- Множеството от решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ на (3) се нарича **фундаментална система решения**, ако функциите $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са линейно независими в интервала (α, β).

Теорема 6

Нека $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са решения на (3) и са n пъти непрекъснато диференцируеми. Следните твърдения са еквивалентни:

1) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуват фундаментална система решения за (3);

T_3

2) $\exists x_0 \in (\alpha, \beta) : \quad W(x_0) \neq 0$;

оч.

3) $W(x) \neq 0$ за $\forall x \in (\alpha, \beta)$.

Идея за доказателство. Очевидно имаме $3) \Rightarrow 2)$. Следната формула, известна като формула на Лиувил-Остроградски-Гаус,

$$W(x) = \underbrace{W(x_0)}_{\neq 0}\underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)dt}}_{>0} \quad \text{за всяко } x \in (\alpha, \beta)$$

показва, че имаме $2) \Rightarrow 3)$.
От Теорема 3 имаме $2) \Rightarrow 1)$. Може да се докаже и обратната връзка.

Теорема 7 (Формула за общото решение)

Нека функциите $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуват фундаментална система решения на (3). Тогава

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n, \tag{4}$$

където $C_1, C_2, \dots, C_n$ са произволни константи, е общо решение на (3).

Доказателство. Трябва да докажем, че:
1) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ е решение на (3);
2) всяко друго решение $z(x)$ на (3) се получава от (4) при конкретни стойности на $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Първият факт е очевиден, защото множеството от решенията на (3) е линейно пространство.

А за да докажем 2), е достатъчно да покажем, че функциите $y_1, y_2, \dots, y_n, z$ са линейно зависими. Наистина, ако допуснем, че $y_1, y_2, \dots, y_n, z$ са линейно зависими, то съществуват константи $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0, C_{n+1}^0$, поне една от тях различна от нула, такива че

$$C_1^0 y_1 + C_2^0 y_2 + \dots + C_n^0 y_n + C_{n+1}^0 z \equiv 0$$

в интервала (α, β). Имаме $C_{n+1}^0 \neq 0$, защото в противен случай стигаме до противоречие с линейната независимост на $y_1, y_2, \dots, y_n$. Тогава

$$z = -\frac{C_1^0}{C_{n+1}^0} y_1 - \frac{C_2^0}{C_{n+1}^0} y_2 - \dots - \frac{C_n^0}{C_{n+1}^0} y_n,$$

което трябваше да докажем.

И така, сега се връщаме към доказателството на факта, че $y_1, y_2, \dots, y_n, z$ са линейно зависими, като за целта ще приложим Теорема 4. (ду за лин. зав.)

Имаме

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n, z](x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & z \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & z' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & z^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & z^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Сега умножаваме първия ред по $a_n(x)$ и го прибавяме към последния, втория – по $a_{n-1}(x)$ и го прибавяме към последния, и т.н., предпоследния ред умножаваме по $a_1(x)$ и отново го прибавяме към последния. Така получаваме детерминанта, равна на дадената, на която последният ред има за елементи

$$y_1^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y_1^{(n-i)}, \dots, z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, z^{(n-i)}.$$

Всяка от тези суми е тъждествено равна на 0 в интервала (α, β), защото $y_1, y_2, \dots, y_n, z$ са решения на (3) и следователно, ако поставим всяко от тях в (3), получаваме тъждество.

От това следва, че горната детерминанта е равна на 0, т.е.

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n, z](x) = 0 \quad \text{за } \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Тъй като $y_1, y_2, \dots, y_n$ образуват фундаментална система решения, то те са линейно независими и съгласно Теорема 6

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n](x) \neq 0 \quad \text{за } \forall x \in (\alpha, \beta).$$

От последните две равенства и Теорема 4 заключаваме, че $y_1, y_2, \dots, y_n, z$ са линейно зависими, с което теоремата е доказана.

Теорема 8

За всяко линейно хомогенно диференциално уравнение (3) *съществува фундаментална система решения.*

Доказателство. Нека $A = (a_{ij})$ е квадратна матрица от ред n, за която $\det A \neq 0$. За $x_0 \in (\alpha, \beta)$ разглеждаме следните n на брой задачи на Коши: Да се намери решение на уравнението (3), за което

$$\begin{cases} y(x_0) = a_{1i} \\ y'(x_0) = a_{2i} \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{ni}, \end{cases}$$

където $i = 1, 2, \dots, n$. Съгласно Теорема 1, всяка от тези задачи на Коши има единствено решение $y_i(x)$, при това дефинирано в целия интервал (α, β).

Множеството

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

е фундаментална система решения на (3). Наистина, имаме

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A \neq 0,$$

и тогава, съгласно Теорема 3, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са линейно независими. С това Теорема 8 е доказана.