

# Числено интегриране. Квадратурни формули на Нютон-Коутс

---

## Вградени възможности на Wolfram Mathematica

директно въвеждане

$$\begin{aligned} \text{In[1]:= } & \int_2^3 \text{Sin}[\pi x^2] \, dx \\ \text{Out[1]= } & \frac{-\text{FresnelS}\left[2\sqrt{2}\right] + \text{FresnelS}\left[3\sqrt{2}\right]}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

In[2]:= % // N

Out[2]= 0.13222

усложняване на функцията

$$\begin{aligned} \text{In[3]:= } & \int_2^3 \frac{\text{Sin}[\pi x^2]}{\sqrt{x-3}} \, dx \\ \text{Out[3]= } & \int_2^3 \frac{\text{Sin}[\pi x^2]}{\sqrt{-3+x}} \, dx \end{aligned}$$

Извод: Няма възможни аналитични методи, с които да се сметне интеграла  
пробваме с вградените числени методи

$$\begin{aligned} \text{In[4]:= } & \int_2^3 \frac{\text{Sin}[\pi x^2]}{\sqrt{x-3}} \, dx // N \\ \text{Out[4]= } & 0. - 0.369726 i \end{aligned}$$

## Табулиране на функцията (съставяне на мрежа)

```
In[10]:= f[x_] := Sin[π x²]
a = 2.; b = 3;
h = 0.1;
n =  $\frac{b-a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
xt = Table[a + i * h, {i, 0, n}]

Мрежата е с брой подинтервали n = 10. и стъпка h = 0.1

Out[15]= {2., 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3.}

In[16]:= f[xt]
Out[16]= {-4.89859 × 10-16, 0.960294, 0.481754, -0.790155, -0.684547,
0.707107, 0.684547, -0.790155, -0.481754, 0.960294, 1.10218 × 10-15}
```

## Леви правоъгълници

```
In[17]:= I1 = h *  $\sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ 

Out[17]= 0.104738

Itochno =  $\int_a^b f[x] \, dx$  (*за сравнение*)

Out[18]= 0.13222
```

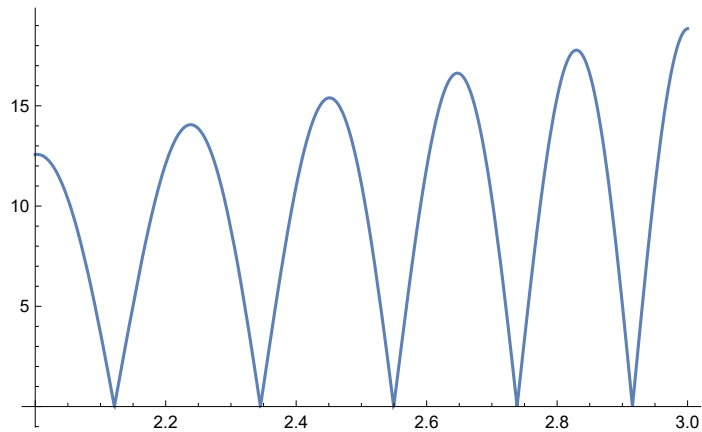
## Оценка на грешката

### Теоретична грешка

намираме  $M_1$

In[19]:= **Plot**[**Abs**[**f**'[**x**]], {**x**, **a**, **b**}]

Out[19]=



In[20]:= **M1** = **20**

Out[20]=

**20**

In[22]:= **Abs**[**f**'[**b**]] // **N**

Out[22]=

**18.8496**

In[23]:= **R1** =  $\frac{(b - a)^2}{2 n} * M1$

Out[23]=

**1.**

## Истинска грешка

In[24]:= **Abs**[**I1** - **Itochno**]

Out[24]=

**0.0274819**

## Обобщаваме всичко на едно място

```
In[25]:= f[x_] := Sin[π x²]
a = 2.; b = 3;
h = 0.1;
n =  $\frac{b-a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
I1 = h *  $\sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ; (*за сравнение*)
M1 = 20;
R1 =  $\frac{(b-a)^2}{2 n}$  * M1;
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка",
      Abs[I1 - Itochno]]
```

Мрежата е с брой подинтервали n = 10. и стъпка h = 0.1

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.104738

Точната стойност 0.13222

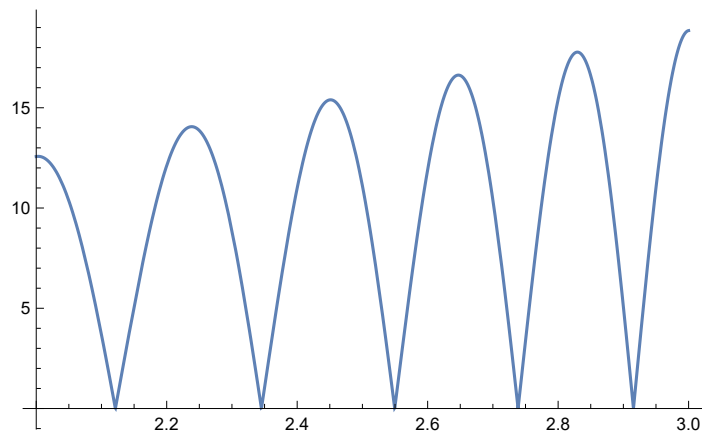
Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 1.

Истинската грешка 0.0274819

## Десни правоъгълници

намираме  $M_1$

```
In[38]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
Out[38]=
```



```

In[39]:= f[x_] := Sin[π x²]
a = 2.; b = 3;
h = 0.1;
n =  $\frac{b-a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]

I2 = h *  $\sum_{i=1}^n f[a + i * h]$ ;

Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ; (*за сравнение*)

M1 = 20;
R2 =  $\frac{(b-a)^2}{2 n}$  * M1;
Print["Приближената стойност по формулата на десните правоъгълници е ", I2]
Print["Точната стойност", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на десните правоъгълници е ", R2]
Print["Истинската грешка", Abs[I2 - Itochno]]

```

Мрежата е с брой подинтервали n = 10. и стъпка h = 0.1

Приближената стойност по формулата на десните правоъгълници е 0.104738

Точната стойност 0.13222

Теоретичната грешка по формулата на десните правоъгълници е 1.

Истинската грешка 0.0274819

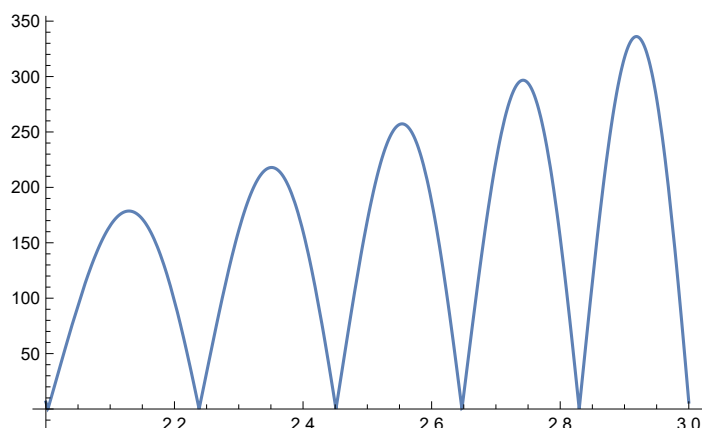
## Средни правоъгълници

намираме  $M_2$

```

In[52]:= Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
Out[52]=

```



```

In[53]:= f[x_] := Sin[ $\pi x^2$ ]
a = 2.; b = 3;
h = 0.1;
n =  $\frac{b-a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
I3 = h *  $\sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + i * h + \frac{h}{2}\right]$ ;
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ; (*за сравнение*)
M2 = 350;
R3 =  $\frac{(b-a)^3}{24 n^2} * M2$ ;
Print["Приближената стойност по формулата на средните правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на средните правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка ",
      Abs[I3 - Itochno]]

```

Мрежата е с брой подинтервали n = 10. и стъпка h = 0.1

Приближената стойност по формулата на средните правоъгълници е 0.146459

Точната стойност 0.13222

Теоретичната грешка по формулата на средните правоъгълници е 0.145833

Истинската грешка 0.0142384

---

## Трапци - САМОСТОЯТЕЛНО

---

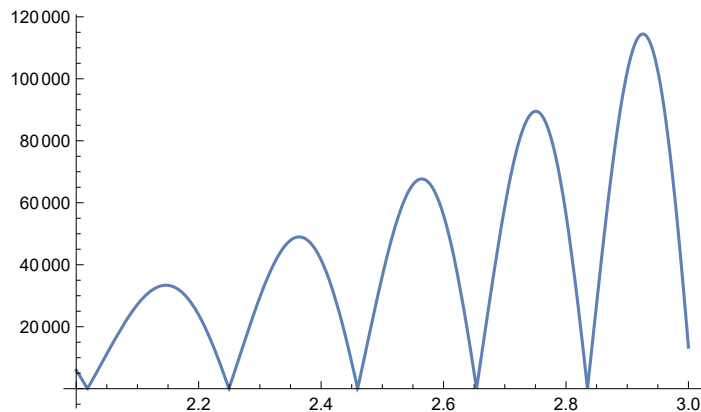
### Симпсън

**ИЗСКВАНЕ ЗА ПРИЛАГАНЕ НА ФОРМУЛАТА НА СИМПСЪН  
Е БРОЯТ НА ПОДИНТЕРВАЛИТЕ ДА Е ЧЕТНО ЧИСЛО**

намираме  $M_4$

```
In[66]:= Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]
```

```
Out[66]=
```



```
In[67]:= f[x_] := Sin[π x²]
a = 2.; b = 3;
h = 0.1;
n = (b - a) / h;
m = n / 2;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
IS = (h / 3) * (f[a] + 4 Sum[f[a + (2 i - 1) * h], {i, 1, m}] + 2 Sum[f[a + (2 i) * h], {i, 1, m-1}] + f[b]);
Itochno = Integrate[f[x], {x, a, b}; (*за сравнение*)
M4 = 120 000;
RS = ((b - a)⁵ / 180 n⁴) * M4;
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка ", Abs[IS - Itochno]]
```

Мрежата е с брой подинтервали n = 10. и стъпка h = 0.1

Приближената стойност по формулата на Симпсън е 0.139651

Точната стойност 0.13222

Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е 0.0666667

Истинската грешка 0.00743093

## Пресмятане с предварително зададена точност

### Леви правоъгълници

определяме мрежата, n = ?

```
In[81]:= M1 = 20;
eps = 10-5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{(b-a)^2}{2n} * M1 \leq \text{eps}, n]$ 
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[84]=

$n < 0 \mid \mid n \geq 1. \times 10^6$

```
In[85]:= f[x_] := Sin[ $\pi x^2$ ]
a = 2.; b = 3;
n = 106;
h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
I1 = h *  $\sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$ ;
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ; (*за сравнение*)
M1 = 20;
R1 =  $\frac{(b-a)^2}{2n} * M1$ ;
Print["Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка ",
Abs[I1 - Itochno]]
```

Мрежата е с брой подинтервали  $n = 1000000$  и стъпка  $h = 1. \times 10^{-6}$

Приближената стойност по формулата на левите правоъгълници е 0.13222

Точната стойност 0.13222

Теоретичната грешка по формулата на левите правоъгълници е 0.00001

Истинската грешка  $2.61194 \times 10^{-12}$

## Другите методи - самостоятелно

### Симпсън

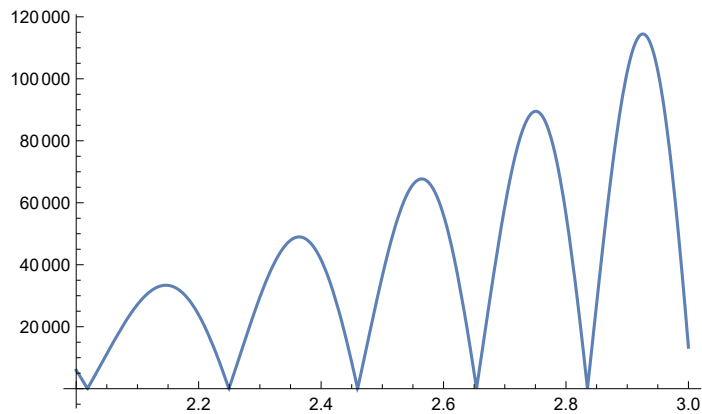
## ИЗСКВАНЕ ЗА ПРИЛАГАНЕ НА ФОРМУЛАТА НА СИМПСЪН Е БРОЯТ НА ПОДИНТЕРВАЛИТЕ ДА Е ЧЕТНО ЧИСЛО

намираме  $M_4$



```
In[8]:= Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]
```

```
Out[8]=
```



определяме мрежата,  $n = ?$

```
In[98]:= M4 = 120000;
```

```
eps = 10-5;
```

```
Clear[n]
```

```
Reduce[ $\frac{(b-a)^5}{180 n^4} * M4 \leq \text{eps}, n]$ 
```

... **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

```
Out[101]=
```

```
 $n \leq -90.3602 \mid \mid n \geq 90.3602$ 
```

```
In[116]:=
```

```
f[x_] := Sin[ $\pi x^2$ ]
```

```
a = 2.; b = 3;
```

```
h = 0.1;
```

```
n = 92;
```

```
m = n / 2;
```

```
h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
```

```
Print["Мрежата е с брой подинтервали n = ", n, " и стъпка h = ", h]
```

```
IS =  $\frac{h}{3} * \left( f[a] + 4 \sum_{i=1}^m f[a + (2i-1) * h] + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2i) * h] + f[b] \right)$ ;
```

```
Itochno =  $\int_a^b f[x] dx$ ; (*за сравнение*)
```

```
M4 = 120000;
```

```
RS =  $\frac{(b-a)^5}{180 n^4} * M4$ ;
```

```
Print["Приближената стойност по формулата на Симпсън е ", IS]
```

```
Print["Точната стойност ", Itochno]
```

```
Print["Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е ", RS]
```

```
Print["Истинската грешка ", Abs[IS - Itochno]]
```

Мрежата е с брой подинтервали  $n = 92$  и стъпка  $h = 0.0108696$

Приближената стойност по формулата на Симпсън е  $0.132221$

Точната стойност  $0.13222$

Теоретичната грешка по формулата на Симпсън е  $9.30588 \times 10^{-6}$

Истинската грешка  $6.7619 \times 10^{-7}$