Изпит

Задача 1: Дадено е уравнението

In[∘]:= $f[x\_] := x^2 - 30\,\mathrm{Sin}\left[x + \frac{\pi}{5+1}\right] - (5+8)$

In[∘]:= `f[x]`

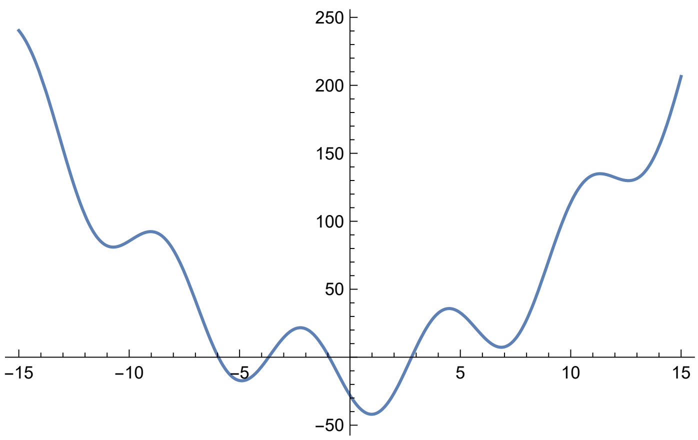
Out[∘]=

$$\left\{87 + 30\,\mathrm{Sin}\left[10 - \frac{\pi}{6}\right],\ -28,\ 87 - 30\,\mathrm{Sin}\left[10 + \frac{\pi}{6}\right]\right\}$$

а) Да се намери общия брой на корените на уравнението

In[∘]:= `Plot[f[x], {x, -15, 15}]`

Out[∘]=

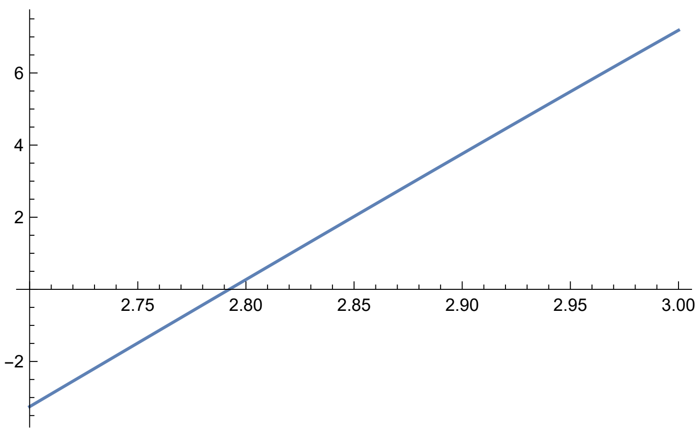


Извод: Функцията има 4 корена

б) Да се локализира най-големия корен в интервал [p,q]

In[∘]:= `Plot[f[x], {x, 2.7, 3}]`

Out[∘]=



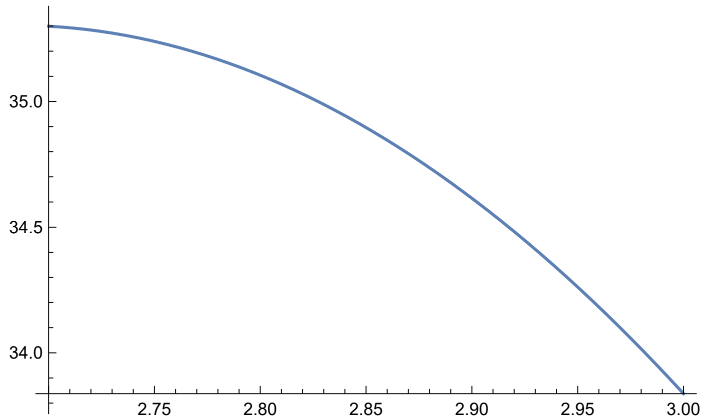
In[∘]:=
```
f[2.7]
```
Out[∘]=
```
-3.25257
```

In[∘]:=
```
f[3] // N
```
Out[∘]=
```
7.18348
```

Извод: Функцията е непрекъсната и има различни знаци в двата края на разглеждания интервал [2.7 ; 3].
Следователно има поне един корен в разглеждания интервал [2.7 ; 3].

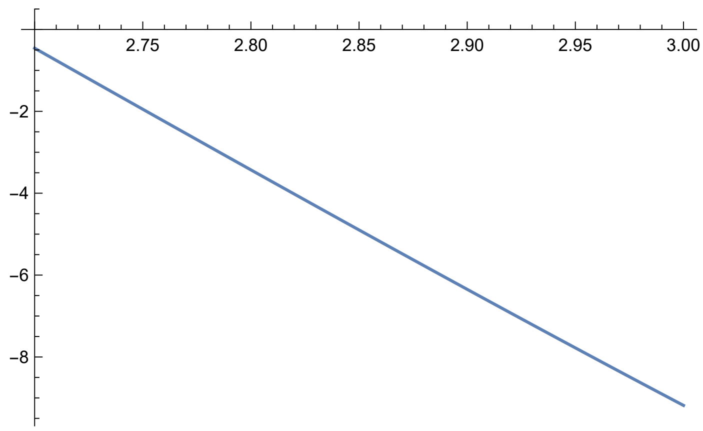
в) Да се проверят условията за приложение на метода на допирателните (Нютон)

In[∘]:=
```
Plot[f'[x], {x, 2.7, 3}]
```
Out[∘]=



Извод: Първата производна има само положителни стойности в целия раглеждан интервал [2.7 ; 3].

In[∘]:=
```
Plot[f''[x], {x, 2.7, 3}]
```
Out[∘]=



Извод: Втората производна има само отрицателни стойности в целия раглеждан интервал [2.7 ; 3].

г) Да се определи началното приближение за итерационния процес по

метода на Нютон

x0 = ?, такова че f (x0).f’’(x) > 0

In[◦]:=
```
f[2.7]
```
Out[◦]=
```
-3.25257
```

In[◦]:=
```
f[3] // N
```
Out[◦]=
```
7.18348
```

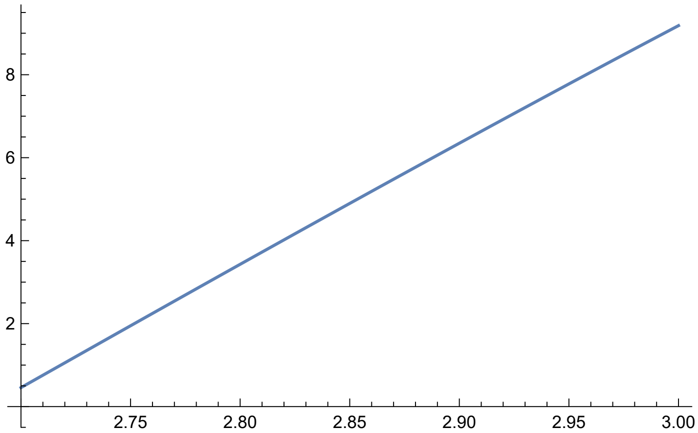
In[◦]:=
```
x0 = 2.7
```
Out[◦]=
```
2.7
```

д) Да се изчисли корена по метода на допирателните (Нютон) с точност 10^{-4}. Представете таблицата с изчисленията.

Определяне на постоянните величини

M2 = max[a,b]|f’’(x)|

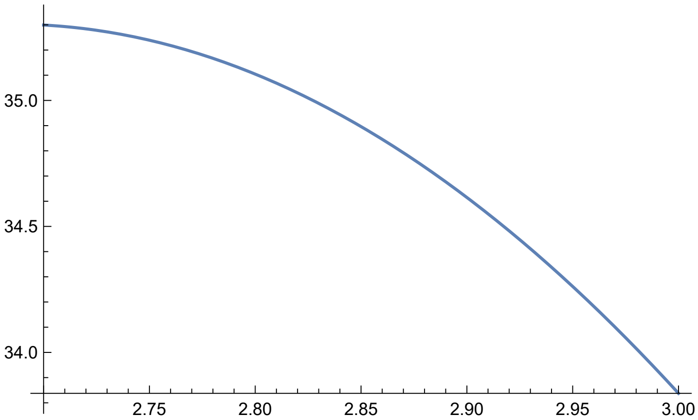
In[◦]:=
```
Plot[Abs[f''[x]], {x, 2.7, 3}]
```
Out[◦]=



In[◦]:=
```
M2 = Abs[f''[3]] // N
```
Out[◦]=
```
9.18348
```

m1 = min[a,b]|f’(x)|

In[•]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, 2.7, 3}]
```
Out[•]=



In[•]:=
```
m1 = Abs[f'[3]] // N
```
Out[•]=
```
33.8376
```

In[•]:= $P = \frac{M2}{2\, m1}$

Out[•]=
```
0.1357
```

Извършване на итерациите

In[•]:=
```
p = 5; q = 8;
f[x_] := x^2 - 30 Sin[x + π/(5 + 1)] - (5 + 8)
x0 = 2.7;
M2 = Abs[f''[3]];
m1 = Abs[f'[3]];
P = M2/(2 m1);

Print["n = ", 0, " x_n = ", x0, " f(x_n) = ", f[x0], " f'(x_n) = ", f'[x0]]
epszad = 10^-4;
eps = 1;
For[n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/f'[x0];
 eps = P * Abs[x1 - x0]^2;
 x0 = x1;
 Print["n = ", n, " x_n = ", x0,
  " f(x_n) = ", f[x0], " f'(x_n) = ", f'[x0], " ε_n = ", eps]
]
```

n = 0 x_n = 2.7 $f(x_n)$ = −3.25257 $f'(x_n)$ = 35.2992

n = 1 x_n = 2.79214 $f(x_n)$ = −0.0058313 $f'(x_n)$ = 35.1305 ε_n = 0.00115213

n = 2 x_n = 2.79231 $f(x_n)$ = -4.40805×10^{-8} $f'(x_n)$ = 35.13 ε_n = 3.73887×10^{-9}

е) Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал за същата точност.

In[ ]:=
```
Log[(3 - 2.7)/10^-4] - 1
```
Out[ ]=
```
7.00637
```

ж) Да се направи сравнение кой метод е по ефективен за избрания интервал.

Извод: По метода на раполовяването биха били необходими 8 итерации за достигане на исканата точност. А по метода на допирателните бяха достатъчни 2 итерации. Следователно
методът на допирателните е по-ефективен.

Задача 3:

а)

Да се състави таблицата (x_i , $f(x_i)$), където
$x_i = -a + i(0.5)$, i = -5, 5 , f(x) = x-(8+1)sin x.

Генериране на x

In[ ]:=
```
xt = Table[5 + i * 0.5, {i, -5, 5}]
```
Out[ ]=
```
{2.5, 3., 3.5, 4., 4.5, 5., 5.5, 6., 6.5, 7., 7.5}
```

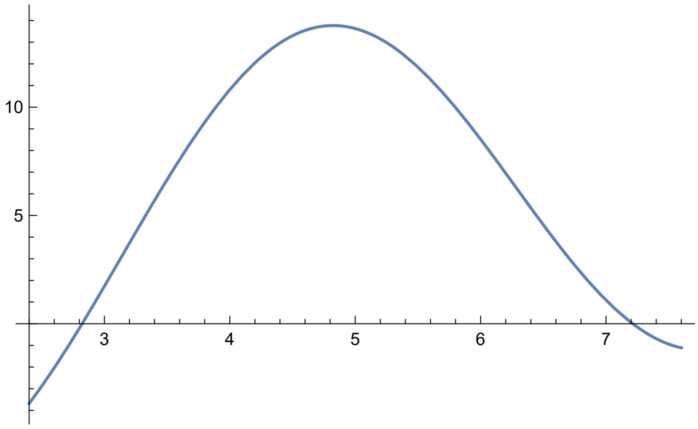
Генериране на y

In[ ]:=
```
f[x_] := x - (8 + 1) Sin[x]
```
In[ ]:=
```
yt = f[xt]
```
Out[ ]=
```
{-2.88625, 1.72992, 6.65705, 10.8112, 13.2978,
 13.6303, 11.8499, 8.51474, 4.56392, 1.08712, -0.942}
```

Графика на функцията

In[ ]:= grf = Plot[f[x], {x, 2.4, 7.6}]

Out[ ]=



In[ ]:= n = Length[xt]

Out[ ]=

11

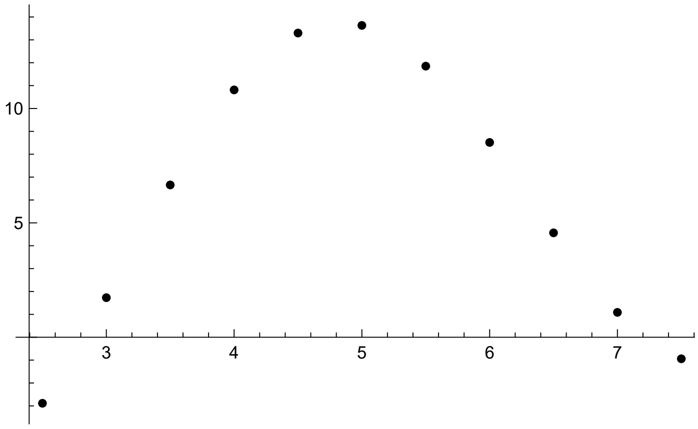
In[ ]:= points = Table[{xt⟦i⟧, yt⟦i⟧}, {i, 1, n}]

Out[ ]=

{{2.5, -2.88625}, {3., 1.72992}, {3.5, 6.65705},
{4., 10.8112}, {4.5, 13.2978}, {5., 13.6303}, {5.5, 11.8499},
{6., 8.51474}, {6.5, 4.56392}, {7., 1.08712}, {7.5, -0.942}}

In[ ]:= grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black]

Out[ ]=



б) Изберете 4 подходящи точки, по които да се построи интерполационен полином за изчисляването на приближената стойност на функцията в точката

In[ ]:= z = 5 + (-1)^8 (0.23) 8 + 0.01

Out[ ]=

6.85

```
In[∘]:= tableOfPoints = Prepend[points, {"Xi", "Yi"}]
        tableOfPoints2 =
         MapThread[Prepend, {tableOfPoints, {"", 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}}]
        Grid[tableOfPoints2, Frame → All]
```

Out[∘]=

```
{{Xi, Yi}, {2.5, -2.88625}, {3., 1.72992}, {3.5, 6.65705},
 {4., 10.8112}, {4.5, 13.2978}, {5., 13.6303}, {5.5, 11.8499},
 {6., 8.51474}, {6.5, 4.56392}, {7., 1.08712}, {7.5, -0.942}}
```

Out[∘]=

```
{{, Xi, Yi}, {1, 2.5, -2.88625}, {2, 3., 1.72992}, {3, 3.5, 6.65705},
 {4, 4., 10.8112}, {5, 4.5, 13.2978}, {6, 5., 13.6303}, {7, 5.5, 11.8499},
 {8, 6., 8.51474}, {9, 6.5, 4.56392}, {10, 7., 1.08712}, {11, 7.5, -0.942}}
```

Out[∘]=

	X_i	Y_i
1	2.5	-2.88625
2	3.	1.72992
3	3.5	6.65705
4	4.	10.8112
5	4.5	13.2978
6	5.	13.6303
7	5.5	11.8499
8	6.	8.51474
9	6.5	4.56392
10	7.	1.08712
11	7.5	-0.942

Четирите подходящи точки които избирам са 8,9,10,11

в) Конструирайте полинома по избраните точки

In[∘]:=

$$L3[x\_] := 8.51474 * \frac{(x-(6.5))\,(x-(7))\,(x-(7.5))}{(6-(6.5))\,(6-(7))\,(6-(7.5))} + 4.56392 * \frac{(x-(6))\,(x-(7))\,(x-(7.5))}{(6.5-(6))\,(6.5-(7))\,(6.5-(7.5))} + 1.08712 * \frac{(x-(6))\,(x-(6.5))\,(x-(7.5))}{(7-(6))\,(7-(6.5))\,(7-(7.5))} + -0.942 * \frac{(x-(6))\,(x-(6.5))\,(x-(7))}{(7.5-(6))\,(7.5-(6.5))\,(7.5-(7))}$$

```
In[∘]:= Expand[L3[x]]
```

Out[∘]=

```
{-5441.16, -261.514, 44.7057}
```

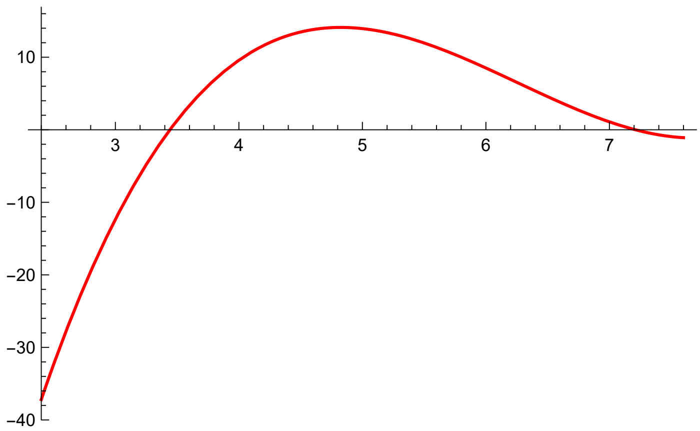
г) Проверка на интерполационните условия

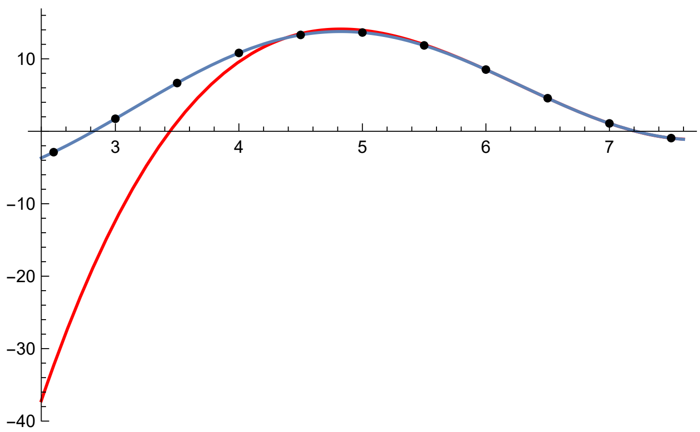
In[ ]:=
```
L3[6]
L3[6.5]
L3[7]
L3[7.5]
```
Out[ ]=
8.51474

Out[ ]=
4.56392

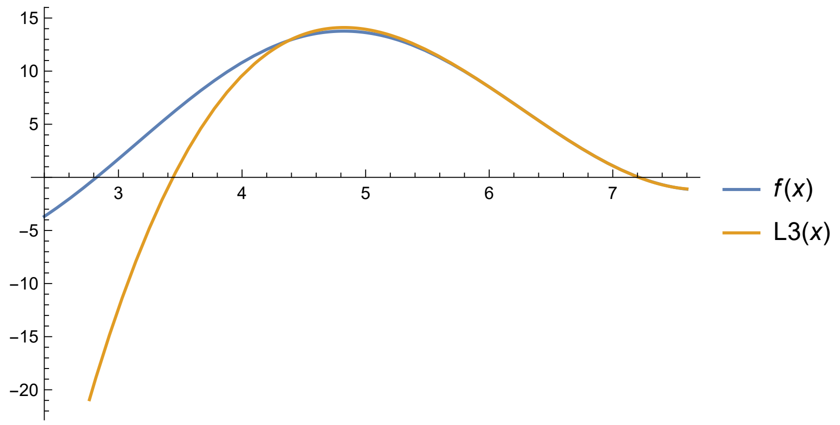
Out[ ]=
1.08712

Out[ ]=
-0.942

In[ ]:=
```
grL3 = Plot[L3[x], {x, 2.4, 7.6}, PlotStyle → Red]
```
Out[ ]=


In[ ]:=
```
Show[grL3, grf, grp]
```
Out[ ]=


In[∘]:=
```
Plot[{f[x], L3[x]}, {x, 2.4, 7.6}, PlotLegends → "Expressions"]
```
Out[∘]=



Пресмятане приближена стойност на функцията в z = 6.85

In[∘]:=
```
L3[6.85]
```
Out[∘]=

2.02246

Оценка на грешката

Истинска грешка

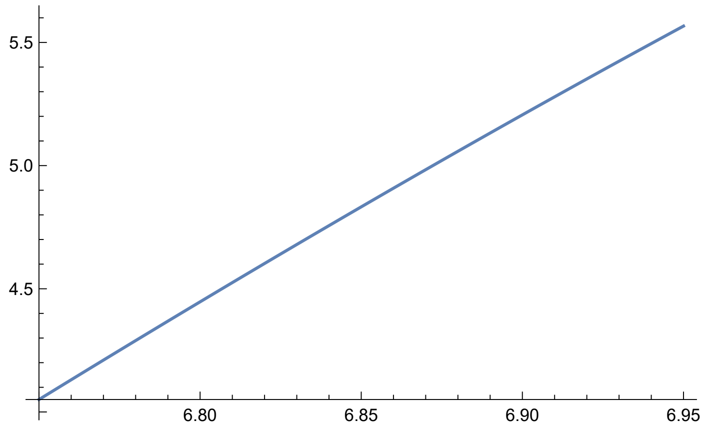
In[∘]:=
```
Abs[f[6.85] - L3[6.85]]
```
Out[∘]=

0.00498355

Теоретична грешка

Намираме M4

In[∘]:=
```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, 6.75, 6.95}]
```
Out[∘]=



От графиката се вижда, че

In[∘]:=
```
M4 = Abs[f''''[6.95]]
```
Out[∘]=

5.56638

In[*]:=
```
R3[x_] := M4/4! * Abs[(x - (6)) (x - (6.5)) (x - (7)) (x - (7.5))]
```

In[*]:=
```
R3[6.85]
```

Out[*]=
```
0.00672749
```

Задача 2:

a)

Дадена е системата линейни алгебрични уравнения

In[*]:=
```
A = {{5 + 8 + 5, 0, 0, 0}, {-0, 10, 3, 0.5}, {3, 0, -8, -0}, {0.3, 0, 1.4, 12}}; b = {5, 1, -3, 4 * 8};
(*инициализация на матрицата B и вектора c*)
n = Length[A];
c = Table[0, n];
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = - A[[i]]/A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]]/A[[i, i]]
]
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{10} & -0.05 \\ \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -0.025 & 0 & -0.116667 & 0 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

б) Проверка условието на сходимост ||B|| < 1

Първа норма

In[*]:=
```
n = Length[A]
```

Out[*]=
```
4
```

In[ ]:= Table$\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]$

Out[ ]=

$\left\{0, 0.35, \frac{3}{8}, 0.141667\right\}$

In[ ]:= Max$\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]$

Out[ ]=

$\frac{3}{8}$

In[ ]:= % // N

Out[ ]=

0.375

Втора норма

In[ ]:= Table$\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]$

Out[ ]=

{0.4, 0, 0.416667, 0.05}

In[ ]:= Max$\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]$

Out[ ]=

0.416667

In[ ]:= % // N

Out[ ]=

0.416667

Трета норма

In[ ]:= $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B[[i, j]]^2}$

Out[ ]=

0.497354

In[ ]:= % // N

Out[ ]=

0.497354

Избираме най малката възможна норма която в случая е втора
Следователно всеки избор на начално приближение е сходящ

в) и г)

```
In[◦]:= A = {{5+8+5, 0, 0, 0}, {-0, 10, 3, 0.5}, {3, 0, -8, -0}, {0.3, 0, 1.4, 12}}; b = {5, 1, -3, 4*8};
(*инициализация на матрицата B и вектора c*)
n = Length[A];
c = Table[0, n];
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = -A[[i]]/A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]]/A[[i, i]]
]
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]
```

(*проверка на сходимост и избор на норма – отделно*)

```
x = {-10, 0, 0, 10}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]] // N;
normx0 = Norm[x, 1] // N;
normc = Norm[c, 1] // N;
epszad = 10^-3;
eps = 1;
For[k = 0, eps > epszad, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB)) // N];
 x = B.x + c // N
]
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b] // N]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{10} & -0.05 \\ \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ -0.025 & 0 & -0.116667 & 0 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

k = 0 $x^{(k)}$ = {-10, 0, 0, 10} ε_k = 25.8619

k = 1 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.4, -3.375, 2.91667} ε_k = 10.7758

k = 2 $x^{(k)}$ = {0.277778, 0.966667, 0.479167, 3.05347} ε_k = 4.48991

k = 3 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.196424, 0.479167, 2.60382} ε_k = 1.8708

k = 4 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.779499

k = 5 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.324791

k = 6 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.13533

k = 7 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.0563874

k = 8 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.0234947

k = 9 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.00978947

k = 10 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.00407895

k = 11 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.00169956

k = 12 $x^{(k)}$ = {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382} ε_k = 0.000708151

За сравнение, точното решение е {0.277778, -0.173941, 0.479167, 2.60382}

Какъв е минималният брой итерации за достигане на точност 10^{-7} при начално приближение $x^{(0)}$ = (-10,0,10)

In[∘]:=

```
x = {-10, 0, 10}; epszad = 10^-7;
```

$$\frac{\text{Log10}\left[\frac{\text{epszad}}{\text{normx0} + \frac{\text{normc}}{1-\text{normB}}}\right]}{\text{Log10}[\text{normB}]}$$

Out[∘]=

22.1263

Извод: Необходими са 23 итерации за достигане на точност 10^{-7} при приближение $x^{(0)}$ = (-10,0,10)