Задача 1. Намерете единичния нормален вектор и уравненията на нормалата N и допирателната равнина T_pS на повърхнината:

а) $S: \vec{r}(u, v, uv)$ в произволна точка на S.

Решение:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}$$ - единичен нормален вектор.

Диференцираме параметризацията на S относно параметъра u, който считаме v за константа:

$\vec{r_u}(1, 0, v)$

Аналогично получаваме:

$\vec{r_v}(0, 1, u)$

За да получим колинеарен вектор на $\vec{N}$ на S, намираме:

$$\vec{r_u} \times \vec{r_v} = \left(\begin{vmatrix} 0 & v \\ 1 & u \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & v \\ 0 & u \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-v; -u; 1)$$

$$|\vec{r_u} \times \vec{r_v}| = \sqrt{(-v)^2 + (-u)^2 + 1^2} = \sqrt{u^2 + v^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \vec{N} = \frac{\vec{r_u} \times \vec{r_v}}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|} = \frac{(-v; -u; 1)}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}$$

$$\vec{N} = \frac{(-v; -u; 1)}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}$$

Ур-нието на нормалата в произволна точка от S:

$$N: \begin{cases} \text{з т. } P \equiv \vec{r}(u, v, uv) \\ \parallel \vec{N} \parallel \vec{r}_u \times \vec{r}_v (-v; -u; 1) \end{cases}$$

Прилагаме формулата за канонично ур-ние на права:

$$\frac{x-x_0}{n_1} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{n_3}$$

$$\Rightarrow N: \frac{x-u}{-v} = \frac{y-v}{-u} = \frac{z-uv}{1}$$

Ур-нието на допирателната равнина в произволна точка от S:

$$T_pS: \begin{cases} \text{з т. } P \equiv \vec{r}(u, v, uv) \\ \perp \vec{N} \parallel \vec{r}_u \times \vec{r}_v (-v; -u; 1) \end{cases}$$

Прилагаме формулата за общо ур-ние на равнина:

$$n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$$

$$\Rightarrow T_pS: -v(x-u) - u(y-v) + 1 \cdot (z-uv) = 0$$

б) $S: \vec{r}(u+v, u-v, uv)$ в т. $P(u=2, v=1)$

Решение:
$$\vec{N}^P = \frac{\vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P}{|\vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P|}$$

$\vec{r_u}(1, 1, v)$
$\vec{r_v}(1, -1, u)$
Намираме координатите на $\vec{r_u}$ и $\vec{r_v}$ в т. $P(u=2, v=1)$

$\vec{r_u}^P(1, 1, 1)$
$\vec{r_v}^P(1, -1, 2)$
$$\vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (2+1; -(2-1); -1-1)$$
$$\vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P = (3; -1; -2)$$
$$|\vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P| = \sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$
$$\vec{N}^P = \frac{\vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P}{|\vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P|} = \frac{(3; -1; -2)}{\sqrt{14}}$$

$$N: \begin{cases} \ni \text{т. } P \equiv \vec{r}^P(2+1, 2-1, 2.1) \equiv \vec{r}^P(3, 1, 2) \\ \parallel \vec{N}^P \parallel \vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P(3, -1, -2) \end{cases}$$
$$N^P: \frac{x-x_0}{n_1} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{n_3} \Rightarrow N^P: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$TpS: \begin{cases} \ni \text{т. } P \equiv \vec{r}^P(3, 1, 2) \\ \perp \vec{N}^P \parallel \vec{r_u}^P \times \vec{r_v}^P(3, -1, -2) \end{cases}$$

$TpS: n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$

$TpS: 3(x-3) - 1(y-1) - 2(z-2) = 0$

Scanned with CamScanner

б) $S: \vec{r}(2u-v;\ u^2+v^2,\ u^3-v^3)$ в т. $P(3,5,7)$

Решение:

Намираме вътрешните координати на т. $P(3,5,7) \equiv \vec{r}$

$$\begin{cases} 2u - v = 3 \\ u^2+v^2 = 5 \\ u^3 - v^3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{т. } P(u=2,\ v=1)$$

$$\vec{N}^P = \frac{\vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P}{|\vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P|}$$

$\vec{r}_u(2, 2u, 3u^2) \Rightarrow \vec{r}_u^P(2, 4, 12)$

$\vec{r}_v(-1, 2v, -3v^2) \Rightarrow \vec{r}_v^P(-1, 2, -3)$

$$\vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P = \left(\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-12-24; -(-6+12); 4+4)$$

$$= (-36; -6; 8)$$

$$|\vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P| = \sqrt{(-36)^2+(-6)^2+8^2} = \sqrt{1396}$$

$$\vec{N}^P = \frac{\vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P}{|\vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P|} = \frac{(-36; -6; 8)}{\sqrt{1396}}$$

$$N^P: \begin{cases} \ni \text{т. } P \equiv \vec{r}(3,5,7) \\ \parallel \vec{N}^P \parallel \vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P(-36; -6; 8) \end{cases}$$

$$N^P: \frac{x-x_0}{n_1} = \frac{y-y_0}{n_2} = \frac{z-z_0}{n_3} \Rightarrow N^P: \frac{x-3}{-36} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-7}{8}$$

$$T_PS: \begin{cases} \ni \text{т. } P \equiv \vec{r}(3,5,7) \\ \perp N^P \parallel \vec{r}_u^P \times \vec{r}_v^P(-36, -6, 8) \end{cases}$$

$$T_PS: n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$$

$$T_PS: -36(x-3) - 6(y-5) + 8(z-7) = 0$$

Задача 2. Дадена е повърхнината

$S: \vec{r}(u, v, uv)$

Намерете:

а) първа основна форма на S;

Решение:

$$\boxed{I(du, dv) = g_{11}\, du^2 + 2 g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= \vec{r}_u^{\,2} \\ g_{12} &= \vec{r}_u \vec{r}_v \\ g_{22} &= \vec{r}_v^{\,2} \end{aligned}\right\} \text{коефициенти на първа основна форма}$$

Намираме векторите:

$\vec{r}_u (1, 0, v)$

$\vec{r}_v (0, 1, u)$

Тогава пресмятаме коефициентите на първа основна форма:

$g_{11} = \vec{r}_u^{\,2} = 1^2 + 0^2 + v^2 = 1 + v^2 \Rightarrow g_{11} = 1 + v^2$

$g_{12} = \vec{r}_u \vec{r}_v = 1.0 + 0.1 + v.u = uv \Rightarrow g_{12} = uv$

$g_{22} = \vec{r}_v^{\,2} = 0^2 + 1^2 + u^2 = 1 + u^2 \Rightarrow g_{22} = 1 + u^2$

Заместваме в (1)

$$I(du, dv) = (1 + v^2)\, du^2 + 2uv\, du\, dv + (1 + u^2)\, dv^2$$

б) втора основна форма на повърхнината S.

Решение:

$$\boxed{\mathrm{II}(du, dv) = h_{11}du^2 + 2h_{12}du\,dv + h_{22}dv^2} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} h_{11} = \vec{N}\vec{r}_{uu} \\ h_{12} = \vec{N}\vec{r}_{uv} \\ h_{22} = \vec{N}\vec{r}_{vv} \end{array}\right\}$$ коефициенти на втора основна форма на S.

$\vec{N}$ - единичен нормален вектор на S

$\vec{r}_{uu}$; $\vec{r}_{uv}$; $\vec{r}_{vv}$ - частните производни от втори ред.

От а) получихме

$\vec{r}_u(1, 0, v)$

$\vec{r}_v(0, 1, u)$

Намираме частните производни от втори ред:

$\vec{r}_{uu}(0, 0, 0)$

$\vec{r}_{uv}(0, 0, 1)$

$\vec{r}_{vv}(0, 0, 0)$

От задача 1 а) получихме $\vec{N} = \dfrac{(-v; -u; 1)}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$

Пресмятаме коефициентите на втора основна форма:

$$h_{11} = \vec{N}\vec{r}_{uu} = \frac{-v.0 + (-u).0 + 1.0}{\sqrt{u^2+v^2+1}} = 0 \Rightarrow h_{11} = 0$$

$$h_{12} = \vec{N}\vec{r}_{uv} = \frac{-v.0 + (-u).0 + 1.1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}} \Rightarrow h_{12} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$$

$h_{22} = \vec{N}\vec{r}_{vv} = \dfrac{-v.0 + (-u).0 + 1.0}{\sqrt{u^2+v^2+1}} = 0 \Rightarrow h_{22} = 0$

заместваме в (2) $\Rightarrow$

$$\underline{II}(du,dv) = 0\,du^2 + 2.\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}\,du\,dv + 0\,dv^2$$

$$\underline{II}(du,dv) = \frac{2}{\sqrt{u^2+v^2+1}}\,du\,dv$$

в) намерете гаусовата и средната кривина на S.

Решение:

$$K = \frac{h}{g} \text{ - гаусова кривина}$$

$$h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 \;;\; g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

От а) получихме:

$g_{11} = 1+v^2$
$g_{12} = uv$
$g_{22} = 1+u^2$

Тогава намираме

$$\begin{aligned} g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 &= (1+v^2)(1+u^2) - (uv)^2 \\ &= 1+u^2+v^2+u^2v^2 - u^2v^2 \\ &= u^2+v^2+1 \end{aligned}$$

От б) получихме: $h_{11} = 0$

$$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}$$

$$h_{22} = 0$$

$$h = h_{11} h_{22} - h_{12}^2 = 0.0 - \left(\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2+1}}\right)^2 = \frac{1}{u^2+v^2+1}$$

Заместваме във формулата за гаусова кривина:

$$K = \frac{h}{g} = \frac{\frac{1}{u^2+v^2+1}}{u^2+v^2+1} = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}$$

$$H = \frac{g_{11} h_{22} - 2 g_{12} h_{12} + g_{22} h_{11}}{2g}$$ – средна кривина

Заместваме във формулата за H $\Rightarrow$

$$H = \frac{(1+v^2).0 - 2.uv.\frac{1}{u^2+v^2+1} + (1+u^2).0}{2(u^2+v^2+1)} = \frac{-2uv}{2(u^2+v^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow H = \frac{-uv}{(u^2+v^2+1)^2}$$

Задача. Пресметнете ъгъла между кривите C_1 и C_2, които лежат върху повърхнината S, ако ур-нията им са съответно:

$C_1: u+v=0$, $C_2: u-v=0$, $S: x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u+v$.

Решение:

Ъгъл между 2 криви върху повърхнината:

$$\cos\angle(C_1,C_2)=\frac{I_p(du,dv;\delta u,\delta v)}{\sqrt{I_p(du,dv)}\,\sqrt{I_p(\delta u,\delta v)}}$$

$$I(du,dv;\delta u,\delta v)=g_{11}^{p}\,du\,\delta u+g_{12}^{p}(du\,\delta v+dv\,\delta u)+g_{22}^{p}\,dv\,\delta v$$

$$I_p(du,dv)=g_{11}^{p}\,du^2+2g_{12}^{p}\,du\,dv+g_{22}^{p}\,dv^2$$

$$I_p(\delta u,\delta v)=g_{11}^{p}\,\delta u^2+2g_{12}^{p}\,\delta u\,\delta v+g_{22}^{p}\,\delta v^2$$

1. т. $P=C_1\cap C_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} u+v=0 \\ u-v=0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} u+v=0 \\ u=v \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} v+v=0 \\ u=v \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} v=0 \\ u=0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ т. $P(u=v=0)$

2. $S: \vec{r}(u\cos v, u\sin v, u+v)$

$\vec{r}_u(\cos v, \sin v, 1)$

$\vec{r}_v(-u\sin v, u\cos v, 1)$

$g_{11}=\vec{r}_u^{\,2}=\cos^2 v+\sin^2 v+1^2=1+1=\underline{2}$

$g_{12}=\vec{r}_u\vec{r}_v=\cos v.(-u\sin v)+\sin v.\,u\cos u+1.1=$

Scanned with CamScanner

$g_{12} = -u\cos v\sin v + u\cos u\sin v + 1 = \underline{1}$

$g_{22} = \vec{r}_v^{\,2} = (-u\sin v)^2 + (u\cos v)^2 + 1^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 =$

$= u^2\underbrace{(\sin^2 v + \cos^2 v)}_{1} + 1 = \underline{u^2 + 1}$

$g_{22} = \underline{u^2 + 1}$

3. Заместваме координатите на т. P => коеф. на първа осн. форма в т. P

$g_{11}^P = \underline{2}$ $\quad g_{12}^P = \underline{1}$ $\quad g_{22}^P = u^2 + 1 = 0^2 + 1 = \underline{1}$

4. Намираме допирателните направления на двете криви.

От $C_1: u + v = 0$ след диференциране получаваме:

$C_1: u + v = 0 \,/ d$

$du + dv = 0 \Rightarrow du = -dv \Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \underline{(du, dv) \uparrow\uparrow (-1, 1)}$

От $C_2: u - v = 0$ след диференциране получаваме:

$C_2: u - v = 0 \,/ \delta$

$\delta u - \delta v = 0 \Rightarrow \delta u = \delta v \Rightarrow \frac{\delta u}{\delta v} = \frac{1}{1} \Rightarrow \underline{(\delta u, \delta v) \uparrow\uparrow (1, 1)}$

5.

$$\cos \measuredangle(C_1, C_2) = \frac{I_p(du, dv; \delta u, \delta v)}{\sqrt{I_p(du, dv)}\;\sqrt{I_p(\delta u, \delta v)}}$$

$$\cos \measuredangle(C_1, C_2) = \frac{g_{11}^p du\,\delta u + g_{12}^p(du\,\delta v + dv\,\delta u) + g_{22}^p dv\,\delta v}{\sqrt{g_{11}^p du^2 + 2g_{12}^p du\,dv + g_{22} dv^2}\;\sqrt{g_{11}^p \delta u^2 + 2g_{12}\delta u\,\delta v + g_{22}\delta v^2}}$$

Заместване =>

$$\cos \measuredangle(C_1, C_2) = \frac{2.(-1).1 + 1((-1).1 + 1.1) + 1.1.1}{\sqrt{2.(-1)^2 + 2.1.(-1).1 + 1.1^2}\;.\sqrt{2.1^2 + 2.1.1.1 + 1.1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1}.\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \cos \measuredangle(C_1, C_2) = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$