha/2=1-0.01/2=1-0.005=0.995$
Т.е. $Z=2.58$

$$\left(133 - 2.58 \frac{96}{\sqrt{576}}, 133 + 2.58 \frac{96}{\sqrt{576}} \right) \quad (122.68, 143.32)$$

12.7. Направена е случайна извадка от 10 пакетчета с бонбони, претеглени са и е намерено, че средното тегло на тези пакетчета е 56 грама. Ако е известно, че теглото на пакетчетата е нормално разпределена случайна величина с дисперсия 4, то построите 98% доверителен интервал на теглото на пакетчетата.

Решение: Интерпретация на дадените данни

- 10 - обем на извадката n
- 56 – извадково средно \bar{X} (статистика)
- 4 - популационна дисперсия σ^2 (параметър)
- Търсим 98 % ДИ, т.е. $\alpha=0.02$

Използваме z-разпределението и z- таблицата

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Z се намира от таблицата. Това е точка за която лицето/вероятността наляво е $=1-\alpha/2=1-0.02/2=1-0.01=0.99$
Т.е. $Z=2.33$

$$(56-2.33 \frac{2}{\sqrt{10}}, 56+ 2.33 \frac{2}{\sqrt{10}})$$

$$(54.5264, 57.4736)$$

12.5. За да се определи съдържанието на бактерии във водата на голямо езеро, се вземат 37 проби от по 100 милилитра вода от различни места на брега и в лабораторията се измерва количеството бактерии в пробите. Намерено е, че средното количество бактерии е 11,95 (в стотици) и стандартното отклонение е 11,8 (в стотици). Намерете 95% доверителен интервал за броя бактериите в 100 милилитра от водата в това езеро.

Решение: Интерпретация на дадените данни

37- обем на извадката $n > 30$

11.95 – извадково средно \bar{x} (статистика)

11.8 - извадково стандартно отклонение s (статистика)

Търсим 95 % ДИ, т.е. $\alpha=0.05$

Не знаем популационна дисперсия/станд.откл. , но обемът на извадката е голям, >30 , и затова използваме z-разпределението и z- таблицата

$$(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}})$$

Z се намира от таблицата. Това е точка за която лицето/вероятността наляво е $=1-\alpha/2=1-0.05/2=1-0.025=0.975$
Т.е. $Z=1.96$

$$(11.95 - 1.96 \frac{11.8}{\sqrt{37}}, 11.95 + 1.96 \frac{11.8}{\sqrt{37}}) \quad (8.14778, 15.7522)$$

Задача Паста за зъби се опакова в разфасовки по 55 грама, като се знае, че теглото е нормално разпределено. Избрани са по случаен начин 10 тубички и са претеглени прецизно, и е получено, че средното им тегло е 56.80 гр. и стандартното отклонение е 2.05 гр.

Намерете 95% доверителен интервал на теглото.

Направена е извадка с обем $n=10 < 30$ от нормална популация с неизвестна дисперсия/станд.откл.

Тогава използваме точкова оценка s на популационното станд. откл. и формулата за 95% доверителен интервал

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

като $1 - \alpha = 0.95$, т.е. $\alpha = 0.05$ и $1 - \alpha/2 = 0.975$

Задача Паста за зъби се опакова в разфасовки по 55 грама, като се знае, че теглото е нормално разпределено. Избрани са по случаен начин 10 тубички и са претеглени прецизно, и е получено, че средното им тегло е 56.80 гр. и стандартното отклонение е 2.05 гр.

Намерете 95% доверителен интервал на теглото.

Решение: Използваме $1 - \alpha = 0.95$ или $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$ и $1 - \alpha / 2 = 0.025$ и търсим от таблицата точка наляво от която лицето е 0.975 с $n - 1 = 10 - 1 = 9$ степени на свобода, т.е. на 9-тия ред => точката е 2.26

Заместваме във

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(56.802 - 2.26 \frac{2.05}{\sqrt{10}}, 56.802 + 2.26 \frac{2.05}{\sqrt{10}} \right)$$

$$(55.3343, 58.2697)$$

12.9. От учебен отдел в Университета „Образование за всеки“ е направена случайна извадка от 25 първокурсници и е получено, че средния им успех от първия семестър е 5,06, а стандартното отклонение е 0,59. Знае се, че успехът е нормално разпределена случайна величина.

а) Параметър или точкова оценка е числото 0,59?

б) Намерете 90% доверителен интервал за средния успех на всички първокурсници в този университет основан на тази извадка.

Решение: Интерпретация на дадените данни

25- обем на извадката $n < 30$

5.06 – извадково средно \bar{X} (статистика)

0.59 - извадково стандартно отклонение s (статистика, точкова оценка на параметъра популационно стандартно отклонение σ)

Търсим 90 % ДИ, т.е. $\alpha=0.1$

Не знаем популационна дисперсия/станд.откл. , и обемът на извадката е <30 , и затова използваме t-разпределението и t- таблицата

$$\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

t се намира от таблицата. Това е точка за която лицето/вероятността наляво е $=1-\alpha/2=1-0.1/2=1-0.05=0.95$ с $n-1=24$ степени на свобода $\Rightarrow 1.71$

$$\left(5.06 - 1.71 \frac{0.59}{\sqrt{25}}, 5.06 + 1.71 \frac{0.59}{\sqrt{25}} \right) \quad (4.86, 5.26)$$