Петър Копанов **Снежана Христова**

ЗАПИСКИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА

(ЗА ИНФОРМАТИЦИ)

Пловдив 2018

УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО
„ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ“

Рецензенти: Проф. д-р Станимир Стоянов
Проф. д-р Коста Гъров
Доц. д-р Валентина Пройчева

ISBN ?????

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор

Основната цел на това ръководство е да се даде възможност на студентите – бакалаври, обучавани във Факултета по математика и информатика при ПУ „П. Хилендарски“ в специалността „Информатика“ да се запознаят с основните методи и практическото приложение на тези два основни клона от приложната математика. Книгата може да се използва също така от студентите във ФМИ от другите специалности от направление 4.6 (Информатика), както и от всички, които изучават вероятности и статистика и имат нужда от задълбочаване на знанията си в тези области.

Практическото приложение на вероятностните и статистическите методи е представено в книгата с помощта на алгоритми, описани в началото на съответните глави, което улеснява както възприемането им, така и използването им от програмисти, информатици и специалисти в областта на компютърните и информационните технологии.

Конкретните пресмятания са направени със системата за компютърна алгебра Wolfram Mathematica (Версия 11), която е достъпна за студентите от ФМИ. Тази система и конкретните й приложения тук дава добра представа за връзката между приложните математически методи и съвременните информационни технологии. Отчитането на досегашния опит в преподаването на теорията на вероятностите и математическата статистика конкретно на студентите от специалност „Информатика“ (това става през зимния семестър на 3 курс и се съчетава с техния стаж през последните 4 седмици на семестъра) принуди авторите да се съобразят с особеностите на преподаването на предмета в информатичните специалности и отказ от използването и на други компютърни системи в процеса на обучението, по-специално използването на системата R в статистиката. Основната причина за този избор е острият дефицит от време за преподаване на курса - само 6 седмици, в които е практически невъзможно да се демонстрира и след това да се използва пълноценно повече от една софтуерна система.

С това ръководство от една страна се дава помагало в ръцете на студентите за семинарните упражнения и самостоятелната подготовка, а от друга се отговаря на необходимостта от преподаване на класическите математически дисциплини, разглеждани тук.

Голяма част от задачите в ръководството са давани през последните 28 години на упражнения, семинари, текущи контролни, изпити и домашни работи на студентите от различните специалности на ФМИ. Включени са и задачи с повишена трудност (повечето с решения или указания), които обикновено не се включват в курса, но които могат да помогнат за по-задълбоченото разбиране и усвояване на материала. Групирането на задачите в 16 тематични глави е до голяма степен условно (особено в частта СТАТИСТИКА), тъй като много от задачите са с по няколко подусловия, отнасящи се до теми от различни глави. Авторите са се опитали да поставят задачите в главите, които според тях в най-голяма степен ги покриват тематично.

В началото на всяка глава от книгата са дадени основни дефиниции и формули, необходими за решаването на задачите от нея, както и алгоритми, позволяващи това решаване да стане максимално ясно и във форма, подходяща за информатици.

В края на книгата като приложение са дадени таблици на основни вероятностни разпределения, необходими при конкретни пресмятания и списък от литература за допълнителна подготовка.

Пресмятанията в решенията на задачите от първата част на книгата (ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ) са направени с помощта на пакета Mathematika 11.1. for Students (възможно е и използването на по-нови версии на пакета, както и на други системи за компютърна алгебра), като точността на отговорите в десетичен вид обикновено е ограничена до 20 знака, и е напълно достатъчна за практически пресмятания. С реализирането на тези пресмятания се постига и една от причините за написването на тази книга – да се разкрие по-добре връзката между приложните математически методи и съвременните софтуер и хардуер.

За решаването на задачите от втората част (СТАТИСТИКА) освен пакета Mathematika 11.1. for Students (препоръчван от авторите) могат да бъдат използвани различни други програмни среди (например Microsoft Excel от пакета Microsoft Office, средата за статистически анализ на данни R, статистически пакети като SPSS или Statistika).

Ноември 2018 ***От авторите***

Част първа.
ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ

1. Елементи на комбинаториката. Основни методи за пресмятане

Справочник

Комбинаториката (или комбинаторният анализ) е дял от математиката, изучаващ различни отношения в дискретни множества: размествания, наредби, подмножества и други.

Правило за събиране

*Ако елементът **a** може да бъде избран по **m** различни начина, а елементът **b** по **n** различни начина, изборът на „**a или b**“ може да се извърши по **m + n** различни начина.*

Правило за умножение

*Ако елементът **a** може да бъде избран по **m** начина и при всеки избор но а елементът **b** може да бъде избран по **n** начина, то изборът на наредената двойка **(a, b)** може да стане по **m.n** начина.*

Извадка

Нека М = {1, 2, 3,..., n}. Подмножеството $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$*, съставено от кои да е **k** елемента на М ще наричаме извадка с обем **k**. Можем да образуваме следните 4 различни множества от извадки с обем **k**:*

{ненаредени извадки с обем k без повтаряне на елементи}, k = 0, 1, 2,..., n;

{ненаредени извадки с обем k с възможно повтаряне на елементи}, k = 0, 1, 2,..;

{наредени извадки с обем k без повтаряне на елементи}, k = 0, 1, 2,..., n;

{наредени извадки с обем k с възможно повтаряне на елементи}, k = 0,1,2,...

За всяко множество от n елемента можем да образуваме аналогични подмножества, имащи специални имена:

Вариации

*Вариации без повторение на **n** елемента от **k**-ти клас (k < n) се наричат подмножествата от наредени извадки с обем **k** без повтаряне на елементи.*

Пермутации

*Пермутации без повторение на **n** елемента се наричат подмножествата от наредени извадки с обем **n** без повтаряне на елементи. Пермутациите могат да бъдат разглеждани като вариации без повторение на n елемента от **n**-ти клас (k = n).*

Комбинации

*Комбинации без повторение на **n** елемента от **k**-ти клас (k ≤ n) се наричат подмножествата от ненаредени извадки с обем k без повтаряне на елементи.*

Вариации с повторение

*Вариации с повторение на **n** елемента от **k**-ти клас се наричат подмножествата от наредени извадки с обем k с възможно повтаряне на елементи.*

Комбинации с повторение

*Комбинации с повторение на **n** елемента от **k**-ти клас се наричат подмножествата от ненаредени извадки с обем k с възможно повтаряне на елементи.*

Освен тези извадки често се използва и друг вид извадки, наречени

Пермутации с повторение

Да разгледаме множеството $M = \{a_1, a_2,..., a_{k1}, b_1, b_2,..., b_{k2},..., c_1, c_2,..., c_{km}\}$, *където* $k_1 + k_2 +... + k_m = n$. *Образуваме всички пермутации на елементите на множеството M, след което разглеждаме елементите* $a_1, a_2,..., a_{k1}$ *като неразличими помежду си и правим същото за елементите* $b_1, b_2,..., b_{k2},..., c_1, c_2,..., c_{km}$. *Получените извадки се наричат пермутации с повторение.*

Основни формули за пресмятане в комбинаториката:

факториел:

$$n! = 1.2.3....n, \qquad 0! = 1$$

брой на вариациите без повторение:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

брой на вариациите с повторение:

$$\tilde{V}_n^k = n^k$$

брой на пермутациите без повторение:

$$P_n = n!$$

***Команда в пакет Mathematica**: Factorial [n], n!*

брой на пермутациите с повторение:

$$P_n^{k_1,k_2,k_3,...,k_m} = \frac{n!}{k_1!\,k_2!k_3!...k_m!}\ ,\ k_1 + k_2 + ... + k_m = n$$

***Команда в пакет Mathematica**: Multinomial [k1, k2, k3,…, km]*

брой на комбинациите без повторение:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

***Команда в пакет Mathematica**: Binomial[n,k]*

брой на комбинациите с повторение:

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

***Команда в пакет Mathematica**: Binomial[n+k-1,k]*

Алгоритъм за решаване на комбинаторни задачи

1)определя се има ли наредба в извадката;

2) определя се има ли повторение на елементи в извадката;

3) ако извадката е наредена се определя дали в извадката участват всички елементи на множеството или част от тях;

4) в зависимост от отговора в 1), 2), 3) се определя видът на комбинаторната извадка (пермутация, комбинация или вариация, с повторение или без повторение);

5) в съответствие с отговора в 4) се избира формула за пресмятане;

6) в избраната формула се заместват числените стойности от условието;

7) извършват се пресмятанията.

Задачи

1.1. Студентски стол предлага само комплексни менюта, съдържащи задължително супа, основно ядене и десерт. Възможният избор е даден в таблицата

Вид	***Избор***
Супа	Пилешка супа или таратор
Основно ядене	Печено пиле или кюфтета
Десерт	Паста или баклава

а) Колко различни комплексни менюта могат да се предложат?

б) Ако студент иска непременно в менюто му да има баклава, то измежду колко възможни менюта той може да избира?

в) Ако студент иска непременно в менюто му да има печено пиле, то измежду колко възможни менюта той може да избира?

г) Ако студент иска непременно в менюто му да има и печено пиле и баклава, то измежду колко възможни менюта той може да избира?

1.2. Аранжьор на витрина разполага с три манекена и с пет различни рокли, от които само една е черна. По колко различни начина може да изложи роклите на витрината (местоположението на роклите на витрината е без значение)? А ако черната рокля трябва задължително да е на витрината?

1.3. За ръководството на Факултетния съвет на ФМИ са предложени трима членове. От тях трябва да се избере декан и заместник декан. По колко различни начина може да стане това?

1.4. Разглеждаме множеството на четирицифрените цели числа, които могат да се запишат с помощта на цифрите от 1 до 9, без цифрите да се повтарят.

а) определете броя на тези числа;

б) определете броя на числата, за които цифрата на хилядите е 1;

в) определете броя на числата, за които цифрата на единиците е 3, а цифрата на хилядите е 7;

г) определете броя на числата, които съдържат в десетичния си запис последователно една до друга цифрите 6 и 7 и то в посочения ред.

1.5.Телефонен номер може да започва с коя да е от цифрите 0, 1, 2, 3, …, 9. Да се пресметне броят на шестцифрените телефонни номера, на които всички цифри са различни.Да се пресметне броят на шестцифрените телефонни номера, на които номерът започва с 26.

1.6. Шест двойки приятели решават да се снимат. Те застават в две редици по 6 човека.

а) По колко различни начина могат да се подредят?

б) По колко различни начина могат да се подредят за снимката, ако отпред са момичетата, а отзад – момчетата?

в) По колко различни начина могат да се подредят за снимката, ако пред всяко момче е неговата приятелка?

1.7. Иванчо има една банкнота по два лева, една банкнота по пет лева, една банкнота по десет лева и една банкнота по 20 лева. Той решава да даде някаква сума на своята по-малка сестричка. По колко различни начина може да го направи?

1.8. В магазин има 5 различни стоки, а пред него чакат за покупка 10 човека. По колко начина 5 от тях могат да купят петте стоки?

1.9. При регистриране за достъп до определена интернет страница, трябва да си изберем парола, която се състои само от буквите А, Б, В, Г, Д, Е, като всяка буква се използва не повече от един път и дължината на паролата е от 2 до 6 символа.

а) Колко са различните възможни пароли?

б) Колко различни пароли, започващи с буквата А могат да се напишат?

в) Колко различни пароли, започващи с буквата А и завършващи с буквата Б могат да се напишат?

1.10. Четирисимволен код се състои от цифрите 1, 2, 3, 4, 5 като всяка от тях се използва не повече от един път?

а) Колко са всички възможни кодове?

б) Колко са всички възможни кодове, формиращи четно число?

1.11. Номерът на кредитна карта представлява 16 цифрено цяло число и дата, състояща се от ден и месец, представени като двуцифрени числа. Да се пресметне броят на възможните номера на кредитни карти.

1.12. В азбуката на Морз всеки символ се представя като редица от точки и тирета (къси и дълги сигнали). Колко сигнала могат да се кодират с азбуката на Морз, ако могат да се използват до 7 точки и тирета?

1.13. По колко начина 5 човека могат да се запишат в списък? А 15 човека? А 100 човека?

1.14. Десет души се нареждат в редица. Колко са подрежданията,при които 3 фиксирани човека се намират един до друг?

1.15. Колко различни изхода има при хвърлянето на 2 зара, ако:

а) заровете са различими (например бял и черен на цвят);

б) заровете са неразличими (еднакви по цвят, размер, тегло);

в) различаваме изходите според сумата от падналите се точки?

1.16. По колко начина могат да бъдат раздадени картите в игра на белот (32 карти се раздават на 4 партньора по 8)? А на бридж (52 карти се раздават на 4 партньора по 13)?

1.17. Дядо купува 9 различни играчки за внучетата си Асен, Борис, Васил и Георги. По колко различни начина той може да даде 3 играчки на едно от внучетата си, а останалите три да получат по две играчки?

1.18. По колко различни начина група от 6 момичета и 3 момчета може да бъде разпределена в 3 групи по трима, така че във всяка тройка да има по едно момче? Редът на групите и подреждането във всяка от тях не е от значение.

1.19. Мария има 4 книги по математика, 5 книги по биология и 6 книги по физика. Тя ги подрежда по случаен начин в библиотеката на един рафт. По колко различни начина може тя да ги подреди? По колко различни начина може тя да ги подреди в библиотеката на един рафт, ако в началото са книгите по математика, след това по биология и накрая по физика? Колко са тези начини, ако подредбата на книгите във всяка от трите групи няма значение.

1.20. В зеленчуков магазин има ябълки, круши и още 5 други вида плодове. Петър решава да купи за децата си по един килограм от два различни вида плода, които избира по случаен начин. По колко различни начина може да го направи?

1.21. По колко начина може да се попълни един фиш от спортния тотализатор в игрите „6 от 49“, „6 от 42“ и „5 от 35“?

1.22. По колко начина могат да се изтеглят 5 карти от пълен комплект от 52 карти за игра при раздаване на играта покер?

1.23. От колода, състояща се от 36 карти произволно се изтеглят 3 карти.

а) По колко начина може да се направи това?

б) По колко начина могат да се изтеглят 3 карти, една от които е „дама“?

в) По колко начина могат да се изтеглят 3 карти с поне една „дама“ между тях?

г) По колко начина могат да се изтеглят 3 карти с най-много една „дама“ между тях?

1.24. Колко диагонала има правилен шестоъгълник? А десетоъгълник?

1.25. Колко най много триъгълника могат да се начертаят с върхове дадени 9 точки?

1.26. Ани, Борис и 6 техни приятели отиват в сладкарница, където масите са кръгли. По колко различни начина могат да седнат, ако Ани сяда срещу Борис?

1.27. Колко са плочките в малък комплект домино? А в голям?

Пояснение: Всяка плочка домино представлява правоъгълна плочка, дължината на която е два пъти по-голяма от ширината. Лицевата страна на всяка плочка е разделена с линия на 2 квадратни части, всяка от които съдържа от 0 до 6 точки за малък комплект и от 0 до 9 точки за голям комплект. В комплекта влизат плочки с всички възможни двойки точки, като всяка двойка плочи се съдържа точно един път.

1.28. По колко начина колода от 32 карти може да се раздели на две равни на брой части? А на четири равни части?

1.29. По колко начина колода от 32 карти може да се раздели на две равни части, като във всяка една от двете части броят на черните карти е равен на броя на червените? А на четири части при същите условия?

1.30. По колко начина 18 топчета с различен цвят могат да се поставят в две кутии с равен брой топчета във всяка? А в три кутии при същите условия?

1.31. а) Нека функцията F(x,y,z) е 10 пъти непрекъснато диференцируема. Колко различни частни производни от осми ред притежава?

б) Нека функцията f е функция на **m** аргумента, която е **n** пъти непрекъснато диференцируема. Колко са различните частни производни на f от ред $\boldsymbol{n}$?

1.32. На танцова забава идват $\boldsymbol{m}$ момичета и $\boldsymbol{n}$ момчета. По колко начина могат да се образуват $\boldsymbol{k}$ танцови двойки? ($\boldsymbol{k \le \min [m, n]}$)

1.33. Разпределят се $\boldsymbol{n}$ червени и $\boldsymbol{k}$ сини топки в $\boldsymbol{m}$ различни кутии, като всяка кутия побира най-много 1 топка и $\boldsymbol{n + k \le m}$. На колко е равен броят на различните разпределения, ако: а) топките са неразличими; б) топките са различими?

<u>Приложение във физиката</u>

Всяко тяло представлява съвкупност или още ансамбъл от голям брой микрочастици.Всички частици принадлежат на един от двата големи класа – фермиони и бозони. Фермионите са частици с полуцял спин – $(\pm 1/2)\hbar, (\pm 3/2)\hbar, (\pm 5/2)\hbar$ и т.н. Такива са електроните, протоните, неутроните, ядрата с нечетен брой нуклони и др. Бозоните пък са частици с цял спин – $0, \hbar, 2\hbar$ и т.н. Такива са фотоните, ядрата с четен брой нуклони и др. Основната разлика между тези частици е в тяхната „общителност“ – фермионите се подчиняват на т. н. „принцип на Паули“ според който в една система не може да има две частици в едно и също енергетично състояние. Бозоните са много по-„общителни“ и съвсем спокойно съществуват по няколко на едно енергетично ниво.

За да изявят индивидуалността си частиците трябва да се срещат, т. е. да се оказват в близки или дори еднакви енергетични нива. Ако имаме N частици и K достъпни за тях нива важно се оказва отношението N/K. Възможни са два случая: $N/K << 1$ и $N/K \approx 1$. В първия случай на една частица се падат толкова много свободни нива, че срещите между частиците са пренебрежимо редки. Такъв ансамбъл се нарича неизроден и се подчинява на класическата статистика на Максуел-Болцман. Такива са всички обекти от класическата физика при които енергията е разпределена практически непрекъснато и $K \to \infty$. Във втория случай ансамблите се наричат изродени. Такива са само квантовите обекти (и то не винаги), тъй като при тях енергията се разпределя дискретно и K е крайно число. Тук вече се проявяват „индивидуалните“ свойства на фермионите и бозоните и съответно се налага употребата на различни статистически модели. Моделът на Ферми-Дирак (от името Ферми – фермиони) предполага най-много по една частица на ниво, а този на Бозе-Айнщайн (Бозе – бозони) – произволен брой частици на всяко енергетично ниво. Ако се намали броят на частиците Nили се увеличи броя на състоянията K (например чрез нагряване) изроденият ансамбъл може да премине в неизроден и така статистиката наМаксуел-Болцман може да се разглежда като обща граница на Ферми-Дираковата и Бозе-Айнщайновата при $N/K \to 0$.

1.34. Да се намери броят на възможните начини за разпределение на ***k*** електрона с еднакви енергии в ***n*** енергетични нива, ако във всяко енергетично ниво може да се намира най-много един електрон.

1.35. Да се намери броят на възможните начини за разпределение на ***k*** електрона с еднакви енергии в ***n*** енергетични нива, ако във всяко енергетично ниво могат да попаднат произволен брой електрони.

1.36. Да се намери броят на възможните начини за разпределение на ***k*** електрона с различни енергии в ***n*** енергетични нива като броят на електроните, които могат да попаднат в едно енергетично ниво е произволен.

Задачи с повишена трудност

1.37. Нека са дадени крайните множества A_1, A_2, …A_n. Докажете че

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i.A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i.A_j.A_k| - \ldots + (-1)^n.\ |A_1.A_2\ldots A_n|$$

Забележка. $|A|$ означава броят на елементите на крайното множество A.

1.38. Нека $\Omega = A \cup B \cup C$. Възможно ли е $|A|=520$, $|B|=490$, $|C|=428$, $|AB|=187$, $|AC|=142$, $|BC|=84$?

1.39. Нека $M = \{a_1, a_2, \ldots , a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m\}$. Колко са подмножествата на M, които съдържат поне един елемент a_i и поне един елемент b_j?

1.40. Колко решения в цели неотрицателни числа има уравнението

$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$?

2. Основни понятия в теорията на вероятностите. Алгебра на събитията

Справочник

Основната математическа структура в Теорията на вероятностите е следното понятие:

Вероятностно пространство*: наредена тройка (**Ω, $\mathcal{F}$, P**), където:*

Ω *е произволно непразно множество;* **$\mathcal{F}$** *е σ-алгебра над* **Ω**, **P** *е вероятностна мярка над* **$\mathcal{F}$**.

По подразбиране тази структура е породена от някакъв случаен експеримент (опит), възможните изходи на който образуват **Ω**.

Други основни понятия:

Елементарно събитие (елементарен изход)*: Всеки елемент на* **Ω** *(всеки изход на даден вероятностен опит)*

Пространство от елементарни събития: *така се нарича множеството* **Ω** *{съвкупността от всички елементарни събития}*

Събитие (случайно събитие): *Всеки елемент на σ-алгебрата* **$\mathcal{F}$**. *(В началото може да се приеме че тва е произволно подмножество на* **Ω,** *т.е. всяка съвкупност от елементарни събития, но всъщност изискването за принадлежност към σ-алгебрата* **$\mathcal{F}$** *е съществено нетривиално изискване, лежащо в основата на Теорията на вероятностите)*

Един изход ***a*** *е благоприятен за събитието А, ако е елемент на* ***А,*** **$a \in A$.**

Достоверно събитие*:* **Ω** *= {състои се от всички елементарни събития}*

Невъзможно събитие*: празното множество $\varnothing$ = {няма благоприятни изходи(празното* ***множество)}***

Равенство на събития:*Събитията А и В се наричат еквивалентни или равни и се означават с А = В ако съдържат едни и същи елементи (всеки елемент на А е елемент на В и обратно).*

Събитието A^c *се нарича допълнение на събитието* ***А****, ако се състои от всички изходи на пространството* **Ω**, *които не принадлежат на* ***А***

Сумата ***А + В*** *(****А****или* ***В****) е събитие, което се състои от всички изходи, които принадлежат или на* ***А****,или на* ***В****,или и на двете*

Произведението ***А.В*** *(****А*** *и* ***В****) е събитие, което се състои от всички изходи, които принадлежа както на* ***А****, така и на* ***В***

От събитието ***А*** *следва събитието* ***В*** *(****$A \subseteq B$****), ако всички изходи на* ***А*** *принадлежат и на* ***В.***

Събитията А и В се наричат несъвместими, ако $A.B=\varnothing$.

Пълна група от събития*: събитията A_1, A_2,..., A_n образуват пълна група от събития (или разбиване на* **Ω***), ако са изпълнени условията: 1) $A_i.A_j = \varnothing \ \forall i \neq j$; 2) $\bigcup_{k=1}^{n} A_k =$* **Ω***; 3) $P(A_k) > 0 \ \forall k = 1, 2, \ldots n$.*

Задачи

2.1. Монета се хвърля веднъж. Опишете множеството от елементарни изходи Ω.

Монета се хвърля 3 пъти. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.2. Монета се хвърля, докато се падне ези. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.3. Зар се хвърля веднъж. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.4. Зар се хвърля 3 пъти. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.5. Зар се хвърля, докато се падне 6. Опишете множеството от елементарни събития Ω.

2.6.Проверете верността на следните тъждества:

$A + A = A$, $A.A = A$, $A + ¢ = A$, $A.¢ = ¢$, $A + \Omega = \Omega$, $A.\Omega = A$

$A + A^c = \Omega$, $A.A^c = ¢$, $¢^c = \Omega$, $\Omega^c = ¢$

($¢$ – невъзможното събитие, Ω – достоверното събитие)

2.7. Докажете, че ако $A \subset B$, то са верни тъждествата $A.B = A$, $A + B = B$. Докажете, че ако е изпълнено кое да е от тези тъждества, то $A \subset B$.

2.8. Докажете,че за всеки 2 случайни събития A и B са в сила законите на де Морган:

$$(A+B)^c = A^c.B^c, \ (A.B)^c = A^c + B^c.$$

2.9. Докажете, че за всеки 3 случайни събития A, B и C са в сила тъждествата

$A.B + C = (A + C).(B + C)$, $A – B = A.B^c$, $(A + B) – B = A – A.B = A.B^c = A – B$.

2.10. Нека A и B са 2 събития. Покажете че събитието A+B може да се разложи на сума от несъвместими събития по следните начини:

$A + B = A + (B – A.B)$, $A + B = A.B + A.B^c + A^c.B$, $A + B = A + B.A^c$.

2.11. Покажете, че ако $A \subset B$, то $B^c \subset A^c$.

2.12. Нека A, B и C са три различни събития. Използвайки и трите събития A, B, C и действията между събитията: допълнение (^{c}), обединение (+) и сечение (.), напишете израз за събитието, при което

а) настъпва само A

б) настъпват двете събития A, B, но не настъпва C

в) настъпва поне едно от събитията A, B, C

г) настъпват поне две от събитията A, B, C.

д) настъпват всичките събития A, B, C.

е) никое от събитията A, B, C не настъпват

ж) настъпва най-много едно от събитията A, B, C

з) настъпват най-много две от събитията A, B, C

и) настъпват точно две от събитията A, B, C к) настъпват най-много три от събитията A, B, C.

2.13. Покажете, че събитията A. $\overline{A+B}$, $\overline{A}.B$ са разбиване на Ω (образуват пълна група).

2.14. Вярно ли е че A и B са еквивалентни ако :

а) $\overline{A}=\overline{B}$;

б) A + C = B + C;
в) A.C = B.C.

2.15. Докажете че A и B са еквивалентни, ако
а) A + C = B + C и A.C = B.C ;

а) A + C = B + C и A + $\overline{C}$ = B+$\overline{C}$.

3. Класическа вероятност. Свойства. Основни формули за вероятност. Формули за сума на две и повече събития

Справочник

Най-простият модел на вероятностно пространство Ω *е т.нар.* ***класическа схема*** *или* ***схема на урните****. При него пространството* Ω *представлява крайно множество от равновероятни изходи:*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\},\ P(\omega_1) = P(\omega_2) = ...\ P(\omega_n) = \frac{1}{\mathrm{n}}.$$

Поради крайността на Ω *алгебрата от събития F съвпада с множеството от всички подмножества на* Ω*. Следователно всяко подмножество* $A \subset \Omega$*е наблюдаемо в такъв опит и неговата вероятност се дефинира с формулата на класическата вероятност:*

$$P(A)\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n},$$

където к = $|A|$ *= {брой на благоприятните изходи за събитието А}, а n =* $|\Omega|$ *= брой на всички възможни изходи}*

От дефиницията на класическата вероятност следват следните свойства:

1) $0 \le P(A) \le 1$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Ако А влече В (А⊆ В), то Р(А) ≤ Р(В);

4) За всяко събитие А е в сила формулата за вероятност на допълнението

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

5) За всеки две събития А и В е в сила формулата за събиране на вероятностите

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

Формулата за събиране на вероятности се обобщава за произволен брой случайни събития $A_1, A_2, ..., A_n$*, n >1 (формула на А. Поанкаре)*:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^{n} P(A_\kappa) - \sum_{\substack{\kappa,j=1\\ k<j}}^{n} P(A_k A_j) + \sum_{\substack{\kappa,j,i=1\\ k<j<i}}^{n} P(A_k A_j A_i) - .... + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 ... A_n)$$

Алгоритъм за пресмятане на класическа вероятност

1) *определя се видът на комбинаторната схема, определена от опита. Най-често трябва да се определи дали има наредба в изходите или не (вариации или комбинации) и дали има повторение в изходите или не;*
2) *прилага се* ***Алгоритъм за решаване на комбинаторни задачи от параграф 1*** *за пространството Ω;*
3) *прилага се* ***Алгоритъм за решаване на комбинаторни задачи от параграф 1*** *за зададеното случайно събитие A;*
4) *стойността, получена в 3) се дели на стойността получена в 2.*

Задачи

3.1. Каква е вероятността при хвърляне на зар да падне четно число? А просто число?

3.2. Монета се хвърля 3 пъти. Каква е вероятността броят на езитата да е повече от броя на турите?

3.3. Зар се хвърля веднъж. Каква е вероятността на следните събития:

A = {паднало е четно число}, B = {паднало е просто число}, C = {паднало е число кратно на 3}, D = {паднала е 6}

3.4. Зар се хвърля два пъти. Каква е вероятността на следните събития:

A = {падат се 2 шестици}, B = {падат се четни числа}, C = {падат се прости числа}, D = {падат се четно и нечетно число}, E = {пада се чифт}, F = {сумата от точките е четно число}.

3.5. Каква е вероятността броят на падналите ези да е равен на половината от общия брой хвърляния на правилна монета, ако броят на хвърлянията е:

а) 10 пъти; б) 100 пъти; в) 1000 пъти; г) 10 000 пъти?

3.6. Каква е вероятността броят на падналите шестици да е точно една шеста от общия брой хвърляния на правилен зар, ако зарът е бил хвърлен:

A) 6 пъти; B) 60 пъти; C) 600 пъти; D) 6000 пъти?

3.7. В кутия има M бели и $N - M$ черни топки. От кутията се вадят без връщане $n < N$ топки. Каква е вероятността точно m от изтеглените топки да са бели?

3.8. В играта „6 от 49“ каква е вероятността за тройка, четворка, петица и шестица?

3.9. В игра на покер каква е вероятността за различните фигури (2, 3, 2 двойки, фул, каре, кента и т.н.)?

3.10. От пълен малък комплект домино (28 плочки) се избират случайно 7 плочки. Намерете вероятността поне върху една от изтеглените плочки да има 6.

3.11. Група от n човека сядат по случаен начин на n стола, наредени в редица. Намерете вероятността двама предварително избрани човека да седнат един до друг.

3.12. Група от n човека сядат по случаен начин на n стола, наредени около кръгла маса. Намерете вероятността двама предварително избрани човека да седнат един до друг.

3.13. Група от 12 души, между които са Иван и Петър, се нареждат случайно на опашка в стола. Каква е вероятността между Иван и Петър да се окажат точно 5 човека?

3.14. 10 души, между които Иван и Петър, се настаняват в хотел в 2 триместни и един четириместен апартамент по случаен начин. Каква е вероятността Иван и Петър да попаднат в четириместния апартамент? А в един и същи апартамент?

3.15. 7 ябълки, 3 портокала и 5 лимона се поставят в 3 пакета, така че във всеки пакет има по 5 плода. Намерете вероятността на събитията:

А = {във всеки пакет има по един портокал}, В = {всички лимони са в един пакет}

3.16. N еднакви молива се чупят на по 2 части – къса и дълга. След това получените $2.N$ части се обединяват в N двойки по случаен начин. Намерете вероятността на събитията:

А = {двойките са обединени по първоначалния начин}, В = {във всяка от двойките има по едно дълго и по едно късо парче}

3.17. (**Парадокс на де Мере**) Хвърлят се 3 зара. Каква е вероятността сумата от точките да е 11? А 12?

3.18. n топки по случаен начин се поставят в n кутии. Намерете вероятността на събитията А={във всяка кутия има по една топка}, В={всички топки са в една кутия}, С={има точно една празна кутия}

3.19. На автомобилен паркинг има 12 места, разположени в редица. На паркинга има 8 автомобила, а свободните 4 места са едно до друго. Каква е вероятността това да е станало случайно?

3.20. В кутия има 90 изправни и 10 дефектни детайла. От кутията се вземат 10 детайла. Каква е вероятността всичките избрани детайли да са изправни?

3.21. Покажете, че е по-вероятно да се падне поне една единица при 4 хвърляния назар, отколкото да се падне поне един чифт единици при 24 хвърляния на 2 зара.

Забележка. Според някои твърдения задачата е възникнала при игра на зарове в игрална зала и де Мере я е предложил на Паскал. В действителност задачата е поставена от Джеронимо Кардано.

3.22. Дадени са пет отсечки с дължини съответно 1, 3, 5, 7 и 9 единици. Каква е вероятността случайно взети три от тях да могат да бъдат страни на триъгълник?

3.23. Хвърлят се n зара. Да се пресметне вероятността сумата от падналите се точки да бъде не по-малка от $6n - 1$.

3.24. От числата 1, 2, …, n се избират случайно две числа. Каква е вероятността едното от тях да бъде строго по-малко, а другото – по-голямо от дадено число k, където $1 < k < n$?

3.25. Числата 1, 2, 3, 4, 5 са написани на 5 картички. Случайно се избират една след друга 3 картички и изтеглените цифри се разполагат една до друга в реда на изтеглянето. Да се пресметне вероятността полученото трицифрено число да бъде четно.

3.26. Хвърлят се 2 зара. Да се пресметне вероятността произведението от броя на падналите се точки да е четно число.

3.27. Случайно избрана плочка от домино (малък комплект от 28 плочки)съдържа различни числа на двете си половинки. Да се пресметне вероятността при случаен избор на плочка от останалите тя да съдържа поне едно от числата на първата плочка.

3.28. Каква е вероятността в случайно взета пермутация от n елемента 2 дадени елемента да не са един до друг?

3.29. По случаен начин m „нули“ и n „единици“ се подреждат в редица. Каква е вероятността редицата да започва с k „нули“ и да завършва с s „единици“ ($k \leq m$, $s \leq n$)?

3.30. Секретна ключалка съдържа на обща ос S диска, всеки от които е разделен на M сектора с различни букви, нанесени в тях. Ключалката се отваря само когато всеки диск заеме определено положение спрямо тялото на ключалката. Да се пресметне вероятността за отваряне на ключалката при поставяне на произволна комбинация от букви.

3.31. Върху 6 картончета са написани буквите Л, И, Т, Е, Р, А. Избират се 4 картончета и се слагат едно до друго. Каква е вероятността да се получи думата ТИРЕ?

3.32. От урна, която съдържа топки с номера 1, 2,..., N,вадим n пъти по една топка. Да се пресметне вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако след всяко изваждане извадената топка:

а) се връща в урната преди следващото изваждане;

б) не се връща в урната.

3.33. Десет книги се поставят случайно на един рафт. Да се пресметне вероятността: а) 3 предварително набелязани книги да се окажат една до друга; б) k предварително набелязани книги да се окажат една до друга, $2 \leq k \leq 10$.

3.34. N книги се поставят случайно на един рафт. Да се пресметне вероятността k предварително набелязани книги да се окажат една до друга, $2 \leq k \leq N$.

3.35. Да се пресметне вероятността номерът на случайно избрана банкнота да не съдържа еднакви цифри,ако този номер може да бъде кое да е седемцифрено число, започвайки от 0000001.

3.36. Девет пътника по случаен начин се качват в 3 вагона. Да се пресметне вероятността:

а) във всеки вагон да се качат по 3 пътници;

б) в един вагон да се качат 4, в друг – 3 и в третия – 2 пътници.

3.37. Хвърлят се n зара. Да се пресметне вероятността да се паднат n_1 единици, n_2 двойки,..., n_6 шестици, като $n_1 + n_2 + ... + n_6 = n$.

3.38. Вероятността родfesteният ден на един човек да е през определен месец на годината ще считаме еднаква за всички 12 месеца. При това условие да се пресметне вероятността: а) в дадена компания от 12 души всички 12 рождени дни да са в различни месеци; б) в дадена компания от 6 души всички рождени дни да са само в някои 2 месеца.

3.39. На колко е равен най-малкият брой хора, избрани по случаен начин, за да може с вероятност, не по-малка от 1/2 да се твърди че рождените дни на поне двама от тях съвпадат. (Годините на раждане могат да са различни. Предполага се, че 29 февруари, не може да бъде рожден ден, а останалите 365 дни се разглеждат като равновероятни рождени дни.)

3.40. Група от n човека се нарежда в редица по случаен начин. Да се пресметне вероятността между две предварително избрани лица A и B, да има точно s души, ($s \leq n - 2$).

3.41. Група от $2*n + 1$ човека сядат около кръгла маса по случаен начин. Да се пресметне вероятността между две предварително избрани лица A и B, да има точно s души, ($s \leq n$).

3.42. На всяка от n пейки по случаен начин сядат по m лица. Да се пресметне вероятността 2 дадени лица да седнат едно до друго.

3.43. В зала с $n + k$ места по случаен начин сядат n души. Да се пресметне вероятността да бъдат заети предварително определена m места, $m \leq n$.

3.44. Да се определи вероятността контролният номер напървата срещната лека кола:

а) да не съдържа еднакви цифри;

б) да има една двойка еднакви цифри;

в) да има 3 еднакви цифри;

г) да има 2 двойки еднакви цифри;

д) да има една и съща сума от първите 2 и от последните 2 цифри;

е) да се състои от 4 еднакви цифри.

Приемаме, че номерата са четирицифрени от 0000 до 9999 и не се повтарят

3.45. Множеството $1, 2, ..., 4N$ по случаен начин се разделя на две групи с равен брой числа. Да се пресметне вероятността:

а) във всяка група да има по равен брой четни и нечетни числа;

б) всички числа, кратни на N, да попаднат в една група;

в) числата, кратни на N, да се разпределят по равно в двете групи.

3.46. Да се пресметне вероятността последните две цифри на куба на случайно избрано цяло число N да са единици.

3.47. Хвърлят се 10 различими зара. Каква е вероятността да се паднат по равен брой „единици“ и „шестици“?

3.48. Компания се състои от 5 мъже и 10 жени. Да се намери вероятността при случайното им групиране в 5 групи по трима души, във всяка група да има мъж.

3.49. Хвърлят се 3 различими правилни зара. Какви е вероятността на, събитието A={сумата и произведението на падналите се числа са равни помежду си}?

3.50. От урна, съдържаща 10 бели, 7 зелени и 6 червени топки, се изважда 1 топка. Каква е вероятността извадената топка да е: а) бяла; б) зелена; в) червена?

3.51. Урна съдържа 8 бели и 4 черни топки. Изваждат се едновременно 2 топки. Кое е по-вероятно: двете топки да са бели или двете топки да са с различен цвят?

3.52. От урна, съдържаща, 12 бели и 8 черни топки, се изваждат едновременно 2 топки. Да се намери вероятността на събитията: A={и двете да са бели}; B={и двете да са черни}; C={двете топки да са с различен цвят}.

3.53. От урна, съдържаща, M бели и N черни топки, се изваждат едновременно 2 топки. Да се намери вероятността на събитията: A={и двете да са бели}; B={и двете да са черни}; C={ двете топки да са с различен цвят}.

3.54. В една урна има $2.M$ бели и $2.N$ черни топки. Изваждат се едновременно $M+N$ топки. Каква е вероятността в урната да са останали M бели и N черни топки?

3.55. При регистриране за достъп в определена страница в Интернет се избира парола, която задължително се състои от 5 различни символа: първите два – цифри, останалите три – букви, като се използват задължително само цифрите 2, 3, 4 и само буквите B, C, D, K и F.

а) Колко различни пароли съществуват?

б) Каква е вероятността, ако изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да започва с цифрата 2 и да завършва с буквата C?

в) Каква е вероятността, ако изберем по случаен начин една парола измежду описаните по-горе, тя да не съдържа буквата B?

г) Каква е вероятността, ако изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да започва с четна цифра?

3.56. При регистриране за достъп в определена страница в Интернет трябва да си изберем парола, която задължително се състои от 4 различни символа и е позволено да се използват само буквите A, B, C, D, F и K.

а) Колко различни пароли съществуват?

б) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните,тя да започва с буквата A?

в) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да започва с буквата A и да завършва с буквата K?

г) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да е с различни букви?

д) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да не съдържа буквата К?

е) Каква е вероятността, ако си изберем по случаен начин една парола измежду описаните, тя да съдържа буквата А?

3.57. В студентски клуб по Информатика има 5 второкурсника, 6 третокурсника и 7 четвъртокурсника. За участие в предстоящ семинар се избират по случаен начин 5 от тях.

а) По колко различни начина може да се избере групата за семинара?

б) Каква е вероятността да са избрани студенти само от 4 курс?

в) Каква е вероятността да е избран само един второкурсник?

г) Каква е вероятността да са избрани 3 второкурсника и по един от другите курсове?

д) Каква е вероятността да е избран поне един от втори курс?

3.58. В студентския съвет на факултета са избрани 3 първокурсника, 5 второкурсника и 7 третокурсника. От този състав случайно се избират 5 студента за представители на общоуниверстетско събрание.

а) По колко различни начина може да се избере групата за семинара?

б) Каква е вероятността да са избрани студенти само от 3-ти курс?

в) Каква е вероятността сред избраните няма второкурсници?

г) Каква е вероятността да са избрани 1 първокурсник, 1 второкурсник и трима третокурсника?

д) Каква е вероятността да е избран поне един от четвърти курс?

3.59. В кутия има 8 листчета с написани числата 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 на тях. Със затворени очи избираме две листчета едновременно.

а) Каква е вероятността и на двете листчета да има четно число?

б) Каква е вероятността сумата от числата на двете листчета да е по-голяма от 15?

в) Каква е вероятността числата на двете листчета да са равни?

г) Каква е вероятността числото на едното листче да е два пъти по-голямо от числото на другото?

д) Каква е вероятността поне едно от числата на двете листчета да е четно число?

е) Независими ли са двете събития

А = {числата на двете листчета са равни помежду си};

В = {сумата от числата на двете листчета е по-голяма от 18}?

Обосновете отговора си.

3.60. На стените на кубче са написани числата 5, 6, 7, 8, 9, 10. Кубчето се подхвърля последователно два пъти на масата.

а) Каква е вероятността на горната стена и двата пъти да има четно число?

б) Каква е вероятността сумата от числата на горната стена да е по-голяма от 15?

в) Каква е вероятността на при първото подхвърляне на горната стена да има число по-голямо от числото на горната стена при второто подхвърляне?

г) Каква е вероятността на горната стена и двата пъти да има едно и също число?

д) Каква е вероятността поне един път на горната стена да се показва четно число?

е) Независими ли са двете събития
A = {числата на горната стена при двете хвърляния са равни помежду си};
B = {сумата от числата при двете хвърляния е по-голяма от 18}?
Обосновете отговора си.

4. Геометрична вероятност

Справочник

Да разгледаме случая, когато пространството Ω е безкрайно, т. е. Ω се състои от безброй много елементарни събития, и на Ω може да се съпостави взаимно еднозначно геометричен обект Λ, а на събитието А – геометричен обект Ψ (Ψ$\subseteq$Ω). В този случай дефинираме вероятност, която се нарича геометрична вероятност на А с равенството

$$P(A) = \frac{\text{мярката на } \Psi}{\text{мярката на } \Lambda}$$

Пояснение: в по-простите случаи ако Λ е подмножество на правата мярката ще бъде дължина, ако е подмножество на равнината мярката ще бъде лице, ако е подмножество на пространството мярката ще бъде обем. Разбира се възможни са и по-сложни примери, например Λ да бъде окръжност и тогава мярката на Λ и Ψ отново ще бъде дължина.

Алгоритъм за пресмятане на геометрична вероятност

1) *определя се броят на независимите параметри и съответно размерността на пространството* **Ω***;*
2) *построява се геометричен модел Λ, съответстващ взаимно еднозначно на* **Ω***;*
3) *намира се геометричният модел Ψ, съответстващ взаимно еднозначно на събитието А като подмножество на* **Ω***;*
4) *намират се мерките (дължини, лица, обеми)на Λ и Ψ;*
5) *пресмята се вероятността Р(А) като отношение на тези мерки.*

Важно*: моделът Λ на пространството* **Ω** *в стъпка 2) на алгоритъма често не е единствен – задача 4.2. показва че той зависи съществено от начина на параметризиране на* **Ω***! Задача 4.5. пък показва важността на взаимната еднозначност и точността на формулировките, от които зависи дори броят на независимите параметри в стъпка 1).*

Задачи

4.1. (Задача за срещата)Двама души уговарят среща пред киното между 19 и 20 часа, при следното условие: всеки, изчаква другия не повече от 15 минути. Ако другият не дойде до 15-тата минута или стане 20 часа, чакащият влиза в киното. Каква е вероятността двамата да се срещнат пред киното?

4.2. Върху отсечка се избират случайно 2 точки, които я разделят на 3 отсечки. Каква е вероятността да може да се построи триъгълник със страни тези 3 отсечки?

4.3. Върху единична отсечка се избират случайно 2 точки, които я разделят на 3 отсечки. Каква е вероятността всяка от трите отсечки да има дължина поне s, $s \in (1, 1/3)$?

4.4. Върху единична отсечка се избират случайно $n - 1$ точки, които я разделят на n части. Каква е вероятността всяка от тези части да има дължина поне s, $s \in (1, 1/n)$?

4.5. (Парадокс на хордата, парадокс на Бертран) В кръг с радиус 1 се прекарва по случаен начин хорда. Намерете вероятността дължината на хордата да е поне $\sqrt{3}$?

4.6. Избират се 3 случайни отсечки с дължини в интервала $(0,s)$. Каква е вероятността сумата от дължините им да е по-голяма от s?

4.7. В равнината е прекарана квадратна мрежа с помощта на 2 семейства успоредни линии. Оценете размера s на квадратчетата от мрежата, ако при многократно хвърляне на монета с диаметър d в 40% от случаите тя не пресича нито една линия от мрежата.

4.8. В интервала $[-1,2]$ се избират случайно 2 числа. Каква е вероятността сумата им да е по-голяма от 1, а произведението им да е по-малко от 1?

4.9. Дадени са 2 концентрични окръжности с радиуси R и r, $R > r$. Върху голямата окръжност случайно се избират 2 точки А и В. Каква е вероятността хордата АВ да не пресече малката окръжност?

4.10. (**Задача на Бюфон за иглата**) В равнината са прекарани успоредни прави на разстояние $2.a$. Върху равнината се хвърля случайно игла с дължина $2.s$, $s < a$. Каква е вероятността иглата да пресече някоя от успоредните прави?

4.11. Върху отсечката АВ се избират по случаен начин 3 точки. Да се намери вероятността да може да се построи триъгълник със страни, чиито дължини са равни на разстоянията от А до избраните точки?

4.12. Каква е вероятността корените на квадратното уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ да са реални, ако стойностите на коефициентите са равновероятни в правоъгълника $-k \leq a \leq k$, $-m \leq b \leq m$?

4.13. В равнината са прекарани 2 снопа успоредни прави, крито я разделят на правоъгълници със страни a и b $(a \leq b)$. Върху равнината случайно се хвърля монета с диаметър $2r < a$. Да се намери вероятността монетата да не пресича нито една от правите.

4.14. Върху паркет, образуван от еднакви равностранни триъгълници със страна а, се хвърля монета с радиус r ($r < a\frac{\sqrt{3}}{6}$) Да се намери вероятността монетата да не пресича контура на нито един от триъгълниците.

4.15. От отсечка с дължина 1 случайно е избрана точка, която я разделя на 2 части. Каква е вероятността от получените 2 части и отсечка с дължина 1/2 да може да се построи триъгълник?

4.16. От отсечката AB случайно са избрани две точки C и D. Да се намери вероятността C да е по-близо до D, отколкото до A.

4.17. Върху окръжност случайно са избрани 3 точки A, B и C. Каква е вероятността триъгълникът ABC да е остроъгълен?

4.18. (**Задача на Лаплас за иглата**) Равнината е покрита с правоъгълници със страни a и b. Върху нея се хвърля случайно игла с дължина s, $s < min(a,b)$. Да се намери вероятността иглата да не пресече нито една страна на правоъгълник.

4.19. (**Задача на звездната астрономия**)В сфера с радиус R случайно и независимо една от друга са разположени N точки. Да се намери вероятността разстоянието от центъра на сферата до най-близката точка да е не по-малко от a, където $0 < a < R$. Каква е границата, на тази вероятност при $R \to \infty$ и $N/R3 \to 4\pi.s/3$?

4.20. В кръг е вписан квадрат. Да се намери вероятността на събитията:

A = {случайно хвърлена точка в кръга да се окаже вътре в квадрата};

B = {от 5 точки, случайно хвърлени в кръга, 1 да се окаже в квадрата и по 1 във всеки от четирите сегмента}

4.21. Върху кълбо е нанесена географска координатна мрежа. Кълбото се хвърля върху равнина. Да се намери вероятността на събитията:

A = {точката на първия допир на кълбото с равнината да се намира между 0° и 90° източна дължина};

B = {точката на първия допир на кълбото с равнината да се намира между 45° и 90° северна ширина};

C = {точката на първия допир на кълбото с равнината да се намира в общата част на областите от A и B}

5. Условна вероятност.
Формула за умножение на вероятности.
Независимост на случайни събития

Справочник

Условна вероятност:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},\ P(AB) = P(A|B)P(B),$$

Независимост: *Две събития A и B са независими, ако е изпълнено* $P(A|B) = P(A)$ *или ако* $P(AB) = P(A)P(B)$.

Независимост в съвкупност: *Група от N събития $A_1, A_2, \dots, A_N$ са независими в съвкупност ако за всяка комбинация от индекси е изпълнено:*

$$P(A_i A_k) = P(A_i)P(A_k)$$

$$P(A_i A_k A_j) = P(A_i)P(A_k)P(A_j)$$

....

$$P(A_1 A_2 \dots A_N) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_N)$$

Задачи

5.1. Хвърлят се 2 правилни монети. Разглеждаме събитията

$Г_1$ = {първата монета пада ези}, $Г_2$ = {втората монета пада ези},

A_1 = {на първото хвърляне пада ези}, A_2 = {на второто хвърляне пада ези}.

Намерете вероятността на събитията

$Г_1, Г_2, Г_1.Г_2, Г_1|Г_2, Г_2|Г_1, Г_1 + Г_2, A_1, A_2, A_1.A_2, A_1| A_2, A_2| A_1, A_1 + A_2$,

Независими ли са събитията $A_1, A_2, Г_1, Г_2$?

5.2. (**Пример на Бернщайн**) Стените на правилен тетраедър са боядисани по следния начин: една стена е бяла, една е зелена, една е червена, а четвъртата е боядисана в бяло, зелено и червено. Пирамидата се хвърля и пада на едната си стена. Разглеждаме събитията

A = {върху стената, на която е паднала пирамидата, има бял цвят};

B = {върху стената, на която е паднала пирамидата, има зелен цвят};

C = {върху стената, на която е паднала пирамидата, има червен цвят}.

Независими ли са събитията A и B, B и C, A и C? Независими ли са събитията A, B и C в съвкупност?

5.3. Събитията A и B са с положителни вероятности. Докажете че

а) ако A и B са несъвместими, то те не са независими;

б) ако A и Б са независими, то те не са несъвместими.

5.4. В една урна има a бели и b черни топки. От урната се вадят последователно без връщане 2 топки. Какви са възможните изходи и каква е вероятността на всеки от тях? А ако са извадени 3 топки?

5.5. В кутия има 10 бели и 10 черни топчета. Иванчо вади по едно топче и ако то е бяло, го връща в кутията, като добавя и още едно бяло.

а) Каква е вероятността при 2 такива опита, Иванчо да извади две черни топчета?

б) Каква е вероятността при 3 такива опита, Иванчо да извади едва третия път черно топче?

5.6. При определена игра на карти на един играч му се дават 8 карти измежду колода от 52 карти. Ако поне три от тях са купи, то каква е вероятността всички избрани карти да са купи?

5.7. Избираме случайно число измежду всички естествени числа до 100 включително. Разглеждаме събитията

A = {избраното число се дели на 2}; B = {избраното число се дели на 3}; C = {избраното число се дели на 5}.

Коя от следните двойки събития (A,B), (A,C) и (B,C) са независими? А ако изборът на числото е от множеството на естествените числа до 300 включително?

5.8. Вашият приятел си избира по случаен начин две карти измежду колода от 52 карти. Намерете вероятността да е извадил два попа, ако той отговаря положително на зададения от вас въпрос, който е

а) Вярно ли е, че една от избраните карти е поп или пика?

б) Вярно ли е, че първата избрана карта е поп?

в) Вярно ли е, че втората избрана карта е поп?

5.9. Измежду всички семейства с по три деца е избрано по случаен начин едно и се оказва, че в това семейство има момче. Каква е вероятността това момче да има

а) по-голям брат и по-голяма сестра?

б) по-голям брат?

в) брат и сестра?

Забележка: в тази и следващата задача се приема, че вероятността случайно избрано дете да е момче или момиче е 0.5.

5.10. В детската стая в апартамента на едно семейство живеят заедно две деца.

а) Ако по-голямото е момче, то каква е вероятността по-малкото да е момиче?

б) Ако поне едно от децата е момче, то каква е вероятността да има момиче?

5.11. Кутия съдържа 5 червени и 8 бели топчета.

а) Едно по едно са извадени 4 топчета без връщане. Каква е вероятността всичките извадени топчета да са червени?

б) Без връщане едно по едно се вадят топчета, докато се извадят 4 червени. Намерете вероятността да са извадени общо 4 топчета.

5.12. Две зарчета се подхвърлят едновременно, при което се оказва, че сумата от падналите се точки се дели на 3.

а) Каква е вероятността поне на единия зар да има 3 точки?

б) Каква е вероятността само на един от зар да има 3 точки?

в) Каква е вероятността на двата зара да има различен брой точки?

5.13. В кутия има 5 бели и 5 черни топчета. По случаен начин се вадят едно след друго без връщане две топчета.

а) Каква е вероятността и двете извадени топчета да са бели?

б) Ако първото извадено топче е бяло, то каква е вероятността и второто да е бяло?

Как се променят отговорите на горните въпроси, ако вадим топчетата с връщане?

5.14. При игра на бридж всеки играч има по 13 карти. Ако един играч няма поп, то

а) каква е вероятността неговият партньор да няма поп?

б) каква е вероятността неговият партньор да има поне 2 попа?

5.15. При определена игра на карти на един играч се дават 5 карти измежду колода от 52 карти. Ако поне три от тях са купи, то каква е вероятността всички избрани карти да са купи?

5.16. В кутия има 5 бели и 5 черни топчета. По случаен начин се вадят едно след друго без връщане 4 топчета. Каква е вероятността първите две извадени топчета да са бели, а последните две извадени да са черни?

5.17. Хвърлят се 2 зара. Каква е вероятността да се паднат две „тройки“, ако сумата от падналите се точки е кратна на 3?

5.18. Хвърлят се 3 зара. Каква е вероятността поне на един от тях да се падне числото 3, ако сумата от трите числа е равна на 10?

5.19. Вероятността да се изработи първокачествен детайлна един струг е 0.7. При изработването на същия детайл на друг струг тази вероятност е 0.8. На първия струг са изработени 2 детайла, а на втория 3. Каква е вероятността всички детайли да бъдат първокачествени?

5.20. Вероятността даден стрелец да улучи една мишена е 2/3. Ако улучи мишената при първия изстрел, той получава право на втори, изстрел по втора мишена. Вероятността за улучване и на двете мишени при два изстрела е 0,5. Да се пресметне вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право на втори изстрел.

5.21. С помощта на 6 картички, на които е написана по 1 буква, е образувана думата „карета“. Картичките се разбъркват и след това се изваждат случайно една след друга. Каква е вероятността в реда на изваждането на картичките да се получи думата „ракета“?

5.22.Двете страни на единия от 3 жетона са бели, на другия са черни, а третият жетон има една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира един жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на падналия жетон е бяла, каква е вероятността другата му страна, която не се вижда, също да е бяла?

5.23.В урна има 2 топки – бяла и черна. Изваждаме по 1 топка, докато се появи черна топка, като при изваждане на бяла топка тя се връща в урната и се добавят още 2 бели топки. Да се пресметне вероятността при първите 50 опита да не бъде извадена черна топка.

5.24. В урна има *N* топки с номера от 1 до *N*. Топките се изваждат случайно една по една без връщане. Каква е вероятността при първите *K* изваждания номерата на топките да съвпадат с номерата на изважданията?

5.25.Върху *N* картончета са написани имената на *N* момчета, а върху други *M* картончета – имената на *M* момичета ($N \leq M$). Картончетата се, слагат в кутия и добре се разбъркват, след което *N* пъти последователно се изваждат по 2 от тях, без да се връщат обратно в кутията. Каква е вероятността всеки път да бъдат изваждани двойки картончета „момиче – момче“?

5.26. Абонат е забравил последната цифра на телефонен номер и я набира случайно:

а) Да се пресметне вероятността, че ще му се наложи да звъни на не повече от 3 места;

б) Как се изменя тази вероятност, ако е известно, че последната цифра е нечетна?

5.27. Вероятността за настъпване на събитието А поне веднъж при извършването на 4 независими опита е ½. Да се пресметне вероятността за сбъдване на А при извършването на 1 опит, ако тя е една и съща във всички опити.

5.28. Вероятността за излизане от строя на k-тия блок на дадена машина за време T е равна на $p_k (k = 1, 2, ..., n)$. Да се пресметне вероятността за излизане от строя през посочения интервал от време поне на един от n-те блока на машината, ако работата на всички блокове е взаимно независима.

5.29. При всеки опит едно събитие настъпва с вероятност р. Опитите се провеждат последователно до настъпване на събитието. Да се пресметне вероятността събитието да настъпи точно на $(k + 1)$-вия опит, $k = 0, 1, 2, ...$.

5.30. Прекъсване на електрическа верига може да стане поради излизане от строя на елемента K_1 или и на двата елемента K_2 и K_3. Трите елемента излизат от строя независимо един от друг съответно с вероятности 0.3, 0.2 и 0.15. Да се пресметне вероятността за прекъсване на веригата.

5.31. С какъв минимален брой случайно избрани хора трябва последователно да разговаряте, за да бъде по-голяма от 1/2 вероятността, че рожденият, ден на поне един от тях съвпада с вашия рожден ден? (Предполага, че годината на раждане не е от значение, 29 февруари не е рожден ден, а всичките останали 365 дни са равновероятни рождени дни.)

5.32. Колко пъти трябва да се хвърли зар, зада бъде вероятността за падане на поне една шестица по-голяма от: а) 0,5; б) 0,8; в) 0,9?

5.33. Колко пъти трябва да се хвърлят два зара, за да може с вероятност по-голяма от 1/2, да се очаква поне веднъж сумата от точките да е равна на 12 (задача на дьо Мере)?

5.34. Хвърлят се 2 зара. Дефинираме събитията:

A = {на първия зар се падане четно число},

B = {на втория зар се пада нечетно число},

C = {сумата от падналите се точки е нечетна}.

Независими ли са тези събития две по две? Независими ли са A, B и C в съвкупност?

5.35. От колода, съдържаща 32 карти, случайно се изтегля карта. Разглеждаме събитията A = {изтеглената карта е пика}, B = {изтеглената карта е поп}. Независими ли са тези събития? Какъв е отговорът, ако колодата съдържа 52 карти?

5.36. Върху N картончета са записани N различни реални числа. Картончетата се слагат в кутия, добре се разбъркват и се изваждат едно след друго без да се връщат. Нека A_k = {k-тото извадено число е по-голямо от предишните}. Да се покаже, че $P(A_k) = \frac{1}{k}$, $k = l, \ldots, N$.

5.37. Правилна монета се хвърля последователно 3 пъти, Дефинираме събитията A = {при първото хвърляне се пада ези}, B = (падат поне 2 езита при трите опита} и C = {един и същ резултат при трите хвърляния}. Разглеждаме двойките A и B, A и C, B и C. Да се провери дали във всеки от тези три случая събитията са независими.

5.38. От колода с 32 карти последователно без връщане са изтеглени 3 карти. Да се определят вероятностите на събитията:

A = {измежду тях да има 2 дами};

B = {всички да са от една боя, например 3 кари, 3 купи и т. н.};

C = {първата изтеглена карта да е била купа, ако е известно, че втората е купа}.

Забележка. *Решаването на условие C може да се отложи за следващия раздел 6.*

5.39. Конспект по „Вероятности и статистика“ съдържа 17 въпроса от раздел „Вероятности“ и 9 въпроса от раздел „Статистика“. Студент се явява на изпита, като е научил само 12 от въпросите от раздел „Вероятности“ и 5 от въпросите от раздел „Статистика“.

а) Ако студентът тегли по един въпрос от двата раздела, да се определи вероятността на събитията:

A = {сред падналите му се въпроси да няма въпрос, който да не е учен};

B = {сред падналите му се въпроси да има поне един въпрос, който да не е учен}.

б) Ако студентът тегли 3 случайни въпроса от конспекта (без да се разделя на „Вероятности“ и „Статистика“), да се определи вероятността на събитията:

C = {сред избраните въпроси няма въпрос, който да не е учен};

D = { сред избраните въпроси има поне 2 научени}.

5.40. На продавач на лотарийни билети са му останали само 10 билета, от които 2 печеливши. Един клиент купува 2 билета и след него друг клиент купува още един билет. Да се определи вероятността на събитията:

A = {билетът, купен от втория клиент, е печеливш};

B = {и двата билета, купени от първия клиент са печеливши, ако е известно, че билетът на втория клиент е непечеливш}.

5.41. В склад има 2 каси с бутилки бира, като касите съдържат съответно:

I каса: общо 9 бутилки, от които 1 с изтекъл срок на годност;

II каса: общо 12 бутилки, от които 3 с изтекъл срок на годност.

а) Ако се вземе по 1 бутилка от всяка каса, да се определи вероятността на събитията:

A = {сред взетите бутилки да няма с изтекъл срок на годност}; и

B = {сред взетите бутилки да има точно 1 с изтекъл срок на годност}.

б) Ако се вземат 5 бутилки от I каса, да се определи вероятността на събитията:

C = {сред взетите бутилки да има точно 1 с изтекъл срок на годност}; и

D = {сред взетите бутилки да има поне 2 с изтекъл срок на годност}.

в) Ако в I каса се добави още една бутилка, за която не се знае дали е с изтекъл срок, и след това се избере по случаен начин една бутилка от тази каса, то да се определи вероятността тази бутилка да не е с изтекъл срок на годност.

Забележка. *Решаването на условие в) може да се отложи за следващия раздел 6.*

5.42. В кутия има 3 ментови бонбона, 2 шоколадови, един дъвчещ и един обикновен бонбон, които са с една и съща форма и в еднотипна опаковка.

Въпросите а) – г) са свързани с опита: Избира се един бонбон, запомня се вида му и се връща обратно в кутията, после се избира още един.

а) Опишете пространството от елементарните изходи. Колко на брой са елементарните събития?

б) Каква е вероятността да са избрани два ментови бонбона?

в) Каква е вероятността вторият избран бонбон да е ментов, ако първият не е ментов?

г) Каква е вероятността да е избран поне един път ментов бонбон?

Въпросите д) – з) са свързани с опита: Избира се един бонбон, изяжда се веднага и после се взема втори.

д) Опишете пространството от елементарните изходи. Колко на брой са елементарните събития?

е) Каква е вероятността да са избрани два ментови бонбона?

ж) Каква е вероятността вторият избран бонбон да е ментов, ако първият не е ментов?

з) Каква е вероятността да е избран поне един път ментов бонбон?

5.43. В трети курс информатика има 3 групи:

- в първа група има 15 момичета и 5 момчета
- във втора група има 5 момичета и 10 момчета
- в трета група има 10 момичета и 15 момчета

Въпросите а) – д) са свързани с опита: По случаен начин е избран един третокурсник.

а) Каква е вероятността избраният студент да е от втора група?

б) Каква е вероятността избраният студент да е момиче от втора група?

в) Каква е вероятността избраният студент да е момиче?

г) Каква е вероятността студентът да е от втора група, ако този студент е момиче?

д) Независими ли са събитията А={избраният студент е момиче}; и Б А={избраният студент е от трета група}? Докажи отговора си.

Въпросите е) – з) са свързани с опита: По случаен начин са избрани двама третокурсника, като на първия се дава награда от 20 лв., а на втория – от 15 лв.

е) Каква е вероятността двамата избрани студенти да са момичета?

ж) Каква е вероятността вторият избран студент да е момиче, ако първият е момче?

з) Каква е вероятността поне един от избраните студенти да е момиче?

6. Формула за пълната вероятност. Формула на Бейс

Справочник

Нека събитията A_1, $A_2,\ldots$, A_n образуват пълна група от събития. За произволно случайно събитие B са в сила следните формули:

Формула за пълната вероятност: $P(B)=\sum_{k=1}^{n}P(B\,|\,A_k)P(A_k)$

Формула на Бейс: $P(A_{\ j}|\,B)=\dfrac{P(B\,|\,A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^{n}P(B\,|\,A_k)P(A_k)}$ $\forall\, j=1,2,\ldots n.$

Алгоритъм за пресмятане на вероятност по формулата за пълната вероятност

1) *описва се пълната група от събития и се определя броят n и видът на събитията, които я формират;*
2) *прилага се формулата за пълната вероятност и се разписват формулите, участващи в сумата;*

Алгоритъм за пресмятане на вероятност по формулата на Бейс

1) *описва се пълната група от събития и се определя броя n и видът на събитията, които я формират;*
2) *пресмята се вероятността в знаменателя по Формулата за пълната вероятност (виж **Алгоритъм за пресмятане на вероятност по формулата за пълната вероятност** (до стъпка 4);*
3) *пресмятат се вероятностите в числителя за конкретния индекс, взет от формулата за пълната вероятност;*
4) *извършва се делението във формулата на Бейс.*

Задачи

6.1. В 2 урни има съответно: *a* бели и *b* черни топки в първата и *c* бели и *d* черни топки във втората. От първата урна вадим случайна топка и я преместваме във втората урна. След това от втората урна вадим случайна топка. Каква е вероятността извадената топка да е бяла?

6.2. В 2 урни има съответно: *a* бели и *b* черни топки в първата и *c* бели и *d* черни топки във втората. От първата урна вадим случайно 3 топки и ги преместваме във втората урна. След това от втората урна вадим случайно 3 топки. Каква е вероятността измежду извадените топки да има 1 бяла? А 2 бели?

6.3. Дадена марка телевизори се произвеждат в 3 завода. В първия 2% от телевизорите имат скрит дефект, във втория 1% от телевизорите имат скрит дефект, а в третия 3% от телевизорите имат скрит дефект. Магазин е зареден със 100 телевизора от първия завод, 200 телевизора от втория завод и 300 телевизора от третия завод. Каква е вероятността ако си купим телевизор от този магазин, той да се окаже изправен? Ако купеният от нас телевизор се е оказал изправен, каква е вероятността той да е бил произведен в първия завод? А ако се е оказал с дефект, каква е вероятността да е бил произведен в 3 завод?

6.4. Тест се състои от въпроси с по 4 отговора за всеки от тях (само един от отговорите е верен).Студент или знае отговора на въпроса или го избира случайно. Ако студентът знае верните отговори на 2/3 от въпросите на теста, то каква е вероятността вярно маркиран от този студент отговор да не е избран по случаен начин?

6.5. Как може 10 бели и 10 сини топчета да се поставят в две кутии, така че ако се избере случайно кутия и се извади от нея топче, вероятността то да е бяло, да е възможно най голямата? Колко е тази вероятност?

6.6. В две кутии има съответно: 6 бели и 4 черни топки в първата и 3 бели и 7 черни топки във втората. От първата кутия вадим случайна топка и я преместваме във втората. След това от втората кутия вадим случайна топка.

а) Ако извадената топка от първата кутия е бяла, то да се намери вероятността от втората кутия да е извадена също бяла топка.

б) Да се намери вероятността извадената топка от втората кутия да е бяла.

в) Ако извадената топка от втората кутия се оказва бяла, то каква е вероятността от първата кутия да е била извадена също бяла топка.

6.7. В две урни има бели, зелени и червени топки. В едната им 5 бели, 11 червени и 8 зелени топки, а в другата – 10 бели, 8 червени и 6 зелени топки. От двете урни по случаен начин се изважда по 1 топка. Каква е вероятността двете извадени топки да бъдат от един и същ цвят?

6.8. Вероятността даден спортист да подобри предишния си резултат при 1 опит е равна на р. Да се пресметне вероятността спортистът да подобри резултата си, ако му се разрешава да направи: а) 2 опита, б) 3 опита.

6.9. Всяка от N урни съдържа по m бели и n черни топки. От първата урна случайно се избира 1 топка и се прехвърля във втората урна. След това от втората урна случайно се избира 1 топка и се прехвърля в третата и т. н. Каква е вероятността от последната урна да бъде извадена бяла топка?

6.10. В урна има N еднакви топки с номера от 1 до N. Топките се изваждат по една без връщане. Да се пресметне вероятността поне при 1 изваждане номерът на топката да съвпадне с номера на опита.

6.11. Във влак, композиран от n вагона, се качват k пътници ($n \leq k$), които си избират вагон по случаен начин. Да се пресметне вероятността във всеки вагон да се качи поне по един пътник.

6.12. (**Задача за четиримата лъжци**) Играчът А получава информация, която се изразява с „да“ или „не“, и я съобщава на играча В. По същия начин В предава информацията на С, а С я предава на D, който обявява получената информация. Всеки от четиримата играчи казва истината в 1 случай от 3. Каква е вероятността А да е казал истината, ако е известно, че D е обявил верен резултат?

6.13.Всяка от $N + 1$ урни съдържа по N топки. Урната с номер k: съдържа k бели и $N - k$ черни топки, $k = 0, 1, \ldots, N$. От случайно избрана урна n пъти се вади с връщане случайно избрана топка. Каква е вероятността всички извадени топки да са бели?

6.14. В един факултет има n студента, от които $n_k(k = 1, 2, 3)$ учат в k-ти курс. Единият от двама случайно избрани курсисти се оказва в по-горен курс от другия. Каква е вероятността този в по-горния курс да учи в трети курс?

6.15. Всички изделия в едната от две партиди са доброкачествени, а в другата 1/4 от изделията са бракувани. Изделие, взето от случайно избрана партида, се оказва доброкачествено. Да се пресметне вероятността второто случайноизбрано изделие от същата партида да се окаже бракувано, ако след проверката на първото изделие то е било върнато обратно в своята партида.

6.16. В урна има N топки, всяка от които с еднаква вероятност може да бъде бяла или черна. Последователно са били извадени с връщане n топки. Каква е вероятността урната да съдържа само бели топки, ако черни топки не са се появили?

6.17. Двама играчи А и В хвърлят последователно правилна монета. Играта започва А, а побеждава онзи играч, който пръв хвърли герб. Каква е вероятността за победа на всеки от играчите А и В?

6.18. Трима души последователно хвърлят монета. Печели този, който пръв хвърли герб. Да се пресметне Вероятността за печалба на всеки от играчите.

6.19. В урна има n бели, m червени и k зелени топки, които се изваждат по случаен начин една след друга: а) без връщане; б) с връщане. В двата случая да се пресметне вероятността на събитието А = {бяла топка се изважда преди червена топка}.

6.20. (***Парадокс на топките***). Урна съдържа n топки. Всички възможни предположения за броя на белите топки са равновероятни. В урната пускаме 1 бяла топка. Каква е вероятността случайно избрана след това топка да бъде бяла?

6.21. В наблюдателна станция са монтирани 4 радиолокатора с различни конструкции. Вероятността за откриване на обект с помощта на първия радиолокатор е 0,80, на втория – 0,85, на третия – 0,90 и на четвъртия – 0,95.

а) Наблюдател включва един от радиолокаторите. Каква е вероятността да бъде открит обект.

б) След включването на един от радиолокаторите е регистриран обект. Каква е вероятността да е бил включен втория радиолокатор?

в) С първия радиолокатор е извършено четирикратно наблюдение. Каква е вероятността да е регистриран само един обект; 2) да са регистрирани 2 обекта.

г) Колко наблюдения трябва да се направят с първия радиолокатор, че да се гарантира откриването на обект с вероятност 0,99.

6.22. Две урни съдържат топки, като в първата има 3 бели и 6 черни топки, а във втората – 2 бели и 3 черни топки. От първата урна изтегляме по случаен начин две топки и ги прехвърляме във втората урна. След това от втората урна изтегляме една топка.

а) Намерете вероятността изтеглената топка да е бяла.

б) Ако знаем, че изтеглената топка е бяла, то каква е вероятността от първата урна да са били прехвърлени две бели топки.

в) Ако знаем, че изтеглената топка е черна, то каква е вероятността от първата урна да е била прехвърлена повече от една черна топка.

г) Нека описаният по горе опит е повторен 3 пъти. Каква е вероятността поне веднъж да бъде изтеглена бяла топка.

Забележка. *Решаването на условие г) може да се отложи за следващия раздел 7.*

6.23. При изпълнение на сервис тенисист избира топка от кошница с 30 топки, от които само 10 са нови. Вероятността за точен удар с нова топка е 1/3, а със стара топка – 1/4.

а) Да се намери вероятността за точен удар при случаен избор на топка.

б) Да се намери вероятността взетата топка да е стара, ако е известно че ударът е сполучлив.

в) Направени са три опита. Каква е вероятността тенисистът да има 1) точно две попадения; 2) три попадения.

г) Колко опита трябва да направи тенисистът, че с вероятност 0,9 да има поне едно попадение.

6.24. В 2 урни има бели и черни топки, които са разпределени съответно: в първата – 6 бели и 2 черни; във втората – 3 бели и 2 черни. От първата урна е прехвърлена една топка във втората. Да се определят вероятностите на събитията:

A = {прехвърлената топка е черна};

B = {изтеглената след прехвърлянето топка от втора урна е черна};

C = {прехвърлената топка е черна, ако изтеглената след прехвърлянето топка от втората урна е бяла}.

6.25. В магазин има 3 кашона електрически крушки, като кашоните съдържат съответно:

I кашон: 12 крушки, от които 3 с производствен дефект;

II кашон: 11 крушки, от които 1 с производствен дефект;

III кашон: 15 крушки, от които 2 с производствен дефект.

а) Ако магазинер изпробва по 1 крушка от всеки кашон, да се определят вероятностите на събитията:

А = {сред изпробваните крушки всички са дефектни};

В = {сред изпробваните крушки има поне 1 дефектна крушка}.

б) Ако магазинер изпробва 3 крушки от II кашон, да се определят вероятностите на събитията:

С = {сред изпробваните да няма дефектни крушки};

D = {сред изпробваните да има поне 2 дефектни}.

в) Ако магазинер е продал 1 крушка от III кашон без да я изпробва, да се определи вероятността случайно избрана крушка от същия кашон да е дефектна.

6.26.Три партиди изделия съдържат съответно:

I партида: общо 22 изделия, от които 3 дефектни;

II партида: общо 25 изделия, от които 4 дефектни;

III партида: общо 28 изделия, от които 5 дефектни.

а) Ако клиент избира по едно изделие от всяка партида, да се определи вероятността на събитията

А = {сред избраните да няма дефектни};

В = {сред избраните да има поне едно дефектно}.

б) Ако клиент избира 4 изделия от I партида, да се определи вероятността на събитията

С = {сред избраните няма дефектни};

D = {сред избраните да има поне 2 дефектни}.

6.27.Два завода произвеждат живачни термометри. Некачествено произведените термометри с грешка при отчитането по-голяма от допустимото представляват съответно 0,3% и 0,2% от общия брой произвеждани термометри от I и II завод. Болнично отделение закупува общо 12 термометъра, от които 9 са произведени от I и 3 от II завод. Да се определят вероятностите на събитията:

А = {случайно избран термометър измежду 12 в болничното отделение се оказва некачествен};

В = {случайно избран термометър да е произведен от II завод, ако се е установило, че той е некачествен}.

6.28. Инспектор посещава часовете на V-те класове на едно училище.

Разпределението на пълните отличници в класовете е следното:

$V^а$ клас: общо 25 ученика, от които 7 пълни отличника

$V^б$ клас: общо 28 ученика, от които 6 пълни отличника

$V^в$ клас: общо 24 ученика, от които 5 пълни отличника.

а) Ако инспекторът изпитва по един ученик от всеки клас, да се определят вероятностите на събитията

А = {сред изпитаните ученици да няма пълен отличник};

В = {сред изпитаните ученици да има един пълен отличник}.

б) Ако инспекторът изпитва трима ученика от $V^в$ клас, да се определят вероятностите на събитията А и

С = {сред изпитаните ученици да има поне 2 пълни отличници}.

7. Биномна вероятност. Схема на Бернули. Приближение на Поасон. Локална и интегрална гранична теорема

Справочник

Нека е дадена схема на Бернули с n независими опита и вероятност за успех във всеки отделен опит p.

Вероятността броят на успехите в тази схема на Бернули да е равен на k, $0 \le k \le n$ се дава с формулата:

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...,n.$$

По-нататък за удобство ще означаваме q=1-p.

Вероятността в схема на Бернули с дължина n броят на успехите да е в интервала [a, b], $0 \le a \le k \le b \le n$, се дава с формулата

$$P(a \le S_n \le b) = \sum_{k=a}^{b} C_n^k . p^k . q^{n-k}$$

Приближение на Поасон

Разглеждаме случая на голям брой опити n и малка вероятност за „успех“ p, така че произведението n.p = λ е от порядъка на единица(т. е. близко до 1). Тогава за вероятността броят на успехите да е равен на k е в сила следното приближение:

$$P(S_n = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}$$

известно като „Приближение на Поасон“

Локална гранична теорема

При голям брой опити n k е в сила следното приближение за вероятността броят на успехите да е равен на k:

$$P(S_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2.\pi.n.p.q}}.e^{-\frac{(k-n.p)^2}{2.n.p.q}}$$

Интегрална гранична теорема

При голям брой опити n е в сила следното приближение за вероятността броят на успехите да е в интервала [a, b], $0 \le a \le k \le b \le n$:

$$P(a \le S_n \le b) \approx \Phi\left(\frac{b-n.p}{\sqrt{n.p.q}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n.p}{\sqrt{n.p.q}}\right),$$

където

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}.dt$$

е функцията на разпределение на стандартното нормално разпределение. Табулирана е в ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Алгоритъм за пресмятане на биномна вероятност в даден интервал

1) *определят се параметрите n и p в Схемата на Бернули;*
2) *определя се интервалът на изменение на броя на „успехите“ k: $a \leq k \leq b$;*
3) *пресмята се сумата* $\sum_{k=a}^{b} C_n^k . p^k . q^{n-k}$

Алгоритъм за пресмятане с помощта на приближение на Поасон

1) *проверяват се условията за използване на Приближението на Поасон (голямо n и малко p);*
2) *пресмята се произведението $\lambda = n.p$*
3) *заместват се параметрите във формулата за Приближението на Поасон и се извършват пресмятанията*

Алгоритъм за пресмятане с помощта на Интегрална гранична теорема

1) *проверяват се условията за използване на Интегрална гранична теорема (голямо n);*
2) *пресмятат се изразите* $\frac{b - n.p}{\sqrt{n.p.q}}$ *и* $\frac{a - n.p}{\sqrt{n.p.q}}$;
3) *намират се стойностите* $\Phi\left(\frac{b - n.p}{\sqrt{n.p.q}}\right)$ *и* $\Phi\left(\frac{a - n.p}{\sqrt{n.p.q}}\right)$ *(от таблицата в ПРИЛОЖЕНИЕ 1 или с помощта на компютърна програма);*
4) *пресмята се търсената вероятност като разлика на тези стойности.*

Задачи

7.1. Правилна монета се хвърля 5 пъти. Каква е вероятността да са паднали 3 езита? А 4 езита?

7.2. Зар се хвърля 4 пъти. Намерете вероятността на събитията:

A = {да се падне първи път „шестица“}
B = {да се падне една „шестица“}
C = {да се паднат две „шестици“}
D = {да се падне поне един път „шестица“ }
E = {да се паднат поне два пъти „шестица“}
F = {да се паднат най-много две „шестица“}
G = {да се паднат две „шестици“, ако се знае, че поне един път се е паднала„шестица“}

7.3. Зар се хвърля 10 пъти.

а) Каква е вероятността само първия път да се падне „тройка“?

б) Каква е вероятността един път да се падне „тройка“?

в) Каква е вероятността пет пъти да се падне „тройка“?

г) Каква е вероятността поне осем пъти да се падне „тройка“?

д) Каква е вероятността поне един път да се падне „тройка“?

е) Каква е вероятността не повече от един път да се падне „тройка“?

7.4. Зар се хвърля 12 пъти. Каква е вероятността да паднат 2 шестици? А една шестица? А 12 шестици?

7.5. Вероятността за успешен изход от операция е 0.8. Оперирани са 5 пациента. Каква е вероятността точно 4 от операциите да са успешни?

7.6. При игра на бридж (52 карти) единият от четири играчи 5 пъти подред не е получавал нито едно асо. Има ли основание да се оплаква, че не му върви?

7.7. Кое е по-вероятно при игра, с равностоен противник, ако нее възможно игрите да завършат на равно: а) да бъдат спечелени 3 от 4 партии или 5 от 8 партии; б) да бъдат спечелени не по-малко от 3 от 4 партии или не по-малко от 5 от 8 партии?

7.8. Вероятността за отказ на отделно взет уред при проверка за надеждност е 0,2. Колко уреда трябва да се проверят, за да не бъде вероятността за получаване на поне 3 отказа по-малка от 0,9?

7.9. Пунктът А трябва да бъде свързан с 10 абонати в пункт В. Всеки от абонатите заема линията средно по 12 минути на час. Заявките на кои да са двама абонати са независими. Какъв е минималният брой линии, които са необходими, за да може в произволен момент с вероятност поне 0,99 да бъдат обслужени всички заявки? Какъв е минималният брой линии, които са необходими, за да може в произволен момент с вероятност поне 0,999 да бъдат обслужени всички заявки? Каква е вероятността 9 линии да се окажат недостатъчни?

7.10. Иванчо има 10 зелени, 6 червени и 4 жълти топчета. Той ги слага в кутийка и започва да избира по случаен начин с връщане по едно топче. Каква е вероятността измежду първите 8 избрани топчета да има точно 2 червени?

7.11. Колко опита по схемата на Бернули трябва да бъдат проведени, за да бъде равен на 73 най-вероятният брой на успехите, ако вероятността за успех е p=0.82?

7.12. Най-вероятният брой доброкачествени детайли в една партида от N детайла е равен на K ($K < N$). Каква е вероятността произволно избран детайл от партидата да бъде доброкачествен?

7.13. Иван и Петър изпълняват по 3 наказателни удара на баскетбол, като вероятността за отбелязване на кош при всяко хвърляне за Иван е 0.6, а за Петър е 0.7. Да се пресметне вероятността на събитията: А = {двамата да имат по равен брой попадения}; В = {Иван да има повече попадения от Петър}. Решете задачата, ако вероятността за отбелязване на кош при всяко хвърляне за Иван е 0.5, а за Петър е 0.8.

7.14. Извършват се серия опити по схемата на Бернули без ограничение на броя на опитите и с вероятност за успех при всеки опит, равна на р. Да се пресметне вероятността N-тият успех да настъпи точно на (K + N)-тия опит, K=0, 1, 2,…

7.15. (**Задача на Стефан Банах**) Един пушач винаги носи в джоба си 2 кутии кибрит. Когато иска да запали, той взема клечка от случайно избрана от двете кутии. След известно време, когато избира едната от тях, той ще установи, че тя е празна. Каква е вероятността в този момент другата кутия да съдържа K клечки, ако в началото всяка кутия е съдържала по N клечки (K < N)

7.16. Да се намери вероятността в схема наБернули без ограничение на броя на опитите и с вероятност за успех във всеки опит, равна на р, да настъпят ***M*** успеха, преди да са настъпили ***N*** неуспеха.

7.17. Нека преди опита в схема на Бернули съществуват 2 равновероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при отделен опит: $\boldsymbol{p} = 1/2$ и $\boldsymbol{p} = 2/3$. Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако при провеждане на 200 независими опита в схемата на Бернули са настъпили 116 успеха?

7.18. Каква е вероятността за четен брой успехи в схема на Бернули с дължина ***N*** и вероятност за успех в отделния опит ***p***?А за нечетен?

Приближение на Поасон

7.19. Вероятността за попадение в движещ се самолет при отделен изстрел е 0.001. За да бъде свален самолетът са необходими поне 2 попадения. Каква е вероятността самолетът да бъде свален, ако по него са стреляли 5000 пъти?

7.20. В кана с вода има 10000 бактерии. От каната е взета проба с обем 1/1000 от водата. Каква е вероятността в пробата да се окажат 10 бактерии? А нито една?

7.21. В играта „6 от 49“ на тотото са пуснати 20 000 000 фиша със случайни комбинации. Каква е вероятността да бъда улучени 0, 1, 2, 3,4, 5, 10 шестици?

Локална и интегрална гранична теорема

7.22. Правилна монета се хвърля 1000 пъти. Каква е вероятността броят на езитата да е:

а) между 450 и 550?
б) между 480 и 520?
в) между 490 и 510?

7.23. Правилна монета се хвърля 10 000 пъти. Каква е вероятността броят на езитата да е:

а) между 4500 и 5500?
б) между 4800 и 5200?
в) между 4900 и 5100?

7.24. Зар се хвърля 6000 пъти. Каква е вероятността броят на шестиците да е:

а) между 700 и 1300?

б) между 800 и 1200?

в) между 900 и 1100?

7.25. Вероятността за раждане на момче е 0.513. Каква е вероятността при 100 раждания броят на момчетата да не надхвърли броя на момичетата? А при 10000 раждания?

8.Случайни величини.
Функция на разпределение.
Основни свойства на функцията на разпределение

Справочник

Случайна величина: *Измерима функция $X:\Omega\to\mathbb{R}$, т.е праобраз на отворено множество е елемент на σ-алгебрата $\mathcal{F}$: $X^{1}(a,b)\in\ \mathcal{F}$*

Функция на разпределение *на случайната величина X се нарича функцията* $F(x)=P\{\omega : X(\omega)\le x\}$.

Основни свойства на функцията на разпределение:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0;$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1;$

3) *F(x) е монотонно ненамаляваща;*

4) *F(x) е непрекъсната отдясно.*

Основно правило за пресмятане на вероятности с помощта на функцията на разпределение:

$$P(a<X\le b)=F(b)-F(a)$$

Задачи

8.1. Нека A е произволно събитие свързано с даден опит. Дефинираме случайната величина, наречена индикатор на събитието A

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1 & при \quad \omega\in A\\ 0 & при \quad \omega\notin A\end{cases}$$

където ω е елементарно събитие, свързано със същия опит. Намерете функцията на разпределение на индикатора и начертайте графиката ѝ.

8.2.Случайната величина X има ф.р.

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -1\\ 0,2 & при \quad -1<x\le 1\\ 0,3 & при \quad 1<x\le 2\\ 0,6 & при \quad 2<x\le 5\\ 1 & при \quad x>5\end{cases}$$

а) Колко стойности има случайната величина и кои са те? Какъв тип е случайната величина X?

б) Намерете следните вероятности:

P(–1 < X < 2); P(–1 < X ≤ 2); P(–1 ≤ X < 2); P(–1 ≤ X ≤ 2).

в) Намерете P(X = 2).

г) Начертайте графиката на функцията на разпределение.

8.3. Случайната величина X има функция на разпределение

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le -3 \\ 0,5 & при \quad -3<x\le 1,2 \\ c & при \quad 1,2<x\le 2 \\ 0,6 & при \quad 2<x\le 10,4 \\ 1 & при \quad x>10,4 \end{cases}$$

където *c* е константа. Намерете всички възможни стойности на *c*.

8.4.Случайната величина X има функция на разпределение

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le -3 \\ C & при \quad -3<x\le 2 \\ 0,4 & при \quad 2<x\le 10 \\ 1 & при \quad x>10 \end{cases}$$

където C е константа. Намерете всички възможни стойности на C.

8.5.Случайната величина X има функция на разпределение

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le -2 \\ 0,1 & при \quad -2<x\le 1 \\ 0,2 & при \quad 1<x\le 3 \\ 0,5 & при \quad 3<x\le 10 \\ 1 & при \quad x>10 \end{cases}$$

а) Колко стойности има случайната величина и кои са те? Какъв тип е случайната величина X?

б) Намерете следните вероятности

$P(X < 3)$, $P(X \le 3)$, $P(X > 3)$, $P(X > 10)$, $P(X \ge 10)$, $P(-2 < X < 0)$,
$P(-2 < X \le 0)$, $P(-2 \le X < 0)$, $P(-2 \le X \le 0)$, $P(X = 0)$, $P(-2 < X < 3)$,
$P(-2 < X \le 3)$, $P(-2 \le X < 3)$, $P(-2 \le X \le 3)$, $P(X = 3)$

в) Начертайте графиката на функцията на разпределение.

8.6. Хвърляме два зара: Нека с ***X*** да означим абсолютната стойност на разликата на двете числа, които са се паднали. Определете закона на разпределение на случайната величина ***X***.

8.7. В една кутия имаме 7 червени и 3 сини топки. По случаен начин изваждаме 5 топки, без връщане. Какъв е законът на разпределение на броя на червените топки измежду извадените?

8.8. Може ли функцията $P(x)=\dfrac{c}{x},\ x=1,2,...$ да бъде закон на разпределение на случайна величина?

8.9. В детска касичка има общо 15 монети, от които: 1 монета от 1 ст., 5 монети от 10 ст., 4 монети от 2 ст., 1 монета от 20 ст., 2 монети от 5 ст., 2 монети от 50 ст. Дете се опитва да извади монета от касичката. Случайната величина ξ представлява стойността на случайно извадена монета. Да се определят:

а) законът на разпределение на случайната величина ξ;

б) функцията на разпределение на ξ;

в) математическото очакване на величината ξ.

9. Дискретни случайни величини. Ред на разпределение. Числови характеристики. Основни видове дискретни разпределения

Справочник

Случайна величина, която приема краен брой или изброимо много стойности се нарича дискретна.

Ред на разпределение на дискретна случайна величина се нарича съвкупността от стойности x_i *които тя приема и съответните вероятности* p_i *с които те се приемат.*

Основни числови характеристики на дискретна случайна величина:

Средна стойност (математическо очакване): $E(X)=\sum_i x_i p_i$

Дисперсия: $D(X)=\sigma^2=\sum_i (x_i-E(X))^2 p_i$;

Стандартно отклонение: $\sigma=\sqrt{D(X)}$.

Основни дискретни разпределения:

Разпределение на Бернули:

$\xi \sim Be\ (p),\ k=0,\ 1,\ P\{\xi=0\}=q=1-p,\ P\{\xi=1\}=p;$

Биномно разпределение:

$\xi \sim Bi\ (n,\ p),\ k=0,\ 1,\ldots\ n, P\{\xi=k\}=C_n^{\ k}.p^k.q^{n-k};$

Разпределение на Поасон:

$\xi \sim Po\ (\lambda),\ k=0,\ 1,\ldots\infty,\ P\{\xi=k\}=\lambda^k.e^{-\lambda}/k!;$

Геометрично разпределение:

$\xi \sim Ge\ (p),\ k=0,\ 1,\ldots\infty,\ P\{\xi=k\}=p.q^k;$

Хипергеометрично разпределение:

$\xi \sim HG\ (N,M,n),\ k=0,\ 1,\ldots n,\ P\{\xi=k\}=C_N^{\ k}.C_M^{\ n-k}/C_{N+M}^{\ k}$

Задачи

9.1. Монета се подхвърля до появата на лице, но не повече от три пъти. Разглеждаме случайните величини X = {*брой паднали се лица*} и Y = {*брой паднали се гербове*}.

а) Напишете разпределението на случайната величина X.

б) Напишете разпределението на случайната величина Y.

в) Намерете средната стойност и дисперсията на случайната величина X и средната стойност и дисперсията на случайната величина Y.

г) Намерете функцията на разпределение на случайната величина Y и начертайте графиката ѝ.

9.2. Жител на голям град решава да си застрахова недвижимото имущество в града, така че в случай на бедствие да му бъде изплатена сумата от 15000 лв. Известно е, че вероятността за бедствие в неговия район е 40, 9 на 10 000. Каква е очакваната печалба на застрахователната фирма, ако тя продава тази полица за 100 лв.?

9.3. Нека X е случайна величина, която приема стойности 2 и -2 с вероятности 0,3 и 0,7 съответно.

а) Намерете стандартното отклонение на X.

б) Какво е разпределението сл. в. $Y = \dfrac{X+2}{4}$? Колко е очакването E(Y)? А дисперсията D(Y)?

9.4. Нека X е случайна величина,такава че $P(X = 1) = p = 1 - P(X = -1)$. Намерете константата $c \neq 1$ така, че $E(c^X) = 1$.

9.5. Иванчо вади топки от кутия с 8 бели, 4 черни и 2 червени топки. Той печели по 20 ст. за всяка извадена черна топка и губи по 10 ст. за всяка извадена бяла топка (ако извади червена топка, той нито печели, нито губи). Нека с X е означена неговата печалба. Напишете разпределението на X, ако:

а) Иванчо вади само една топка. Колко е очакваната печалба на Иванчо?

б) Иванчо вади 5 пъти по една топка, като всеки път запомня цвета ѝ и я връща обратно в кутията. Колко е очакваната печалба на Иванчо?

в) Иванчо вади n пъти по една топка, вижда цвета ѝ и я връща обратно в кутията. Колко е очакваната печалба на Иванчо?

9.6. Случайната величина X е зададена със следния ред на разпределение

стойност	–1	0	1	2
вероятност	0,2	0,1	a	0,3

а) Да се намери стойността на константата a.

б) Да се напише функцията на разпределение на сл. в. X. Да се начертае графиката ѝ.

в) Да се намери $P(X < 0)$, $P(X = 0)$, $P(X > 0)$, $P(0 < X < 3)$.

г) Да се намерят числовите характеристики на сл.в. X.

9.7. Случайната величина X е зададена със следната функция на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x < -2 \\ 0,1 & при \quad -2 \le x < 1 \\ 0,2 & при \quad 1 \le x < 3 \\ 0,5 & при \quad 3 \le x < 10 \\ 1 & при \quad x \ge 10 \end{cases}$$

а) Да се напише реда на разпределение на сл. в. X.

б) Да се намери $P(X < 1)$, $P(X = 1)$, $P(X > 1)$, $P(0 < X < 3)$.

в) Да се намерят числовите характеристики на случайната величина X.

9.8. В кутия има 8 бели, 4 черни и 2 червени топки.

а) Иванчо вади една топка по случаен начин. Да се напише редът на разпределение, функцията на разпределение и се намерят числовите характеристики на случайната величина

X = {*брой извадени бели топки*}.

б) Иванчо вади по случаен начин две топки едновременно. Да се напише редът на разпределение, функцията на разпределение и се намерят числовите характеристики на случайната величина *X*.

в) Иванчо вади по случаен начин две топки една след друга с връщане. Да се напише редът на разпределение, функцията на разпределение и се намерят числовите характеристики на случайната величина *X*.

г) Иванчо вади една топка по случаен начин, като печели 20 ст., ако извади черна топка и губи 10 ст., ако извади бяла топка (ако извади червена топка, той нито печели, нито губи). Да се напише редът на разпределение, функцията на разпределение и се намерят числовите характеристики на случайната величина *У* = {*„печалба“ на Иванчо*}.

9.9. Иванчо подхвърля монета докато се падне герб. Да се напише редът на разпределение, функцията на разпределение и се намерят числовите характеристики на случайната величина

а) Х = {брой паднали се ГЕРБ}.

б) У = {брой хвърляния}.

9.10. В партида от 10 изделия 1 е нестандартно. Изтеглят се 3 изделия с връщане. Да се намери реда на разпределение на случайната величина „Брой на стандартните изделия сред изтеглените 3“, като данните се представят и графично. Да се пресметнат числовите характеристики на случайната величина.

9.11.Случайната величина Х има следното вероятностно разпределение:

x_i	-2	0	1	3	4
p_i	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Намерете дисперсията и стандартното разпределение на Х.

9.12. Играч трябва да изтегли карта от тесте с 32 карти. Случайната величина ξ приема стойности, в зависимост от вида на изтеглената карта. Ако картата е с цифра ξ приема стойността на цифрата, а ако е оньор (дама, вале, поп или туз) ξ приема стойност 0.

а) да се определи закона на разпределение на случайната величина ξ;

б) да се определи функцията на разпределение на ξ;

в) да се определи математическото очакване на величината ξ.

9.13. По маршрута на автомобил има 9 светофара. Всеки от светофарите с вероятност 1/3 позволява преминаването в даден момент. Ако случайната величина ξ е равна на броя на светофарите, преминати от автомобила без изчакване:

а) да се определи закона на разпределение на случайната величина ξ

б) да се определи вероятността поне 2 от светофарите да са преминати от автомобила без изчакване;

в) да се определят математическото очакване и дисперсията на величината ξ.

Биномно разпределение

9.14. Извършени са n опити на Бернули и са намерени средна стойност 10 и стандартно отклонение 3 на случайната величина X = {*брой успехи в тези опити*}. Намерете

а) броя на опитите n.

б) вероятността за успех във всеки отделен опит.

в) възможните стойности на случайната величина X.

9.15. Тест се състои от 10 въпроси с по 4 отговора за всеки от тях (само един от отговорите е верен). Студент не знае отговора на нито един въпрос и избира всеки отговор на въпрос случайно и независимо един от друг. Нека X = {*брой верни отговори*}.

а) Напишете разпределението на случайната величина X?

б) Колко е очакваната стойност на верните отговори?

9.16. Играч решава да залага 5 лева на червено на ролетка, докато спечели на 4 залагания(на ролетката има 0, 00, 18 червени и 18 черни позиции).

а) Каква е вероятността играчът да направи 9 залагания?

б) Колко е очакваната печалба, ако играчът е направил 9 залагания?

9.17. Баскетболист стреля в коша 5 последователни пъти. Предполагаме, че стрелбата в коша е опити по схемата на Бернули с вероятност за улучване при всяка отделна стрелба 0,7.

а) Каква е вероятността да улучи при третата стрелба.

б) Каква е вероятността да улучи точно три пъти.

в) Каква е вероятността да улучи поне три пъти.

г) От какъв тип е случайната величина X = {*брой попадения в коша*}?

д) Колко е очакваният брой попадения в коша?

9.18. Ако вероятността новопостъпил в „Бърза закуска“ да остане на работа поне една година е 0.6, то каква е вероятността измежду 8 новопостъпили

а) 5 да останат на работа поне една година?

б) поне 5 от тях да работят в закусвалнята след една година?

в) какъв е очакваният брой новопостъпили в „Бърза закуска“, които ще останат на работа поне една година?

(Предполагаме, че оставането на работа на един новопостъпил не зависи от оставането или напускането на друг).

9.19. В каталог на производствено предприятие се твърди, че бракът е 3%. Изделията се опаковат в кутии по 10, като е желателно да няма повече от едно дефектно в кутия.

а) каква е вероятността в произволно избрана кутия да има повече от едно дефектно изделие?

б) какъв е очакваният брой дефектни изделия в една кутия?

9.20. Фирма произвежда изделия, като средно от 100 изделия 5 са дефектни. Всеки ден по случаен начин се избират 6 изделия и се тестват за дефектни. Нека ***X*** е броя дефектни изделия измежду избраните.

а) Напишете закона на разпределение на случайната величина ***X***.

б) Намерете математическото очакване и дисперсията на случайната величина ***X***.

9.21. На болен от туберкулоза се прави рентгенова снимка, която се дава на четирима лекари, които си дават мнението независимо един от друг. Ако всеки лекар може да открие болестта по снимката в 80% от случаите, то каква е вероятността поне един от тях да открие туберкулозата? А какъв е очакваният брой лекари, открили болестта?

9.22. Тест се състои от 10 въпроса, като на всеки въпрос са дадени по 5 възможни отговора, от които един е верен. Каква е вероятността, ако теста се попълва по случаен начин, да се познаят поне 70% от отговорите? Какво е разпределението на случайната величина *X*={*брой на познатите отговори*}?

9.23. Социологическо проучване е установило, че вероятността, за развод през първите 10 години от брака е 0,4.

а) Намерете средната стойност и стандартното отклонение на броя на разводите в първите 10 години на 1000 семейства.

б) Каква е вероятността при случайно избрани 6 новобрачни двойки нито една да не се разведе през първите 10 години?

9.24. Правят се изпитания относно изправността на 8 апарата. Вероятността един апарат да е изправен е 0,7. Ако случайната величина ξ се дефинира като броя на изправните измежду осемте апарата, да се определят закона на разпределение на ξ,математическото очакване $E\xi$, дисперсията $D\xi$, най-вероятната стойност на ξ и $P\{2 \leq \xi \leq 4\}$.

9.25. Комисия по качеството в завод взема за проверка 8 случайно избрани детайла, произведени от смяна работници. Известно е, че 1/12 от произведените от работниците детайли са некачествени. Ако случайната величина ξ се дефинира като броя на некачествените измежду проверените детайли, да се определят:

а) закона на разпределение на сл. величина ξ;

б) вероятността поне един от проверените детайли да е некачествен;

в) математическото очакване $E\xi$ и стандартното отклонение σ на величината ξ.

9.26. От лотария са изтеглени 18 билета. Вероятността за печалба на всеки от тях е 0.1. Да се определи законът на разпределение и да се пресметнат математическото очакване и дисперсията на случайната величина ξ, равна на броя на изтеглените печеливши билети. Да се определи вероятността да бъде изтеглен поне един печеливш билет.

9.27. В специалността Информатика II курс задочно обучение учат 50 студенти на различна възраст. В таблицата е показан броя на студентите за всяка възраст:

възраст	20	24	33	35	40
брой студенти	20	22	4	3	1

По случаен начин е избран един студент. Каква е неговата очаквана възраст?

9.28. Машина произвежда детайли като вероятността произведен детайл да се окаже дефектен е 0.1. Контрольор по качеството проверява произведените детайли, докато се появи дефектен. Ако случайната величина ξ е равна на броя на недефектните детайли, проверени от контрольора, да се определят законът на разпределение на ξ, математическото очакване $E\xi$, дисперсията $D\xi$ и стойността $F_\xi(2)$.

9.29. Комисия по качеството взема 6 случайно избрани детайла, произведени от смяна работници. Известно е, че 20 от произведените общо 2000 от работниците детайли са некачествени. Ако случайната величина ξ представлява броя на некачествените измежду проверените 6 детайла, да се определят:

а) законът на разпределение на случайната величина ξ;

б) вероятността поне 2 от проверените детайли да са некачествени;

в) Математическото очакване $E\xi$ и дисперсията на величината ξ.

9.30. Монета се подхвърля няколко пъти. Дефинираме случайната величина $X = \{$*брой паднали се лица*$\}$.

а) Ако монетата се подхвърля 4 пъти, то:

- AI. Напишете разпределението на случайната величина X.
- AII. Намерете средната стойност, дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина X.
- AIII. Намерете функцията на разпределение на случайната величина X и начертайте графиката ѝ.
- AIV. Намерете вероятността да се падне поне два пъти лице.

б) Ако монетата се подхвърля до появата на лице, то

- B I. Напишете разпределението на случайната величина X.
- B II. Намерете средната стойност, дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина X.
- B III. Намерете функцията на разпределение на случайната величина X и начертайте графиката ѝ.
- B IV. Намерете вероятността да се падне поне два пъти лице.

в) Ако монетата се подхвърля до появата на лице, но не повече от три пъти, то:

- Г I. Напишете разпределението на случайната величина X = $\{$*брой паднали се лица*$\}$.

Г II. Намерете средната стойност, дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина X.

Г III. Намерете функцията на разпределение на случайната величина X и начертайте графиката ѝ.

Г IV. Намерете вероятността да се падне поне два пъти лице.

9.31. Търговец има в наличност 1000 лева, за да закупи стока, която в момента се продава по 2 лева за килограм. Знае се, че след една седмица цената на стоката ще бъде или 1 лева или 3 лева за килограм, като двете възможности за равновъзможни. Ако е сигурно, че следващата седмица търговецът ще може да продаде цялото количество закупена стока на пазарната ѝ цена, то

а) Напишете разпределението на случайната величина X=\{*печалба на търговеца след една седмица*\}?

б) Намерете функцията на разпределение на печалбата на търговеца след една седмица. Начертайте графиката ѝ.

в) Намерете вероятността търговецът да спечели поне 200 лв. от покупко-продажбата.

г) Каква е очакваната печалба на търговеца след една седмица?

д) Колко е стандартното отклонение на печалбата на търговеца?

е) Ако търговецът реши да продаде само 90% от закупената стока, то колко ще бъде неговата очаквана печалба?

10.Непрекъснати случайни величини. Плътност. Функция на разпределение. Числови характеристики. Основни видове непрекъснати разпределения

Справочник

Случайната величина X е непрекъсната, ако съществува производна f(x) = F'(x) на функцията на разпределени eF(x) и $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(s)ds,$ *като функцията f(x) се нарича плътност на разпеделението;*

Основни числови характеристики на непрекъснатите разпределения:

Математическо очакване: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} s.f(s).ds$

Дисперсия: $D(X)=\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(s)ds$

Медиана *M е числото, за което* $\int_{-\infty}^{M} f(s).ds$ *=1/2*

Основни непрекъснати разпределения:

Равномерно разпределение:

ξ~*U (a,b),* $f_\xi(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le a \;\; или \;\; x\ge b\\ 1/(b-a) & при \;\; a<x<b\end{cases},$ $E(\xi)=(a+b)/2,$

$D(\xi)=(b-a)^2/12;$

Експоненциално разпределение:

ξ~*Exp (λ),* $f_\xi(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x\le 0\\ \lambda.e^{-\lambda.x} & при \;\; 0<x\end{cases},$ $E(\xi)=1/\lambda,\ D(\xi)=1/\lambda^2;$

Нормално разпределение:

ξ~$N(a,\sigma^2)$, $f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-(x-a)^2/2.\sigma^2},$ $E(\xi)=a,\ D(\xi)=\sigma^2;$

Задачи

10.1. Количеството ориз, продадено дневно в супермаркет „За всеки“ е непрекъсната случайна величина X (в хиляди килограма), на която функцията на разпределение е

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0\\ x^2/18 & при \quad 0\le x<3\\ k.x & при \quad 3\le x<6\\ 1 & при \quad x\ge 6\end{cases}$$

а) Намерете стойността на константата k.

б) Начертайте графиката на функцията на разпределение.

в) Каква е вероятността супермаркетът да продаде следващата сряда между 200 и 400 кг ориз?

г) Каква е вероятността супермаркетът да продаде следващата сряда повече от 300 кг ориз?

д) Ако е известно, че предишната сряда супермаркетът е продал над 300 кг ориз, то каква е вероятността да са продали повече от 400 кг?

10.2. Времето докато нова кола от определена марка се развали, е случайна величина X, която има функция на разпределение $F(x)$. Разглеждаме случайната величина $Y=\begin{cases}X & при \quad X\le 5\\ 5 & при \quad X>5\end{cases}$. Изразете функцията на разпределение на случайната величина Y чрез функцията на разпределение $F(x)$ на случайната величина X.

10.3. Времето на безотказна работа (в часове) на определен вид транзистор е случайна величина, която има плътност

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 100\\ \dfrac{100}{x^2} & при \quad x>100\end{cases}$$

а) Каква е средната продължителност на безотказна работа на транзисторите от този тип?

б) Колко е стандартното отклонение на продължителността на безотказна работа?

в) Ако фирмата, която произвежда тези транзистори иска да даде 500 часа гаранция, какво бихте я посъветвали?

г) Намерете функцията на разпределение.

д) Каква е вероятността един случайно избран транзистор да нее необходимо да се заменя през първите 150 часа на работа?

е) Каква е вероятността точно 2 от 5 случайно избрани транзистори да е необходимо да се сменят в първите 150 часа на работа?

10.4. Случайна величина X има плътност

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0 \quad или \quad x\ge 2\\ cx^4 & при \quad 0<x<2\end{cases}$$

а) Намерете стойността на константата *c*.

б) Намерете функцията на разпределение на *X*.

в) Намерете средната стойност на *X*.

г) Намерете дисперсията и стандартното отклонение на *X*.

д) Намерете P(*X*<0,5).

е) Намерете медианата на *X*.

ж) Намерете модата на *X*.

10.5.Разглеждаме функцията $f(x)=\begin{cases} c(2x-x^3) \ \textit{при} \ 0<x<\frac{5}{2} \\ 0 \ \textit{в противен случай} \end{cases}$.

а) Може ли тази функция да е плътност? Ако да, намерете константата *c*?

б) Може ли функцията $f(x)=\begin{cases} c(2x-x^2) \ \ \textit{при} \ \ 0<x<\frac{5}{2} \\ 0 \ \textit{в противен случай} \end{cases}$ да е плътност на случайна величина?

10.6. Дневната консумация на електроенергия (в милиони киловат/часа) в големите градове е непрекъсната случайна величина ***X***с плътност

$$\mathrm{f}_\xi(x)=\begin{cases} a.(1-x) \ \textit{при} \ \ 0<x<1 \\ 0 \ \textit{в противен случай} \end{cases}$$

а) Намерете константата ***a***.

б) Намерете функцията на разпределение на случайната величина ***X***.

в) Каква е вероятността дневната консумация да е по-малка от 8 милиона киловат/часа?

г) Намерете средната стойност на дневната консумация.

10.7. Дневната консумация на петрол (в милиони галона) е непрекъсната случайна величина ξ с плътност

$$\mathrm{f}_\xi(x)=\begin{cases} a.(5-x) \ \textit{при} \ \ 0<x<5 \\ 0 \ \textit{в противен случай} \end{cases}$$

а) Намерете константата ***a***.

б) Намерете функцията на разпределение на сл.в. ξ.

в) Намерете вероятността търсенето на петрол на 20 април да е по-малко от 2 милиона галона.

г) Намерете средната стойност на дневната консумация.

10.8. Дневната консумация на електроенергия (в милиона kW/h) на големите градове е непрекъсната случайна величина ξ, с плътност:

$$\mathrm{f}_\xi(x)=\begin{cases} a.x.(1-x) \ \ \textit{при} \ \ 0<x<1 \\ 0 \ \textit{в противен случай} \end{cases}$$

а) Намерете константата ***a***.

б) Намерете функцията на разпределение на сл.в. ***X***.

в) Да се определи вероятността дневната консумация да е по-малка от 0.8 [милиона kW/h];

г) Да се определи средната стойност на дневната консумация.

Равномерно разпределение

10.9. Цената на даден вид стока е равномерно разпределена в интервала [35, 44]. Каква е вероятността през определен ден цената да е по-малка от 40? А между 40 и 42?

10.10. Брокер получава фиксирана такса от 50 лева плюс 6% комисионна върху печалбата. Ако печалбата е равномерно разпределена между 0 лева и 2000 лева, то намерете вероятностното разпределение на печалбата на брокера. Пресметнете очакваната печалба.

10.11. Влакчетата на метрото пътуват на интервали от 10 минути. Случаен пътник пристига на определена спирка по случаен начин. Какъв тип е разпределението на случайната величина = *време на чакане на пътника до следващото влакче*? Колко е средното време на чакане?

10.12. По случаен начин е избрано реално число между 1 и 10. Каква е вероятността числото да е по голямо от 6? А каква е вероятността числото да е точно 6 (парадокс ли е това)? Ще се измени ли вероятността, ако числото, което се избира, е цяло число между 1 и 10 включително?

10.13. Времето [в минути], което автомобил трябва да изчака на кръстовище, докато светне зелена светлина, е непрекъсната случайна величина ξс плътност

$$\mathrm{f}_{\xi}(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{\textit{при}}\ \ 0 < x < 4 \\ 0 & \text{\textit{в противен случай}} \end{cases}$$

а) да се намери функцията на разпределение на случайната величина ξ;

б) да се определи вероятността времето на изчакване да е по-малка от 1 минута;

в) да се определи средната стойност на времето за изчакване.

Експоненциално разпределение

10.14. Времето, което определен клиент на банка „Мечта“ чака, за да бъде обслужен, е експоненциално разпределено със средна стойност 5 мин. Ако има клиент в банката, когато ти пристигнеш в нейния клон, каква е вероятността този клиент все още да бъде обслужван и след 4 минути?

10.15. Определена компонента е изключително важна, за да работи електрическа система и трябва веднага да се смени при повреда. Знае се, че средната продължителност на безотказна работа на такъв вид компоненти е експоненциално разпределена със средна стойност 100 часа.Каква е вероятността, ако сменим тази компонента, то в следващите 60 часа на работа на системата да не се налага отново да се сменя?

10.16. Продължителността на безотказна работа на електронна част от оборудване е експоненциално разпределена случайна величина. Каква е вероятността тази част да се развали преди очакваната продължителност на безотказна работа?

10.17. Мениджър на фирма трябва да избере един от два производствени процеса за производство на един елемент. Първият процес има *c* лева разходи за производство на всяка единица, а вторият –*k.c* лева, където *k* > 1. Времето за безотказна работа на елемента е експоненциално разпределено, като при първия процес средната продължителност на безотказна работа е 200 часа, а при втория – 300 часа. Ако елементът работи безотказно по-малко от 400 часа, то производителят ще има разходи от *m* лева за поправка. Кой производствен процес е за предпочитане?

10.18. Двигателят на една кола има гаранция една година. Средната продължителност на живот на двигателя е оценена на 3 години, а времето за безотказна работа е експоненциално разпределено. Реализираната печалба от продажбата на нова кола е 100 лева. Разходите за части и работа при всяка поправка са 250 лева. Каква е очакваната печалба от кола?

10.19. Кинескоп има гаранция една година. Известно е, че времето на безотказна работа е експоненциално разпределено със средно 3 години. Колко процента от кинескопите ще се ремонтират в гаранционния срок?

10.20. Производител на монитори, които се използват в терминалите на летищата за управление на полетите дава гаранция от една година (т. е. 8760 часа). Продължителността на безотказна работа на мониторите е експоненциално разпределена със средна стойност 20 000 часа. Разходите за производство, продажба и доставка на мониторите са 300 лева, а цената на която се продават е 400 лева. Разходите за материали и работа при всяка поправка на повреден монитор са 150 лева. Производителят няма задължения и разходи след първата подмяна на монитор. Каква е очакваната печалба?

10.21. Кашон с бонбони съдържа 24 кутии. Времето между продажбите на тези кутии е експоненциално разпределено със средно 10 минути. Каква е вероятността кашон, отворен в 8 часа да е празен до обяд?

10.22. Ферибот тръгва, ако е натоварен с 10 коли. Опитът показва, че колите пристигат независимо една от друга и че средно пристигат 7 коли на час. Намерете вероятността времето между два курса на ферибота да е поне 1 час.

Нормално разпределение

10.23. Случайната величина ξ е нормално разпределена с параметри a = 1 и $\sigma = 2$. Изразете функцията на разпределение на ξ чрез функцията на стандартното нормално разпределение $\Phi(x)$ и намерете вероятността $P\{0.5 < \xi < 2\}$.

10.24. В нормално разпределена съвкупност 15% от стойностите са по-малки от 12, а 40% са по-големи от 16.2. Намерете параметрите на разпределението.

10.25. Точките на теста IQ са нормално разпределени със средна стойност 100 и стандартно отклонение 15. Каква е вероятността случайно избран човек, който е взел теста да има:

а) под 120 точки; б) над 125 точки; в) между 90 и 110 точки?

10.26.Ако е известно, че средната месечната заплата в страната е нормално разпределена случайна величина $\xi \sim N(210, 120)$. Да се определи вероятността $P\{\xi > 400\}$.

10.27. Ръстът в сантиметри на завършващи 7 клас ученици е нормално разпределена случайна величина $\xi \sim N(150, 20)$. Ръководството на баскетболен отбор е решило да потърси нови попълнения за отбора си измежду 30-те % най-високи ученици. Да се определи какъв е минималния ръст, който трябва да има ученик за да участва в избора.

10.28. Времето на безотказна работа на определен вид транзистори (измерено в стотици часа) е случайна величина X, която има плътност от вида

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 1 \\ \dfrac{C}{x^4} & при \quad x > 1 \end{cases}$$

а) Намерете стойността на константата C.

б) Какъв тип е случайната величина X (дискретна, непрекъсната или нито дискретна нито непрекъсната)? Намерете функцията на разпределение на случайната величина X.

в) Каква е средната продължителност на безотказна работа на транзисторите от този тип?

г) Колко е стандартното отклонение на продължителността на безотказна работа?

д) Колко е медианата и модата на случайната величина X?

е) Ако фирмата, която произвежда тези транзистори иска да даде 500 часа гаранция, какво бихте я посъветвали?

ж) Каква е вероятността един случайно избран транзистор да не е необходимо да се заменя през първите 150 часа на работа?

з) Каква е вероятността точно 2 от 5 случайно избрани транзистори да е необходимо да се сменят в първите 150 часа на работа?

10.29. На магистрала с дължина А км трябва да се построи сграда на пожарната така, че очакваното разстояние между сградата и избухнал пожар на магистралата да е възможно най-малко.

а) Нека А=500 км и пожарите избухват в точки, които са равномерно разпределени върху магистралата.

AI. Напишете плътността на случайната величина
X = {*точка на избухване на пожар*}.

AII. Намерете средната стойност, дисперсията и стандартното отклонение случайната величина X.

AIII. Намерете функцията на разпределение на случайната величина X и начертайте графиката ѝ.

AIV. Напишете плътността на случайната величина
Y = {*абсолютна стойност на разстоянието между точката на избухване на пожар и сградата на пожарната*}.

AV. Намерете средната стойност на случайната величина *Y*(тя зависи от въведения в т. AIV параметър).

AVI. Къде е най-ефективно да се построи сградата (т.е. намерете стойността на въведения в т.AIV параметър?

б) Ако магистралата е изключително дълга (теоретично се счита, че A = ∞), и разстоянието на пожара до началото на магистралата е експоненциално разпределено, като средното разстояние е 100 км, то къде е най-ефективно да се построи сградата в този случай?

Б I. Напишете плътността на случайната величина *X* = *точка на избухване на пожар*.

Б II. Намерете средната стойност, дисперсията и стандартното отклонение на случайната величина X.

Б III. Намерете функцията на разпределение на случайната величина *X* и начертайте графиката ѝ.

Б IV. Разглеждаме случайната величина *Y* = {*абсолютна стойност на разстоянието между точката на избухване на пожар и сградата на пожарната*}. Намерете средната стойност на случайната величина *Y*.

Б V. Къде е най-ефективно да се построи сградата (т.е. намерете стойността на въведения в т.Б IV параметър?

Част втора.
МАТЕМАТИЧЕСКА СТАТИСТИКА

11. Основни понятия в статистиката. Описателна статистика

Справочник

Основни понятия: *честотно разпределение, полигон, хистограма, числови характеристики*

Вариационен ред: *Нека $X_1, X_2,\dots X_n$ са независими наблюдения (извадка с обем n)от реализации на случайната величина X. Наредената извадка от същите наблюдения*

$$X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)} \le \dots \le X_{(n)}$$

се нарича <u>вариационен ред</u> (<u>наредена статистика</u>), а $X_{(k)}$се нарича k-та поредна статистика за k = 1, 2, 3,..., n.

Емпирична функция на разпределение

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le X_{(1)} \\ \dfrac{k}{n}, X_k & < \quad x \le X_{(k+1)} \\ 1, & x > X_{(n)} \end{cases}$$

Една от основните цели на математическата статистика е възстановяването (точно или приближено) на функцията на разпределение F(x) на една случайна величина въз основа на независимите наблюдения $X_1, X_2,\dots X_n$, които смятаме за известни. Теоретичната възможност за такова възстановяване се обосновава от следната

Теорема (на Гливенко-Кантели). *Ако F(x) е функцията на разпределение на случайната величина X, а $F_n(x)$ е нейната емпирична функция на разпределение, получена от независимите наблюдения $X_1, X_2, \dots, X_n$, то* $P\left\{ \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x) - F(x)\right| \to 0, n \to \infty \right\} = 1.$

Алгоритъм за намиране честотно разпределение на извадка

1) сортиране на извадката и определяне на обема n;

*2) намиране на минимума **min**, максимума **max** и размаха **R = max – min** на извадката;*

*3) определяне броя на интервалите **k** (обикновено по формулата* $k = min(30, 10.log_{10} n)$*);*

4) определяне големината на всеки интервал по формулата $d = \dfrac{max - min}{k}$;

5) определяне границите на интервалите по правилото (min + (i – 1).d; min + i.d], i = 1, 2 ,3, ..., k, и техните среди m_i = min + (i – 0.5).d;

6) намиране броя на елементите на извадката f_i във всеки интервал.

Алгоритъм за построяване на полигон

1) *изпълнява се* ***Алгоритъм за намиране честотно разпределение на извадка;***
2) *построяваме в равнината k точки с координати* (m_i, f_i), $i = 1, 2, 3, ..., k$;
3) *свързваме всяка от двойките точки* (m_i, f_i) *и* (m_{i+1}, f_{i+1}), $i = 1, 2..., k - 1$ *с отсечка.*

Алгоритъм за построяване на хистограма

1) *изпълнява се* ***Алгоритъм за намиране честотно разпределение на извадка;***
2) *на абсцисната ос се нанасят границите на интервалите;*
3) *построяват се k правоъгълника с основи границите на интервалите и височини честотите* f_i.

Задачи

11.1. Случайно са избрани 1000 адвокати от САЩ и са записани техните годишни приходи. Тъй като практически е трудно в една таблица да се представят тези голям брой числа, най-удобно е данните да се групират.

Доходи (в долари)	20 000 – 29 999	30 000 – 39 999	40 000 – 49 999	50 000 – 59 999	60 000 – 69 999	70000 – 79 999	над 80 000
Брой (адвокати)	20	80	230	400	1700	70	30

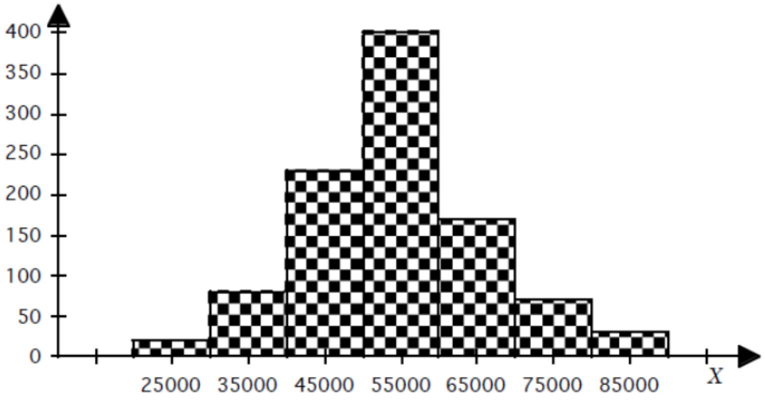
а) Напишете честотното разпределение на доходите;

б) Начертайте хистограма на разпределението на доходите;

в) Намерете средния доход на извадката от адвокати;

г) Намерете стандартното отклонение на доходите на извадката от адвокати;

д) Намерете медианата на доходите на извадката от адвокати.



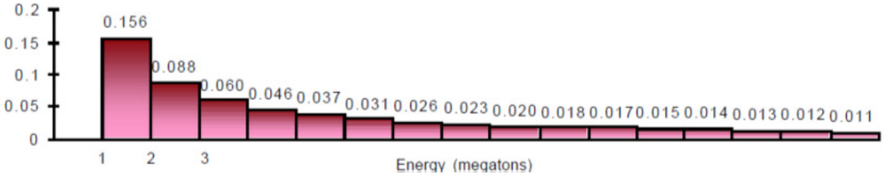
11.2. Дадени са данните

3,7 3,3 3,3 3,0 3,0 3,0 3,0 2,7 2,7 2,3

а) Начертайте честотната хистограма;

б) Намерете дисперсията и стандартното отклонение на извадката.

11.3. Следната хистограма показва енергията (в мегатонове) на част от големите метеорити, достигнали атмосферата на Земята (голям метеорит е такъв, който има поне един мегатон енергия, еквивалентна на енергията на малка атомна бомба).



а) намерете средната стойност на извадката;

б) намерете извадковата дисперсия.

11.4. В едно социологическо проучване в университета отговорите на въпроса „ИЗПИТВАТЕ ЛИ ЧУВСТВО НА САМОТА?“ са дадени в таблица, където са използвани следните кодове:

1. Да, постоянно; 2. Да, често; 3. Да, но рядко; 4. Не, никога.

Отговори на въпроса „ИЗПИТВАТЕ ЛИ ЧУВСТВО НА САМОТА?“
4, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 4, 3, 3, 4, 2, 3, 4, 4, 3, 4, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 3, 4, 4, 4, 4, 3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1, 4, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 3

Намерете извадковата медиана. Интерпретирайте резултата.

11.5. При измерване на ябълки в грамове са получени следните данни: 111., 103., 251., 169., 213., 140., 224., 205., 166., 202., 227., 160., 234., 137., 186., 184., 163., 157., 181., 207., 189., 159., 180., 160., 196., 82., 107.,1 48., 155., 206., 192., 180., 205., 121., 199., 173., 177., 169., 93., 182., 127., 126., 187., 166., 200., 190., 171., 151., 166., 156., 187., 174., 164., 214., 139., 141., 178., 177., 243., 176., 186., 173., 182., 164., 162., 235., 164., 154., 156., 124., 149., 147., 116., 139., 129., 152., 175., 164., 141., 155.

Пресметнете основните числови характеристики на извадката.

12. Оценки на параметри на разпределението.
Точкови оценки. Интервални оценки

Справочник

извадково средно	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

	при неизвестно популационно средно	*при известно популационно средно* $\boldsymbol{\mu}$
извадкова дисперсия	$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$	$s_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$
извадково стандартно отклонение	$s=\sqrt{s^2}$	$s_n=\sqrt{s_n^2}$

доверителен интервал	*при неизвестна дисперсия на популацията*	*при известна дисперсия на популацията* $\boldsymbol{\sigma^2}$
за средното $\boldsymbol{\mu}$ *на нормална популация*	$\left(\overline{X}-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{X}+t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$	$\left(\overline{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

доверителен интервал	*при неизвестно средно на популацията*	*при известно средно* $\boldsymbol{\mu}$ *на популацията*
за дисперсията $\boldsymbol{\sigma^2}$ *на нормална популация*	$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$	$\left(\frac{ns_n{}^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)},\frac{ns_n{}^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$

Алгоритъм за намиране доверителен интервал за средна стойност на нормална популация

1. намира се извадковото средно $\overline{X}$;

2. проверява се дали е известна дисперсията на популацията σ^2:
ако ДА тогава

2А1. по зададеното ниво α се определя $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (от таблицата за нормално разпределение или чрез други пресмятания);

2А2. намира се интервалът по формулата $\left(\overline{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$;

ако НЕ тогава

2.Б1. пресмята се извадковото стандартно отклонение s по формулата $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, *и* $s = \sqrt{s^2}$

2.Б2.по зададеното ниво α се определя $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ *от таблицата за t-разпределение с n-1 степени на свобода);*

2.Б3. намира се интервалът по формулата

$$\left(\overline{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right).$$

Задачи

12.1. Нека случайната величина X е нормално разпределена със средна стойност 1,5 и дисперсия 4.

а) Намерете:

$P(X > 1{,}2)$, $P(1{,}6 < X < 1{,}8)$, $P(1{,}4 < X < 2)$, $P(1{,}1 < X < 1{,}4)$.

б) Намерете точка, такава че 60% от стойностите на случайната величина да са по-малки от нея.

в) Намерете интервала с най-къса дължина, който съдържа 90% от стойностите на разпределението.

г) Напишете случайна величина, която зависи от X и е стандартно нормално разпределена. За новата случайна величина намерете квантилите $z_{0,05}$ и $z_{0,975}$.

12.2.Нека T е **t**-разпределена случайна величина с 10 степени на свобода.

а) Намерете $P(T > 2{,}76)$, $P(0{,}7 < T < 2{,}76)$, $P(-0{,}3 < T < 2{,}76)$, $P(-2{,}76 < T < -1{,}81)$.

б) Намерете квантилите $t_{0,05}$ и $t_{0,975}$, модата и медианата на разпределението.

в) Намерете точка, такава че 60% от стойностите на случайната величина са по-малки от нея.

г) Намерете интервала с най-къса дължина, който съдържа 90% от стойностите на разпределението.

12.3. Нека е направена случайна извадка от 576 жители на дадена област с цел да се установи количеството портокалов сок, консумирано от жителите дневно. Получено е, че средната дневна консумация на тези жители е 133 грама. Знае се, че дневната консумация е нормално разпределена със стандартно отклонение 96 грама на ден.

а) Построите 90% доверителен интервал на дневната консумация.

б) Построите 99% доверителен интервал за дневната консумация.

в) Сравнете интервалите, построени в т.а) и в т. б)

г) Колко е нивото на доверие на доверителния интервал $133 + 2,81.\sqrt{\frac{96}{576}}$?

12.4. Паста за зъби се опакова в разфасовки по 55 грама, като се знае, че теглото е нормално разпределено. Избрани са по случаен начин 10 тубички и са претеглени прецизно, като са получени следните резултати:

55,95; 56,54; 57,58; 55,13; 57,48; 56,06; 59,93; 58,30; 52,57; 58,48.

а) Намерете точкова оценка на теглото.

б) Намерете точкова оценка на стандартното отклонение на теглото.

в) Намерете 95% доверителен интервал на теглото.

г) Като се основавате на тази много малка съвкупност от данни, намерете каква е вероятността отделна тубичка, избрана случайно, да тежи по-малко от 55 грама?

12.5. За да се определи съдържанието на бактерии във водата на голямо езеро, се вземат 37 проби от по 100 милилитра вода от различни места на брега и в лабораторията се измерва количеството бактерии в пробите. Намерено е, че средното количество бактерии е 11,95 (в стотици) и стандартното отклонение е 11,8 (в стотици). Намерете 95% доверителен интервал за броя бактериите в 100 милилитра от водата в това езеро.

12.6. В един супермаркет картофите се продават по 2 лева на пакет. Избрани са по случаен начин 24 пакета и са претеглени. Получените данни са:

4,4; 3,8; 5,1; 4,6; 4,5; 4,5; 4,8; 4,1; 3,9; 4,2; 4,4; 4,9; 5,0; 4,3; 4,4; 3,6; 5,2; 4,8; 4,4; 4,6; 4,6; 5,0; 4,0; 4,5

а) Намерете точкова оценка на теглото и на стандартното отклонение.

б) Намерете 90% доверителен интервал за теглото на картофите в пакет.

в) Изпълнено ли е предположението за нормално разпределение на теглото? Защо?

12.7. Направена е случайна извадка от 10 пакетчета с бонбони, претеглени са и е намерено, че средното тегло на тези пакетчета е 56 грама. Ако е известно, че теглото на пакетчетата е нормално разпределена случайна величина с дисперсия 4, то построите 98% доверителен интервал на теглото на пакетчетата.

12.8. Производител пакетира течен сапун в бутилки с тегло 500 мл. За да се провери дали машината за пълнене е регулирана добре се избират случайно 1219 бутилки и се претеглят. Намерено е, че средното тегло е 506 мл, а стандартното отклонение е 10 мл. Постойте 99% доверителен интервал на средното тегло на бутилките. Може ли да се направи извод че е необходимо машината да се регулирана по-прецизно?

12.9. От учебен отдел в Университета „Образование за всеки“ е направена случайна извадка от 25 първокурсници и е получено, че средния им успех от първия семестър е 5,06, а стандартното отклонение е 0,59. Знае се, че успехът е нормално разпределена случайна величина.

а) Параметър или точкова оценка е числото 0,59?

б) Намерете 90% доверителен интервал за средния успех на всички първокурсници в този университет основан на тази извадка. Кое разпределение ще използвате? Защо?

12.10. Фирма пакетира маслини в 6-килограмови кутии. Извадка от тези кутии има средно тегло 6,09 кг и стандартно отклонение 0,02 кг. Ако теглото се намали средно с 10 грама, годишно фирмата ще спести 14 000 лв. За целта са регулирани машините за пълнене, като се предполага, че стандартното отклонение се запазва.

а) Колко голяма извадка трябва да се направи, за да може максималната грешка при оценяването на новото тегло с 90% доверителен интервал да не е повече от 1 грам?

б) Ако случайна извадка от 1219 кутии има средно тегло 6,048 кг и стандартно отклонение 22 грама, то намерете 90% доверителен интервал.

в) Оценете годишните спестявания на фирмата при новото регулиране на машините.

г) Оценете пропорцията на кутиите, които са напълнени с регулираните машини и имат тегло по-малко от 6 кг.

12.11.За да предвиди приблизителния ръст на печалбата за следващия месец, ресторантьор събира данни за средната стойност на направена поръчка на един човек в неговия ресторант. Известно е, че разпределението на популацията е нормално. Направена е извадка от цената на поръчките на 25 клиента на ресторанта (в лева):

0,79; 3,60; 6,83; 26,14; 1,38; 14,06; 10,83; 2.35; 0,06; 9,80; 24,69; 3,09; 15,20; 11,73; 21,80; 20,05; 6.89; 7,56; 0.14; 1,45; 5,96; 14,42; 1,53; 11,30; 6,05.

Да се намери доверителен интервал за средната стойност на поръчка на човек с доверителна вероятност 0,99. Известно е, че разпределението на популацията е нормално.

12.12. Комисия от 19 съдии оценява изпълненията на гимнастик, като всеки съдия дава обща оценка за изпълнението. Получените 19 оценки за изпълнението на случайно избран гимнастик са:

3,74; 5,34; 3,75; 4,29; 4,67; 4,51; 5,94; 5,84; 5,82; 5,11; 3,84; 5,69; 4,25; 5,38; 3,73; 5,98; 4,38; 5,10; 5,00.

Известно е, че разпределението на популацията е нормално.Да се намери доверителен интервал за точността на оценяване на съдиите с доверителна вероятност 0,99.

12.13.Разпределението на времето на престой на клиенти в даден ресторант е нормално със стандартно отклонение 30 минути. Чрез направени наблюдения над 41 случайно избрани клиента през текущата година, са пресметнати стойностите на средното време – 98 минути и на извадковото стандартно отклонение – 26 минути. Да се намери доверителен интервал за средното време на престой в ресторанта през текущата година с доверителна вероятност 0,98.

12.14. Една от дейностите на частна фирма е търговия със стоки от даден вид. За да се разпредели правилно съотношението при инвестиране в дейностите на фирмата е необходимо да се направи изследване за ръста на печалбите от тази търговия. Известно е, че печалбата от продажба на изделието е нормално разпределена. Стойностите на печалбата от продажбата на 36 случайно избрани изделия са:

0,20; 1,25; 1.28; 0,02; 1,62; 0.88; 1.02; 3,08; 2.63; 1,93; 2,04; 2,42; 2,45; 0,12; 0,28; 0,24; 2,48; 2,59; 0,35; 0.11; 1,04; 0,66; 0,39; 1,64; 1,29; 0,15; 2,74; 2,10; 2,36; 0,02; 2,16; 1.70; 1,24; 0,90; 2,96; 1.27

Да се намери доверителен интервал за дисперсията σ^2 на печалбата с доверителна вероятност 0,95.

12.15.Машина за пакетиране на брашно пълни пакети по 1 кг., като максималното допустимо отклонение в теглото на 1 пакет е 0,01 кг. Назначена е комисия за проверка на точността на машината, която от направени измервания на 10 пакета е получила извадково средно 1,06 кг и извадково стандартно отклонение 0,015 кг. Ако е известно, че теглото на пакетите е нормално разпределено да се намери доверителен интервал за дисперсията на теглото на изработените от машината пакети с доверителна вероятност 0,99.

12.16.Детайл трябва да се закали с цел повърхността му да добие твърдост 50 единици по Рокфел (HRC). Използват се 2 метода – първият е чрез ток с висока честота, а вторият е чрез нагряване в пещ и охлаждане в машинно масло. Проверката на твърдостта на детайлите е показала следните резултати:

49, 50, 51, 50, 52, 49, 50, 51 – за детайли обработени по първия метод;

51, 47, 53, 52, 50, 51, 49 – за детайли обработени по втория метод.

Ако е известно, че разпределенията на твърдостта на обработваните по двата метода детайли са нормални да се построят доверителните интервали за твърдостта на детайлите, обработвани по двата метода при доверителна вероятност 0,95.

12.17. Зехтинът е един от най-добрите източници на ненаситени мастни киселини и е неразделна част от популярна средиземноморска диета, на която хората от региона дължат доказано по-доброто си здраве в сравнение с народите, обитаващи по-северните краища на Европа. Олеиновата киселина е мононенаситена omega-9 мастна киселина. Данните се състоят от процентното съдържание (%x100) на олеиновата киселина, открити в 33 шишета италиански зехтин, произведен на остров Сардиня.

7120, 7065, 7080, 7120, 6990, 7007, 6971, 7130, 6882, 7043, 7145, 7065, 7162, 7144, 7020, 7123, 7164, 7159, 7085, 7103, 7068, 7170, 7076, 7243, 7068, 7080, 7035, 7135, 7062, 7200, 7085, 7006, 7025

Построите 95% доверителен интервал за средното съдържание на олеиновата киселина в зехтина, произведен на остров Сардиня, при предположение за нормалност на изследваната популация.

12.18. Производствен цех произвежда вид детайли, за които се изисква да бъдат с определен диаметър. Максимално допустимото отклонение от този диаметър е 0,05 мм. Отговорникът по качествения контрол прави измервания на 11 случайно взети детайла, като получените резултати (в мм.) са дадени в таблицата отляво:

Стойности X_j	7,85	7,9	7,95	8	8,05
Честота n_j	1	2	3	2	3

Ако е известно, че разпределението на диаметрите на произвежданите детайли е нормално, то

а) да се намери неизместена и състоятелна оценка за отклонението σ в диаметрите на произвежданите детайли;

б) да се намери доверителен интервал за дисперсията с доверителна вероятност 0,99.

12.19. Произвеждани детайли трябва да бъдат с точен размер 25,15 см. При проверка на качеството са направени измервания на 13 детайла и получените резултати са дадени в таблица.

Стойности X_j	24,85	24,95	25,00	25,10	25,15	25,20
Честота n_j	2	3	4	2	1	1

Ако е известно, че размерите на детайлите са нормално разпределени, да се намери:

а) неизместена и състоятелна оценка за средния размер на детайлите;

б) доверителен интервал за размера на детайлите с доверителна вероятност 0,98.

12.20.Клиент поръчва на шивашко ателие ушиването на партида панталони с дължина 110 см. При приемането на панталоните, клиентът прави измервания на 10 случайно избрани панталона от партидата, при което е получил следните стойности:

Стойности X_j	108	109	109,5	110	110,5
Честота n_j	1	2	2	4	1

Ако е известно, че дължината на панталоните е нормално разпределена, то

а) да се намери неизместена и състоятелна оценка за дисперсията σ^2 на дължината на ушитите панталони;

б) да се намери доверителен интервал за средната дължина на ушитите панталони с доверителна вероятност 0,98.

12.21.Детектор е използван, за да се измери енергията на тяло. За целта се използва едно и също тяло, на което се измерва енергията с различни детектори. Стойностите от измерванията на 9 различни детектори, при едно и също тяло, са

260; 216; 259; 206; 265; 284; 291; 229; 249;

а) Намерете точкова оценка на неизвестната енергия.

б) Намерете средното стандартно отклонение на извадката.

в) Намерете 95% доверителен интервал на неизвестната енергия, ако е известно, че извадката е от нормално разпределена случайна величина.

г) Намерете 90% доверителен интервал на неизвестната енергия.

д) Сравнете интервалите, получени в точките в) и г). Как нивото на доверие се отразява на доверителния интервал?

е) Ако е включен и още един детектор, който е измерил, че енергията е 251, то как това се отразява на 95% доверителния интервал (намерете новия доверителен интервал и го сравнете с този от точка в)?

ж) Може ли да се твърди, че увеличението на обема на извадката винаги намалява дължината на интервала? Защо?

12.22. Цените (в лева) предложени от 13 случайно избрани застрахователни компании за онлайн застраховка Гражданска отговорност на лек автомобил с 5 места, с обем на двигателя до 1000 куб. см, регистриран за пръв път 2009 г. и собственост на юридическо лице, са:

135,25; 186,09; 110,94; 211,20; 209,40; 159,54; 164,40; 154,90; 230,50;
207,10; 192,98; 210,90; 156,39.

Намерете средната цена и стандартното отклонение на извадката. Постройте 90% доверителен интервал на средната цена.

13. Проверка на хипотези за средна стойност на нормална популация

Справочник

Използват се два начина: чрез построяване на <u>критична област</u> или чрез използване на p-стойността p_value.

Правило за избор:

Отхвърляме H_0 в полза на H_1 когато p_value < α или стойността на статистиката принадлежи на критичната област. Двете условия са еквивалентни.

В противен случай нямаме основание да отхвърлим основната хипотеза H_0.

Критичните области са представени в таблиците.

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при неизвестна дисперсия*	*Критична област*
H_1: $\mu>\mu_0$	$t=\dfrac{(\overline{x}-\mu_0)}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}\in t(n-1)$	$\left(t_{1-\alpha}(n-1),\infty\right)$
H_1: $\mu<\mu_0$		$\left(-\infty,-t_{1-\alpha}(n-1)\right)$
H_1: $\mu\neq\mu_0$		$\left(-\infty,t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)\cup\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\infty\right)$

Контрахипотеза за популационното средно	*Статистика при известна дисперсия* σ^2	*Критична област*
H_1: $\mu>\mu_0$	$z=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\in N\left(0,1\right)$	$\left(z_{1-\alpha},\infty\right)$
H_1: $\mu<\mu_0$		$\left(-\infty,-z_{1-\alpha}\right)$
H_1: $\mu\neq\mu_0$		$\left(-\infty,-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\cup\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}},\infty\right)$

Алгоритъм за проверка на хипотеза чрез определяне на критична област

1. *Избира се ниво на съгласие α;*
2. *Определя се извадковото разпределение на избраната статистика, предполагайки че хипотезата H_0 е вярна;*
3. *Намира се критичната област К (виж таблицата по горе);*
4. *Вземане на решение: Ако извадковата статистика принадлежи на критичната област,то хипотезата H_0 се отхвърля, ако не принадлежи, то няма статистическо основание за отхвърляне на хипотезата H_0.*

Алгоритъм за проверка на хипотеза чрез p-стойност

1. *Избира се ниво на съгласие α;*
2. *Определя се извадковото разпределение на избраната статистика, предполагайки че хипотезата H_0 е вярна;*
3. *Намира се p-стойността p_value;*
4. *Вземане на решение: Ако p_value<α, то хипотезата H_0 се отхвърля, ако p_value≥α, то няма статистическо основание за отхвърляне на хипотезата H_0.*

Задачи

13.1. Предполагаме, че резултатите от психологически тест, измерващ коефициента на интелигентност IQ са приблизително нормално разпределени с неизвестно средно μ и дисперсия 100. Данните от IQ теста, проведен сред студенти в университета, са дадени в таблица. Тествайте хипотезата $H_0:\mu=110$ че средния брой точки е 110, срещу алтернативата $H_1:\mu>110$ че средния брой точки е по-голям от 110. Работете с ниво на значимост 0.1.

Резултати от IQ теста
115, 124, 107, 106, 109, 99, 121, 95, 118, 111, 115, 114, 131, 119, 104, 125, 115, 119, 94, 122, 116, 116, 119, 124, 106, 107, 122, 113, 105, 120, 105, 110, 106, 119, 115

13.2. Направена е случайна извадка от 576 жители на дадена област с цел да се установи дали консумираното количество портокалов сок в тази област е поне 150 грама дневно. Получено е, че средната дневна консумация на портокалов сок от тези жители е 133 грама. Знае се, че дневната консумация е нормално разпределена със стандартно отклонение 96 грама.

а) Тествайте хипотезата с ниво на значимост 0,05.

б) Тествайте хипотезата, като използвате p-стойност.

13.3. Паста за зъби се опакова в разфасовки по 55 грама. Знае се, че теглото е нормално разпределено. За да се провери, дали машините не пълнят повече от 55 грама, са избрани са по случаен начин 10 тубички и са претеглени прецизно. Получени са следните резултати в грамове:

55,95; 56,54; 57,58; 55,13; 57,48; 56,06; 59,93; 58,30; 52,57; 58,48;

а) Тествайте подходящата хипотеза с ниво на значимост 0,05.

б) Тествайте хипотезата, като използвате p-стойност.

13.4. За да се определи съдържанието на бактерии във водата на голямо езеро, за което се знае че е нормално разпределено, се вземат 37 проби от по 100 мililитра вода от различни места на брега и в лабораторията се измерва количеството бактерии в пробите. Намерено е, че средното количество бактерии е 11,95 (в стотици) и стандартното отклонение е 11,8 (в стотици). Има ли статистически значимо основание да се смята, че броят бактерии в 100 мililитра от водата в това езеро е повече от 1000?

13.5. В един супермаркет картофите се продават по 2 лв. на пакет. Избрани са по случаен начин 24 пакета и са претеглени:

4,4; 3,8; 5,1; 4,6; 4,5; 4,5; 4,8; 4,1; 3,9; 4,2; 4,4; 4,9; 5,0; 4,3; 4,4; 3,6; 5,2; 4,8; 4,4; 4,6; 4,6; 5,0; 4,0; 4,5.

а) Изпълнено ли е предположението за нормално разпределение на теглото? Защо?

б) Като използвате ниво на значимост 0,05, тествайте хипотезата, че пакетите съдържат поне 4,5 кг.

в) Като използвате p-стойност, тествайте хипотезата, че пакетите съдържат поне 4,5 кг.

13.6. Производител пакетира течен сапун в бутилки с тегло 500 мл. За да се провери дали машината за пълнене е регулирана добре се избират случайно 1219 бутилки и се претеглят. Намерено е, че средното тегло е 506 мл със стандартно отклонение 10 мл.Дават ли измерванията достатъчно основание да се настоява за пренастройка на машината?

13.7. Производител на лютеница я пакетира в буркани с етикети, на които е записано *нето 400 г.* Известно е, че теглото е нормално разпределено със стандартно отклонение 15 грама. Направена е извадка от 16 буркана и е получено, че тяхното средно тегло е 412 г.

а) При ниво на значимост 0,05, трябва ли да се препоръча регулиране на машината?

б) Трябва ли да се препоръча регулиране на машината, ако се използва p-стойност?

13.8. От учебен отдел в Университета „Образование за всеки“ е направена случайна извадка от 25 първокурсници и е получено, че средния им успех от първия семестър е 5,06 със стандартно отклонение 0,59. Знае се, че успехът е нормално разпределена случайна величина.

а) Като използвате ниво на значимост 0,05, тествайте хипотезата, че успехът на студентите в този университет е над 5,00.

б) Като използвате p-стойност, тествайте хипотезата, че успехът на студентите в този университет е над 5,00.

13.9. Известно е, че разходът на бензин на определен вид автомобил е нормално разпределен. Производителят твърди, че определена марка автомобили до 10000 км имат разход не по-голям от 7,5 на сто на магистрала.Случайно са избрани 9 коли от определения модел, всяка под 10000 км, и е измерен тяхният разход на бензин. Намерено е, че средният им разход на бензин на магистралата София – Пловдив е 7,8 л на сто. При ниво на значимост 0,05 може ли да се твърди, че твърденията в каталога на производителят не са верни?

13.10.Агенция по здравословно хранене твърди, че дневната консумация на натрий е повече от 2750 mg. Знае се, че разпределението на дневната консумация на натрий е нормално разпределено. Избрани са по случаен начин 24 жени и е получено, че те приемат средно 2919 mg натрий дневно. Стандартното отклонение на извадката е 1359 mg. При ниво на значимост 0,02 може ли да се отхвърли твърдението на агенцията?

13.11. Министерството на образованието решава да тества дали учениците със завършено начално образование могат да четат средно поне 150 думи в минута със стандартно отклонение от 15 думи. Избрани са по случаен начин 200 ученици, завършващи средното си образование и на всеки ученик е даден да прочете един и същ текст, като е измерено времето. Намерено е, че средно тези ученици четат по 156 думи в минута, а стандартното отклонение на извадката е 18 думи. Тази информация дава ли статистическо основание да се отхвърли твърдението при предположение за нормалност на изследваната популация?

13.12. Конструктор на микропроцесори решава на въведе нов процес за тяхното производство, като твърди, че по този начин ще се удължи времето на използване на микропроцесорите. Понастоящем средната продължителност на живот на микропроцесорите е 16 000 часа. Направена е извадка от 100 микропроцесора, произведени при новата технология, които са тествани. Изчислени са средната продължителност на използване 16 700 часа и стандартно отклонение 2500 часа. Дава ли ни тази информация достатъчно основание да отхвърлим новата технология при предположение за нормалност на изследваната популация?

14. Точкова оценка, доверителен интервал и проверка на хипотези за алтернативни популации

Справочник

Използват се алгоритми, аналогични на тези, описани в параграф 14, като формулите в този случай са следните:

	вероятност за успех
точкова оценка	$\hat{p}=\frac{y}{n}$, *където n е броя на опитите, y е честотата на поява на събитието*
доверителен интервал	$\left(\hat{p}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$
проверка на хипотези $H_0: p=p_0$ $H_1: p\neq p_0$	*статистика:* $\frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$, *критична област:* $\left(-\infty,-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)\cup\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}},\infty\right)$

Задачи

14.1. За *invitro* развитие на растителни експланти се приготвя хранителна среда. След като хранителна среда е приготвена, тя трябва да се разлее в стерилни условия в обсега на ламинарбокса. При това разливане понякога става заразяване на част от хранителните среди и те трябва да се изхвърлят. Този опит е проведен и е установено, че от 80 броя разляти среди в културални съдове 10 броя бяха заразени. Да се оцени вероятността хранителната среда, разлята в културалния съд, да бъде чиста.

14.2. Урна *A* съдържа 100 червени топки и 200 бели топки, а урна *B* съдържа 200 червени и 100 бели топки. Нека p е вероятността да бъде изтеглена червена топка от урна. Доколкото не се знае от коя урна се изтегля топката, стойността на p е неизвестна. За да се тества хипотезата $H_0: p=1/3$, (че тази вероятност е 1/3) срещу алтернативата $H_1: p=2/3$ (че е 2/3), се избират 3 топки по случаен начин с връщане от една и съща урна. Нека X е броя извадени червени топки. Намерете критичната област, формулирайте грешката от първи род и грешката от втори род?

14.3. Фирма, произвеждаща дъвка, след една рекламна кампания сред зъболекари решава да провери ефекта на рекламата. При случайно допитване до 390 зъболекари се установява, че 273 от тях са препоръчвали на пациентите си дъвката. Може ли да се твърди, че поне 75% от зъболекарите препоръчват дъвката:

а) ако нивото на значимост е 0,05;

б) ако нивото на значимост е 0,01.

в) Намерете p-стойността на теста.

14.4. Съгласно международната здравна асоциация, в нормално развитите страни поне 7% от новородените са по-тежки от 2,500 кг. За да се провери какво е състоянието в Судан са били избрани по случаен начин 209 новородени, от които се е оказало че 23 са с тегло под 2,500 кг. Какъв извод може да се направи:

а) ако нивото на значимост е 0,05;

б) ако нивото на значимост е 0,01;

в) Колко е p-стойността на този тест?

14.5.Съгласно статистическо проучване в дадена страна, през 1990 година 30% от мъжете на възраст над 18 години са живели сами. За да се провери дали този процент се е увеличил, е направено социологическо проучване през 2005 година, като по случаен начин са избрани 100 мъже на възраст над 18 години и се е оказало, че 38 от тях живеят сами. Дават ли резултатите достатъчно основание да се потвърди тенденцията на увеличение?

14.6.За да се изследва дали повече от половината млади хора на възраст между 20 и 30 години пушат, се прави случайна извадка от 1000 младежи на тази възраст и се оказва, че 589 от тях пушат. Какъв статистически извод може да се направи за броя пушачи?

14.7. При допитване на 400 гласоподаватели 215 отговарят, че ще гласуват за управляващата партия, а 185 отговарят, че няма да гласуват за управляващата партия.

а) Колко е p-стойността на теста $H_0 : p = 0,5$ срещу алтернативата $H_1 : p \neq 0,5$?

б) Колко е p-стойността на теста $H_0 : p = 0,5$ срещу алтернативата $H_1 : p > 0,5$?

в) Защо се различават отговорите на а) и на б)?

г) Има ли достатъчно статистическо основание да се смята, че управляващите ще спечелят изборите, съгласно мнението на гласоподавателите в момента?

14.8. Получаването на млади растения *invitro* пипер сорт Стряма се осъществява чрез посев на стерилизирани семена върху слой от определено количество хранителна среда, съдържаща необходимите за развитието на растенията съответните макро и микро-соли, витамини, агар и захароза. Семената се култивират (посяват) в културални съдове по 8 на брой във всеки съд и се пренасят в климатични камери. От опита се вижда, че от 10 културални съда с по 8 семена (т. е. общо 80 стерилизирани семена) са прорастнали (поникнали) 60 броя, а останалите не са и от тях не могат да се образуват растения.

а)Да се оцени вероятността за получаване (образуване) на млади растения в *invitro* среда.

б) Да се провери хипотезата на изследователите, че вероятността за *invitro* поникване на пипер сорт Стряма е 0,8.

14.9. Морските свинчета често боледуват от краста. Тя може да бъде предизвикана от различни акари, като заразата става чрез контакт на болни животни със здрави. Тези акари могат да паразитират и при човека. По време на първия курс на Джеймс Кук с кораба Индевър от 25 човека екипаж, 16 човека биват изтормозени от краста. Да се провери хипотезата, че вероятността моряк от екипажа да се зарази с краста е по-голяма от 0,5.

15. Проверка на хипотези за две популации

Справочник

Често се налага да се проверяват хипотези за еднородност, т. е. за ***неразличимост*** *на две популации:* H_0: $F_1(x)= F_2(x)$*срещу алтернативата* H_1: $F_1(x)\neq F_2(x)$ *за някое x.*

Трябва да разполагаме с две независими серии от независими помежду си наблюдения$X_1, X_2,..., X_n$ *на случайната величина X с функция на разпределение* $F_1(x)$ *и* $Y_1, Y_2,..., Y_m$ *на случайната величина Y с функция на разпределение* $F_2(x)$*, с ниво на съгласие α проверяваме хипотезата* $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ *за всяко x,срещу алтернативата* $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$ *за някое x.*

Критериите за еднородност на Колмогоров-Смирнов и χ^2*-критерият се основават на гранични теореми и надеждността им е висока при обеми на извадката* $n \geq 40$.

Алгоритъм на Критерий на Колмогоров-Смирнов

1.*избира се ниво на съгласие α;*

2. *намират се вариационните редове на извадките и вариационният ред* $\{Z_{(k)}\}$, $k = 1, 2, 3, ..., n + m$ *на обединената извадка;*

3. *намират се емпиричните функции на разпределение* $F_n(x)$ *и* $F_m(x)$;

4. *определя се статистиката* $D_{nm} = sup\{|F_m(Z_{(k)}) - F_n(Z_{(k)})|\}$ *в точките* $Z_{(k)}$;

5. *намира се квантилът* $C_{1-\alpha}$ *на разпределението на Колмогоров;*

6. *сравняват се* $D_n.\sqrt{\dfrac{n.m}{n+m}}$ *и* $C_{1-\alpha}$:

ако $D_n.\sqrt{\dfrac{n.m}{n+m}} \geq C_{1-\alpha}$, *то хипотезата* H_0 *се отхвърля в полза на* H_1;

ако $D_n.\sqrt{\dfrac{n.m}{n+m}} < C_{1-\alpha}$, *то няма статистическо основание да се отхвърли хипотезата* H_0.

Забележка. *Тъй като табулации на разпределението на Колмогоров се намират сравнително трудно, даваме най-често използваните стойности за α=0.1, 0.05, 0.025, 0.01:*

$$C_{0.9} = 1.22;\ C_{0.95} = 1.36;\ C_{0.975} = 1.48;\ C_{0.99} = 1.63.$$

Алгоритъм на χ^2***-тест за еднородност***

1. *избира се ниво на съгласие α;*

2. *намират се вариационните редове на извадките;*

3. *избира се брой на интервалите* $s > 1$;

4. *реалната ос се разбива на m непресичащи се интервала* $\Delta_i = (a_i, a_{i+1}],\ i = 1,2,...,s,\ a_1 = -\infty,\ a_{s+1} = +\infty$;

5. *намира се броят M_{i1} и M_{i2} на елементите от вариационния ред на двете извадки, принадлежащи на интервала Δ_i за $i=1,2,...,s$;*
6. *пресмята се статистиката* $\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(\frac{M_{i1}}{n} - \frac{M_{i2}}{m}\right)}{\frac{M_{i1}+M_{i2}}{n.m}}$;
7. *определя се квантилът* $\chi^2_\alpha(s-1)$;
8. *сравняват се статистиката* χ^2 *и квантилът* $\chi^2_\alpha(s-1)$:

   ако $\chi^2 \geq \chi^2_\alpha(k)$ *хипотезата H_0 се отхвърля в полза на H_1;*

   ако $\chi^2 < \chi^2_\alpha(k)$ *хипотезата H_0 няма основание да се отхвърля.*

Критерий на знаците (критерий на Фишер)

Критерият на знаците е въведен от сър Роналд Фишър в 1925 г. Той е много удобен метод за проверка за еднородност при извадки с еднакъв обем поради своята простота.

Алгоритъм на критерий на знаците (критерий на Фишер)

1. *проверява се че извадките на случайните величини X и Y са с еднакъв обем n;*
2. *образуват се съответните разлики* $S_i = X_i - Y_i$, *i = 1, 2,.., n;*
3. *намира се броят m на положителните разлики $S_i > 0$;*
4. *намира се броят s на отрицателните разлики $S_i > 0$;*
5. *прави се проверка на хипотезата H_0 = {положителните и отрицателните разлики са биномно разпределени с параметри m + s и p = 0,5} срещу алтернативата H_1 = {положителните и отрицателните разлики са биномно разпределени с параметри m + s и p ≠ 0,5}.*

Задачи

15.1. Дилър продава две различни марки автомобили седан. Доколкото купувачите се интересуват от безопасността на седана, дилърът иска да определи разликата между спирачния път (разстоянието, което колата изминава, след като се натисне спирачката, за да намали скоростта на колата от 60 на 0 км/час) на двата вида коли. Петима шофьори са избрани по случаен начин, за да изпробват двете марки коли- всеки от тях трябва да натисне спирачката веднага след като достигне до 60 км/час. Разстоянието е измерено и записано в таблицата (в метри).

Шофьор	1	2	3	4	5
Марка А	150	146	160	155	152
Марка В	152	145	160	157	154

Какво може да кажете за спирачния път на двете марки коли? Формулирайте хипотеза за спирачния път и я тествайте при предположение за нормалност на изследваните популации.

15.2. Изпълнителен директор на компания за производство на телефонни апарати е притеснен от оплакванията за дефектни телефонни апарати, получени в последно време. Компанията има два производствени клона и директорът не е сигурен кой от двата клона произвежда повече дефектни апарати. За да тества производството, той избира по случаен начин по 100 апарата, произведени в двата клона, изпробва ги и записва броя на дефектните и на редовните апарати в таблицата.

	Брой телефони	Брой дефектни
Клон А	100	1
Клон В	100	5

Има ли статистическо основание да се направи извода, че има разлика в процента дефектни апарати произвеждани от двата клона? Използвайте ниво на значимост 0,01?

15.3. Учител се интересува дали има разлика в скоростта на четене при момчетата и при момичетата. Той избира по случаен начин 40 петокласници и 40 петокласнички, дава им един и същ текст и измерва времето, за което те го прочитат. Резултатите (в минути) са поместени в таблицата.

	Момчета	Момичета
брой	40	40
Средно време	10	11
Стандартно отклонение	3	2

Използвайте 0,05 ниво на значимост, за да тествате твърдението че средната скорост на четене при момчетата е по-малка от средната скорост на четене при момичетата при предположение за нормалност на изследваните популации.

15.4. Мениджър на верига от хранителни магазини би желал да провери дали новата система на организация на касовите апарати увеличава броя на таксуваните продукти. За целта са избрани по случаен начин седем касиера и са преброени продуктите, които могат да се таксуват при новата и при старата система за 3 минути. Данните са:

касиер	1	2	3	4	5	6	7
стара	60	70	55	75	62	52	58
нова	65	71	55	75	65	57	57

Има ли статистическо основание да се твърди наличието на по-голяма ефективност на новата система? Направете необходимите предположения.

15.5.Застрахователна компания изпробва сигурността на различни елементи на колите. В един такъв тест, компанията тества броните на колите, движещи се с 10 км/час, при сблъсък с бариера. Следните данни дават разходите за поправка (в лева) след 4 различни сблъсъка на 2000 DodgeNeon и на 2000 HondaCivic:

Вид сблъсък	разходи – Neon	разходи – Civic
Предна броня в бариера	363	420
Задна броня в бариера	88	462
Предна броня в наклонена бариера	420	409
Задна броня в стълб	1,131	236

Има ли статистическо основание да се счита, че има разлика в разходите за поправка? Използвайте ниво на значимост 0.01, при условие, че популацията е нормална.

15.6.Лаборатория прави проучване за ефекта на лекарството **Zyprexa** върху пациенти с определен вид диагноза. За целта 115 пациенти със съответната диагноза са разделени на две групи по случаен начин и на едната група се дават от 5 до 20 мг на ден от лекарството, а на другата група се дава плацебо. Ефективността на лекарството се измерва по специална скала и резултатите са нанесени в таблицата

	Група с Zyprexa	Група с плацебо
Брой	55	60
Средно въздействие	14,8	8.1
Стандартно отклонение	12.5	12.7

Тествайте твърдението, че групата с лекарството има по-високи показатели от групата с плацебото. Използвайте ниво на значимост 0,01.

15.7. GallupOrganization е направила допитване миналата година до 535 пълнолетни жители на определена страна, на които бил зададен въпроса „Мислите ли, че има живот под някаква форма на други планети?“. От тях 325 отговаряли ДА. Когато същият въпрос е зададен през януари тази година, то 385 от 535 анкетирани отговорили ДА. Тествайте твърдението, че пропорцията на пълнолетните, вярващи в съществуването на живот на другите планети е намалял.

15.8. За да се тества дали нов серум оказва влияние върху левкемията, са избрани пациенти, които са вече в напреднал стадии на болестта. Петима от тях получават лекарството, а останалите 4 – не. След провеждане на експеримента са записаните годините от експеримента до смъртта им. Данните са подредени в таблицата

С лекарство	2.1	5.3	1.4	4.6	0.9
Без лекарство	1.9	0.5	2.8	3.1	

Може ли да се твърди, че серумът има ефект? Направете необходимите предположения и проверки.

15.9. В проучване на **Union Bank of Switzerland**, която планира да открие клон в Сан Диего, е записано почасовото заплащане на белите и цветнокожите работници в областта. За целта по случаен начин са избрани по 20 работници от всяка от двете групи и данните са обработени и получени следните резултати (в долари):

Средно заплащане на цветнокожите 6,65 и стандартно отклонение 1,20.

Средно заплащане на белите 8,30 и стандартно отклонение 2,1.

а) Може ли да се твърди, че средното почасово заплащане на цветнокожите не е повече от 6,6 долара? Използвайте ниво на значимост 0,01.

б) Колко е p-стойността на теста от точка а)?

в) Какво заключение може да се направи за хипотезата от точка а), ако се използва p-стойността?

г) Може ли да се твърди, че средното почасово заплащане на белите е повече от средното почасово заплащане на цветнокожите? Използвайте ниво на значимост 0,05.

е) Може ли е да се използва теста за зависими извадки при проверка на хипотезата за равенство на средното почасово заплащане на белите и цветнокожите работници в областта? Защо?

15.10. Министерството на образованието твърди, че в област А образованието е по-добро отколкото в област Б. За целта на случайно избрани ученици от 8 клас се дава един и същи общообразователен тест. В областта А издържалите теста са 450 измежду избраните 500, а в областта Б издържалите теста са 700 измежду избраните 900. Може ли, използвайки данните, да се твърди, че учениците, които издържат общообразователния тест в областта А са поне 10% повече от учениците, които издържат общообразователния тест в областта Б.

а) Напишете хипотезата и алтернативата. Кое разпределение ще използвате, за да тествате хипотезата?

б) Колко е p-стойността на теста?

в) Колко е грешката от първи род, която се допуска, ако се използва p-стойността за проверка на хипотезата.

г) Направете извод като използвате p-стойността за тестване на хипотезата?

д) Какъв е изводът, ако се използва ниво на значимост 0,1 за тестване на хипотезата?

15.11. Доктор Lyle през 1987 г. (Lyleetal., 1987) е провел изследване на влиянието на хранителни добавки, съдържащи калций (Са), върху кръвното налягане. За тази цел група от 10 пациента са получили хранителна добавка с калций и друга група от 11 пациенти, наречена контролна група, са получили хапче с плацебо ефект.Експериментът продължил 12 седмици. Кръвното налягане на всички пациенти било измерено преди и след експеримента. Данните отчитащи промяната в кръвното налягане са дадени в таблицата:

Ca	7	–4	18	17	–3	–5	1	10	11	–2	
Placebo	–1	12	–1	–3	3	–5	5	2	–11	–1	–3

Проверете твърдението, че промяната в кръвното налягане на пациентите, приемащи хранителна добавка с калций, е по-малка от тази на контролната група. Направете необходимите предположения.

15.12. Глобалният феномен Ел Ниньо е отговорен за температурни колебания в тропическата част на Тихия океан, а според някои учени, и за част от промените в климата. Тъй като това се случва по Коледа, явлението е наречено Ел Ниньо (на испански „момченце“, което се свързва с Младенеца Исус). Явлението се проявява, когато температурата на водната повърхност се покачи с 0.5 градуса над средната. Температура на морската вода, измерена на 1 метър под морската повърхност (в градуси по Целзий) в 25 случайно избрани по време (около Коледа 1993 и 1997 година) и място (около брега на Перу) точки, е дадена в таблица.

Формулирайте подходящи хипотези за да докажете посочените по-долу твърдения. Работете с ниво на значимост 0.05.

а) Проверете твърдението, че средната температура на морската вода през 1993 г. е била 23 градуса.

б) Докажете твърдението, че 1997 година е една Ел Ниньо година, т. е. докажете, че средната температура на морската вода през 1997 г. се е покачила с повече от 0,5 градуса над средната температура на морската вода през 1993 г. Предположете нормалност на вероятностните разпределения на двете популации.

Година	Температура на морската вода
1993	22,68; 24,01; 23,42; 22,89; 23,54; 23,91; 23,37; 21,84; 23,88; 22,81; 22,81; 24,43; 23,41; 24,05; 23,67; 23,93; 24,43; 23,95; 21,99; 24,55; 24,08; 22,59; 23,50; 24,62; 23,43;
1997	28,08; 28,51; 28,78; 28,25; 28,35; 26,85; 26,64; 26,83; 27,68; 28,05; 27,59; 28,26; 28,03; 28,20; 26,64; 27,60; 27,62; 28,55; 28,81; 28,94; 27,51; 28,45; 28,28; 28,24; 28,24;

15.13. Районната прокуратура, съвместно с Ветеринарно-медицинската служба, е направила проверка на фирмите, произвеждащи сухо мляко. И производителите и проверяващите са измерили съдържанието на мазнини във всяко пакетче от случайна извадка от 30 пакетчета сухо мляко. Има ли значима разлика в двата вида измервания?

Съдържанието на мазнините в % за 100 гр. продукт
2,343; 1,922; 1,587; 1,736; 0,461; 1,800; 1,409; 0,884; 2,999; 3,519; 2,219; 2,399; 1,037; 2,345; 0,865; 3,397; 2,744; 2,484; 2,828; 2,470; 3,136; 1,403; 0,691; 0.865, 1,974; 2,150; 0,666; 1,409; 2,443; 1,658;
2,098; 1,689; 2,269; 3,579; 2,703; 3,327; 1,631; 2,778; 2,458; 1,899; 1,120; 3,048; 2,375; 2,909; 1,757; 1,561; 0,480; 2,791; 2,353; 2,639; 1,896; 2,116; 1,500; 1,220; 2,091; 3,863; 1,720; 2,041; 2,323; 1,065;

15.14. За да се провери дали глаукомата влияе на дебелината на роговицата на окото са избрани случайно 8 пациента, на които едното око е засегнато от глаукома, а другото – не, и е измерена дебелината на роговицата на окото(в микрони), като данните са дадени в таблицата

Пациент	1	2	3	4	5	6	7	8
Окото с глаукома	488	478	480	426	440	410	458	460
Окото без глаукома	484	478	492	444	436	398	464	476

Може ли да се твърди, че глаукомата влияе на дебелината на роговицата на окото? Използвайте ниво на значимост 0,1.

16. Комплексни задачи по статистика

Предложените в тази глава задачи обединяват различни дялове от статистиката и са предназначени основно за самостоятелна работа.

16.1.Фондация за хора с наднормено тегло организира сбирки за членовете си по градове. За да може всеки член лесно да открие местоположението и да знае времето на срещата фондацията поръчала на софтуерна компания да разработи приложение за *смартфон*, което всеки неин член лесно да инсталира на мобилния си телефон и чрез него фондацията да изпраща до всеки необходимата му информация. Компанията добавила функционалност, която при всяко използване на приложението да записва името на потребителя (т.е. id на телефона на потребителя), часа и датата. Като използвате извадката на броя потребители за ден от случайно избрани 33 дни, представена в таблицата, построите 95% доверителен интервал за средния брой потребители дневно и проверете твърдението на фондацията, че средният брой потребители дневно е 30 човека.

Брой потребители в извадката: 15, 0, 2, 5, 10, 7, 12, 12, 14, 10, 20, 31, 18, 17, 18, 21, 23, 20, 16, 26, 27, 32, 38, 36, 43, 58, 0, 29, 55, 67, 72, 101, 115

16.2. Съдържанието на болестотворни бактерии в почвата може да доведе различни инфекциозни заболявания. Изследвани са картофи от замърсена почва в района на с.Стрелци, в които е намерено наличие на бактериите Micrococcus и на ентерококи, които са нормални обитатели на чревния канали присъствието им във почвата говори за прясно фекално замърсяване. Изследвана е почвата, където са виреели картофите и са намерени бактерии и там. Годността на почвата се определя от нейния колититър – най-малкото количество почва, изразено в кубични cm, което съдържа поне една клетка от Micrococcus. Известно е, че при колититър по-голям от 100 см^3 почвата е годна за садене.

Започнато е изследване на почвата в случайно избрани места от района на цялото селище и са открити следните стойности (в кубични cm):

102, 100, 110, 95, 101, 105, 109, 89, 109, 111, 99, 97, 87, 96, 120, 112, 109, 121, 115, 112, 96, 102, 110, 109, 100, 105, 108, 83, 104, 102, 107, 99, 104, 114, 110, 94, 117, 123;

а) Пресметнете числовите характеристики на дадените данни.

б) Представете графично данните (постройте хистограма и плътност).Разпределението нормално ли е?

в) Построите 98% доверителен интервал за колититъра.

г) Можем ли да твърдим, че почвата е годна за садене?

д) Направена е случайна извадка и за колититъра на почвата в друго селище. Проверете дали е нормално разпределението. Там почвата почиста ли е, в сравнение с тази от първото селище?

133, 136, 120, 125, 109, 106, 102, 97, 120, 118, 119, 113, 114, 119, 124, 144, 137, 116, 118, 119, 120, 140, 115, 125, 127, 121, 109, 119, 130, 118, 114, 116, 126, 128, 117, 109, 111, 108.

16.3. 25 случайно избрани мушици, Drosophilamelanogaster от вида Normal, се отглеждат при оптимални условия, а 35 случайно избрани мушици от същия вид са изложени на мутагенен фактор – UV лъчи, под действието на който се намалява дължината на крилете. След това е измерена дължината на крилата им. Когато средната дължина на крилата на тези мухи е под 3 мм твърдим, че при тях се наблюдава мутация.

Дължината на крилете на мухите, изложени на мутагенен фактор, е:

1.38, 1.42, 1.56, 1.48, 1.72, 2.42, 1.27, 3.12, 2.34, 3.18, 2.42, 5.23, 3.40, 1.40, 0.56, 1.88, 1.90, 0.95, 3.70, 0.91, 1.56, 1.92, 2.12, 2.14, 0.42, 1.23, 1.96, 4.73, 2.00, 0.59, 0.48, 4.96, 2.13, 2.20, 0.70

Дължината на крилете на мухите, които не са изложени на мутагенен фактор, е:

4.8, 4.9, 5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.6, 4.8, 4.9, 4.6, 4.3, 4.7, 4.5, 4.8, 5.1, 5.0, 4.9, 4.8, 5.2, 4.8, 4.9, 4.6, 4.8, 5.1, 5.0

а) Посочете числовите характеристики на зададените данни.

б) Представете графично данните (хистограма и плътност).

в) Построите 95% и 99% доверителен интервал за средната дължина на крилете на мухите от вида Drosophilamelanogaster.

г) Може ли в случая да твърдим, че този фактор UV лъчи, под действието на който са изложени мушиците, намалява дължината на крилете им?

16.4. Направени са случайни извадки от 35 индийски и 28 африкански лъва и е измерена дължината им. Получените данни са представени в таблица.

а) Да се изчислят числовите характеристики и да се представят графично извадковите данни прииндийския и при африканския лъв;

б) Да се построи 90%, 95% и 99% доверителни интервали за средната стойност на дължината на тялото при индийския лъв.

с) С ниво на съгласие 0.05 да се провери хипотезата, че дължината на тялото при индийския лъв е по-голяма от дължината на тялото при африканския лъв.

Дължината на тялото при индийски лъвове	150,37; 151,33; 152,31; 154,03; 161,63; 152,59; 154,67; 155,57; 158,47; 160,67; 156,83; 152,33; 154,32; 150,30; 160,88; 150,81; 160,47; 163,67; 161,83; 159,33; 161,32;
Дължината на тялото при африкански лъвове	100,00; 101,01; 102,00; 108,01; 128,00; 110,99; 111,99; 127,99; 124,70; 114,02; 112,78; 118,99; 126,59; 102,05;

16.5. Отделът за анализи на голяма европейска компания за произвеждане на компютърни системи изследва периодично времето, необходимо на работниците, за сглобяване на една компютърна система. В продължение на един месец са извършени наблюдения върху работата на случайно избрани работници и са регистрирани следните стойности в минути:

128, 95, 124, 142, 108, 113, 124, 97, 133, 120, 146, 103, 114, 100, 131, 124, 133,
88, 128, 135, 109, 111, 113, 131, 131, 118, 98, 138, 112, 150, 122, 116, 122

След цялостно обновяване на оборудването във фирмата е направена нова случайна извадка и са регистрирани следните нови резултати:

109, 101, 102, 99, 82, 108, 95, 102, 113, 108, 113, 111, 94, 103, 100, 116, 89,
100, 110, 103, 100, 120, 105, 102, 119, 115, 102, 101, 97, 120, 111, 100,98

а) Да се пресметнат числовите характеристики на данните.

б) Представете графично данните от двете извадки.

в) Постройте 96% доверителни интервали за средното време на сглобяване на една компютърна система преди и след обновяване на оборудването.

г) Проверете хипотезата, че средното време за сглобяване на една компютърна система преди обновяването превишава 110 минути. Работете с ниво на съгласие 0,02. Направете статистически изводи и интерпретирайте получените резултати.

д) Проверете хипотезата, че след обновяване на оборудването, времето, необходимо за сглобяване на компютърните системи, се е намалило.

16.6. Бактериите се делят на две големи групи „Грам$^{+}$“ и „Грам$^{-}$“, въз основа на устройството на тяхната клетъчна стена. При „Грам$^{+}$“ тя е по-плътна, което се дължи на многослоен пептидоглюкан (муреинова мрежа) за който е доказано, че при по-високото му съдържание диаметърът е по-голям и е 30 – 80 nm, докато при „Грам$^{-}$“ клетъчната стена е много по-рехава, защото се състои само от един слой пептидоглюкан с диаметър 1 – 3 nm.

Направена е извадка от 50 случайно избрани „Грам$^{+}$“ бактерии и е измерен диаметъра на клетъчната им стена:

30,0; 39,7; 67,8; 53,1; 43,8; 69,7; 80,0; 68,4; 56,7; 40,1; 61,8; 56,9; 30,9; 30,7; 69,1; 76,1; 38,4; 45,7; 48,1; 79,4; 48,3; 30,6; 80,0; 73,4; 48,7; 46,1; 83,1; 78,3; 67,5; 46,9; 56,7; 80,0; 79,8; 36,8; 36,9; 40,3; 78,9; 58,9; 39,8; 47,5; 42,6; 58,6; 69,9; 63,7; 40,8; 41,2; 74,6; 75,9; 39,9; 72,1;

Направена е извадка от 58 случайно избрани „Грам$^{-}$“ бактерии. Диаметърът на клетъчната им стена е съответно:

1,3; 1,5; 3,0; 2,1; 2,2; 3,0; 2,8; 1,9; 1,9; 1,8; 2,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,5; 1,4; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,1; 1,1; 1,5; 2,9; 2,8; 1,8; 2,8; 3,1; 2,9; 1,8; 1,7; 2,6; 2,7; 1,9; 1,0; 3,0; 2,6; 2,4; 1,8; 2,8; 2,4; 2,6; 2,5; 2,8; 1,6; 2,9; 2,7; 2,4; 1,5; 1,4; 1,9; 2,5; 2,6; 2,7; 3,0; 2,0; 1,0; 2,4; 2,9;

а) Пресметнете числовите характеристики на дадените данни.

б) Представете графично данните.

в) Постройте 98% доверителен интервал за средната стойност на диаметъра на клетъчната стена.

г) Проверка на хипотезата, че средният диаметър на „грам$^{+}$“ бактерии е 56 нанометра.

д) Проверете хипотезата, че средният диаметър на „грам$^{-}$“ бактерии е 2 нанометра.

16.7. Водата за пиене и домашни нужди не трябва да съдържа патогенни микроорганизми, тъй като може да стане причина за различни инфекциозни заболявания. Годността на водата за пиене се определя от наличието на бактериите *E. coli* и на ентерококи, които са нормални обитатели на чревния канали присъствието им във водата говори за прясно фекално замърсяване. Годността на водата се определя от нейния колититър: най-малкото количество вода, изразено в кубични cm, което съдържа поне една клетка от *E. coli*. Знаем, че е прието водопроводната вода на селище с население над50000 жители да се смята за годна за пиене при колититър над 100 кубични см., т.е. в колкото по-малко количество вода се намира една бактерия, толкова по-замърсена е тя. Взети са по случаен начин проби от различни места на водопроводи в едно селище с население над 50 000 жители:

99, 100, 110, 95, 105, 101, 109, 89, 109, 111, 102, 99, 87, 96, 120, 112, 109, 120, 115, 112, 96, 102, 110, 103, 100, 105, 108, 83, 104, 102,107, 99, 104, 114, 110, 94, 117, 123;

а) Пресметнете числовите характеристики на дадените данни.

б) Представете графично данните. Може ли да направим предположение за вида на популационното разпределение?

в) Построите 98% доверителен интервал за колититъра.

г) Можем ли да твърдим, че водата е годна за пиене?

д) Направена е случайна извадка и за колититъра на водата в друго селище. Проверете дали е нормално разпределението. Там водата по-чиста ли е, сравнение с първото селище?

123, 136, 120, 135, 109, 106, 102, 97, 120, 118, 119, 113, 114, 119, 124, 144, 137, 116, 118, 119, 120, 125, 115, 125, 127, 121, 109, 119, 130, 118,114, 116, 126, 128, 117, 109, 108, 111.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Стандартно нормално разпределение N (0,1)

z	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**
0,0	0,5	0,503989379	0,507978354	0,511966527	0,515953499
0,1	0,539827896	0,543795364	0,547758470	0,551716823	0,555670033
0,2	0,579259687	0,583166134	0,587064387	0,590954073	0,594834824
0,3	0,617911357	0,621719457	0,625515770	0,629299955	0,633071673
0,4	0,655421697	0,659096986	0,662757237	0,666402148	0,67003 J420
0,5	0,691462467	0,694974281	0,698468229	0,701944056	0,705401511
0,6	0,725746935	0,729069152	0,73237J166	0,735652770	0,738913765
0,7	0,758036422	0,761148006	0,764237576	0,767304982	0,770350076
0,8	0,788144666	0,791029974	0,793892006	0,796730665	0,799545861
0,9	0,815939908	0,818588775	0,821213646	0,823814480	0,826391238
1,0	0,841344740	0,843752345	0,846135756	0,848494980	0,850830029
1,1	0,864333898	0,866500443	0,868643073	0,870761839	0,872856799
1,2	0,884930268	0,886860491	0,888767499	0,890651383	0,892512238
1,3	0,903199451	0,904902018	0,906582427	0,908240802	0,909877266
1,4	0,919243289	0,920730109	0,922196112	0,923641445	0,925066257
1,5	0,933192771	0,934478263	0,935744490	0,936991617	0,938219807
1 6	0,945200711	0,946301077	0,947383870	0,948449263	0,949497431
1,7	0,955434568	0,956367097	0,957283815	0,958184901	0,959070532
1,8	0,964069734	0,964852162	0,965620555	0,966375089	0,967115942
1,9	0,971283507	0,971933461	0,972571119	0,973196650	0,973810224
2,0	0,977249938	0,977784475	0,978308376	0,978821799	0,979324905
2,1	0,982135643	0,982570884	0,982997038	0,983414253	0,983822675
2,2	0,986096601	0,986447466	0,986790661	0,987126322	0,987454580
2,3	0,989275919	0,989555950	0,989829586	0,990096947	0,990358150
2,4	0,991802471	0,992023745	0,992239749	0,992450589	0,992656367
2,5	0,993790320	0,993963425	0,994132240	0,994296853	0,994457354
2,6	0,995338778	0,995472853	0,995603474	0,995730718	0,995854658
2,7	0,996532977	0,996635789	0,996735852	0,996833231	0,996927987
2,8	0,997444809	0,997522864	0,997598756	0,997672537	0,997744260
2,9	0,998134120	0,998192789	0,998249775	0,998305122	0,998358871
3,0	0,998650033	0,998693692	0,998736057	0,998777162	0,998817040
3 1	0,999032329	0,999064496	0,999095677	0,999125901	0,999155194
3,2	0,999312798	0,999336262	0,999358984	0,999380986	0,999402289
3,3	0,999516517	0,999533462	0,999549856	0,999565714	0,999581052
3,4	0999663019	0,999675135	0,999686844	0,999698160	0,999709094
3,5	0,999767327	0,999775903	0,999784184	0,999792178	0,999799895
3,6	0,999840854	0,999846865	0,999852663	0,999858254	0,999863647
3,7	0,999892170	0,999896341	0,999900359	0,999904232	0,999907962
3,8	0,999927628	0,999930493	0,999933251	0,999935906	0,999938461
3,9	0,999951884	0,999953833	0,999955707	0,999957509	0,999959242

Стандартно нормално разпределение N(0,1)

Z	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,519938873	0,523922253	0,527903240	0,531881440	0,535856456
0,1	0,559617712	0,563559473	0,567494933	0,571423709	0,575345420
0,2	0,598706274	0,602568057	0,606419814	0,610261186	0,614091818
0,3	0,636830590	0,640576374	0,644308699	0,648027240	0,651731677
0,4	0,673644759	0,677241874	0,680822481	0,684386299	0,687933051
0,5	0,708840345	0,712260318	0,715661192	0,719042736	0,722404724
0,6	0,742153956	0,745373154	0,748571176	0,751747842	0,754902979
0,7	0,773372720	0,776372779	0,779350124	0,782304631	0,785236183
0,8	0,802337508	0,805105527	0,807849842	0,810570386	0,813267094
0,9	0,828943888	0,831472403	0,833976760	0,836456943	0,838912939
1,0	0,853140919	0,855427672	0,857690314	0,859928875	0,862143390
1,1	0,874928011	0,876975542	0,878999459	0,880999834	0,882976744
1,2	0,894350161	0,896165253	0,897957619	0,899727366	0,901474606
1,3	0,911491948	0,913084979	0,914656492	0,916206622	0,917735507
1,4	0,926470700	0,927854925	0 929219087	0,930563344	0,931887852
1,5	0,939429229	0,940620050	0,941792438	0,942946563	0,944082597
1,6	0,950528549	0,951542794	0,952540341	0,953521368	0,954486051
1,7	0,959940886	0,960796142	0,961636477	0,962462069	0,963273096
1,8	0,967843287	0,968557300	0,969258155	0,969946026	0,970621086
1,9	0,974412010	0,975002175	0,975580885	0,976148306	0,976704602
2,0	0,979817852	0,980300797	0,980773894	0,981237299	0,981691164
2,1	0,984222449	0,984613720	0,984996631	0,985371321	0,985737932
2,2	0,987775567	0,988089412	0,988396244	0,988696189	0,988989373
2,3	0,990613313	0,990862548	0,991105971	0,991343692	0,991575823
2,4	0,992857185	0,993053143	0,993244339	0,993430871	0,993612833
2,5	0,994613830	0,994766365	0,994915046	0,995059954	0,995201171
2,6	0,995975369	0,996092924	0,996207393	0,996318845	0,996427351
2,7	0,997020181	0,997109875	0,997197128	0997281997	0,997364539
2,8	0,997813974	0,997881730	0,997947576	0,998011558	0,998073724
2,9	0,998411062	0,998461736	0,998510932	0,998558689	0,998605044
3,0	0,998855724	0,998893246	0,998929637	0,998964929	0,998999149
3,1	0,999183581	0,999211088	0,999237740	0,999263560	0,999288571
3,2	0,999422914	0,999442878	0,999462202	0,999480905	0,999499004
3,3	0,999595887	0,999610233	0,999624105	0,999637518	0,999650485
3,4	0,999719659	0,999729865	0,999739724	0,999749247	0,999758445
3,5	0,999807344	0,999814533	0,999821470	0,999828164	0,999834623
3,6	0:999868846	0,999873859	0,999878692	0,999883351	0,999887842
3,7	0,999911555	0,999915017	0 999918350	0,999921560	0,999924651
3,8	0,999940919	0,999943285	0,999945562	0,999947752	0,999949858
3,9	0,999960908	0,999962509	0,999964048	0,999965527	0,999966948

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Квантили $\mathbf{t_q(k)}$ *на симетричното* **t-разпределение на Стюдънт**

k \ q	**0,60**	**0,75**	**0,90**	**0,95**	**0,975**
I	0,324919256	1,000000793	3,077684596	6,313748599	12,706150301
2	0,288674755	0,816496595	1,885618985	2,919987310	4,302655725
3	0,276670562	0,764891865	1,637745299	2,353363016	3,182449291
4	0,270722467	0,740697033	1,533205705	2,131846486	2,776450856
5	0,267181122	0,726686835	1,475884801	2,015049176	2,570577635
6	0,264834625	0,717558351	1,439755124	1,943180905	2,446913641
7	0,263166839	0,711141865	1,414923645	1,894577508	2,364622560
8	0,261920832	0,706386345	1,396815605	1,859548320	2,306005626
9	0,260955630	0,702722218	1,383028803	1,833113856	2,262158887
10	0,260184834	0,699811835	1,372184215	1,812461505	2,228139238
11	0,259556145	0,697444875	1,363430329	1,795883691	2,200986273
12	0,259032618	0,695482640	1,356218036	1,782286745	2,178812792
13	0,258590944	0,693829634	1,350172170	1,770931704	2,160368240
14	0,258212367	0,692417075	1,345031251	1,761309250	2,144788596
15	0,257884949	0,691196647	1,340605422	1,753051038	2,131450856
16	0,257599027	0,690132538	1,336757123	1,745884219	2,119904821
17	0,257347210	0,689194621	1,333379487	1,739606432	2,109818524
18	0,257123247	0,688363571	1,330390660	1,734063062	2,100923666
19	0,256923158	0,687621196	1,327728114	1,729131327	2,093024705
20	0,256742396	0,686954422	1,325340691	1,724718004	2,085962478
21	0,256579824	0,686352450	1,323187462	1,720743512	2,079614205
22	0,256432031	0,685805048	1,321236596	1,717144187	2,073875294
23	0,256296744	0,685306532	1,319460807	1,713870006	2,068654794
24	0,256173394	0,684849510	1,317835086	1,710882316	2,063898137
25	0,256059707	0,684430006	1,316345788	1,708140189	2,059537110
26	0,255954546	0,684042902	1,314972451	1,705616341	2,055530786
27	0,255857913	0,683685357	1,313703706	1,703288035	2,051829142
28	0,255767532	0,683352823	1,312525910	1,701130259	2,048409442
29	0,255683972	0,683044163	1,311434517	1,699127097	2,045230758
30	0,255605528	0,682755399	1,310415882	1,697260359	2,042270353
31	0,255532200	0,682485961	1,309463187	1,695518677	2,039514584
32	0,255463419	0,682233576	1,308573019	1,693888407	2,036931619
33	0,255399186	0,681997108	1,307737421	1,692360456	2,034516910
34	0,255338364	0,681774281	1,306950708	1,690923455	2,032243174
35	0,255281520	0,681563961	1,306211743	1,689572855	2,030110409
40	0,255038799	0,680672656	1,303076260	1,683852133	2,021074579
45	0,254850079	0,679980872	1,300650183	1,679427442	2,014103302
50	0,254699444	0,679427785	1,298712959	1,675905423	2,008559932
55	0,254576094	0,678976448	1,297134986	1,673033694	2,004044291
60	0,254473207	0,678600713	1,295820766	1,670648544	2,000297172
120	0,253909320	0,676540139	1,288645990	1,657649591	1,979929038
∞	0,253346570	0,674490366	1,281550794	1,644853000	1,959961082

Квантили $t_q(k)$ *на симетричното* **t-разпределение на Стюдънт**

$k \backslash q$	**0,99**	**0,995**	**0,9975**	**0,999**	**0,9995**
1	31,820964068	63,655897975	127,321109176	318,288803101	636,577606201
2	6,964546628	9,924988262	14,089164324	22,328458726	31,599774957
3	4,540706868	5,840847734	7,453199942	10,214280337	12,924429029
4	3,746936272	4,604080459	5,597539712	7,172930054	8,610077202
5	3,364930308	4,032117431	4,773319233	5,893525667	6,868503988
6	3,142667993	3,707427823	4,316825652	5,207548384	5,958718248
7	2,997949196	3,499480954	4,029352567	4,785251804	5,408073775
8	2,896467777	3,355380613	3,832537914	4,500761861	5,041365512
9	2,821434464	3,249842848	3,689638106	4,296889529	4,780886229
10	2,763772500	3,169261618	3,581371857	4,143657861	4,586763680
11	2,718079486	3,105815267	3,496606951	4,024768714	4,436878953
12	2,680990292	3,054537956	3,428431228	3,929599188	4,317844287
13	2,650303941	3,012282832	3,372479114	3,852037480	4,220928531
14	2,624492481	2,976848918	3,325694706	3,787426976	4,140310921
15	2,602482709	2,946726454	3,286040737	3,732857294	4,072790034
16	2,583492460	2,920787665	3,251989256	3,686145646	4,014873412
17	2,566939656	2,898232196	3 222448868	3,645764082	3,965105861
18	2,552378646	2,878441592	3,196582838	3,610475687	3,921741154
19	2,539482011	2,860942914	3,173699952	3,579334589	3,883324098
20	2,527976903	2,845335985	3,153400030	3,551831469	3,849563655
21	2,517645044	2,831366146	3,135210136	3,527093213	3,81929567!
22	2,508322723	2,818760549	3 118839231	3,504974302	3 792229109
23	2,499873517	2,807337296	3,103996278	3,484965418	3,767636372
24	2,492161002	2,796950866	3,090535756	3,466775524	3,745371941
25	2,485103323	2,787437552	3,078203008	3,450186341	3,725144779
26	2,478627721	2,778724593	3,066888894	3,434979590	3,706663847
27	2,472661436	2,770684659	3,056520654	3,421009751	3,689492587
28	2,467140803	2,763263183	3,046952770	3,408204066	3,673922038
29	2,462020348	2,756387403	3,038039722	3,396271495	3,659515642
30	2,457263690	2,749984560	3,029781510	3,385212040	3,645982360
31	2,452825356	2,744036465	3,022105375	3,374880180	3,633467713
32	2,448678060	2,738488547	3,014938557	3,365275916	3 621826181
33	2,444794518	2,733286237	3,008244676	3,356326488	3,610912245
34	2,441147444	2,728393156	3,001950972	3,347959137	3,600725904
35	2,437718649	2,723809303	2,996057447	3,340028343	3,591121640
40	2,423257683	2,704455255	2,971173672	3,306922736	3,550958354
45	2,412116373	2,689594112	2,952074283	3,281456884	3,520253813
50	2,403266990	2,677788871	2936976671	3,261375241	3,495952114
55	2,396081982	2,668220986	2,924716682	3,245149856	3,476452548
60	2,390115696	2,660272003	2,914566721	3,231689334	3,460154403
120	2,357828635	2,617416612	2,859851520	3,15951 1834	3,373424988
∞	2,326341928	2,575834515	2,807064448	3,090244718	3,290479071

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Квантили $\chi_q^2(k)$ на асиметричното χ^2-разпределение на Пирсън

k \ *q*	**0,005**	**0,010**	**0,025**	**0,050**	**0,100**	**0,500**
1	3,927E-05	0,0001571	0,0009821	0,0039322	0,0157907	0,4549362
2	0,0100247	0,0201004	0,0506357	0,1025862	0,2107208	1,3862936
3	0,0717235	0,1148316	0,2157949	0,351846	0,5843755	2,3659727
4	0,2069836	0,2971068	0,484419	0,7107241	1,0636243	3,3566947
5	0,4117508	0,5542969	0,8312089	1,1454773	1,6103091	4,3514587
6	0,6757334	0,8720833	1,2373419	1,6353805	2,2041303	5,348119
7	0,9892509	1,2390317	1,689864	2,1673492	2,8331052	6,3458093
8	1,3444027	1,6465062	2,1797247	2,7326326	3,4895374	7,3441201
9	1,7349114	2,0878894	2,7003887	3,3251151	4,1681557	8,342832
10	2,1558454	2,5581988	3,2469635	3,9402953	4,8651783	9,3418161
11	2,6032019	3,0534957	3,8157424	4,574809	5,5777883	10,340996
12	3,073785	3,5705513	4,4037775	5,2260277	6,3037959	11,340322
13	3,565042	4,1068996	5,0087376	5,8918606	7,0414997	12,339753
14	4,0746588	4,6604155	5,6287238	6,5706316	7,7895377	13,339272
15	4,6008741	5,2293559	6,2621229	7,2609348	8,5467531	14,338857
16	5,1421643	5,8121968	6,9076641	7,9616386	9,3122353	15,338497
17	5,6972737	6,407742	7,5641786	8,6717536	10,085183	16,338179
18	6,2647659	7,0149034	8,2307372	9,3904479	10,864937	17,337902
19	6,8439233	7,6326976	8,9065144	10,117006	11,650912	18,33765
20	7,4338114	8,2603684	9,5907725	10,850799	12,442601	19,33743
21	8,0336021	8,8971724	10,282907	11,591316	13,239596	20,337228
22	8,6426806	9,5424944	10,98233	12,338009	14,04149	21,337044
23	9,2603831	10,195689	1 1,688534	13,090505	14,847954	22,33688
24	9,8861987	10,856349	12,401146	13,848422	15,658679	23,33673
25	10,519647	11,523951	13,119707	14,611396	16,473405	24,336584
26	11,160218	12,198177	13,843881	15,379163	17,29188	25,336458
27	11,807655	12,878468	14,573373	16,151395	18,113889	26,336341
28	12,461281	13,564666	15,307854	16,927876	18,939235	27,336232
29	13,121067	14,256406	16,047051	17,708381	19,76774	28,33613
30	13,786682	14,953464	16,790756	18,492667	20,599245	29,336028
35	17,191729	18,50887	20,56938	22,465009	24,796648	34,335635
40	20,706577	22,164201	24,433058	26,509296	29,050516	39,335341
45	24,310982	25,9012	28,366177	30,612259	33,350378	44,335118
50	27,990825	29,706725	32,357385	34,764236	37,688637	49,334941
55	31,734894	33,570516	36,398113	38,958051	42,05962	54,334787
60	35,534397	37,484796	40,481707	43,187966	46,458885	59,334668
65	39,383227	41,443554	44,60297	47,449572	50,882935	64,334557
70	43,275305	45,4417	48,757536	51,739263	55,328945	69,334479
80	51,171933	53,539983	57,153152	60,391459	64,277842	79,334325
90	59,196327	61,754019	65,646592	69,126018	73,291079	89,334216
100	67,327533	70,064995	74,221882	77,929442	82,358127	99,33413

Квантили χ_q^2 на асиметричното χ^2-разпределение на Пирсън

k \ *q*	**0,900**	**0,950**	**0,975**	**0,990**	**0,995**
1	2,7055406	3,8414553	5,0239026	6 6348913	7,8793998
2	4,6051761	5,9914764	7,3777791	9,210351	10,59653
3	6,2513945	7,8147247	9,348404	11,344882	12,838073
4	7,779434	9,4877285	11,143262	13,276699	14,860166
5	9,2363491	11,070483	12,832492	15,086317	16,749648
6	10,644637	12,591577	14,449355	16,811872	18,547513
7	12,017031	14,067127	16,012774	18,475324	20,277738
8	13,361562	15,507312	17,534545	20,090159	21,954861
9	14,683663	16,91896	19,022778	21,666048	23,589275
10	15,987175	18,307029	20,483201	23,209287	25,188055
11	17,275007	19,675153	21 920023	24,725022	26,756864
12	18,54934	21,026055	23,33666	26,216964	28,29966
13	19,811933	22,362027	24,735581	27,688184	29,819318
14	21,064141	23,684782	26,118935	29,141163	31,319425
15	22,307121	24,995797	27,488365	30,577951	32,801491
16	23,541821	26,296221	28,845325	31,999861	34,267053
17	24,769028	27,5871	30,190983	33,408717	35,718378
18	25,989418	28,869321	31,52641	34,805237	37,156386
19	27,203565	30,143505	32,852337	36,190775	38,582122
20	28,41197	31,41042	34,169581	37,566272	39,996856
21	29,615086	32,670558	35 478856	38,932232	41,400943
22	30,813285	33,92446	36,780678	40,289448	42,795664
23	32,00689	35,17246	38,075609	41,638334	44,181385
24	33,196235	36,415026	39,36406	42,979781	45,558363
25	34,381583	37,652489	40,646498	44,314014	46,927966
26	35,563164	38,88513	41,923138	45,641636	48,289777
27	36,741228	40,113266	43,194521	46,962837	49,645035
28	37,915907	41,337152	44,46079	48,278166	50,993559
29	39,087475	42,556948	45,722279	49,587829	52,335495
30	40,256017	43,772954	46,979218	50,892181	53,671868
35	46,058772	49,801832	53,203308	57,341988	60,274592
40	51,805044	55,758487	59,341679	63,690771	66,766047
45	57,505291	61,656219	65,410131	69,956901	73,166036
50	63,167113	67,504805	71,420194	76,153802	79,489839
55	68,796207	73,311479	77,380436	82,291977	85,749058
60	74,396999	79,081954	83,297706	88,37943	91,951806
65	79,97299	84,82064	89,177163	94,421996	98,104916
70	85,527036	90,531262	95,023149	100,42505	104,21477
80	96,578196	101,87947	106,62854	1 12,32879	116,32093
90	107,56501	113,14523	118,13591	124,1162	128,29868
100	118,498	124,3421	129,56125	135,80689	140,16971

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Работа с Wolfram Mathematica.

1. Общи сведения

Mathematica е продукт на фирмата Wolfram Research.

Официалният сайт на фирмата е: www.wolfram.com

На адреса по-долу се намират голямо количество примери, реализирани с пакет **Mathematica**. Техният програмен (сорс) код е достъпен и може да бъде свален оттам:

http://demonstrations.wolfram.com/

2. Основни правила за работа

– Въвеждането на формули може да стане по различни начини, като най-разпространени са:

– използване на палети с математически символи и вградени функции, които се избират от меню File/Palettes, например (за интегриране): $\int_a^b dx$; или

– набиране на текстов оператор, например (за интегриране): Integrate[f, { x, a, b}] .

Особености при работата:

– Mathematica е интерпретатор. Потребителят задава командни редове, групирани в клетка, в която всеки оператор се нарича Input (вход), а системата изпълнява всички отделни редове, наречени Out (изходи), снабдени с номер, напр. Out[123]. Изключение правят циклите.

– В рамките на работния сеанс всички входове и изходи се помнят от системата и могат да се използват чрез съответните им номера според реда на изпълнението им.

– Изпълнението на командите от текущата клетка става с едновременно натискане на клавишите: SHIFT + ENTER. (Натиска се клавишът SHIFT и след това без да се отпуска се натиска клавишът ENTER).

– Изчисленията могат да се извършват с произволен брой аритметични знаци. За целта командата за числено пресмятане се записва например така (има и други възможности): N[команда, брой знаци]. По подразбиране знаците са 6.

– Когато се извършват дълги изчисления системата указва отдясно на работното поле съответната клетка с двойна голяма счупена скоба]].

– Изчисленията се прекъсват от меню Action/Interrupt... или като едновременно се натиснат клавиши Alt и . (точка).

– Може да се изпълняват многократно ред, клетка, група клетки или целият Notebook наведнъж в произволна последователност.

– Системните функции задължително започват с главна буква, а аргументите им са в квадратни скоби, напр. Plot[аргументи,...].

– Имената на променливите, графиките и другите потребителски обекти се препоръчва да започват с малки букви. Името започва с буква, която е последвана от букви и/или цифри, броят им е неограничен.

– Командният ред (оператор) може да съдържа вградени функции, потребителски функции, променливи, константи и др. Променливите и вградените функции няма нужда да се описват предварително от потребителя, системата определя типа им според първоначално присвоените им значения, например: цяло число, комплексно число, символ, списък, графика, матрица и пр.

– За по-бързо и пълно усвояване на Mathematica се препоръчва използване на изключително богатия системен Help и пълната версия на вградения учебник на създателя на Mathematica - Стивън Волфрам.

3. Запознаване с основните възможности на Mathematica с помощта на примери

Примерите по-долу илюстрират накратко основните възможности на системата **Mathematica.**

Напомняне! След въвеждането на всеки от изразите се натискат Shift+Enter (натиска се Shift и след това без да се отпуска се натиска и Enter)и се получава съответният резултат.

В случай че системата "увисне" с много дълги изчисления и работата ѝ трябва да бъде прекъсната, това с тава с едновременнното натискане на клавишите Alt+. (точка), също както Shift+Enter по-горе. След това прекъсване се появява съобщение $Aborted.

Пример 1. (Намиране първите 50 цифри на числото π)

Въведете

N[Pi,50]

резултатът са 50 цифри на числото пи (p):

3.14159265358979323846264338327950288419716939937511

Пример 2. (Решаване на алгебрично уравнение).

Въведете

$$\mathrm{Solve}\left[x\,^\wedge 3-2x+1==0\right]$$

резултатът са трите решения на уравнението $x^3 - 2x + 1 = 0$:

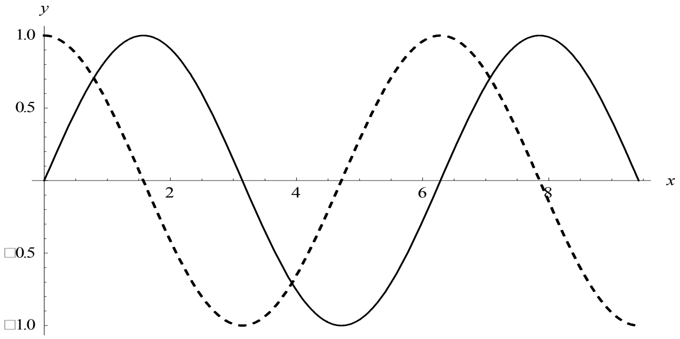
$$\left\{\{x\to 1\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right)\right\},\left\{x\to \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)\right\}\right\}$$

Пример 3. (графика на функция).

Въведете

```
Plot[{Sin[x], 2Cos[2x]}, {x, 0,3Pi}, PlotStyle → {Black, {Black, Dashed}}]
```

резултатът е графиката:

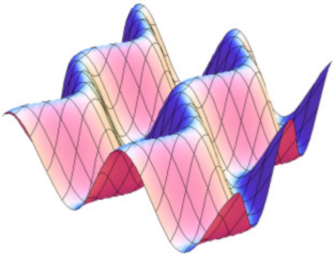


Пример 4. (тримерна графика)

Въведете

```
Plot3D[Sin[x + Cos[y]], {x, 0,4Pi}, {y, 0,4Pi}, Ticks → None, Boxed
                    → False, Axes → None, PlotPoints → 25]
```

резултатът е 3D-графиката:



Използване на меню Help

В пакета има много подробна документация на всички функции и операции в менюто Help.

Използването може да става директно от менюто в командния ред с последователни избори или чрез въвеждане на знака ? с последващо име на функция или операция.

Пример 5. (описание на оператор)

Въведете

```
?Solve
```

резултатът е:

> Solve[*expr*,*vars*] attempts to solve the system *expr* of equations or inequalities for the variables *vars*.
>
> Solve[*expr*,*vars*,*dom*] solves over the domain *dom*. Common choices of *dom* are Reals, Integers, and Complexes.

Доизясняването на възможностите на сътвената функция или оператор може да стане с помощта на оператора Options. Той дава допълните описания на съответната команда, зададена след този оператор в начупени скоби.

За по-подробна информация може да се използва командата ?? с последваща команда или оператор, за която се иска допълнително доизясняване.

Операции с числа

Основните аритметични действия могат да бъдат извършвани с произволни числа в произволна форма. Примерите по-долу илюстрират възможностите на пакета:

Пример 6. (аритметични действия с многоцифрени числа)

Въведете

$123456789 + 987654321$

резултатът е:

1111111110

Въведете

$123456789 * 987654321$

резултатът е:

121932631112635269

Пример 7. (Задаване на точност на пресмятането):

Въведете

$\mathrm{N}[\%, 10]$

резултатът е:

$9.299674813 \times 10^{792}$

Въведете

$123456789/3$

резултатът е:

41152263

Въведете

$(-4)\hat{}123$

резултатът е:

$-113078212145816597093331040047546785012958969400003$
$961331978279688272766 5664$

Въведете

$5\hat{}(1/5)$

резултатът е:

$5^{1/5}$

Въведете

$N[\%, 10]$

резултатът е:

1.379729661

Пример 8. Закръгляне при задаване на точност на пресмятането:
Въведете

$\text{For}[k = 1, k < 16, k + +, \text{Print}[N[\sqrt{3}, k]]]$

резултатът е:

2.
1.**7**
1.73
1.732
1.7321
1.732**05**
1.732051
1.73205**08**
1.73205081
1.7320508**08**
1.73205080**76**
1.732050807**57**
1.7320508075**69**
1.73205080756**89**
1.732050807568**88**

Много добре се вижда ефектът от закръгляне на резултата в последната цифра! Поради тази причина винаги, когато се изисква определена точност при пресмятане (от типа: намерете с точност 10 цифри…) пресмятането трябва да бъде извършено с поне 1 цифра повече, за да се получат съответния брой точни цифри в резултата.

4. Списък на основните команди от разделите „вероятности“ и „математическа статистика“

По-долу са изброени основните команди от пакета, които могат да се използват при решаване на задачите от сборника, както и на други задачи свързани с Теория на вероятностите и математическата статистика. По-подробна информация за всяка от тях, както и примери, илюстриращи работата им, могат да се намерят в Help менюто на системата по описания по-горе начин.

Вероятности и статистика

Probability
Expectation
NProbability
NExpectation
Distributed
Conditioned

Симулации и емулации

RandomVariate
EstimatedDistribution
FindDistributionParameters
FindDistribution

Проверка на хипотези

DistributionFitTest
LocationTest
VarianceTest
LocationEquivalenceTest
AndersonDarlingTest
KolmogorovSmirnovTest
MannWhitneyTest

Визуализация на статистически данни

QuantilePlot
ProbabilityScalePlot
ProbabilityPlot
Histogram
SmoothHistogram
DensityHistogram
BoxWhiskerChart
DistributionChart

Дискретни разпределения

BernoulliDistribution[p]
BetaBinomialDistribution[α,β,n]
BetaDistribution[α,β]
BinomialDistribution[n,p]
GeometricDistribution[p]
LogSeriesDistribution[θ]
NegativeBinomialDistribution[n,p]
PoissonDistribution[μ]
ZipfDistribution[ρ]

Непрекъснати разпределения

NormalDistribution[μ,σ]
HalfNormalDistribution[θ]
LogNormalDistribution[μ,σ]
InverseGaussianDistribution[μ,λ]
ChiSquareDistribution[ν]
InverseChiSquareDistribution[ν]
FRatioDistribution[n,m]
StudentTDistribution[ν]
NoncentralChiSquareDistribution[ν,λ]
NoncentralStudentTDistribution[ν,δ]
NoncentralFRatioDistribution[n,m,λ]
TriangularDistribution[{a,b}]
TriangularDistribution[{a,b},c]
UniformDistribution[{min,max}]
BetaDistribution[α,β]
CauchyDistribution[a,b]
ChiDistribution[ν]
ExponentialDistribution[λ]
ExtremeValueDistribution[α,β]
GammaDistribution[α,β]
GumbelDistribution[α,β]
InverseGammaDistribution[α,β]
LaplaceDistribution[μ,β]
LevyDistribution[μ,σ]
LogisticDistribution[μ,β]
MaxwellDistribution[σ]
ParetoDistribution[k,α]
RayleighDistribution[σ]
WeibullDistribution[α,β]

Числови характеристики на разпределенията

PDF[dist,x]
CDF[dist,x]
Quantile[dist,q]
Mean[dist]
Variance[dist]
StandardDeviation[dist]
CharacteristicFunction[dist,t]
Expectation[f[x],xdist]
Median[dist]
Quartiles[dist]
InterquartileRange[dist]
QuartileDeviation[dist]
QuartileSkewness[dist]
RandomVariate[dist]
RandomVariate[dist,dims]

ОТГОВОРИ, РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ:

Част първа. ВЕРОЯТНОСТИ

1. *Елементи на комбинаториката. Основни методи за пресмятане*

1.1. а) 8, б) 4, в) 4, г) 2;

1.2. $V_5^3 = 5.4.3 = 60,\ 3.\ V_4^2 = 3.4.3 = 24;$

1.3. $V_3^2 = 6;$

1.4. а) $V_9^4 = 3024;$ б) $V_8^3 = 336;$ в) $V_7^2 = 42;$ г) $3V_7^2 = 126;$

1.5. $V_{10}^6, V_8^4;$

1.6. а) 12!, б) (6!)(6!);

1.7. 15;

1.8. $V_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!} = 30240;$

1.12. 254;

1.13. $P_5 = 5! = 120,$ $P_{15} = 15! = 1307674368000,$ $P_{100} = 100! = 93326;$ 21544; 39441; 52681; 69923; 88562; 66700; 49071; 59682; 64381; 62146; 85929; 63895; 21759; 99932; 29915; 60894; 14639; 76156; 51828; 62536; 97920; 82722; 37582; 51185; 2109168640; 00000; 0000; 00000; 00000; 0000;

1.14. $P_8 * P_3 = 241\,920;$

1.15. а) $6^2 = 36;$ б) $C_{6+2-1}^2 = 21;$ в) 11;

1.16. За белот $P_{32}^{8,8,8,8} = \dfrac{32!}{8!*8!*8!*8!*} = 99561092450391000,$

за бридж

$$P_{52}^{13,13,13,13} = \frac{52!}{13!*13!*13!*13!} = 53\ 644\ 737\ 765\ 488\ 792\ 839\ 237\ 440\ 000$$

1.17. $P_9^{3,2,2,2}.4 = \dfrac{4*9!}{3!*2!*2!*2!} = 30\ 240;$

1.18. $P_6^{2,2,2} = \dfrac{6!}{2!*2!*2!} = 9;$

1.19. 15!, 4!*5!*6!, $P_{15}^{4,5,6} = \dfrac{15!}{4!*5!*6!} = 630630;$

1.20. $C_7^2 = \dfrac{7!}{2!*5!} = 21;$

1.21. За играта „6 от 49“: $C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!*43!} = 13983816$, за играта „6 от 42“: $C_{42}^{6} = \frac{42!}{6!*36!} = 5245786$, за „5 от 35“: $C_{35}^{5} = \frac{35!}{5!*30!} = 324632$;

1.22. $C_{52}^{5} = \frac{52!}{5!*47!} = 2598960$;

1.23. а) C_{36}^{3}; б) $C_{4}^{1}C_{32}^{2}$; в) $C_{4}^{1}C_{32}^{2} + C_{4}^{2}C_{32}^{1} + C_{4}^{3}$; г) $C_{32}^{3} + 4.C_{32}^{2}$;

1.24. $C_{6}^{2} - 6$, $C_{10}^{2} - 10$;

1.25. C_{9}^{3};

1.26. $P_6 = 6! = 720$;

1.27. $\tilde{C}_{7}^{2} = 28$ плочки, 55 плочки;

1.28. C_{32}^{16}, $\frac{32!}{(8!)^4}$;

1.29. $(C_{16}^{8})^2$, $(C_{16}^{4}.C_{12}^{4}.C_{8}^{4})^2$;

1.30. C_{18}^{9}, $C_{18}^{6}.C_{12}^{6}$;

1.31. б) C_{n+m-1}^{n};

1.32. $C_{m}^{k}.C_{n}^{k}.k!$;

1.33. а) $C_{m}^{n}.C_{m-n}^{k}$, б) $V_{m}^{n}.V_{m-n}^{k}$;

1.34. C_{n}^{k} ;*Упътване:* Модел на Ферми-Дирак: Разпределят се ***k*** неразличими частици в ***n*** различими клетки. Намерете броя на възможните начини за разпределяне, ако всяка клетка може да съдържа най-много 1 частица.

1.35. $\overline{C}_{n}^{k} = C_{n+k-1}^{k}$, *Упътване*: Модел на Бозе-Анщайн: Разпределят се ***k*** неразличими частици в ***n*** различими клетки. Намерете броя на възможните начини за разпределяне, ако няма ограничение за броя на частиците, които могат да попаднат в една клетка.

1.36. $\overline{V}_{n}^{k} = n^{k}$, *Упътване:* Модел на Максуел-Болцман: Разпределят се ***k*** различими частици в***n*** различни клетки. Намерете броя на възможните начини за разпределяне, ако няма ограничение за броя на частиците, които могат да попаднат в една клетка.

1.37. Доказателството се извършва по метода на математическата индукция.

1.38. Отговор. Не. Пресметнете от предишната задача |A.B.C|.

1.39. Отговор. $2^{m+n} - 2^{n} - 2^{m} + 1$.

1.40. Отговор. $\tilde{C}_{m}^{n} = C_{m+n-1}^{n}$.

2. ***Основни понятия в теорията на вероятностите. Алгебра на събитията***

2.1. Отговор: $\Omega = \{EEE, EET, ETE, ETT, TEE, TET, TTE, TTT\}$

2.2. Отговор: $\Omega = \{E, TE, TTE, TTTE, TTTTE, \ldots\}$

2.3. Отговор: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2.4. Отговор: $\Omega = \{(111), (112), (121), (211), (113), \ldots, (666)\}$, $|\Omega| = 6^3 = 216$

2.12. а) A; б) $A.B.C^c$; в) $A + B + C$; г) $A.B + A.C + B.C$; д) $A.B.C$; е) $(A + B + C)^c = A^c.B^c.C^c$; ж) $A.B^c.C^c + A^c.B.C^c + A^c.B^c.C + A^c.B^c.C^c$; з) $A.B.C^c + A^c.B.C + A.B^c.C + A.B^c.C^c + A^c.B.C^c + A^c.B^c.C + A^c.B^c.C^c$; и) $A.B.C^c + A^c.B.C + A^c.B.C$, k) 1.

2.14. а) да, б) не винаги, в) не винаги

3. ***Класическа вероятност. Свойства. Основни формули за вероятност. Формули за сума на две и повече събития***

3.1. $P = \frac{3}{6} = 0,5;\ P = \frac{3}{6} = 0,5;$

3.2. $P = \frac{4}{8} = 0,5;$

3.3. $P(A) = \frac{3}{6} = 0.5,\ P(B) = \frac{3}{6} = 0.5,\ P(C) = \frac{2}{6} = 0.3333\ldots,\ P(D) = \frac{1}{6}$

3.4. $P(A) = \frac{1}{36},\ P(B) = \frac{9}{36} = 0,25,\ P(C) = \frac{9}{36} = 0,25,\ P(D) = \frac{18}{36} = 0,5,$

$P(E) = \frac{6}{36},\ P(F) = \frac{1+3+5+5+3+1}{36} = 0,5;$

3.5. а) $\dfrac{\frac{10!}{5!*5!}}{2^{10}} = \frac{63}{256} = 0,246\,093\,75,$

б) $\dfrac{\frac{100!}{50!*50!}}{2^{100}} = 0.079\ 589\ 237\ 387\ 178\ 761\ 498,$

в) $\dfrac{\frac{1000!}{500!*500!}}{2^{1000}} = 0.025\ 225\ 018\ 178\ 360\ 801\ 907,$

г) $\dfrac{\frac{10000!}{5000!*5000!}}{2^{10000}} = 0.007\ 978\ 646\ 139\ 382\ 153\ 760\ 4;$

3.6. $$P(A)=\frac{\dfrac{6!}{1!*5!}*5^{5}}{6^{6}}=0.401\ 877\ 572\ 016\ 460\ 905\ 35,$$

$$P(B)=\frac{\dfrac{60!}{10!*50!}*5^{50}}{6^{60}}=0.137\ 013\ 114\ 267\ 470\ 946\ 06,$$

$$P(C)=\frac{\dfrac{600!}{100!*500!}*5^{500}}{6^{600}}=0.043\ 664\ 321\ 319\ 771\ 074\ 606,$$

$$P(D)=\frac{\dfrac{6000!}{1000!*5000!}*5^{5000}}{6^{6000}}=0.013\ 818\ 575\ 994\ 724\ 363\ 625;$$

3.7. $$\frac{C_M^m.C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n};$$

3.8. $$P\{3\}=\frac{\dfrac{6!}{3!*3!}*\dfrac{43!}{3!*40!}}{\dfrac{49!}{6!*43!}}=0.017\ 650\ 403\ 866\ 870\ 101\ 838$$

$$P\{4\}=\frac{\dfrac{6!}{4!*2!}*\dfrac{43!}{2!*41!}}{\dfrac{49!}{6!*43!}}=0.000\ 968\ 619\ 724\ 401\ 408\ 027\ 68,$$

$$P\{5\}=\frac{\dfrac{6!}{5!*1!}*\dfrac{43!}{1!*42!}}{\dfrac{49!}{6!*43!}}=0.000\ 018\ 449\ 899\ 512\ 407\ 771\ 956,$$

$$P\{6\}=\frac{\dfrac{6!}{6!*0!}*\dfrac{43!}{0!*43!}}{\dfrac{49!}{6!*43!}}=7.151123\,842\,018\,516\,2619\ 10^{-8}.$$

Упътване: Използвайте предната задача със стойности M = 6, N = 49, n = 6, m = 3, 4, 5, 6.

3.9. $$P\{кент-флош\}=\frac{4*9}{\dfrac{52!}{5!*47!}}=0.000\ 013\ 851\ 694\ 523\ 963\ 431\ 526,$$

$$P\{каре\}\frac{13*48}{\dfrac{52!}{5!*47!}}=0.000\ 240\ 096\ 038\ 415\ 366\ 146\ 46,$$

$$P\{\text{фул}\}=\frac{13*4*12*6}{\dfrac{52!}{5!*47!}}=0.001\ 440\ 576\ 230\ 492\ 196\ 878\ 8,$$

$$P\{\text{флош}\}=\frac{4*\dfrac{13!}{5!*8!}-4*9}{\dfrac{52!}{5!*47!}}=0.001\ 966\ 940\ 622\ 402\ 807,$$

$$P\{\text{кента}\}=\frac{9*4^5-9*4}{\dfrac{52!}{5!*47!}}=\frac{9}{2548}=0.003\ 532\ 182\ 103\ 610\ 675\ 039\ 2,$$

$$P\{\text{тройка}\}=\frac{13*4*\dfrac{12!}{2!*10!}*4*4}{\dfrac{52!}{5!*47!}}=0.021\ 128\ 451\ 380\ 552\ 220\ 888,$$

$$P\{\text{два}-\text{чифта}\}=\frac{13*4*\dfrac{12!}{2!*10!}*6*6}{\dfrac{52!}{5!*47!}}=\frac{198}{4165}=0.047\ 539\ 015\ 606\ 242\ 496\ 999,$$

$$P\{\text{чифт}\}=\frac{13*6*\dfrac{12!}{3!*9!}*4*4*4}{\dfrac{52!}{5!*47!}}=\frac{352}{833}=0.422\ 569\ 027\ 611\ 044\ 417\ 77.$$

Упътване: При покера на всеки играч се раздават по 5 карти от пълно тесте от 52 карти. В играта се различават следните фигури, наредени по сила:

{*кент флош*}: петте изтеглени карти са от един цвят и следват по големина;

{*каре*}: 4 от картите са от един вид (например 4 дами), а петата е произволна;

{*фул*}: 3 от картите са от един вид, а 2 са от друг вид (например 3 попа и 2 седмици);

{*флош*}: петте карти са от един цвят, но не са 5 поредни;

{*кента, цветна кента*}: петте карти са поредни, но не са в един цвят;

{*тройка*}: 3 от картите са от един вид, а другите 2 са от два други вида (иначе става фул);

{*два чифта*}: 2 карти от един вид, 2 карти от друг вид и една карта от трети вид;

{*чифт*}: 2 карти от един вид, една карта от втори вид, една от трети вид и една от четвърти вид.

3.10. $\dfrac{C_{28}^{7}-C_{21}^{7}}{C_{28}^{7}}=\dfrac{\dfrac{28!}{7!*21!}-\dfrac{21!}{7!*14!}}{\dfrac{28!}{7!*21!}}=\dfrac{2966}{3289}=0.901\ 793\ 858\ 315\ 597\ 446\ 03;$

3.11. $\dfrac{2}{n};$

3.12. $\dfrac{2}{n-1};$

3.13. $\dfrac{7*P_{10}*P_{2}}{P_{12}}=\dfrac{7}{66}=0.106\ 060\ 606\ 1$

3.14. $P\{\text{в четериместния}\}=\dfrac{P_{8}^{2,3,3}}{P_{10}^{4,3,3}}=\dfrac{\dfrac{8!}{2!*3!*3!}}{\dfrac{10}{4!*3!*3!}}=\dfrac{2}{15}=0.133\ 333\ 333\ 333$

3.15. $P(A)=\dfrac{3!*P_{12}^{4,4,4}}{P_{15}^{5,5,5}}=\dfrac{25}{91}=0.274\ 725\ 274\ 725\ 274\ 725\ 27,$

$P(B)=\dfrac{3*C_{10}^{5}}{P_{15}^{5,5,5}}=\dfrac{1}{1001}=0.000\ 999\ 000\ 999\ 001;$

3.16. $P(A)=\dfrac{2^{N}.N!}{(2.N)!},\ P(B)=\dfrac{2^{N}}{C_{2.N}^{N}};$

3.17. $P\{11\}=\dfrac{27}{216},\ P\{12\}=\dfrac{25}{216};$

3.18. $P\{A\}=\dfrac{n!}{n^{n}},\ P\{B\}=\dfrac{n}{n^{n}},\ P\{C\}=\dfrac{C_{n}^{2}.n!}{n^{n}};$

3.19. $\dfrac{9}{C_{12}^{8}}=\dfrac{1}{55}=0.018\ 181\ 818;$

3.20. $\dfrac{C_{90}^{10}}{C_{100}^{10}}=\dfrac{\dfrac{90!}{10!*80!}}{\dfrac{100!}{10!*90!}}=\dfrac{520058680173}{1573664496040}=0.330\ 476\ 211\ 086\ 725\ 153\ 87;$

3.21. $P\{\text{поне една единица}\}=1-\dfrac{5^{4}}{6^{4}}=\dfrac{671}{1296}=0.517\ 746\ 913\ 580\ 246\ 913\ 58,$

$P\{\text{поне един чифт}\}=1-\dfrac{35^{24}}{36^{24}}=$

$=\dfrac{11033126465283976852912127963392284191}{22452257707354557240087211123792674816}=$

$=0.491\ 403\ 876\ 130\ 903\ 259\ 58;$

3.22. 0.3;

3.23. $\frac{n+1}{6^n}$;

3.24. $\frac{C_{k-1}^1.C_{n-k}^1}{C_n^2} = \frac{2.(k-1).(n-k)}{n.(n-1)}$;

3.25. $\frac{2.V_4^2}{V_5^3} = 0,4$;

3.26. $\frac{3*3+6*3}{6^2} = 0,75$;

3.27. $\frac{4}{9}$;

3.28. $\frac{n-2}{n}$;

3.29. $\frac{C_{m+n-k-l-2}^{m-k-1}}{C_{m+n}^m}$;

3.30. $\frac{1}{M^S}$;

3.31. $\frac{1}{360}$;

3.32. а) $\frac{C_N^k}{N^k}$; б) $\frac{1}{n!}$;

3.33. а) $\frac{1}{15}$, б) $\frac{k!*(10-k+1)!}{10!}$;

3.34. $\frac{k!*(N-k+1)!}{N!}$;

3.35. $\frac{V_{10}^7}{10^7-1} = \frac{\frac{10!}{3!}}{10^7-1} = \frac{67200}{1111111} = 0.060\ 480\ 006\ 048\ 000\ 604\ 800$;

3.36. а) $\frac{9!}{3!*3!*3!*3^9} = \frac{560}{6561} = 0.085\ 352\ 842\ 554\ 488\ 645\ 024$,

б) $\frac{9!*3!}{4!*3!*2!*3^9} = \frac{280}{729} = 0.384\ 087\ 791\ 495\ 198\ 902\ 61$;

3.37. $\frac{n!}{n_1!*n_2!*...*n_6!*6^n}$

3.38. а) $\frac{12!}{12^{12}}=\frac{1925}{35831808}=0.000\ 053\ 723\ 217\ 092\ 478\ 280\ 750,$

б) $\frac{\frac{12!}{2!*10!}*2^{6}}{12^{6}}=\frac{11}{7776}=0.001\ 414\ 609\ 053\ 497\ 942\ 386\ 8;$

3.39. Нека търсеното число е n. Тогава

$$P_n=1-\frac{V_{365}^{n}}{365^{n}},\ P_{22}=1-\frac{\frac{365!}{343!}}{365^{22}}=0.475\ 695\ 307\ 662\ 550\ 068\ 91,$$

$P_{23}=1-\frac{\frac{365!}{342!}}{365^{23}}=0.507\ 297\ 234\ 323\ 985\ 407\ 23.$ Следователно n = 23.

3.40. $\frac{2*(n-k-1)*(n-2)!}{n!}=\frac{2*(n-k-1)}{n*(n-1)};$

3.41. $\frac{1}{n};$

3.42. $\frac{2*(m-1)*n*(m*n-2)!}{(m*n)!}=\frac{2*(m-1)}{m*(m*n-1)};$

3.43. $\frac{C_n^m.C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n};$

3.44. а) $\frac{V_{10}^4}{10^4}=0.504,$ б) $\frac{10.C_4^2.V_9^2}{10^4}=0.432,$ в) $\frac{10.C_4^3.V_9^1}{10^4}=0.036,$

г) $\frac{C_4^2.C_{10}^2}{10^4}=0.027$ д) $\frac{2.(1^2+2^2+...+9^2)+10^2}{10^4}=0.067,$ е) $\frac{V_{10}^1}{10^4}=0.001;$

3.45. а) $\frac{C_{2N}^N.C_{2N}^N}{C_{4N}^{2N}}$ б) $\frac{C_{4N-4}^{2N-4}}{C_{4N}^{2N}}$ в) $\frac{C_4^2.C_{4N-4}^{2N-2}}{C_{4N}^{2N}}$

3.46. 0,01 (изходите са 100, а единственият благоприятен е да завършва на 11)

3.47. $P=\sum_{i=0}^{5}\frac{4^{10-2*i}*10!*(10-i)!}{i!*(10-i)!*i!*(10-2*i)!*6^{10}}=\frac{3308407}{15116544}=$

$=0.218\ 860\ 011\ 918\ 068\ 045\ 18;$

3.48. $P=\frac{P_{10}^{2,2,2,2,2}.P_5}{P_{15}^{3,3,3,3,3}}=\frac{81}{1001}=0.080\ 919\ 080\ 919\ 080\ 919\ 081;$

3.49. $P=\frac{3!}{6^3}=\frac{1}{36};$

3.50. $P_{бяла}=\frac{10}{23},\ P_{зелена}=\frac{7}{23},\ P_{червена}=\frac{6}{23};$

3.51. $P_{2 бели} = \dfrac{C_8^2}{C_{12}^2} = \dfrac{14}{33} = 0.424\,242\,42, P_{с\ различен\ цвят} = \dfrac{C_8^1 C_4^1}{C_{12}^2} = \dfrac{16}{33} = 0.484\,848;$

3.52. P(A)= $P(A) = \dfrac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \dfrac{33}{95} = 0.347\ 368\ 421\ 052\ 631\ 578\ 95,$

$$P(B) = \frac{C_8^2}{C_{20}^2} = \frac{14}{95} = 0.147\ 368\ 421\ 052\ 631\ 578\ 95,$$

$$P(C) = \frac{C_{12}^1 . C_8^1}{C_{20}^2} = \frac{48}{95} = 0.505\ 263\ 157\ 894\ 736\ 842\ 11;$$

3.53. $P(A) = \dfrac{C_M^2}{C_{M+N}^2}, P(B) = \dfrac{C_N^2}{C_{M+N}^2},\ P(C) = \dfrac{C_M^1 . C_N^1}{C_{M+N}^2};$

3.54. P=$\dfrac{C_{2M}^M . C_{2N}^N}{C_{2M+2N}^{M+N}}$

3.56. а) 6.5.4.3. = 360; б) (5.4.3)/360 = 1/6; в) (4.3)/360 = 1/30; г) 1; д) (5.4.3.2)/360 = 1/3; е) 4(5.4.3)/360 = 2/3

3.57. а)8568; б) (7.6.5.4.3)/5!/ 8568 = 1/408; в) 5(13.12.11.10)/4!/ 8568 = 3575/8568; г) 6.7. (5.4.3)/3!/ 8568 = 5/102; д) Допълнението на {поне един} е {нито един}, т. е. всички са от 3-ти или 4-ти с P=(13.12.11.10.9)/5!/ 8568 = 1287/8568=143/952 P(поне един) = 1 – 287/8568 = 7281/8568=809/952

3.59. а) 4*3/(8*7) = 3/14; б) 10 + 6, 10 + 7, 10 + 8, 10 + 9, 9 + 8, 9 + 7 6/(8*7) = 3/28; в) 0; г) {8,3 + 6, 5 + 10}, 3/56; д) P{Поне едно} = 1 – P{нито едно} = 1 – (4*3)/56 = 1 – 3/14 = 11/14; е) P(A) = 0, P(B) = 1/56, P(AB) = 0,P(A) P(B) = P(AB) => двете събития са независими;

3.60. а) ¼; б) 15/36 = 5/12; в) 15/36 = 5/12; г) 1/6; д) Допълнението на {поне един}= {нито един}, т.е. всички са нечетни с P=3.3/36=1/4, P(поне едно четно)=1 – ¼ = 3/4; е) P(A) = 1/6, P(B) = 3/36 = 1/12, (A|B) = P(AB)/P(B) = (1/36)/(1/12) = 1/3. Зависими са.

4. *Геометрична вероятност*

4.1. $\dfrac{7}{16};$

4.2. $\dfrac{1}{4};$

4.3. $(1 - 3.s)^2;$

4.4. $P=(1 - n.s)^{n-1}$

4.5. Не е уточнено как е прекарана хордата. Ето три възможни начина с три различни отговора:а) Върху окръжността случайно се избират 2 точки, които са краищата на хордата, тогава P=⅓; б) В равнината се прекарват успоредни прави на разстояние 2 между съседните. Избира се случайна точка от равнината и се прекарва окръжност с център избраната точка. Хордата е сечение между тази окръжност и най-близката права, тогава P=½; в) В единичния кръг се избира по случаен начин точка, която е център на хордата, тогава P=¼. Трите различни отговора следват от трите различни случайни начина на прекарване на хордата.

4.6. $\frac{5}{6}$;

4.7. $s = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}.d$;

4.8. $\frac{2}{9}\ln(2) + \frac{1}{12} = 0.237\ 366\ 040\ 124\ 432\ 290\ 98$

4.9. $\frac{2}{\pi}.\arccos\frac{r}{R}$;

4.10. $\frac{2.s}{\pi.a}$;

4.11. 0.5;

4.12. При $m \le k^2$ $P = 1 - \frac{\sqrt{m}}{3.k}$, при $m \le k^2$ $P = 0.5 + \frac{k^2}{6.m}$;

4.13. $\frac{(a-r).(b-r)}{a.b}$;

4.14. $\left(1 - \frac{r.\sqrt{3}}{a}\right)^2$;

4.15. 0.5;

4.16. 0.75;

4.17. 0.25;

4.18. $\left(1 - \frac{2.s}{\pi.a}\right).\left(1 - \frac{2.s}{\pi.b}\right)$;

4.19. $P = \left(1 - \frac{a^3}{R^3}\right)^N$, $e^{-V.s}$ където $V = 4\pi a^3/3$;

4.20. $P(A) = \frac{2}{\pi} = 0.636\ 619\ 772\ 367\ 581\ 343\ 08$,

$$P(B) = \frac{5!.2.\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}\right)^4}{\pi} = 0.005\ 203\ 152\ 732\ 029\ 701\ 801\ 9;$$

4.21. $P(A) = 0.25$, $P(B) = 0.5 - \frac{1}{2.\sqrt{2}} = 0.146\ 446\ 609\ 406\ 726\ 27$,

$$P(C) = 0.125 - \frac{1}{8.\sqrt{2}} = 0.036\ 611\ 652\ 351\ 681\ 57;$$

5. *Условна вероятност. Формула за умножение на вероятности. Независимост на случайни събития*

5.10. а) $P=\frac{1}{2}$, б) $P=\frac{2}{3}$;

5.17. $\frac{1}{12}$;

5.18. $\frac{15}{27}=\frac{5}{9}$;

5.19. $0.7*0.7*0.8*0.8*0.8=0.25088$;

5.20. 0.75;

5.21. $\frac{1}{6}*\frac{2}{5}*\frac{1}{4}*\frac{1}{3}*\frac{1}{2}=\frac{1}{360}$;

5.22. $\frac{2}{3}$

5.23. $\frac{1}{2}*\frac{3}{4}*\frac{5}{6}*...*\frac{99}{100}=\frac{12611418068195524166851562157}{158456325028528675187087900672}=$
$=0.079\ 589\ 237\ 387\ 178\ 761\ 498$

5.24. $\frac{1}{N}*\frac{1}{N-1}*\frac{1}{N-2}*....*\frac{1}{N-K+1}=\frac{(N-K)!}{N!}$,

5.25. $\frac{M*N}{C_{M+N}^2}*\frac{(M-1)*(N-1)}{C_{M+N-2}^2}*\frac{(M-2)*(N-2)}{C_{M+N-4}^2}*....*$
$\frac{(M-N+1)*(N-N+1)}{C_{M-N+2}^2}=\frac{2^N*M!*N!}{(M+N)!}$

5.26. а) $1-\frac{9}{10}*\frac{8}{9}*\frac{7}{8}=0.3$, б) $1-\frac{4}{5}*\frac{3}{2}*\frac{2}{3}=0.6$;

5.27. $1-(1-p)^4=0.5,\ p=0.159104...$; **5.28.** $1-\prod_{k=1}^{n}\left(1-p_k\right)$

5.29. $(1-p)^k.p$;

5.30. $1-(1-0.3)*(1-0.2*0.15)=0.321$;

5.31. Трябва $\left(\frac{364}{365}\right)^N<0.5.$ $\left(\frac{364}{365}\right)^{252}=0.500\ 895\ 161\ 474\ 306\ 496\ 52$,
$\left(\frac{364}{365}\right)^{253}=0.499\ 522\ 845\ 963\ 417\ 985\ 57$ следователно търсеният брой е 253.

5.32. Трябва $\left(\frac{5}{6}\right)^N<1-p$, където p = 0.5, 0.8, 0.9 в съответните случаи.

Получаваме съответно а) 4 ≤ N, б) 9 ≤ N, в) 13 ≤ N;

5.33. Трябва $\left(\frac{35}{36}\right)^N < 0.5$ $\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.50859612386909674042,$

$\left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0.49446845376162183096,$ следователно заровете трябва да се хвърлят поне 25 пъти.

5.34. P(A) = P(B) = P(C) = 0.5, P(AB) = P(AC) = P(BC) = P(ABC) = 0.25, следователно събитията са независими по двойки, но не са независими в съвкупност (виж и задачата на Бернщайн)

5.35. И в двата случая събитията са независими: за 32 карти имаме P(A) = $\frac{1}{4}$, P(B) = $\frac{1}{8}$, P(AB) = $\frac{1}{32}$ = P(A).P(B). Аналогично за 52 карти имаме P(A) = $\frac{1}{4}$, P(B) = $\frac{1}{13}$, P(AB) = $\frac{1}{52}$ = P(A).P(B);

5.36. Решение: След като са извадени kкартончета, възможните изходи от тях са $P_k = k!$. Благоприятните са $P_{k-1} = (k - 1)!$, тъй като най-голямото число трябва да бъде последно. Интересното в задачата е, че отговорът не зависи от N;

5.37. P(A) = P(B) = 0.5, P(C) = 0.25, P(AB) = $\frac{3}{8}$, P(AC) = P(BC) = $\frac{1}{8}$, следователно A и C са независими, B и C са независими, но A и B не са независими;

5.38. P(A) = $\frac{21}{620}$, P(B) = $\frac{7}{155}$, P(C) = $\frac{7}{31}$;

5.42. а) 7.7=49, б) (3.3)/49 = 9/49, в) 3/7, г) Допълнението на {поне един} е {нито един}, т.е. всички не са ментови с P = 4.4/49 = 16/49, P(поне един) = 1 – 16/49 = 33/49, д) 7.6 = 42, е) (3.2)/42 = 1/7, ж) 3/6 = 1/2, з) Допълнението на {поне един} е{нито един}, т.е. всички не са ментови с P = 4.3/42 = 2/7, P{поне един} = 1–2/7 = 5/7;

5.43. а) 15/60 = 1/4, б) P(Ми2) = P(M ако 2) P(2) = (5/15)(15/60) = 1/12, в) 30/60 = 1/2, г) 5/30 = 1/6, д) P(A) = 1/2 P(A ако B) = 10/25 = 2/3 зависими са, е) (30.29)(60.59) = 29/118, ж) (30)/59, з) Допълнението на {поне един} е {нито един}, т.е. всички са момчета с P = (30(29)/(60)(59) = 29/118, P(поне един) = 1 – 29/118 = 89/118;

6. ***Формула за пълната вероятност. Формула на Бейс***

6.1. $\frac{a}{a+b}.\frac{c+1}{c+d+1}+\frac{b}{a+b}.\frac{c}{c+d+1};$

6.2. $P_{една\ бяла} = \sum_{i=0}^{3} \frac{C_a^i.C_b^{3-i}}{C_{a+b}^3} * \frac{C_{c+i}^1.C_{d+3-i}^2}{C_{c+d+3}^3},\ P_{две\ бели} = \sum_{i=0}^{3} \frac{C_a^i.C_b^{3-i}}{C_{a+b}^3} * \frac{C_{c+i}^2.C_{d+3-i}^1}{C_{c+d+3}^3};$

6.7. $\frac{5}{24}*\frac{10}{24}+\frac{11}{24}*\frac{8}{24}+\frac{8}{24}*\frac{6}{24}=\frac{31}{96}=0.322\ 916\ 666\ 7$;

6.8. а) $p+(1-p).p=p.(2-p)$, *б)* $p+(1-p).p+(1-p)^2.p=p.(3-p+p^2)$

6.9. $\frac{m}{m+n}$. Решение: Дефинираме H_{i1} = {*от i-тата урна се вади бяла топка*}, H_{i2} = {*от i-тата урна се вади черна топка*}. Тогава $P(H_{11})$ = $\frac{m}{m+n}$, $P(H_{12})$ = $\frac{n}{m+n}$. По формулата за пълната вероятност пресмятаме $P(H_{21})$ = $\frac{m}{m+n}*\frac{m+1}{m+n+1}+\frac{n}{m+n}*\frac{m}{m+n+1}=\frac{m}{m+n}$, $P(H_{22})$ = $\frac{m}{m+n}*\frac{n}{m+n}+\frac{n}{m+n}*\frac{n+1}{m+n+1}=\frac{n}{m+n}$, откъдето индуктивно се пресмята, че $P(H_{i1})$ = $\frac{m}{m+n}$, $P(H_{i2})$ = $\frac{n}{m+n}$ **6.10.** $P_N=1-\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}$. При големи стойности на Nтази вероятност клони към $1\text{-}e^{-1}$ = 0.63212055882855767840. Ето първите няколко стойности:

$P_2=0.5,\ P_3=\frac{2}{3}=0.666\ 666\ 666\ 666\ 667,\ P_4=\frac{5}{8}=0.625,$

$P_5=\frac{19}{30}=0.633\ 333\ 333,\ P_5=\frac{19}{30}=P_6=\frac{91}{144}=0.631\ 944\ 444\ 4,$

$P_7=\frac{177}{280}=0.632\ 142\ 857\ 142\ 857\ 142\ 86,$

$P_8=\frac{3641}{5760}=0.632\ 118\ 055\ 555\ 555\ 555\ 56.$

Вижда се че много бързо вероятността клони към граничната си стойност.

6.11. $1-C_n^1.\frac{(n-1)^k}{n^k}+C_n^2.\frac{(n-2)^k}{n^k}-C_n^3.\frac{(n-3)^k}{n^k}+...+(-1)^{n-1}.C_n^{n-1}.\frac{(n-(n-1))^k}{n^k}$,

Упътване: Нека A_j = {*в j-тия вагон не се качва нито един пътник*}. Тогава $P(A_j)$ = $\frac{(n-1)^k}{n^k}$, $P(A_j.A_m)$ = $\frac{(n-2)^k}{n^k}$, $P(A_j.A_m.A_r)$ = $\frac{(n-3)^k}{n^k}$, …$P(A_1.A_2.\ldots.A_n)=0$;

6.12. Упътване: Нека A = {*Aказва истината*}, D = {*Dказва истината*}. Търси се P(A|D). Но P(D) = $\frac{41}{3^4}$, P(D|A) = $\frac{13}{3^3}$, P(A.D) = $\frac{13}{3^4}$, и от дефиницията получаваме P(A|D) = $\frac{13}{41}$;

6.13. $\dfrac{1^n+2^n+3^n+...+N^n}{N^n.(N+1)}$;

6.14. $\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}+\dfrac{1}{n_3}\right)$;

6.15. $\dfrac{3}{28}$;

6.16. $\dfrac{N^n}{1^n+2^n+3^n+...+N^n}$;

6.17. Решение: Първо се доказва че с вероятност 1 играта свършва след краен брой ходове, тогава P(A) + P(B) = 1, B(B) = 0.5*P(A), следователно P(A) = $\frac{2}{3}$; P(B) = $\frac{1}{3}$;

6.18. $p_1 = \frac{4}{7}, p_2 = \frac{2}{7}, p_3 = \frac{1}{7}$, Упътване: аналогично на предишната задача получаваме $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_2 = 0.5*p_1$, $p_3 = 0.25*p_1$ и след това решаваме системата;

6.19. И в двата случая $P=\dfrac{n}{n+m}$;

6.20. Решение: H_i = {*в урната е имало I бели топки*}, i = 1, 2, 3,…, n + 1, от условието $P(H_i)=\dfrac{1}{n+1}, P(A|H_i)=\dfrac{i}{n+1}$, тогава от формулата за пълна вероятност $P(A)=\dfrac{n+2}{2n+2}$. Пояснение на парадокса. Нека n = 2.k. Тогава P(A) = (k + 1)/(2k + 1). Но ако една урна съдържа 2к + 1 топки, то вероятността да извадим бяла топка от нея е (к + 1)/(2k + 1) само когато точно k + 1 от топките са бели. Следователно, преди да пуснем бялата топка в урната, там е имало точно к бели топки, а това противоречи на условието, че всички възможни предположения за броя на белите топки в урната са равновероятни. За по-голяма яснота може да се разгледа частният случай n = 2. Грешката в горните разсъждения се състои в това, че условието „урната има състав, който ние не знаем и който е един от изброените равновероятни“ предполага разглеждането на събитие, свързано с някакъв опит със случайни изходи. Такъв опит би могъл да бъде например следният: Дадени са n + 1 еднакви урни с по n + 1 топки, броят на белите топки във всяка урна е различен и е някое от числата 1, 2,..., n + 1. Избираме по случаен начин една от урните. Тогава съставът на тази урна може да бъде с еднаква вероятност всеки от възможните. Случайният избор на топка от случайно избраната урна е опит, при който с еднаква вероятност можем да попаднем на всяка от топките, намиращи се в някоя от урните, а не само на топките, намиращи се в една фиксирана урна. Затова вероятността (k + 1)/(2k + 1) означава, че от всичките $(2k + I)^2$ топки белите са (2k + 1).(k + 1), а не че,в урната, която сме избрали, има k + 1 бели топки;

6.22. Дефинираме събитията A_1 = {от първата кутия изтегляме две бели топки}, A_2 = {от първата кутия изтегляме бяла и черна топки}, A_3={от първата кутия изтегляме две черни топки}, B = {от втората кутия изтегляме бяла топка}; Събитията A_1, A_2, A_3 образуват пълна група от събития, като

$$P(A_1)=\frac{\frac{3.2}{2!}}{\frac{9.8}{2!}}=\frac{1}{12},\quad P(A_2)=\frac{3.6}{\frac{9.8}{2!}}=\frac{1}{2},\quad P(A_3)=\frac{\frac{6.5}{2!}}{\frac{9.8}{2!}}=\frac{5}{12},\quad P(B\,|\,A_1)=\frac{4}{7},$$

$$P(B\,|\,A_2)=\frac{3}{7},\ P(B\,|\,A_3)=\frac{2}{7}.$$

а) Използваме формулата за пълната вероятност:

$$P(B)=P(B\,|\,A_1)P(A_1)+P(B\,|\,A_2)P(A_2)+P(B\,|\,A_3)P(A_3)=\frac{8}{21},$$

б) Използваме формулата на Бейс

$$\mathrm{P(A_1|B)}=\frac{P(B\,|\,A_1).P(A_1)}{P(B|A_1).P(A_1)+P(B|A_2).P(A_2)+P(B\,|\,A_3).P(A_3)}=\frac{\frac{1}{21}}{\frac{8}{21}}=\frac{1}{8}$$

в) От формулата на Бейс

$$P(A3\,|\,\bar{B})=\frac{\mathrm{P(\bar{B}|A3)P(A3)}}{\mathrm{P(\bar{B}|A1)P(A1)+\ P(\bar{B}|A2)P(A2)+\ P(\bar{B}|A3)P(A3)}}=$$

$$=\frac{\frac{5}{7}.\frac{5}{12}}{\frac{3}{7}.\frac{1}{12}+\frac{4}{7}.\frac{1}{2}+\frac{5}{7}.\frac{5}{12}}=\frac{25}{52}$$

г) Използваме биномна вероятност, като в случая събитието B наричаме „успех“ и p = 8/21, n = 3, $k \geq 1$. Тогава

$$P(\textit{брой}-\textit{успехи}\geq 1)=1-P(\textit{брой}-\textit{успехи}<1)=$$

$$=1-P(\textit{брой}-\textit{успехи}=0)=1-C_3^{\,0}p^0(1-p)^3=1-\left(\frac{13}{21}\right)^3=$$

$$=1-0,2372314005=0,7627685995.$$

6.24. P(A) = 0.25, P(B) = 0.375, P(C) = 0.2;

6.25. $P(A)=\frac{1}{330}$, $P(B)=\frac{9}{22}$, $P(C)=\frac{8}{11}$, P(D)=0, в) $P=\frac{2}{15}$;

6.26. $P(A)=\frac{1311}{2200}$, P(B)= $\frac{889}{2200}$, $P(C)=\frac{204}{385}$, $P(D)=\frac{4}{55}$;

6.27. $P(A)=\frac{11}{4000}$, $P(B)=\frac{2}{11}$.

7. *Биномна вероятност. Схема на Бернули. Приближение на Поасон. Локална и интегрална гранична теорема*

7.1. $\mathrm{P}_{3\text{ езит а}}=\frac{10}{32}$, $\mathrm{P}_{4\text{ езита}}=\frac{5}{32}$,

7.2. $P(A)=P(B)=P(C)=P(D)=1-P\left(D^c\right)=$

$=1-, P(E)=1-\ P\left(D^c\right)-P(B)=\ 1--, P(F)=$

$=P\left(D^c\right)+P(B)+P(C),\ P(G)=P(C\,|\,D)=$

$=P(C.D)\,/\,P(D)=P(C)\,/\,P(D)$

7.4. $P_{2\,шестици}=\frac{C_{12}^{2}.5^{10}}{6^{12}}=\frac{107421875}{362797056}=0.296\ 093\ 568\ 631\ 383\ 822\ 48,$

$P_{1\,шестици}=\frac{C_{12}^{1}.5^{11}}{6^{12}}=\frac{48828125}{181398528}=0.269\ 175\ 971\ 483\ 076\ 202\ 25,$

$P_{12\,шестици}=\frac{1}{6^{12}}=\frac{1}{2176782336}=4.5939365799778338517.10^{-10},$

7.5. C_5^4 *0.8^4*0.2 = 0.4096;

7.6. Решение: вероятността играчът да не получи асо в отделна игра е $p=\frac{C_{48}^{13}}{C_{52}^{13}}=\frac{6327}{20825}=0.30381752701080432173,$ вероятността в схема на Бернули това да се случи 5 пъти поред е

$P_5(0)\ =p^5.(1-p)^0=\frac{1013886107506744040 7}{39167427697206347656 25}=$

$=0.002\ 588\ 595\ 082\ 998\ 162\ 751\ 2,$

и тъй като това събитие е малко вероятно (средно веднъж на около 386 такива опита с по 5 раздавания), играчът има основание да се оплаква.

7.7. а) $P_4(3)=\frac{1}{4}>P_8(5)=\frac{7}{32}$, следователно по-вероятно е да се спечелят 3 от 4 партии

б) $P_4(3)+\ P_4(4)=\frac{5}{16}=\frac{80}{256}<P_8(5)+\ P_8(6)+\ P_8(7)+\ P_8(8)=\frac{93}{256}$,

следователно по-вероятно е да се спечелят поне 5 от 8 партии.

7.8. Решение: Трябва $S_n = P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) \leq 0.1$, следователно трябва да е изпълнено неравенството $S_n = 0.8^n * \left(1 + \frac{n(n-1)}{32}\right) \leq 0.1$. След пресмятане получаваме

$$S_{24} = \frac{6825768185233408}{59604644775390625} = 0.114\ 517\ 387\ 209\ 588\ 896\ 43,$$

$$S_{25} = \frac{29273397577908224}{298023223876953125} = 0.098\ 225\ 222\ 843\ 688\ 620\ 445.$$

Следователно трябва $n \geq 25$;

7.9. Решение: Вероятността даден абонат да заеме линия в произволен момент е $p = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$. Нека броят на линиите е n. Тогава за да бъдат обслужени всички заявки в произволен момент, трябва броят на успехите в схема на Бернули с дължина 10 и $p = \frac{1}{5}$ да не надхвърля n. Вероятността за това трябва да е поне 0.99, следователно получаваме, че трябва $S_n = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + \ldots + P_{10}(n) \geq 0.99$ или $S_n \geq 0.999$ съответно. Пресмятаме $S_4 = \frac{9445376}{9765625} = 0.967\ 206\ 502\ 400,$

$$S_5 = \frac{9703424}{9765625} = 0.993\ 630\ 617\ 600,\ S_6 = \frac{9757184}{9765625} = 0.999\ 135\ 641\ 600,$$

$$S_9 = \frac{9755624}{9765625} = 0.999\ 999\ 897\ 600,$$

$$1 - S_9 = \frac{1}{9765625} = 1.02400000000000000000.10^{-7}.$$

Следователно за ниво на надеждност 0,99 са достатъчни 5 линии, а за ниво на надеждност 0.999 са достатъчни 6 линии. За пълна надеждност са необходими 10 линии.

7.11. $n = \frac{73}{0.82} = 89.0244$, следователно са необходими 89 опита;

7.12. $\frac{K}{N+1} \leq p \leq \frac{K+1}{N+1}$;

7.13. $P(A) = P_{Иван,3}(0).P_{Петър,3}(0) + P_{Иван,3}(1).P_{Петър,3}(1) + P_{Иван,3}(2).P_{Петър,3}(2) + P_{Иван,3}(3).P_{Петър,3}(3) = 0.32076$ привероятности 0.6 и 0.7 и = 0.245 привероятности 0.5 и 0.8, $P(B) = P_{Иван,3}(1).P_{Петър,3}(0) + P_{Иван,3}(2).[P_{Петър,3}(1) + P_{Петър,3}(0)] + P_{Иван,3}(3).[P_{Петър,3}(2) + P_{Петър,3}(1) + P_{Петър,3}(0)] = 0.243$ привероятности 0.6 и 0.7 и = 0. 0.103 при вероятности 0.5 и 0.8;

7.14. $P = P_{K+M-1}(N-1).p = C_{K+N-1}^{N-1}.p^N.(1-p)^K$;

7.15. $\frac{C_{2N-K}^{N}}{2^{2N-K}}$;

7.16. $P=\sum\limits_{\kappa=M}^{M+N-1} C_{M+N-1}^{k}.p^{k}.(1-p)^{M+N-k-1}$, Упътване: Задачата е еквивалентна на твърдението, че в схема на Бернули с дължина M + N – 1 с вероятност за успех във всеки опит, равна на p, броят на успехите е поне M, а на неуспехите е най-много N – 1;

7.17. Решение: Нека $H_1 = \{p = 1/2\}$, $H_2 = \{p = 1/3\}$, A = {116 успеха при 200 опита}. Тогава $P(H_1) = P(H_2) = 0.5$, $P(A\,|\,H_1)=\frac{C_{200}^{116}}{2^{200}}$,

$P(A\,|\,H_1)=\frac{C_{200}^{116}.2^{116}}{3^{200}}$,

$\frac{\mathrm{P(H_1|A)}}{\mathrm{P(H_2}\,|\,A)}=\frac{\mathrm{P(H_1).P(A|H_1)}}{\mathrm{P(H_2)}.P(A|\mathrm{H_2})}=\frac{3^{200}}{2^{316}}=1.989\ 629\ 969\ 913\ 055\ 211\ 9$ следователно е приблизително 2 пъти по-вероятно p да е равно на ½, отколкото p да е равно на 1/3;

7.18. Решение: За четен брой успехи имаме: $p_0=1,\ p_1=1-p,$ индуктивно намираме $p_k=p_{k-1}.(1-p)+(1-p_{k-1}).p,$ откъдето $p_k-1/2=(1-2.p).(p_{k-1}-1/2),$ след почленно умножаване и съкращаване получаваме $p_N-1/2=(1-2p)^N.(P_0-1/2),$ следователно $p_N=\left(1+(1-2p)^N\right).$ За нечетен брой вероятността е $1-p_N=.\left(1-(1-2p)^N\right)$;

7.19. Приближената стойност е $\lambda=0.001*5000=5,\ P\approx 1-P_0-P_1=$ $=1-.e^{-5}-.e^{-5}=1-6.e^{-5}=0.959\ 572\ 318\ 005\ 487\ 197\ 42.$ Точната стойност е $1-0.999^{5000}-5000*0.01*0.999^{4999}=0.959\ 639\ 689\ 041\ 808\ 2$

8. *Случайни величини. Функция на разпределение. Основни свойства на функцията на разпределение*

8.6. Решение: Построяваме множествата от всички 36 елементарни събития $\Omega = \{(i,j): I = 1, \ldots, 6; j = 1, \ldots, 6\}$ и забелязваме, че $X = 0$ за 6 елементарни събития, $X = 1$ за 10 елементарни събития, $X = 2$ за 8 елементарни събития, $X = 3$ за 6 елементарни събития, $\boldsymbol{X} = 4$ за 4 елементарни събития и $X = 5$ за 2 елементарни събития. Тогава законът за разпределение на случайната величина X има вида:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	3/18	5/18	4/18	3/18	2/18	1/18

8.7. $P(x) = \frac{C_7^x C_3^{5-x}}{C_{10}^5}$, $x = 2,3,4,5$;

8.8. Не, защото $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x} = \infty$;

8.9. $E\xi = \frac{63}{5}$.

9. ***Дискретни случайни величини. Ред на разпределение. Числови характеристики. Основни видове дискретни разпределения***

9.11. $\mu = EX = 1.2$. Дефинираме случайната величина $Y = (X - \mu)^2$. Нейният закон за разпределение е

y_i	10.24	1.44	0.04	3.24	7.84
p_i	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Тогава DX = EY = 4.56. Стандартното отклонение на X е $\sqrt{DX} = 2.135$.

9.14. n = 100, p = 0.1, X = 0, 1, 2, 3,…, 100;

9.19. а) Нека **X** е броят на дефектните изделия в една кутия. Тогава **X**∈Bi (10, 0.03), P{**X** > 1} = 1 – P{**X** ≤ 1} = 1 – P (0) – P(1), P (0) = C^0_{10} $(0.03)^0(0.97)^{10}$; P(1) = C^1_{10} $(0.03)^1$ $(0.97)^9$;

9.20. а) **X**∈Bi (6, 0.05), б) E**X** = 6. 0,05 = 0,3; D**X** = 6. 0,05. 0,95 = 0,285;

9.21. Упътване: Нека **X** е броят на лекарите, открили болестта. Тогава **X**∈Bi (4, 0.8). P{**X** ≥1} = 1 – P{**X** = 0};

9.22. Упътване: С**X** означаваме броя на познатите отговори. **X**∈Bi (10, 0.2); P{**X**≤7} = P{**X** = 7} + P{**X** = 8} + P{**X** = 9}+ P{**X** = 10}

9.24. ξ~Bi(8,0.7), Eξ = 5.6, Dξ = 1.68, m = 6, P{2 ≤ ξ ≤ 4} = 0.19281402;

9.25. а) ξ~Bi(8,0.7), б) P = 0.50147, в) Eξ = 2/3, $D\xi = \frac{11}{18} \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{22}}{6}$

9.26. ξ~Bi(18,0.1), $E\xi = \frac{9}{5}$, $D\xi = \frac{81}{50}$, $P\{\xi \geq 1\} = 1 - 0.9^{18}$;

9.28. ξ~Ge(0.1), Eξ = 9, Dξ = 90, $F_\xi(2) = 0.19$

9.29. ξ~HG(2000,20), б) $P = 1 - \frac{C_{1980}^6 + 20.C_{1980}^5}{C_{2000}^6}$, в) Eξ = 0.06, $D\xi = \frac{296109}{4997500}$;

9.30. AI. Биномно, параметри 4 и 1/2

X	0	1	2	3	4
P	0,0625	0,25	0,375	0,25	0,0625

АII. ср.ст. = 4(0,5) =2, дисп. = 4(0,5)(0,5) = 1, ст. откл. = 1,

АIII. Функцията е стъпаловидна: $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0{,}0625 & 0\le x<1 \\ 0{,}3125 & 1\le x<2 \\ 0{,}6875 & 2\le x<3 \\ 0{,}9375 & 3\le x<4 \\ 1 & 4\le x \end{cases}$

АIV. $P(\textit{поне } 2)=P(2)+P(3)+P(4)=1-P(0)-P(1)=0{,}6875$, В I. Само една стойност 1 с вер. 1, В II. ср. ст. = 1, дисп. = 0, ст. откл.= 0, В III. $F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & 1\le x \end{cases}$, В IV. 0, Г I.

X	0	1
P	$(0,5)^3$=0,125	0,5+$0,5^2$+$0,5^3$=7/8=0,875

Г II. ср.ст. = 0,875, дисп. = $(1 - 0,875)^2(0,875)$ = 1/64, ст.откл. = 1/8 = 0,125,

Г III. $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 0{,}125 & 0\le x<1 \\ 1 & 1\le x \end{cases}$, Г IV.0;

9.31. а) Дава 1000 лв., купува 500 кг и продава или за 500 лв. или за 1500 лв.

x	–500	500
p	0,5	0,5

б) $F(x)=\begin{cases} 0 & x<-500 \\ 0{,}5 & -500\le x<500 \\ 1 & x\ge 500 \end{cases}$, в) P=P(500)=0,5, г) 0, д) 0

е) E= –100 лв.; губи 100 лв.

x	–500	350
p	0,5	0,5

10. *Непрекъснати случайни величини. Плътност. Функция на разпределение. Числови характеристики. Основни видове непрекъснати разпределения*

10.8. а) Fξ(x)={0 прих<0, x.(2-x) при 0≤x≤1 и 1 при x>1}, б) 1, в) Eξ=1/3

10.18. Нека с **X** означим времето на безотказна работа. Тогава Е**X** = 3 и **X**~Exp(1/3). Нека с **Y** означим печалбата.
Е**Y** = 1000.P{***X*** > 1} + 750.P{***X*** ≤ 1} =…= $250e^{-1/3}$ + 750;

10.19. Упътване: X~Exp(1/3), P{X < 1} = 1 – $e^{-1/3}$ = 0,2811;

10.22. Упътване: Нека X е времето между два курса на ферибота, а Yt – броя коли за време t. Тогава X = min{t, Yt = 10}, Yt~Po(7.t), P{X < 1} = 1 – P{X ≥ 1};

10.26. P{ξ > 400} = 0.057053437;

10.27. 160,4 сантиметра;

10.28. а) С=3, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{\infty}\frac{C}{x^4}dx = 1$ *или* $\frac{C}{-3x^3}\Big|_1^{\infty} = \frac{C}{3} = 1$; б) Непрекъсната случайна величина. $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ 1-\frac{1}{x^3} & x > 1 \end{cases}$; в) Средната продължителност на безотказна работа е 3/2 или 1500 часа, $EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{1}^{\infty} x\frac{3}{x^4}dx = \int\limits_{1}^{\infty}\frac{3}{x^3}dx = \frac{3}{-2x^2}\Big|_1^{\infty} = \frac{3}{2}$; г) стандартното отклонение на продължителността на безотказна работа е 0,866, $\sigma^2 = \int\limits_{1}^{\infty}(x-\frac{3}{2})^2\frac{3}{x^4}dx = \frac{3}{4}, \sigma = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866$, д) Медианата=1,26 и модата=1, Решение: $\int\limits_{1}^{M}\frac{3}{x^4}dx = 0,5 \qquad \frac{1}{M^3} = 1/2 \quad M^3 = 2 \text{ или } M \approx 1,26$; е) Р(да работи безотказно през първите 500 часа) = P(X < 5) = F(5) = $1-\frac{1}{5^3}$ = 0,992 Р е много близко до 1, т.е. има шанс почти 99,2% да работи безотказно в първите 500 часа, съвет-гаранция от 500 часае добра; ж) Р(да работи безотказно през първите 150 часа) = P(X < 1,5) = F(1,5) = 1 – 1/$(1,5)^3$ = 0,70370; з) Биномна вероятност, Успех = {да се смени в първите 150 часа} = {да неработи безотказно през първите 150 часа}, Р(успех) = 1 – Р{да работи безотказно през първите 150 часа} = 1 – P(X < 1,5) = 1 – 0,7037 = 0,2963 ≈ 0,3; 2 успеха при 5 опита с Р(успех) = 0,3; $P = C_5^{\,2}(0,3)^2(0,7)^3$ = 0,3087;

10.29. AI. равномерно в (0,500),
AII. ЕХ = 250, Дисп. = 250 000/12 ст. откл. = 144,34, AIII. $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{500} & 0 \le x < 500 \\ 1 & x \ge 500 \end{cases}$, AIV. Упътване. Нека сградата се намира на разстояние С км от началото на магистралата. Разпределението на У

зависи от С. У = |Х – С| равномерно в (С,500 – С), AV.ЕУ = |ЕХ – ЕС| = |250 – С|, AVI. мин ЕУ = ЕХ – ЕС = |250 – С| = 0 при С = 250, т.е. по средата на магистралата, БI. $f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 0{,}01e^{-0{,}01x} & при \quad x>0\end{cases}$, БII. ЕХ=100, дисп. =1/100, БIII. $F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0\\ 1-e^{-0{,}01x} & при \quad x>0\end{cases}$; БIV. <u>Упътване.</u> Нека сградата се намира на разстояние N км от началото на магистралата. Средната стойност на У зависи от N. У=|Х-N|

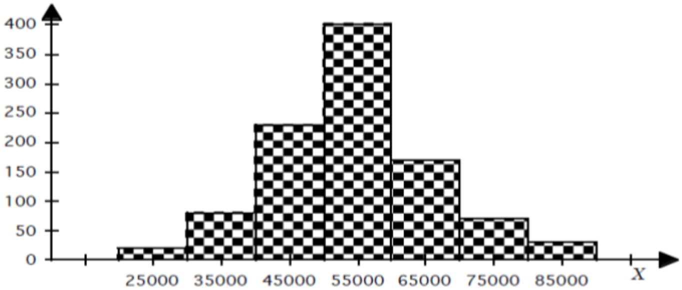
$$EY=\begin{cases}EX-N=100-N & N<100\\ N-EX=N-100 & N\ge 100\end{cases}, БV.EУ=|100-N|;$$

БV. ЕУ=|100-N| = 0 при N = 100 km.

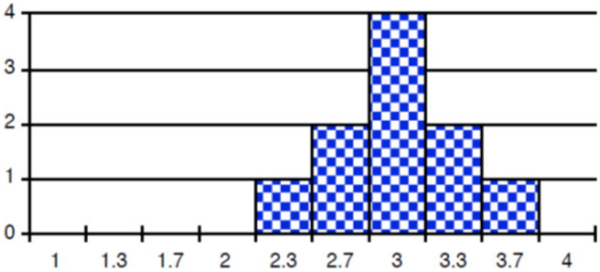
Част втора.СТАТИСТИКА

11. Основни понятия в статистиката. Описателна статистика

11.1. Решение: б)



11.2. Решение: а)



б) Изчисляваме извадковото средно $\bar{x}=3.0$ и попълваме таблицата

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
3.7	0.7	0.49
3.3	0.3	0.09
3.3	0.3	0.09
3.0	0	0
3.0	0	0
3.0	0	0
3.0	0	0
2.7	–0.3	0.09
2.7	–0.3	0.09
2.3	–0.7	0.49
30.0	0	1.34

Тогава $s^2 = \dfrac{1.34}{9} = 0.14888...$ и $s = \sqrt{1.4888...} \approx 0.38586.$

11.5. Решение на задача 11.5

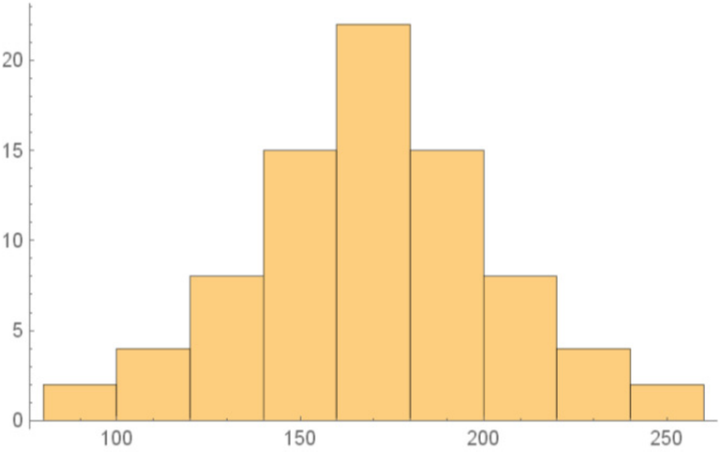
Въведете командите:

```
Clear[date1]
date1={111.,103.,251.,169.,213.,140.,224.,205.,166.,202.,227.,160.,234.,1
37.,186.,184.,163.,157.,181.,207.,189.,159.,180.,160.,196.,82.,107.,148.,15
5.,206.,192.,180.,205.,121.,199.,173.,177.,169.,93.,182.,127.,126.,187.,166
.,200.,190.,171.,151.,166.,156.,187.,174.,164.,214.,139.,141.,178.,177.,243
.,176.,186.,173.,182.,164.,162.,235.,164.,154.,156.,124.,149.,147.,116.,139
.,129.,152.,175.,164.,141.,155.};
Print["обем на извадката = ",Length[date1]]
Print["минимален елемент = ",Min[date1]]
Print["максимален елемент = ",Max[date1]]
Print["средно = ",Mean[date1]]
Print["медиана = ",Median[date1]]
Print["дисперсия = ",Variance[date1]]
Print["стандартно отклонение = ",StandardDeviation[date1]]
Print["асиметрия = ",Skewness[date1]]
Print["ексцес = ",Kurtosis[date1]]
Print["първи и трети квартил = ",Quantile[date1,{1/4,3/4}]]
Histogram[date1]
```

Получават се следните резултати:

```
обем на извадката = 80
минимален елемент = 82.
максимален елемент = 251.
средно = 168.663
медиана = 167.5
дисперсия = 1140.63
стандартно отклонение = 33.7732
```

асиметрия = –0.0245536
ексцес = 3.15144
първи и трети квартил = {149.,187.}



12. *Оценки на параметри на разпределението. Точкови оценки. Интервални оценки*

12.11. (4,73; 13,49)
12.12. (0,56; 1,36)
12.13. (83,4758; 112,5242)
12.14. (0,6093; 1,5760)
12.15. (0,0092; 0,0342)
12.16. (49,3846; 51,1154)
12.17. (7060.054; 7111.522)

12.21.а) $\overline{x} = 251$, б) s² = 846s = 29,0861, в) $251 \pm t_{0,025,\,8}\sqrt{\frac{846}{9}}$ => (228,6425; 273,3575), г) $251 \pm t_{0,05\,,8}\sqrt{\frac{846}{9}}$ = (232,967;269,033), д) интервалът в т. в) е по-широк, по-голямо ниво води до по-широк интервал, е) $\overline{x} = 251 \quad s^2 = 752 \qquad 251 \pm t_{0,025,\,8}\sqrt{\frac{752}{9}}$ = (229,9211; 272,0788), ж) интервалът в т. е) е по-широк, това обаче не води до извод в общия случай, понеже увеличаването на обема води до промяна и в дисперсията, която може да е по-голяма, но може и да е по-малка.

13. Проверка на хипотези за средна стойност на нормална популация

14. Точкова оценка, доверителен интервал и проверка на хипотези за алтернативни популации

14.2. C = {x: x = 2,3}

14.8. p-стойност = 0.07352926

95% доверителен интервал (0.4872668, 0.5870016)

б/95% доверителен интервал (0.4951306, 1.0000000)

p-стойност = 0.5375

Извод: Няма основание да се смята, че управляващите ще спечелят изборите.

15. Проверка на хипотези за две популации

15.14. Решение: средната стойност на дебелината на окото с глаукома е $\overline{x}=455,$ а на незасегнатото око е $\overline{y}=459.$ Средната стойност наразликата е $d=x-y=-4$, а извадковото средно е $sd=10.74.$ Тестваме хипотезата $H_0:\mu1=\mu2$ при алтернатива $H_1:\mu1\neq\mu2$ при n=8, използваме t-теста при α=0,1. Статистиката е $t=\frac{\overline{d}}{S_d}\sqrt{n}=\frac{-4}{10,74}\sqrt{8}=-1,053,$ докато $t_{7,\,0,05}=1,895.$ Доколкото $1.053<1.895$ нямаме основание да отхвърлим H_0, т.е. нямаме достатъчно основание да твърдим, че глаукомата влияе на дебелината на роговицата на окото.

Литература за допълнителна подготовка

[1]. Albert N. Shiryaev, Problems in Probability, Springer, 2012

[2]. J. Stoyanov, 1. Mirazchiiski, Z. Ignatov, and M. Tanushev, Exercise manual in probability theory, Kluwer Academic Publishers, 1989

[3]. Seymour Lipschutz, Marc Lipson, Probability (430 fully solved problems), Schaum's Outline Series, McGraw Hill, 2011

[4]. Jordan M. Stoyanov, Counterexamples in probability, Dover, 2013

[5]. Geoffrey Grimmett & Dominic Welsh, Probability. An Introduction, Oxford University Press, 2014

[6]. Robert V. Hogg, Elliot A. Tanis, Dale Zimmerman, Probability and Statistical Inference, Pearson, 2015

[7]. Michael Baron, Probability and Statistics for Computer Scientists, CRC Press, 2014

[8]. Robert V. Hogg, Joseph W. McKean, Allen T. Craig , Introduction to mathematical statistics, Seventh Edition, Pearson, 2013

[9]. Dennis D. Wackerly, William Mendenhall III , Richard L. Scheaffer , Mathematical Statistics with Applications, Seventh Edition, Brooks/Cole, 2008

[10]. Allan G. Bluman, Elementary Statistics. A Step by Step Approach, McGraw-Hill, 2012

[11]. Phillip I. Good, James W. Hardin, Common errors in statistics (and how to avoid them), John Wiley & Sons, 2012

[12]. William Navidi, Statistics for engineers and scientists, McGraw-Hill, 2008

[13]. Norean R. Sharpe, Richard D. De Veaux, Paul F. Velleman, Business statistics, Addison Wesley, 2012

[14]. Edward B. Magrab, An Engineer's Guide to Mathematica, John Wiley & Sons, 2014

Петър Копанов • Снежана Христова

ЗАПИСКИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ И СТАТИСТИКА
(за информатици)

Българска, първо издание

Предпечатна подготовка: Георги Ташков
Печат и подвързия: УИ „Паисий Хилендарски“

Пловдив, 2018
ISBN ?????