

Метод на Ойлер за решаване задача на Коши с начално условие

Задача от лекции

$$y' = x + \frac{1}{y}, x \in [0,1]$$

$$y(0) = 2$$

Търсим точно решение

търсим общо решение:

```
In[*]:= DSolve[y'[x] == x + 1/y[x], y[x], x]
```

Out[*]=

$$\text{Solve}\left[\frac{(-1)^{2/3} 2^{1/3} x \text{AiryAi}\left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} (x^2 - 2 y[x])\right] - 2 \text{AiryAiPrime}\left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} (x^2 - 2 y[x])\right]}{(-1)^{2/3} 2^{1/3} x \text{AiryBi}\left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} (x^2 - 2 y[x])\right] - 2 \text{AiryBiPrime}\left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} (x^2 - 2 y[x])\right]} + c_1 == 0, y[x]\right]$$

търсим частно решение:

```
In[*]:= DSolve[{y'[x] == x + 1/y[x], y[0] == 2}, y[x], x]
```

Out[*]=

$$\text{Solve}\left[-\frac{\text{AiryAiPrime}\left[(-1)^{1/3} 2^{2/3}\right]}{\text{AiryBiPrime}\left[(-1)^{1/3} 2^{2/3}\right]} + \frac{(-1)^{2/3} 2^{1/3} x \text{AiryAi}\left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} (x^2 - 2 y[x])\right] - 2 \text{AiryAiPrime}\left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} (x^2 - 2 y[x])\right]}{(-1)^{2/3} 2^{1/3} x \text{AiryBi}\left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} (x^2 - 2 y[x])\right] - 2 \text{AiryBiPrime}\left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{1/3} (x^2 - 2 y[x])\right]} == 0, y[x]\right]$$

Извод: Не можем да намерим точно решение с аналитичен метод

Търсим приближено (числено) решение

```
In[*]:= (*въвеждаме условието на задачата*)
a = 0.; b = 1;
x = a;
y = 2.;

f[x_, y_] := x +  $\frac{1}{y}$ 

(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h
]
```

Мрежата е с n = 4 и стъпка h = 0.25

Теоретичната локална грешка е 0.0625

Теоретичната глобална грешка е 0.25

i = 0 x_i = 0. y_i = 2. f_i = 0.5

i = 1 x_i = 0.25 y_i = 2.125 f_i = 0.720588

i = 2 x_i = 0.5 y_i = 2.30515 f_i = 0.933812

i = 3 x_i = 0.75 y_i = 2.5386 f_i = 1.14392

i = 4 x_i = 1. y_i = 2.82458 f_i = 1.35404

Задача 3 а) от файла

$$y' = \frac{y}{x} + 1, x \in [1, 2]$$

$$y(1) = 0$$

Търсим точно решение

търсим общо решение:

```
In[ ]:= Clear[x, y]
```

```
DSolve[y'[x] ==  $\frac{y[x]}{x} + 1$ , y[x], x]
```

```
Out[ ]:=
```

```
{ {y[x] → x c1 + x Log[x] } }
```

търсим частно решение:

```
In[ ]:= Clear[x, y]
```

```
DSolve[{y'[x] ==  $\frac{y[x]}{x} + 1$ , y[1] == 0}, y[x], x]
```

```
Out[ ]:=
```

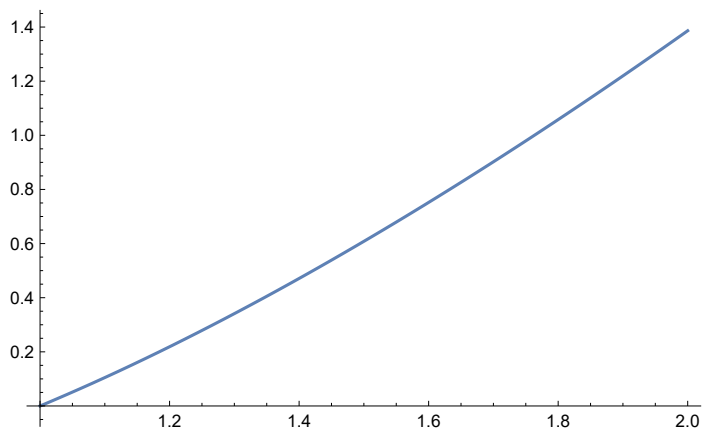
```
{ {y[x] → x Log[x] } }
```

визуализация на точното решение

```
In[ ]:= yt[x_] := x Log[x]
```

```
Plot[yt[x], {x, 1, 2}]
```

```
Out[ ]:=
```



Извод: Не можем да намерим точно решение с аналитичен метод

Търсим приближено (числено) решение

$n = 4$

```
In[*]:= (*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ",  $h^2$ ]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " yточно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, 1, 2}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с n = 4 и стъпка h = 0.25

Теоретичната локална грешка е 0.0625

Теоретичната глобална грешка е 0.25

i = 0 x_i = 1. y_i = 0. f_i = 1. y_{точно} = 0. истинска грешка = 0.

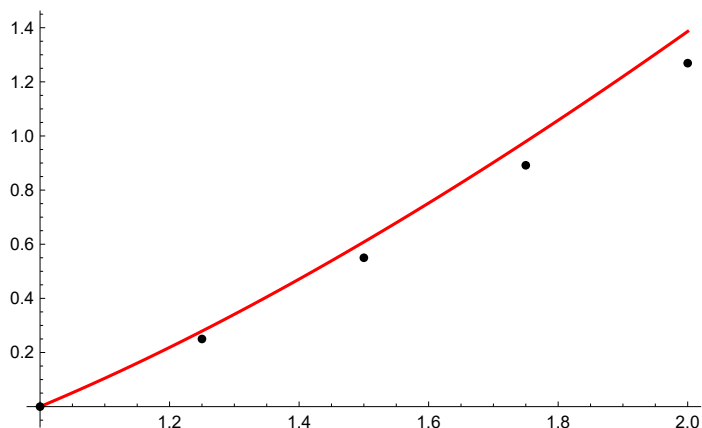
i = 1 x_i = 1.25 y_i = 0.25 f_i = 1.2 y_{точно} = 0.278929 истинска грешка = 0.0289294

i = 2 x_i = 1.5 y_i = 0.55 f_i = 1.36667 y_{точно} = 0.608198 истинска грешка = 0.0581977

i = 3 x_i = 1.75 y_i = 0.891667 f_i = 1.50952 y_{точно} = 0.979328 истинска грешка = 0.087661

i = 4 x_i = 2. y_i = 1.26905 f_i = 1.63452 y_{точно} = 1.38629 истинска грешка = 0.117247

Out[8]=

**n = 10**

```

In[8]:= (*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 10; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " уточно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, 1, 2}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 10$ и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.01

Теоретичната глобална грешка е 0.1

$i = 0$ $x_i = 1$, $y_i = 0$, $f_i = 1$, $y_{\text{точно}} = 0$, истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 1.1$ $y_i = 0.1$ $f_i = 1.09091$ $y_{\text{точно}} = 0.104841$ истинска грешка = 0.0048412

$i = 2$ $x_i = 1.2$ $y_i = 0.209091$ $f_i = 1.17424$ $y_{\text{точно}} = 0.218786$ истинска грешка = 0.00969496

$i = 3$ $x_i = 1.3$ $y_i = 0.326515$ $f_i = 1.25117$ $y_{\text{точно}} = 0.341074$ истинска грешка = 0.0145584

$i = 4$ $x_i = 1.4$ $y_i = 0.451632$ $f_i = 1.32259$ $y_{\text{точно}} = 0.471061$ истинска грешка = 0.0194294

$i = 5$ $x_i = 1.5$ $y_i = 0.583891$ $f_i = 1.38926$ $y_{\text{точно}} = 0.608198$ истинска грешка = 0.0243066

$i = 6$ $x_i = 1.6$ $y_i = 0.722817$ $f_i = 1.45176$ $y_{\text{точно}} = 0.752006$ истинска грешка = 0.0291886

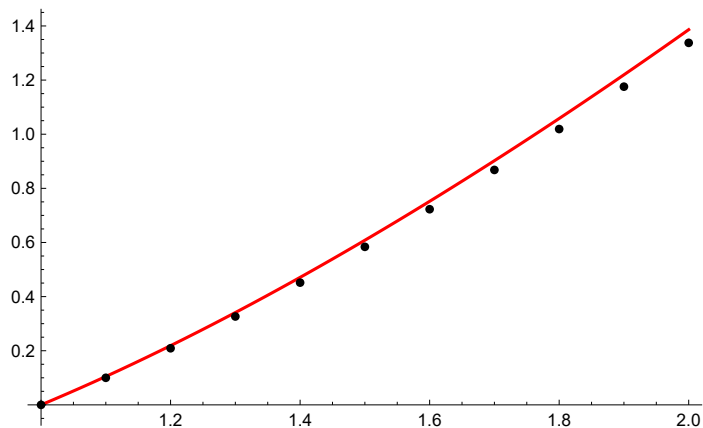
$i = 7$ $x_i = 1.7$ $y_i = 0.867993$ $f_i = 1.51058$ $y_{\text{точно}} = 0.902068$ истинска грешка = 0.0340748

$i = 8$ $x_i = 1.8$ $y_i = 1.01905$ $f_i = 1.56614$ $y_{\text{точно}} = 1.05802$ истинска грешка = 0.0389643

$i = 9$ $x_i = 1.9$ $y_i = 1.17567$ $f_i = 1.61877$ $y_{\text{точно}} = 1.21952$ истинска грешка = 0.0438567

$i = 10$ $x_i = 2$, $y_i = 1.33754$ $f_i = 1.66877$ $y_{\text{точно}} = 1.38629$ истинска грешка = 0.0487516

Out[*]=



$n = 100$

```
In[*]:= (*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 100; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " yточно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, 1, 2}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 100$ и стъпка $h = 0.01$

Теоретичната локална грешка е 0.0001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 1.$ $y_i = 0.$ $f_i = 1.$ $y_{\text{точно}} = 0.$ истинска грешка = $0.$

$i = 1$ $x_i = 1.01$ $y_i = 0.01$ $f_i = 1.0099$ $y_{\text{точно}} = 0.0100498$ истинска грешка = 0.0000498342

$i = 2$ $x_i = 1.02$ $y_i = 0.020099$ $f_i = 1.0197$ $y_{\text{точно}} = 0.0201987$ истинска грешка = 0.0000996699

$i = 3$ $x_i = 1.03$ $y_i = 0.0302961$ $f_i = 1.02941$ $y_{\text{точно}} = 0.0304456$ истинска грешка = 0.000149507

$i = 4$ $x_i = 1.04$ $y_i = 0.0405902$ $f_i = 1.03903$ $y_{\text{точно}} = 0.0407895$ истинска грешка = 0.000199346

$i = 5$ $x_i = 1.05$ $y_i = 0.0509805$ $f_i = 1.04855$ $y_{\text{точно}} = 0.0512297$ истинска грешка = 0.000249187

$i = 6$ $x_i = 1.06$ $y_i = 0.061466$ $f_i = 1.05799$ $y_{\text{точно}} = 0.061765$ истинска грешка = 0.000299028

$i = 7$ $x_i = 1.07$ $y_i = 0.0720459$ $f_i = 1.06733$ $y_{\text{точно}} = 0.0723948$ истинска грешка = 0.000348872

$i = 8$ $x_i = 1.08$ $y_i = 0.0827192$ $f_i = 1.07659$ $y_{\text{точно}} = 0.0831179$ истинска грешка = 0.000398716

$i = 9$ $x_i = 1.09$ $y_i = 0.0934851$ $f_i = 1.08577$ $y_{\text{точно}} = 0.0939337$ истинска грешка = 0.000448562

$i = 10$ $x_i = 1.1$ $y_i = 0.104343$ $f_i = 1.09486$ $y_{\text{точно}} = 0.104841$ истинска грешка = 0.000498409

$i = 11$ $x_i = 1.11$ $y_i = 0.115291$ $f_i = 1.10387$ $y_{\text{точно}} = 0.11584$ истинска грешка = 0.000548258
 $i = 12$ $x_i = 1.12$ $y_i = 0.12633$ $f_i = 1.11279$ $y_{\text{точно}} = 0.126928$ истинска грешка = 0.000598107
 $i = 13$ $x_i = 1.13$ $y_i = 0.137458$ $f_i = 1.12164$ $y_{\text{точно}} = 0.138106$ истинска грешка = 0.000647958
 $i = 14$ $x_i = 1.14$ $y_i = 0.148674$ $f_i = 1.13042$ $y_{\text{точно}} = 0.149372$ истинска грешка = 0.00069781
 $i = 15$ $x_i = 1.15$ $y_i = 0.159979$ $f_i = 1.13911$ $y_{\text{точно}} = 0.160726$ истинска грешка = 0.000747663
 $i = 16$ $x_i = 1.16$ $y_i = 0.17137$ $f_i = 1.14773$ $y_{\text{точно}} = 0.172167$ истинска грешка = 0.000797517
 $i = 17$ $x_i = 1.17$ $y_i = 0.182847$ $f_i = 1.15628$ $y_{\text{точно}} = 0.183694$ истинска грешка = 0.000847373
 $i = 18$ $x_i = 1.18$ $y_i = 0.19441$ $f_i = 1.16475$ $y_{\text{точно}} = 0.195307$ истинска грешка = 0.000897229
 $i = 19$ $x_i = 1.19$ $y_i = 0.206057$ $f_i = 1.17316$ $y_{\text{точно}} = 0.207004$ истинска грешка = 0.000947086
 $i = 20$ $x_i = 1.2$ $y_i = 0.217789$ $f_i = 1.18149$ $y_{\text{точно}} = 0.218786$ истинска грешка = 0.000996944
 $i = 21$ $x_i = 1.21$ $y_i = 0.229604$ $f_i = 1.18976$ $y_{\text{точно}} = 0.230651$ истинска грешка = 0.0010468
 $i = 22$ $x_i = 1.22$ $y_i = 0.241501$ $f_i = 1.19795$ $y_{\text{точно}} = 0.242598$ истинска грешка = 0.00109666
 $i = 23$ $x_i = 1.23$ $y_i = 0.253481$ $f_i = 1.20608$ $y_{\text{точно}} = 0.254627$ истинска грешка = 0.00114653
 $i = 24$ $x_i = 1.24$ $y_i = 0.265542$ $f_i = 1.21415$ $y_{\text{точно}} = 0.266738$ истинска грешка = 0.00119639
 $i = 25$ $x_i = 1.25$ $y_i = 0.277683$ $f_i = 1.22215$ $y_{\text{точно}} = 0.278929$ истинска грешка = 0.00124625
 $i = 26$ $x_i = 1.26$ $y_i = 0.289905$ $f_i = 1.23008$ $y_{\text{точно}} = 0.291201$ истинска грешка = 0.00129611
 $i = 27$ $x_i = 1.27$ $y_i = 0.302205$ $f_i = 1.23796$ $y_{\text{точно}} = 0.303551$ истинска грешка = 0.00134598
 $i = 28$ $x_i = 1.28$ $y_i = 0.314585$ $f_i = 1.24577$ $y_{\text{точно}} = 0.315981$ истинска грешка = 0.00139584
 $i = 29$ $x_i = 1.29$ $y_i = 0.327043$ $f_i = 1.25352$ $y_{\text{точно}} = 0.328488$ истинска грешка = 0.00144571
 $i = 30$ $x_i = 1.3$ $y_i = 0.339578$ $f_i = 1.26121$ $y_{\text{точно}} = 0.341074$ истинска грешка = 0.00149558
 $i = 31$ $x_i = 1.31$ $y_i = 0.35219$ $f_i = 1.26885$ $y_{\text{точно}} = 0.353736$ истинска грешка = 0.00154544
 $i = 32$ $x_i = 1.32$ $y_i = 0.364879$ $f_i = 1.27642$ $y_{\text{точно}} = 0.366474$ истинска грешка = 0.00159531
 $i = 33$ $x_i = 1.33$ $y_i = 0.377643$ $f_i = 1.28394$ $y_{\text{точно}} = 0.379288$ истинска грешка = 0.00164518
 $i = 34$ $x_i = 1.34$ $y_i = 0.390482$ $f_i = 1.2914$ $y_{\text{точно}} = 0.392177$ истинска грешка = 0.00169505
 $i = 35$ $x_i = 1.35$ $y_i = 0.403396$ $f_i = 1.29881$ $y_{\text{точно}} = 0.405141$ истинска грешка = 0.00174492
 $i = 36$ $x_i = 1.36$ $y_i = 0.416384$ $f_i = 1.30616$ $y_{\text{точно}} = 0.418179$ истинска грешка = 0.00179479
 $i = 37$ $x_i = 1.37$ $y_i = 0.429446$ $f_i = 1.31346$ $y_{\text{точно}} = 0.431291$ истинска грешка = 0.00184467
 $i = 38$ $x_i = 1.38$ $y_i = 0.442581$ $f_i = 1.32071$ $y_{\text{точно}} = 0.444475$ истинска грешка = 0.00189454
 $i = 39$ $x_i = 1.39$ $y_i = 0.455788$ $f_i = 1.3279$ $y_{\text{точно}} = 0.457732$ истинска грешка = 0.00194441
 $i = 40$ $x_i = 1.4$ $y_i = 0.469067$ $f_i = 1.33505$ $y_{\text{точно}} = 0.471061$ истинска грешка = 0.00199429
 $i = 41$ $x_i = 1.41$ $y_i = 0.482417$ $f_i = 1.34214$ $y_{\text{точно}} = 0.484461$ истинска грешка = 0.00204416
 $i = 42$ $x_i = 1.42$ $y_i = 0.495839$ $f_i = 1.34918$ $y_{\text{точно}} = 0.497933$ истинска грешка = 0.00209404
 $i = 43$ $x_i = 1.43$ $y_i = 0.509331$ $f_i = 1.35618$ $y_{\text{точно}} = 0.511474$ истинска грешка = 0.00214391
 $i = 44$ $x_i = 1.44$ $y_i = 0.522892$ $f_i = 1.36312$ $y_{\text{точно}} = 0.525086$ истинска грешка = 0.00219379
 $i = 45$ $x_i = 1.45$ $y_i = 0.536523$ $f_i = 1.37002$ $y_{\text{точно}} = 0.538767$ истинска грешка = 0.00224366
 $i = 46$ $x_i = 1.46$ $y_i = 0.550224$ $f_i = 1.37687$ $y_{\text{точно}} = 0.552517$ истинска грешка = 0.00229354
 $i = 47$ $x_i = 1.47$ $y_i = 0.563992$ $f_i = 1.38367$ $y_{\text{точно}} = 0.566336$ истинска грешка = 0.00234342
 $i = 48$ $x_i = 1.48$ $y_i = 0.577829$ $f_i = 1.39042$ $y_{\text{точно}} = 0.580222$ истинска грешка = 0.0023933
 $i = 49$ $x_i = 1.49$ $y_i = 0.591733$ $f_i = 1.39714$ $y_{\text{точно}} = 0.594176$ истинска грешка = 0.00244318

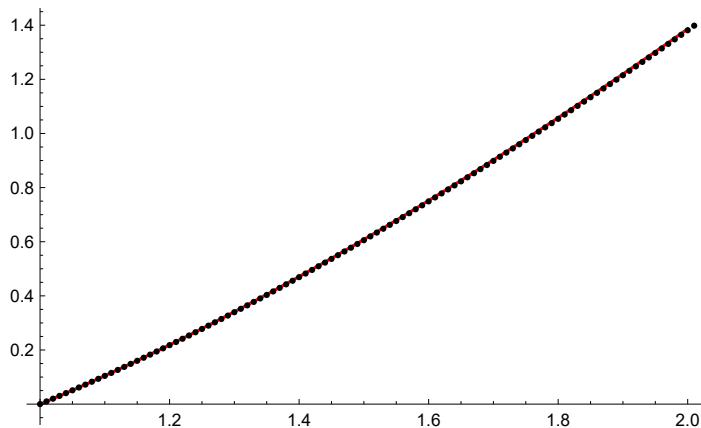
$i = 50$ $x_i = 1.5$ $y_i = 0.605705$ $f_i = 1.4038$ $y_{\text{точно}} = 0.608198$ истинска грешка = 0.00249306
 $i = 51$ $x_i = 1.51$ $y_i = 0.619743$ $f_i = 1.41043$ $y_{\text{точно}} = 0.622286$ истинска грешка = 0.00254294
 $i = 52$ $x_i = 1.52$ $y_i = 0.633847$ $f_i = 1.417$ $y_{\text{точно}} = 0.63644$ истинска грешка = 0.00259282
 $i = 53$ $x_i = 1.53$ $y_i = 0.648017$ $f_i = 1.42354$ $y_{\text{точно}} = 0.65066$ истинска грешка = 0.0026427
 $i = 54$ $x_i = 1.54$ $y_i = 0.662252$ $f_i = 1.43003$ $y_{\text{точно}} = 0.664945$ истинска грешка = 0.00269258
 $i = 55$ $x_i = 1.55$ $y_i = 0.676553$ $f_i = 1.43649$ $y_{\text{точно}} = 0.679295$ истинска грешка = 0.00274246
 $i = 56$ $x_i = 1.56$ $y_i = 0.690918$ $f_i = 1.4429$ $y_{\text{точно}} = 0.69371$ истинска грешка = 0.00279234
 $i = 57$ $x_i = 1.57$ $y_i = 0.705346$ $f_i = 1.44927$ $y_{\text{точно}} = 0.708189$ истинска грешка = 0.00284222
 $i = 58$ $x_i = 1.58$ $y_i = 0.719839$ $f_i = 1.45559$ $y_{\text{точно}} = 0.722731$ истинска грешка = 0.00289211
 $i = 59$ $x_i = 1.59$ $y_i = 0.734395$ $f_i = 1.46188$ $y_{\text{точно}} = 0.737337$ истинска грешка = 0.00294199
 $i = 60$ $x_i = 1.6$ $y_i = 0.749014$ $f_i = 1.46813$ $y_{\text{точно}} = 0.752006$ истинска грешка = 0.00299188
 $i = 61$ $x_i = 1.61$ $y_i = 0.763695$ $f_i = 1.47434$ $y_{\text{точно}} = 0.766737$ истинска грешка = 0.00304176
 $i = 62$ $x_i = 1.62$ $y_i = 0.778439$ $f_i = 1.48052$ $y_{\text{точно}} = 0.78153$ истинска грешка = 0.00309164
 $i = 63$ $x_i = 1.63$ $y_i = 0.793244$ $f_i = 1.48665$ $y_{\text{точно}} = 0.796385$ истинска грешка = 0.00314153
 $i = 64$ $x_i = 1.64$ $y_i = 0.80811$ $f_i = 1.49275$ $y_{\text{точно}} = 0.811302$ истинска грешка = 0.00319141
 $i = 65$ $x_i = 1.65$ $y_i = 0.823038$ $f_i = 1.49881$ $y_{\text{точно}} = 0.826279$ истинска грешка = 0.0032413
 $i = 66$ $x_i = 1.66$ $y_i = 0.838026$ $f_i = 1.50483$ $y_{\text{точно}} = 0.841317$ истинска грешка = 0.00329119
 $i = 67$ $x_i = 1.67$ $y_i = 0.853074$ $f_i = 1.51082$ $y_{\text{точно}} = 0.856415$ истинска грешка = 0.00334107
 $i = 68$ $x_i = 1.68$ $y_i = 0.868183$ $f_i = 1.51678$ $y_{\text{точно}} = 0.871574$ истинска грешка = 0.00339096
 $i = 69$ $x_i = 1.69$ $y_i = 0.88335$ $f_i = 1.52269$ $y_{\text{точно}} = 0.886791$ истинска грешка = 0.00344085
 $i = 70$ $x_i = 1.7$ $y_i = 0.898577$ $f_i = 1.52857$ $y_{\text{точно}} = 0.902068$ истинска грешка = 0.00349074
 $i = 71$ $x_i = 1.71$ $y_i = 0.913863$ $f_i = 1.53442$ $y_{\text{точно}} = 0.917404$ истинска грешка = 0.00354062
 $i = 72$ $x_i = 1.72$ $y_i = 0.929207$ $f_i = 1.54024$ $y_{\text{точно}} = 0.932798$ истинска грешка = 0.00359051
 $i = 73$ $x_i = 1.73$ $y_i = 0.94461$ $f_i = 1.54602$ $y_{\text{точно}} = 0.94825$ истинска грешка = 0.0036404
 $i = 74$ $x_i = 1.74$ $y_i = 0.96007$ $f_i = 1.55176$ $y_{\text{точно}} = 0.96376$ истинска грешка = 0.00369029
 $i = 75$ $x_i = 1.75$ $y_i = 0.975587$ $f_i = 1.55748$ $y_{\text{точно}} = 0.979328$ истинска грешка = 0.00374018
 $i = 76$ $x_i = 1.76$ $y_i = 0.991162$ $f_i = 1.56316$ $y_{\text{точно}} = 0.994952$ истинска грешка = 0.00379007
 $i = 77$ $x_i = 1.77$ $y_i = 1.00679$ $f_i = 1.56881$ $y_{\text{точно}} = 1.01063$ истинска грешка = 0.00383996
 $i = 78$ $x_i = 1.78$ $y_i = 1.02248$ $f_i = 1.57443$ $y_{\text{точно}} = 1.02637$ истинска грешка = 0.00388985
 $i = 79$ $x_i = 1.79$ $y_i = 1.03823$ $f_i = 1.58001$ $y_{\text{точно}} = 1.04217$ истинска грешка = 0.00393974
 $i = 80$ $x_i = 1.8$ $y_i = 1.05403$ $f_i = 1.58557$ $y_{\text{точно}} = 1.05802$ истинска грешка = 0.00398963
 $i = 81$ $x_i = 1.81$ $y_i = 1.06988$ $f_i = 1.5911$ $y_{\text{точно}} = 1.07392$ истинска грешка = 0.00403952
 $i = 82$ $x_i = 1.82$ $y_i = 1.08579$ $f_i = 1.59659$ $y_{\text{точно}} = 1.08988$ истинска грешка = 0.00408941
 $i = 83$ $x_i = 1.83$ $y_i = 1.10176$ $f_i = 1.60205$ $y_{\text{точно}} = 1.1059$ истинска грешка = 0.0041393
 $i = 84$ $x_i = 1.84$ $y_i = 1.11778$ $f_i = 1.60749$ $y_{\text{точно}} = 1.12197$ истинска грешка = 0.0041892
 $i = 85$ $x_i = 1.85$ $y_i = 1.13385$ $f_i = 1.61289$ $y_{\text{точно}} = 1.13809$ истинска грешка = 0.00423909
 $i = 86$ $x_i = 1.86$ $y_i = 1.14998$ $f_i = 1.61827$ $y_{\text{точно}} = 1.15427$ истинска грешка = 0.00428898
 $i = 87$ $x_i = 1.87$ $y_i = 1.16617$ $f_i = 1.62362$ $y_{\text{точно}} = 1.1705$ истинска грешка = 0.00433887
 $i = 88$ $x_i = 1.88$ $y_i = 1.1824$ $f_i = 1.62894$ $y_{\text{точно}} = 1.18679$ истинска грешка = 0.00438877

```

i = 89 xi = 1.89 yi = 1.19869 fi = 1.63423 yточно = 1.20313 истинска грешка = 0.00443866
i = 90 xi = 1.9 yi = 1.21503 fi = 1.63949 yточно = 1.21952 истинска грешка = 0.00448855
i = 91 xi = 1.91 yi = 1.23143 fi = 1.64473 yточно = 1.23597 истинска грешка = 0.00453845
i = 92 xi = 1.92 yi = 1.24788 fi = 1.64994 yточно = 1.25246 истинска грешка = 0.00458834
i = 93 xi = 1.93 yi = 1.26438 fi = 1.65512 yточно = 1.26901 истинска грешка = 0.00463823
i = 94 xi = 1.94 yi = 1.28093 fi = 1.66027 yточно = 1.28561 истинска грешка = 0.00468813
i = 95 xi = 1.95 yi = 1.29753 fi = 1.6654 yточно = 1.30227 истинска грешка = 0.00473802
i = 96 xi = 1.96 yi = 1.31418 fi = 1.6705 yточно = 1.31897 истинска грешка = 0.00478792
i = 97 xi = 1.97 yi = 1.33089 fi = 1.67558 yточно = 1.33573 истинска грешка = 0.00483781
i = 98 xi = 1.98 yi = 1.34764 fi = 1.68063 yточно = 1.35253 истинска грешка = 0.00488771
i = 99 xi = 1.99 yi = 1.36445 fi = 1.68565 yточно = 1.36939 истинска грешка = 0.0049376
i = 100 xi = 2. yi = 1.38131 fi = 1.69065 yточно = 1.38629 истинска грешка = 0.0049875

```

Out[]:=



При достигане на точност 10^{-6}

```
In[ ]:= a = 1.; b = 2;
```

```
Clear[n]
```

```
Reduce[ $\frac{b-a}{n} \leq 10^{-6}$ , n]
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[]:=

```
n < 0 || n ≥ 1. × 106
```

```

In[29]:= (*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 106; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
Мрежата е с n = 1000000 и стъпка h = 1.×10-6
Теоретичната локална грешка е 1.×10-12
Теоретичната глобална грешка е 1.×10-6

```

Извод: След като пунахме кода ни беше необходимо твърде много време за смятане

Модифициран метод на Ойлер за решаване задача на Коши с начално условие

$n = 4$

```
In[15]:= (*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ",  $h^3$ ]
Print["Теоретичната глобална грешка е ",  $h^2$ ]
(*намираме неизвестните стойности за  $y_i$ *)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 =  $x + \frac{h}{2}$ ;
  y12 =  $y + \frac{h}{2} * f[x, y]$ ;
  Print["i = ", i, "  $x_i$  = ", x, "  $y_i$  = ", y, "  $f_i$  = ",
    f[x, y], "  $x_{i+1/2}$  = ", x12, "  $y_{i+1/2}$  = ", y12, "  $f_{i+1/2}$  = ", f[x12, y12],
    "  $y_{\text{точно}}$  = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, 1, 2}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.015625

Теоретичната глобална грешка е 0.0625

$i = 0$ $x_i = 1$. $y_i = 0$. $f_i = 1$. $x_{i+1/2} = 1.125$

$y_{i+1/2} = 0.125$ $f_{i+1/2} = 1.11111$ $y_{\text{точно}} = 0$. истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 1.25$ $y_i = 0.277778$ $f_i = 1.22222$ $x_{i+1/2} = 1.375$ $y_{i+1/2} =$

0.430556 $f_{i+1/2} = 1.31313$ $y_{\text{точно}} = 0.278929$ истинска грешка = 0.00115166

$i = 2$ $x_i = 1.5$ $y_i = 0.606061$ $f_i = 1.40404$ $x_{i+1/2} = 1.625$ $y_{i+1/2} =$

0.781566 $f_{i+1/2} = 1.48096$ $y_{\text{точно}} = 0.608198$ истинска грешка = 0.00213706

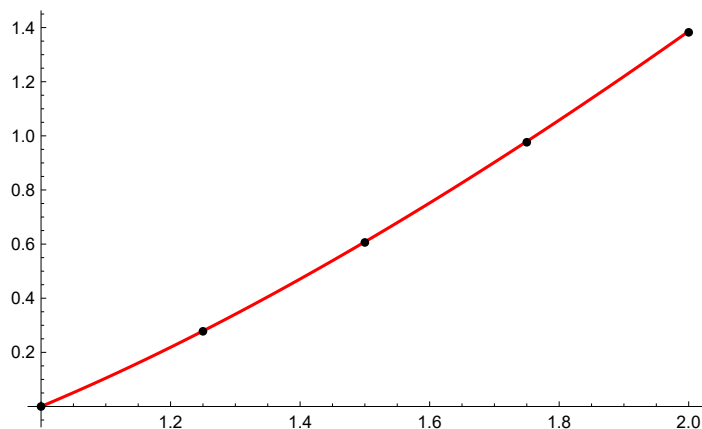
$i = 3$ $x_i = 1.75$ $y_i = 0.976301$ $f_i = 1.55789$ $x_{i+1/2} = 1.875$ $y_{i+1/2} =$

1.17104 $f_{i+1/2} = 1.62455$ $y_{\text{точно}} = 0.979328$ истинска грешка = 0.00302615

$i = 4$ $x_i = 2$. $y_i = 1.38244$ $f_i = 1.69122$ $x_{i+1/2} = 2.125$ $y_{i+1/2} =$

1.59384 $f_{i+1/2} = 1.75004$ $y_{\text{точно}} = 1.38629$ истинска грешка = 0.00385458

Out[28]=



При достигане на точност 10^{-6}

In[39]:= **a = 1.; b = 2;**

Clear[n]

Reduce $\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \leq 10^{-6}, n\right]$

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[41]=

$n \leq -1000. \mid \mid n \geq 1000.$

```

In[42]:= (*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 103; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

Мрежата е с n = 1000 и стъпка h = 0.001
Теоретичната локална грешка е 1.×10-9
Теоретичната глобална грешка е 1.×10-6

```