Линейни хомогенни системи диференциални уравнения

Информатика, 2021/2022

Линейна зависимост и независимост на вектор-функции. Детерминанта на Вронски

- Нека са дадени функциите $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, дефинирани за $t \in (\alpha, \beta)$. Тогава

$$X_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1}$$

се нарича вектор-функция.

- Вектор-функциите $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, дефинирани за $t \in (\alpha, \beta)$, се наричат **линейно зависими в** (α, β), ако съществуват константи c_1, c_2, c_3, от които поне едната е различна от 0, такива че равенството

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + c_3 X_3(t) = 0$$

е изпълнено за всяко $t \in (\alpha, \beta)$, т.е.

$$\left| \begin{array}{l} c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + c_3x_3(t) \equiv 0 \\ c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + c_3y_3(t) \equiv 0 \\ c_1z_1(t) + c_2z_2(t) + c_3z_3(t) \equiv 0 \end{array} \right.$$

за всяко $t \in (\alpha, \beta)$.

- Ако равенството

$$c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + c_3X_3(t) = 0$$

е изпълнено за всяко $t \in (\alpha, \beta)$ само при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, то вектор-функциите $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$, се наричат линейно независими в (α, β).

- Функцията

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

се нарича детерминанта на Вронски за вектор-функциите X_1, X_2, X_3 от (1).

Линейни хомогенни системи диференциални уравнения

- Система от вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y + a_{13}(t)\,z \\ \dot{y} = a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y + a_{23}(t)\,z \\ \dot{z} = a_{31}(t)\,x + a_{32}(t)\,y + a_{33}(t)\,z, \end{array} \right. \qquad (2)$$

с неизвестни функциите $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, където $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ са дадени непрекъснати функции в интервала (α, β), се нарича линейна хомогенна система диференциални уравнения. С $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ са означени производните на функциите x, y, z относно t.

- Нека $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{C}$ са дадени константи. Тогава равенствата

$$\left| \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \end{array} \right. \tag{3}$$

се наричат начално условие за системата (2).

- Задача на Коши за системата (2): Да се намери решение на системата (2), което удовлетворява допълнителните условия (3).

Теорема 1 (Теорема за съществуване и единственост)

Нека е дадена системата (2), *където* $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ *са непрекъснати функции в интервала* (α, β). *Тогава съществува единствено решение на задачата на Коши* (2), (3), *като при това то е дефинирано в целия интервал* (α, β).

- Ако въведем означенията

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то системата (2) и началното условие (3) могат да се запишат във вида

$$\dot{X} = AX, \tag{4}$$

$$X(t_0) = X_0.$$

- Въвеждаме оператора

$$L[X] = \dot{X} - AX.$$

Очевидно за произволни константи c_1, c_2 и вектори X_1, X_2 имаме

$$L[c_1X_1 + c_2X_2] = c_1L[X_1] + c_2L[X_2],$$

откъдето следва, че $L[X]$ е линеен оператор.

- От горното следва, че системата (4) (съответно (2)) може да се запише и във вида

$$L[X] = \theta,$$

където

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Нека $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\delta(t)$ са диференцируеми в (α, β). Тогава

$$X = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \delta \end{pmatrix}$$

се нарича решение на системата (4), ако

$$\left| \begin{array}{l} \dot{\varphi} = a_{11}\,\varphi + a_{12}\,\psi + a_{13}\,\delta \\ \dot{\psi} = a_{21}\,\varphi + a_{22}\,\psi + a_{23}\,\delta \\ \dot{\delta} = a_{31}\,\varphi + a_{32}\,\psi + a_{33}\,\delta. \end{array} \right.$$

- Множеството X_1, X_2, X_3 от решения на системата (2) се нарича фундаментална система решения на (2), ако X_1, X_2, X_3 са линейно независими.

Теорема 2 (НДУ за фундаментална система решения)

Функциите X_1, X_2, X_3 *образуват фундаментална система решения на* (2) *тогава и само тогава, когато*

$$W(t) \neq 0 \quad \text{за всяко } t \in (\alpha, \beta).$$

Теорема 3 (НДУ за линейно зависими решения)

Решенията X_1, X_2, X_3 *на* (2) *са линейно зависими тогава и само тогава, когато*

$$W(t) = 0 \quad \text{за всяко } t \in (\alpha, \beta).$$

Теорема 4 (Формула за общото решение на ЛХСДУ)

Нека X_1, X_2, X_3 образуват фундаментална система решения на системата (2). *Тогава общото решение на системата е*

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,$$

където c_1, c_2, c_3 са произволни константи.

Доказателство. Нека $\bar{X}(t)$ е произволно решение на системата (2). Трябва да докажем, че съществуват константи c_1, c_2, c_3, такива че

$$\bar{X} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$$

за всяко $t \in (\alpha, \beta)$.

Нека t_0 е произволна точка от интервала (α, β). Разглеждаме системата

$$\left| \begin{array}{l} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + c_3 x_3(t_0) = \bar{x}(t_0) \\ c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) + c_3 y_3(t_0) = \bar{y}(t_0) \\ c_1 z_1(t_0) + c_2 z_2(t_0) + c_3 z_3(t_0) = \bar{z}(t_0) \end{array} \right.$$

с неизвестни c_1, c_2, c_3. Детерминантата от коефициентите пред неизвестните е равна на $W(t_0)$, а от Теорема 2 знаем, че $W(t_0) \neq 0$. Следователно тази система има единствено решение, което означаваме с $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$.

Сега полагаме

$$\tilde{X}(t) = \bar{c}_1 X_1 + \bar{c}_2 X_2 + \bar{c}_3 X_3.$$

Линейни хомогенни системи диференциални уравнения

Очевидно $\tilde{X}(t)$ също е решение на системата (2). Така получаваме, че $\tilde{X}(t)$ и $\bar{X}(t)$ са решения на задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{l} L[X] = \theta \\ X(t_0) = \bar{X}(t_0). \end{array} \right.$$

От Теорема 1 следва, че тази задача има единствено решение в интервала (α, β). Оттук $\bar{X}(t) = \tilde{X}(t)$ за всяко $t \in (\alpha, \beta)$. Следователно

$$\bar{X}(t) = \bar{c}_1 X_1 + \bar{c}_2 X_2 + \bar{c}_3 X_3.$$

С това теоремата е доказана.