Числови редици. Основни понятия и задачи.

1. Основни понятия

Ако по някакво правило на всяко естествено число съпоставим реално число, казваме, че сме задали числова редица.

Def. 1 Всяка числова функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, определена в множ. на естествените числа, се нарича числова редица. Стойностите $a_n = f(n)$ на тази функция се наричат членове на редицата.

Нека $A = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

a_n ще наричаме общ член на редицата A. Редицата A ще означаваме и по следният начин $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$$

Числовите редици могат да бъдат крайни и безкрайни:

$$\underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{2}, \underset{a_3}{3}, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \underset{a_{10}}{10} \rightarrow \text{крайна числова редица}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots \quad \text{безкрайна числова редица}$$

$$\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Числовите редици могат да бъдат зададени по няколко начина:

- чрез формула за общия член

$a_n = 2n \quad n \in \mathbb{N}$

$a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 2 = 4 \quad a_3 = 2 \cdot 3 = 6$

$2, 4, 6, 8, \ldots 2n, \ldots$

- чрез рекурентна формула

$a_1 = 1 \quad a_2 = 1$ и $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

$a_3 = a_{3-2} + a_{3-1} = a_2 + a_1 = 2$

$a_4 = a_{4-2} + a_{4-1} = \overset{=1}{a_2} + \overset{=2}{a_3} = 3$

$a_5 = \overset{=2}{a_3} + \overset{=3}{a_4} = 5$

$a_6 = a_4 + a_5 = 8$

$a_7 = \overset{=5}{a_5} + \overset{=8}{a_6} = 13$

$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots (a_{n-2} + a_{n-1}), \ldots$

редица на Фибоначи

• чрез описание – n-тият член на редицата е n-тото просто число,

$\underset{2}{\underset{\shortparallel}{a_1}}, \underset{3}{\underset{\shortparallel}{a_2}}, \underset{5}{\underset{\shortparallel}{a_3}}, \underset{7}{\underset{\shortparallel}{a_4}}, \underset{11}{\underset{\shortparallel}{a_5}}, a_6, \ldots a \ldots$

① Напишете първите 4 члена на редица с общ член $a_n = \dfrac{2n+3}{3n+2}$

$a_1 = \dfrac{2 \cdot 1 + 3}{3 \cdot 1 + 2} = \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{5}} = 1$

$a_2 = \frac{2 \cdot 2+3}{3 \cdot 2+2} = \frac{7}{8}$ $a_3 = \frac{2 \cdot 3+3}{3 \cdot 3+2} = \frac{9}{11}$

$a_4 = \frac{2 \cdot 4+3}{3 \cdot 4+2} = \frac{11}{14}$

② Напишете първите 4 члена на редицата с общ член $a_n = \frac{n}{2^n}$

$a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{4}} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}$

$a_4 = \frac{4}{2^4} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{16}} = \frac{1}{4}$

③ Общият член на числова редица е $a_n = \frac{2n^2 - 1}{n+3}$. Намерете a_3, a_5 и a_{n+1}.

$$a_3 = \frac{2 \cdot 3^2 - 1}{3+3} = \frac{17}{6}$$

$$a_5 = \frac{2 \cdot 5^2 - 1}{5+3} = \frac{49}{8}$$

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)^2 - 1}{n+1+3} =$$

$$= \frac{2(n^2 + 2n + 1) - 1}{n+4} = \frac{2n^2 + 4n + 2 - 1}{n+4} =$$

$$= \frac{2n^2 + 4n + 1}{n+4}$$

Def 2 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е растяща (намаляваща), ако за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$)

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 4, & 5, & 6, & 7, & 7, & 8, & 9 & \ldots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} \end{matrix}$$

$1 \leq 2 \quad 2 \leq 3 \quad 3 \leq 4 \quad 4 \leq 4, \quad 4 \leq 5$

$$\begin{matrix} 10, & 9, & 9, & 8, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0, & -1 & \ldots \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & \ldots \end{matrix}$$

$a_1 \geq a_2 \qquad 10 \geq 9$

$a_2 \geq a_3 \qquad 9 \geq 9$

$a_3 \geq a_4 \qquad$ — —

Def 3 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е строго растяща (строго намаляваща), ако за $\forall n \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$)

Def 4 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонна, ако тя е растяща или намаляваща.

④ Да се изследва растяща или намаляваща е редицата с общ член $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+2}$

$$a_{n+1} = \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+2} = \frac{3n+3-1}{5n+5+2} = \frac{3n+2}{5n+7}$$

Нека да допуснем, че редицата е растяща

$$\underbrace{\frac{3n+2}{5n+7}}_{a_{n+1}} \geq \underbrace{\frac{3n-1}{5n+2}}_{a_n}$$

$$\frac{3n+2}{5n+7} \geq \frac{3n-1}{5n+2} \quad \Big| \text{ ДС! } 5n+7 \neq 0$$

$$n \neq -\frac{7}{5}$$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad n = 1, 2, 3, 4 \ldots k, \_\_$

$$\frac{3n+2}{5n+7}^{\backslash 5n+2} - \frac{3n-1}{5n+2}^{\backslash 5n+7} \geq 0$$

$$\underbrace{\phantom{\frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3n-1}{5n+2}}}_{(5n+7)(5n+2)}$$

$$\frac{(5n+2)(3n+2)-(5n+7)(3n-1)}{(5n+2)(5n+7)} \geq 0$$

$$\frac{15n^2+10n+6n+4-(15n^2-5n+21n-7)}{(5n+2)(5n+7)} \geq 0$$

$$\frac{\cancel{15n^2}+\cancel{16n}+4-\cancel{15n^2}-\cancel{16n}+7}{(5n+2)(5n+7)} \geq 0$$

$$\overset{+}{\frac{11}{\underbrace{(5n+2)(5n+7)}_{+}}} \geq 0 \Rightarrow \frac{11}{(5n+2)(5n+7)} > 0$$

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$$\underbrace{a_{n+1}-a_n \geq 0}_{\text{вярно}}$$

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow$

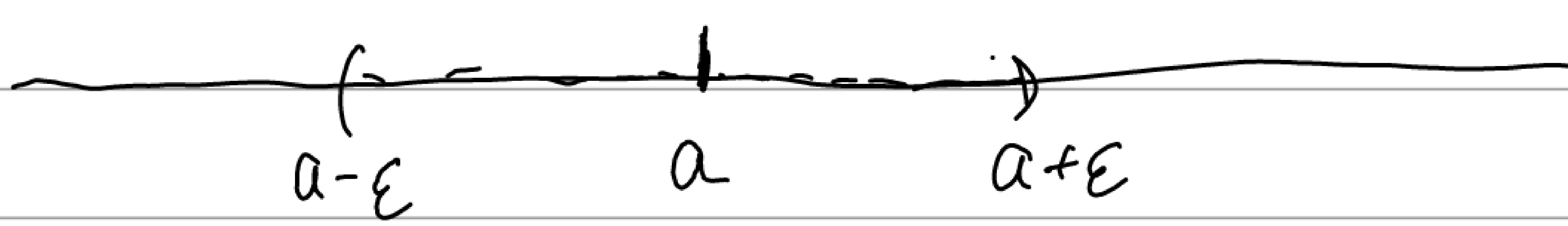
$\Rightarrow$ редицата $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+2}$ е

строго растяща

(5) Да се изследва растяща или намаляваща е редицата с общ член

$a_n = \frac{6-n}{2+5n}$.

Def 5 Казваме, че числото a е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако за $\forall\, \varepsilon > 0$ интервалът $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ съдържа безброй много членове на редицата



$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

Th 1 Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница L, то L е единствена точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Def 6 Нека е дадена редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и строго растяща редица от естествени числа $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогава редицата $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ наричаме подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$a_1, a_2, a_3 \text{———} a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \text{———}$$

Th 2 Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница L, то всяка нейна подредица е сходяща с граница L

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \text{---}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \text{---} \to 0$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \text{---} \frac{1}{n+k} \text{.———}}\to 0$$

Th 3 Ако L е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такава, че $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$

Th 4 Границата на всяка сходяща подредица на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

Th 5 Всяка ограничена редица има сходяща подредица.

Разглеждаме редицата

(1) $1, 2, 3, 4, \ldots\ n, \ldots$

Редицата $1, 3, 5, 7, 9$ не е подредица на редицата (1), докато редицата $1, 3, 5, 7, 9, \ldots\ 2n-1, \ldots$ е подредица на редицата (1)

Def 7 Казваме, че редицата $\{a_n\}$ е ограничена отгоре, ако $\exists$ такова число A, че $a_n \leq A$ за $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Числото A се нарича горна граница на редицата $\{a_n\}$

Def 8 Казваме, че редицата $\{a_n\}$ е ограничена отдолу, ако $\exists$ такова число B, че $a_n \geq B$ за $\forall n \in \mathbb{N}$. Числото B ще наричаме долна граница на редицата $\{a_n\}$

Def 9 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, ако тя е ограничена отгоре и отдолу

$$1 \geq 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots \frac{1}{n} \ldots > 0$$

Def 10 Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и има граница L, ако за $\forall \varepsilon > 0$, съществува $n_0 \in \mathbb{N}$ такова, че за $\forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Граница на редица ще оббелязваме по следният начин $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

Def 11 Казваме, че една редица е сходяща, ако за $\forall \varepsilon > 0$, можем да намерим число N такова, че за $\forall$ $m, n > N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$

(6) Да се док. с помощта на определението за граница на редица, че $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\frac{n+2}{n}}_{a_n} = \underbrace{1}_{L}$

Нека $a_n = \frac{n+2}{n}$ и $L = 1$. Трябва да докажем, че за $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N}$: $n > n_0$ е изпълнено $|a_n - L| < \varepsilon$.

В нашият случай

(2) $|a_n - L| = \left| \underbrace{\frac{n+2}{n} - \frac{1}{1}}_{n} \right| = \left| \frac{2}{n} \right| = \frac{2}{n} < \varepsilon$

Понеже $n > n_0 \Rightarrow \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0}$.

За да бъде изпълнено (2) може да изберем n_0 да бъде такова, че да е изпълнено неравенството $\varepsilon > \frac{2}{n_0}$, следователно $n_0 = \frac{2}{\varepsilon}$. Така, ако

изберем $n_0 = \frac{2}{\varepsilon}$ ще бъде в сила

определението за сходимост:
за $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 = \frac{2}{\varepsilon} : n > n_0$

$$\Rightarrow |a_n - L| = \left|\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n} < \frac{2}{n_0} = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon}} =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}$$

<u>Th 6</u> Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където $a_n = L$ за $\forall\, n \in \mathbb{N}$, има граница L

<u>Th 7</u> Ако към една сходяща числова редица добавим краен брой членове, то пак ще получим сходяща числова редица със същата граница

Ако към една сходяща числова редица извадим краен брой членове, то пак ще получим сходяща числова редица със същата граница.

Th 8 Всяка сходяща числова редица е ограничена.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n} \ldots$$

$$a_1 > a_2 \quad a_2 > a_3 \quad a_3 > a_4 \ldots$$

Th 9: Нека са дадени две сходящи редици $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, тогава

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \pm \frac{3}{5n} \right) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \pm \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{3}{5n}}_{\to 0} =$$

$$= 0 \pm 0 = 0$$

- $\lim_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = a . b$

• Ако за $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$ и $b \neq 0$ то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Th 10 Нека числовата редица $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ е сходяща с граница a и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава $\lim_{n\to\infty} \alpha . a_n =$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha . a$$

Th 11 За $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ е в сила

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{q}}} = 0$$

7) Да се пресметне границата

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 4}{3n^2 + 5n - 2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}\left(2 + \frac{3}{n}^{\to 0} + \frac{4}{n^2}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^2}\left(3 + \frac{5}{n}^{\to 0} - \frac{2}{n^2}^{\to 0}\right)} = \frac{2}{3}$$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5-2n^3+4n^2-3n+5}{4n^4-3n^3+2n^2-n-1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^5}\cdot\left(1-\overset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}+\overset{\to 0}{\frac{4}{n^3}}-\overset{\to 0}{\frac{3}{n^4}}+\overset{\to 0}{\frac{5}{n^5}}\right)}{\cancel{n^4}\left(4-\underset{\to 0}{\frac{3}{n}}+\underset{\to 0}{\frac{2}{n^2}}-\underset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}-\underset{\to 0}{\frac{1}{n^4}}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{4} = \infty$

$\to 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ldots 10 \ldots$

$\to 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad 10 \quad 12 \quad 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \ldots$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1n^3+2n^2-1}{2n^3-n+3} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(-1+\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n^3}}\right)}{\cancel{n^3}\left(2-\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}+\underset{\to 0}{\frac{3}{n^3}}\right)} = -\frac{1}{2}$

⑩ Да се пресмета границата

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$$

$1+2+3+\dots+n$

$1, 2, 3, \dots n$

$a_1 = 1 \quad d = 1 \quad \boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

$$S_n = \frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n$$

$$S_n = \frac{2\cdot 1+(n-1)\cdot 1}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{2+n-1}{2}\cdot n = \frac{n+1}{2}\cdot n =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}{n+2}-\frac{n}{2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{n(n+1)}{2(n+2)}-\frac{\overset{n+2}{n}}{2}}_{2(n+2)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}-2n}{2(n+2)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-1n^1}{2n^1+4}=-\frac{1}{2}$$

$1+2+3+4 - - - \quad - + 96+97+98+99+100$

(11) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{2n^3-n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}=$$

$\frac{1}{n^2}\to 0$, $\frac{1}{n^2}\to 0$, $\frac{3}{n^3}\to 0$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}=0$$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+2n+1}{10n^2+3n+1} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\cancel{3}}\left(1+\overset{\to 0}{\dfrac{2}{n^2}}+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n^3}}\right)}{\cancel{n^2}\left(10+\underset{\to 0}{\dfrac{3}{n}}+\underset{\to 0}{\dfrac{1}{n^2}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{10} = \infty$

(13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-n^3}{7n^2+8n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\cancel{3}}\left(-1+\overset{\to 0}{\dfrac{1}{n}}\right)}{\cancel{n^2}\left(7+\underset{\to 0}{\dfrac{8}{n}}+\underset{\to 0}{\dfrac{1}{n^2}}\right)} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-1 \cdot n}{7} = -\dfrac{1}{7} \lim\limits_{n\to\infty} n = -\infty$

(14) Да се пресметне границата

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

Нека представим дробта $\dfrac{1}{k(k+1)}$ като

сума от елементарни дроби

$$\frac{1}{k(k+1)} = \underbrace{\frac{\overset{k+1}{A}}{k} + \frac{\overset{k}{B}}{k+1}}_{k(k+1)} = \frac{A(k+1)+B\cdot k}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} \quad \text{i.e.}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$1 = A(k+1) + Bk$$

$$1 = Ak + A + Bk$$

$$0 \cdot k + 1 = (A+B)k + A$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \implies B = -1 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\ldots} + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1n-1}{1n} = 1$$