Криви на Безие: Въведение

Защо се нуждаем от нов вид на параметричните криви?

- Парам. криви не са много геометрични, т.е. трудно се разбира геом. св-ва на **C** без допълн. анализ.
- Коеф. нямат геом. значение и не може да се предвиди промяната на форма-та на **C** при промяна на коеф., $\therefore$ конструирането на **C** е много трудно.

Дизайнерите не се грижат за мат. основа, а за резултата.

Изисквания към системата за дизайн на **C**:

1. Интуитивна:

Всяка стъпка и всеки алгоритъм да имат интуитивно и геом. тълкуване.

2. Гъвкава:

Да осигурява повече контрол в/у формата на **C**. Начинът да бъде лесен, интуитивен и геометричен.

3. С уеднаквен подход:

Начинът за разл. типове **C** трябва да бъде един и същ.

4. Инвариантна:

С да не променя геометрията си при геом. преобразувания (напр. трансла-ция, ротация и афинитет).

5. Ефикасна и числено стабилна:

Да конструира желаната **С** бързо и прецизно, както и голямото количество изчисления да не „изопачат“ формата на **С** (т.е. да има числена стабилност).

В тази дисциплина се фокусира върху някои техники за кривинен дизайн, които могат да удовлетворят горните критерии.

Дискутират се ***криви на Безие***, ***основни (базисни или Б-) сплайн криви*** и ***нееднородни рационални основни сплайн криви***.

Обединяващата тема на тези техники притежава следните **предимства**:

1. Дизайнерът разполага с множество от ***контролни точки***, за да породи **C**, която да следва насоката, определена от мн-вото контр. точки.

2. Дизайнерът може **да промени положението** на някои контр. т. и други характеристики **за изменяне на формата** на **C**. Не се работи с уравнения на **C**.

3. Ако е необходимо, дизайнерът може **да добави контр. т.** и друга съществена информация **без да променя формата** на **C**. Така той има повече свобода за редактиране на **C**, защото това увеличава степента на свобода на **C**.

4. Дизайнерът може дори **да раздели кривата на две части** за „микро“ редактиране и след това да ги съедини отново в една цяла **C**.

5. Има много геометрични, интуитивни и числено стабилни **алгоритми** за намиране на точки в/у **C** без да се знае уравнението на **C**.

6. Веднъж изучавайки случая на **C**, съотв. част за повърхнина **S** е лесно усвоима. Подходът за **C се прилага директно** за **S**.

Най-фундаменталните са ***кривите на Безие***. Открити са едновременно и независимо от Пол дьо Кастелжо (Paul de Casteljau) в „Ситроен“ и Пиер Безие (Pierre E. Bezier) в „Рено“ около края на 50-те и началото на 60-те години на XX век.

Базовите сплайн криви или накратко ***Б-сплайн кривите***, са изучени от Николай Лобачевски (Nikolai Lobachevsky), чиято най-голяма заслуга към математиката е т. нар. хиперболична (неевклидова) геометрия в края на XVIII век.

Възприемаме една съвременна версия, развита от Карл дьо Боор (Carl de Boor), Морис Кокс (Maurice Cox) и Лоис Мансфийлд (Lois Mansfield) в края на 70-те г. на XX век. Кривите на Безие са частен случай на Б-сплайн кривите.

Тези два типа криви са **полиномни параметрични криви**.

Но не са приложими за окръжностите напр.

Чрез въвеждане на **хомогенните координати**,

кривите стават рационални и

кривите на Безие и Б-сплайн кривите

се обобщават съотв. до

рационални криви на Безие и

нееднородни рационални Б-сплайн криви

или накратко НЕРБС (NURBS) криви.

Очевидно, рац. криви на Безие са по-мощни отколкото кривите на Безие, понеже първите могат да представят окръжности, а вторите – не.

Аналогично, НЕРБС кривите са по-мощни отколкото Б-сплайн кривите.

Построяване на криви на Безие

Дадени са n+1 т. $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ в простр. – *контролни точки*.

Кривата на Безие (Bézier):

$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i$$

$$B_{n,i}(u) = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}$$

$\therefore$ т. $\mathbf{P}(u)$ е средно „претеглената“ на всички контр. т. с тегла $B_{n,i}(u)$.

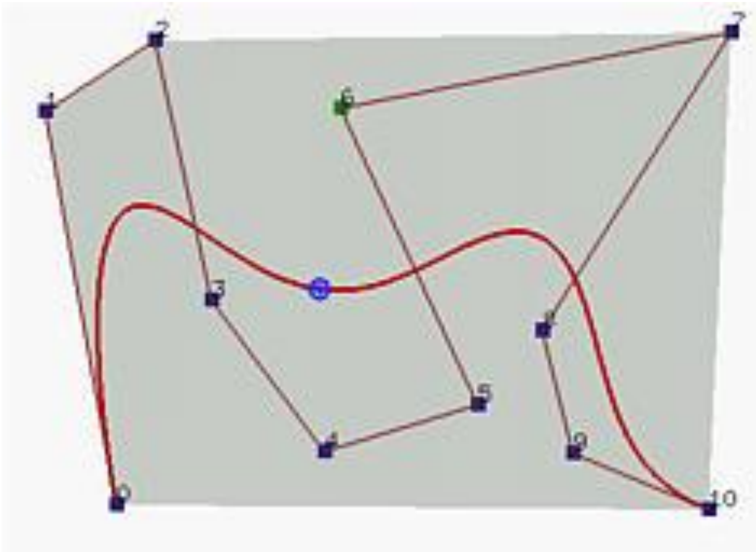
Отсечките (*рамената*) $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_{n-1}\mathbf{P}_n$: *контролна начупена линия* или *контролен многоъгълник* (*полигон*) Π.

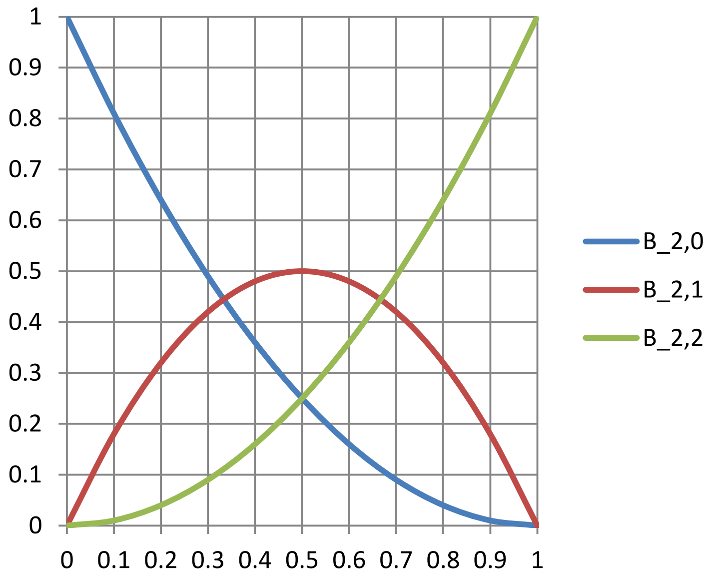
$B_{n,i}(u)$, $0 \le i \le n$ – *базови функции на Безие* (полиноми на Бернщайн), $u \in [0,1]$.

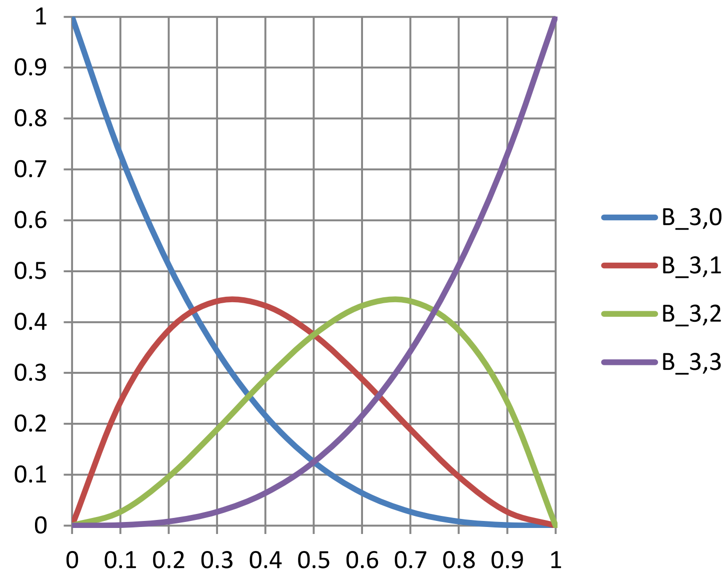
Коеф. $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ в $B_{n,i}$ накр. се означава като $\binom{n}{i}$, чете се „n над i“

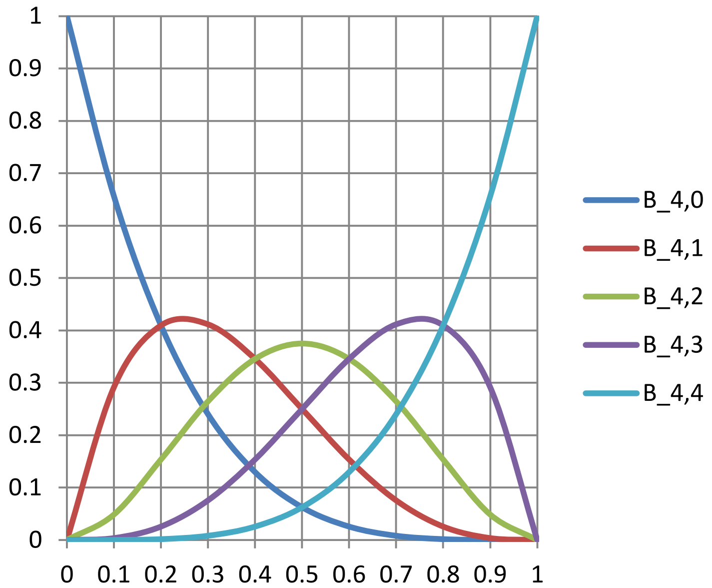
– *бином коефициент*.

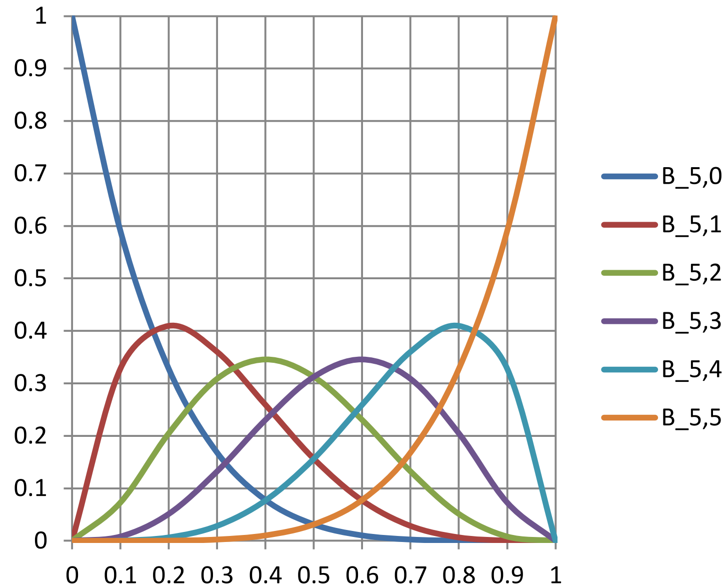
Напр. крива на Безие с 11 контр. т. и синята т. е **C**(0,4).




B_2,0
B_2,1
B_2,2
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

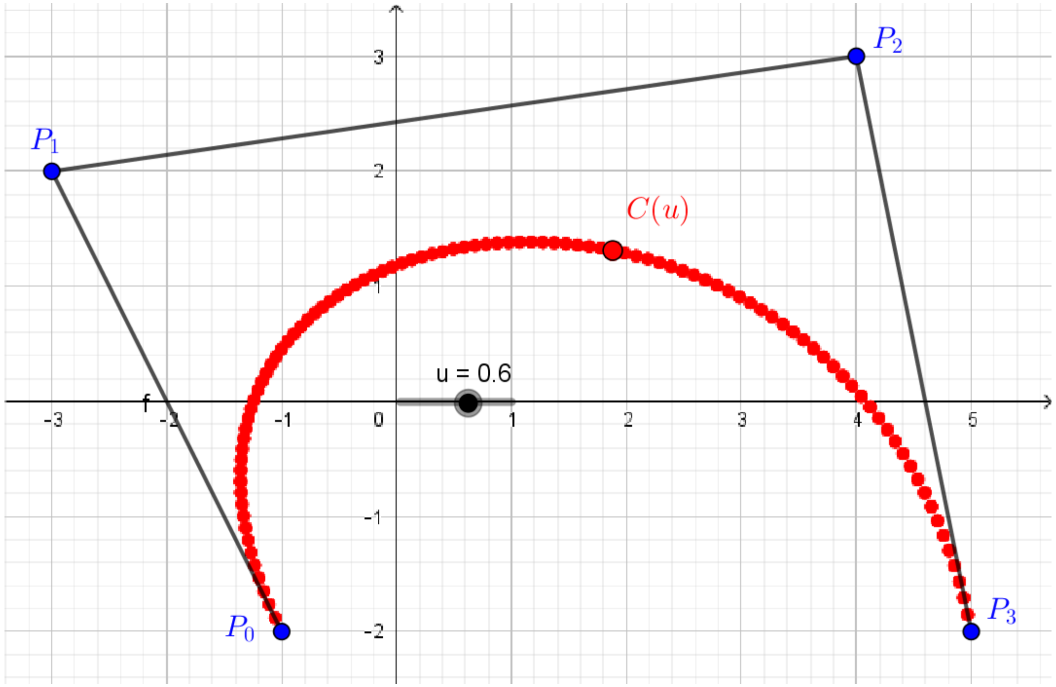

B_3,0
B_3,1
B_3,2
B_3,3
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

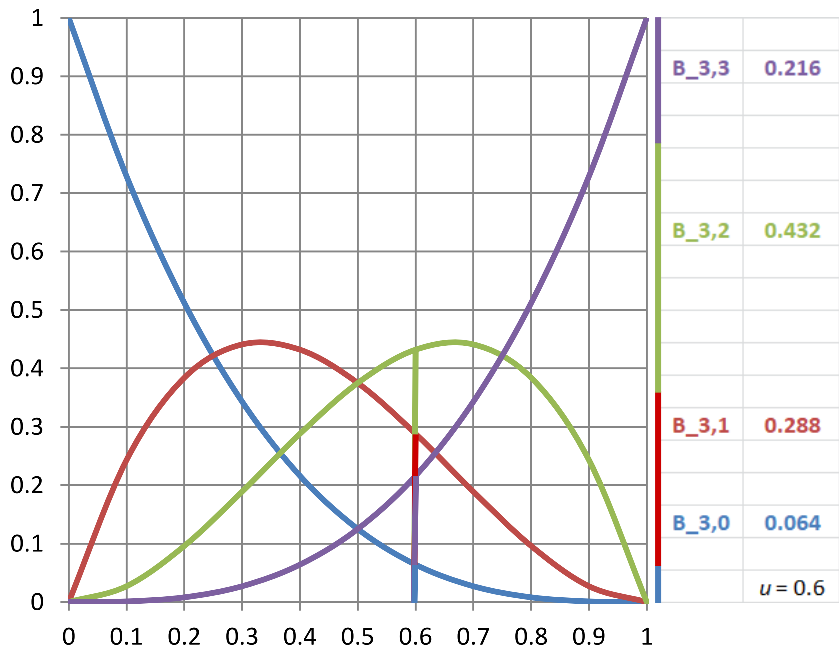

B_4,0
B_4,1
B_4,2
B_4,3
B_4,4
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1


B_5,0
B_5,1
B_5,2
B_5,3
B_5,4
B_5,5
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1

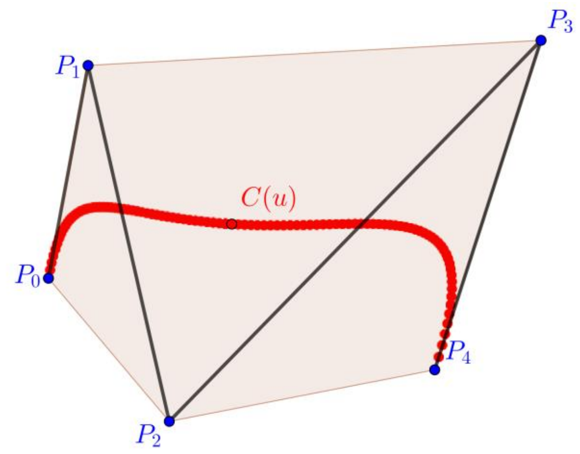
Основни свойства на кривата на Безие **C**:

1. **Степента на C, дефинирана чрез *n*+1 контр. т., е *n*.**
2. **C минава през крайните си контр. т. P_0 и P_n.**
3. **Неотрицателност на коефициентите.**
4. **Разделяне на цялото.** $\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u) = 1, \quad \forall u$, напр. за *n* = 3, *u* = 0,6:



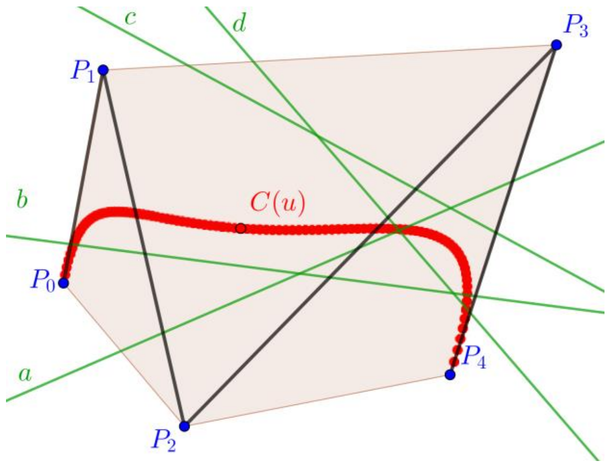


5. **Изпъкнала обвивка**.



6. **Променливо намаляване**:

Няма права (равнина) пресичаща **C** повече пъти отколкото тя пресича Π.



7. Афинна инвариантност.

Случаят когато интервалът на *u* не е [0;1]

Нека $u \in [a;b]$. Тогава $u \in [a;b] \to \bar{u} \in [0,1]$:

$$\bar{u} = \frac{u-a}{b-a}$$

Заместваме това $\bar{u}$ в $B_{n,i}(\bar{u})$ и $\Rightarrow$

$$B_{n,i}(u) = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)^{i}\left(1-\frac{u-a}{b-a}\right)^{n-i}$$

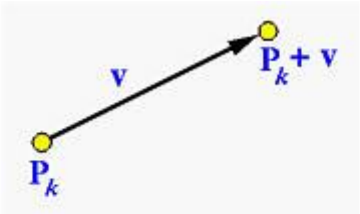
Преместване на контролните точки

Как ще се промени формата на кривата, ако една контролна точка се премести?

Нека е дадена Безие кр. $\mathbf{C}(u)$

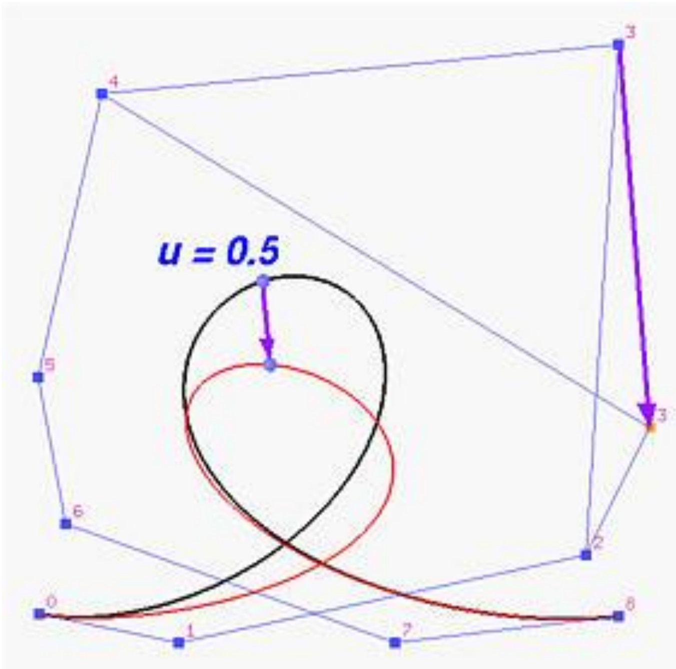
$$\mathbf{C}(u) = \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i$$

после $\mathbf{P}_k \to \mathbf{P}_k + \mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ – вектор на транслация.



$$\mathbf{D}(u) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i + B_{n,k}(u)(\mathbf{P}_k + \mathbf{v}) + \sum_{i=k+1}^{n} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i$$

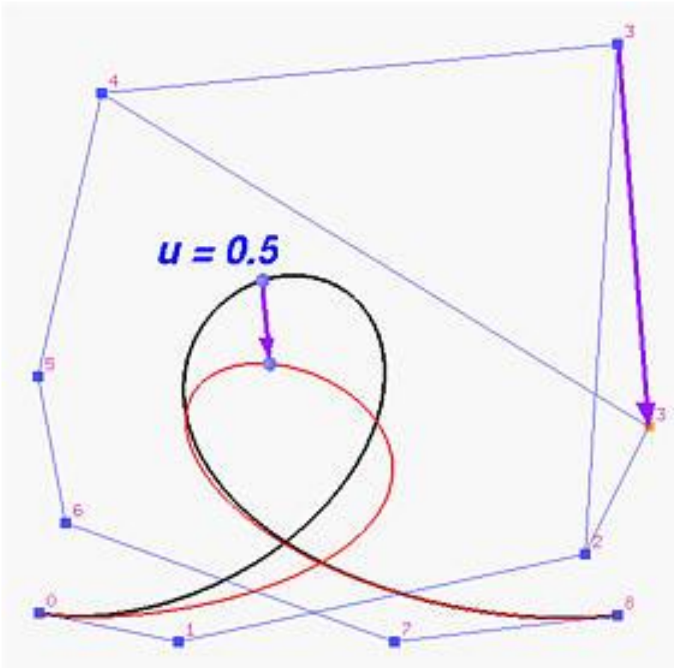
$$= \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i + B_{n,k}(u)\mathbf{v} = \mathbf{C}(u) + B_{n,k}(u)\mathbf{v}$$



На фиг. **C**(u) от ст. 8 се променя чрез транслация на $\mathbf{P}_3$ с в-р **v**, т.е. $n = 8$, $k = 3$. Получава се **D**(u).

Напр. **C**(0,5) $\to$ **D**(0,5). Разст. от **C**(0,5) до **D**(0,5) е $= |B_{8,3}(0,5)\mathbf{v}|$

$$B_{8,3}(0{,}5)\mathbf{v} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!}(0{,}5)^3(1-0{,}5)^{8-3}\mathbf{v} \approx 0{,}22\ \mathbf{v}$$



$B_{n,k}(u) > 0,\ u \in (0;1) \quad \Rightarrow \quad B_{n,k}(u)\mathbf{v} \neq \mathbf{o},\ u \in (0;1).$

Само $B_{n,k}(0) = B_{n,k}(1) = 0 \quad \Rightarrow$ само $\mathbf{P}(0)$ и $\mathbf{P}(1)$ са ***неподвижни***. $\therefore$

Преместването на една контр. точка предизвиква

глобална транслация **на кр. на Безие**

по направление на преместването на контр. ѝ точка.

Алгоритъм на дьо Кастелжо
за намиране на точка върху крива на Безие

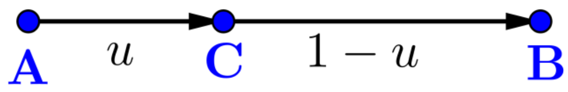
Да се намери т. **P**(u) за дадено $u \in (0;1)$.

Това става чрез ***алгоритъма на дьо Кастелжо*** (алг. дК).

Полагаме: **00** за $\mathbf{P}_0$, **01** за $\mathbf{P}_1$, ..., **0*i*** за $\mathbf{P}_i$, ..., **0*n*** за $\mathbf{P}_n$. Това е 0. итерация.

После получ. подобни точки за следв. итерации **1**, **2**, **3** и т.н.

Основната идея на алг. дК – избир. на т. **C** от отс. **AB**: d(**A**,**C**) / d(**A**, **B**) = u.



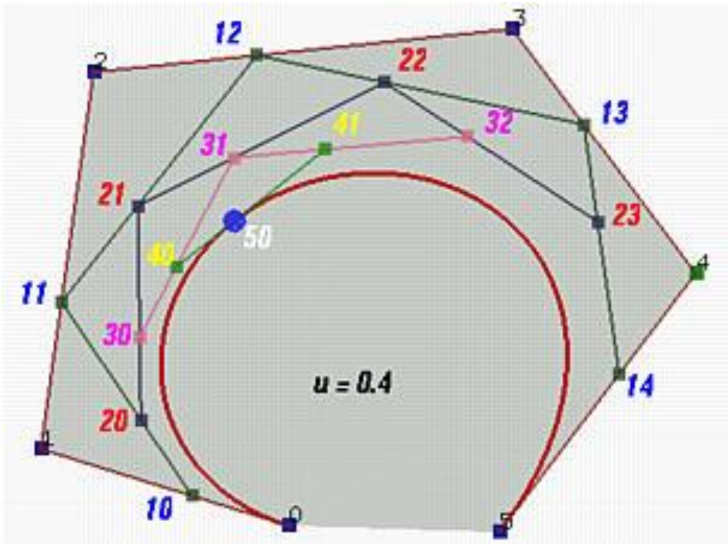
$\mathbf{C} - \mathbf{A} = u(\mathbf{B} - \mathbf{A}),\ u \in (0;1) \Rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{A} + u(\mathbf{B} - \mathbf{A}) \Rightarrow \boxed{\mathbf{C} = (1 - u)\mathbf{A} + u\mathbf{B}}$

Нам. **P**(u) при фикс. $u \in (0,1)$:

1) за 0. полигон **00-01-02-03-...-0*n*** върху рамото **0i-0(i+1)** се нам.

т. **1i**: d(**0i**,**1i**) / d(**0i**,**0(i+1)**) = u.

∴ n точки **10**, **11**, **12**, ..., **1(*n*-1)** – опр. 1. полигон от n - 1 рамена.



Напр. $u = 0{,}4 \Rightarrow$ **10** $\in$ **00-01**, **11** $\in$ **01-02**, ..., **14** $\in$ **04-05** (в синьо на фиг.)

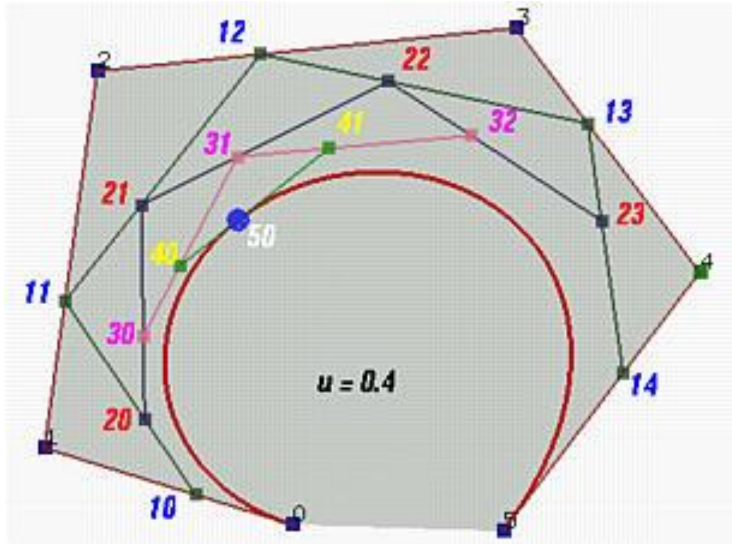
2) за 1. полигон **10-11-12-13-...-1*n*** върху рамото **1i-1(i+1)** се нам.

т. **2i**: d(**1i**,**2i**) / d(**1i**,**1(i+1)**) = *u*.

∴ *n* - 1 точки **20**, **21**, ..., **2(*n*-2)** и

2. полигон с *n* - 2 рамена.

(в червено на фиг.)

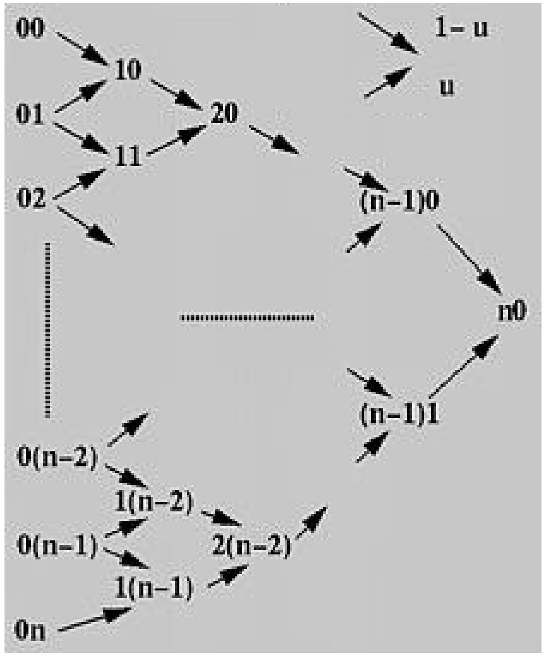


Аналог. получ. 3. полигон от *n* - 2 точки **30**, **31**, ..., **3(*n*-3)** и *n* - 3 рамена.

След *n*-кратно прилагане стигаме до ! т. ***n*0** = **P**(*u*) за фикс. *u* съгл. алг. дК.

Конкретно изчисление

Изп. следната схема

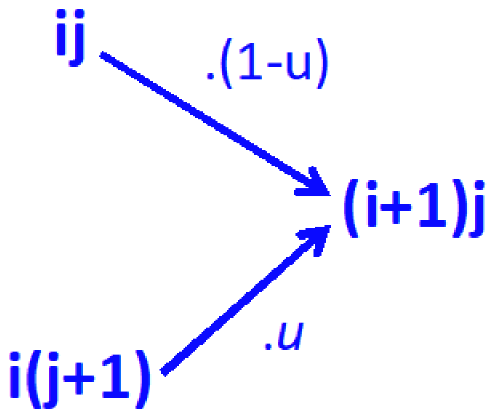


0. колона: **00**, **01**, **02**, ..., **0(*n*-1)**, **0*n***.

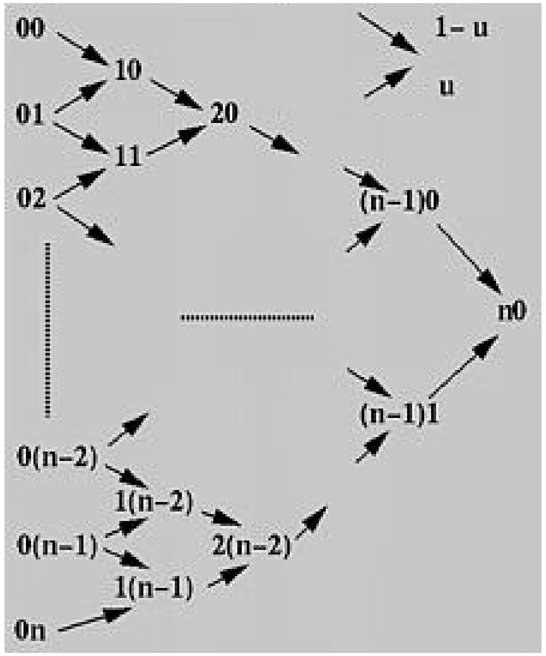
– дадените контр. точки

За всяка двойка съседни контр.

точки прил. схемата



т.е. **(i+1)j** = (1-*u*)**ij** + *u*.**i(j+1)**



Така от началната колона №0 с n+1 т. $\Rightarrow$ кол. №1 с n т.;

от кол. №1 с n т. $\Rightarrow$ кол. №2 с n-1 т. и т.н.

Накрая от кол. №(n-1) с 2 т. $\Rightarrow$ кол. n с 1 т. ***n*0** и $\therefore$ **P**(u) = ***n*0**.

Триъгълна схема

Триъг. изчисл. схема на алг. дК предлага едно интересно наблюдение.

Напр. е дадена **C** от ст. 7, т.е. деф. е чрез

8 контр. т.: **00**, **01**, ..., **07**.

Разгл. множ. от поредни т. в една кол.

като контр. т. на една кр. на Безие **C**(u).

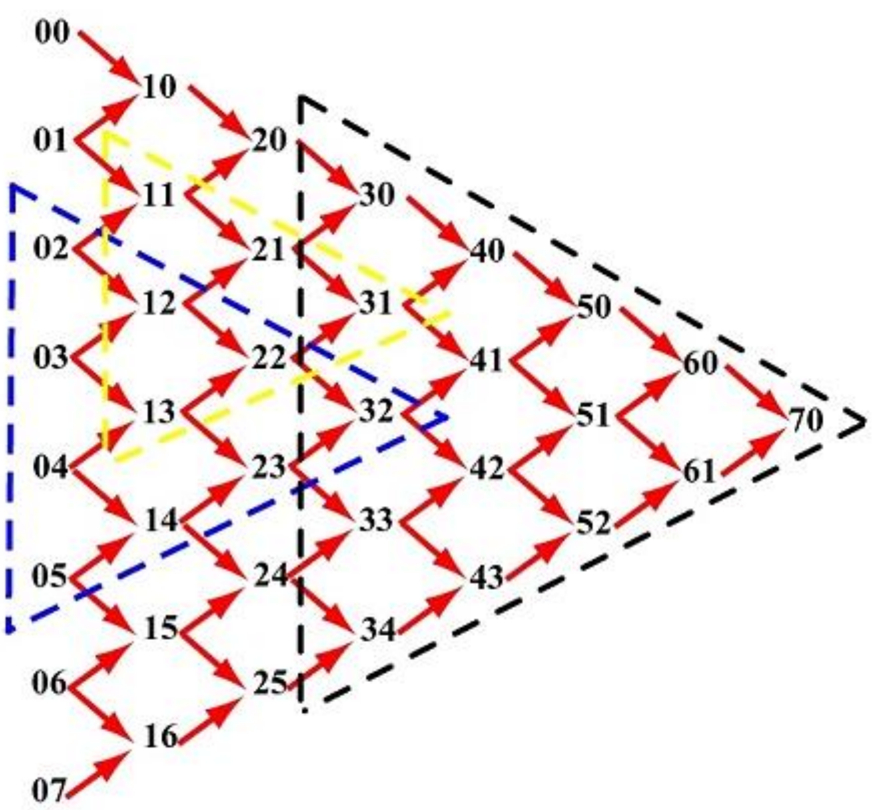
Тогава за фикс. $u \in [0,1]$ нам. **C**(u).

Ако алг. дК се прил. за тях,

съотв. т. в/у **C**(u) е в най-десния връх

на получ. триъг-к от точки

(отбелязан с пунктир на фиг.).



Напр., за крива **C**(*u*): **02-03-04-05**

⇒ т. **C**(*u*) е **32**

(синия триъгълник).

За крива **C**(*u*): **11-12-13**

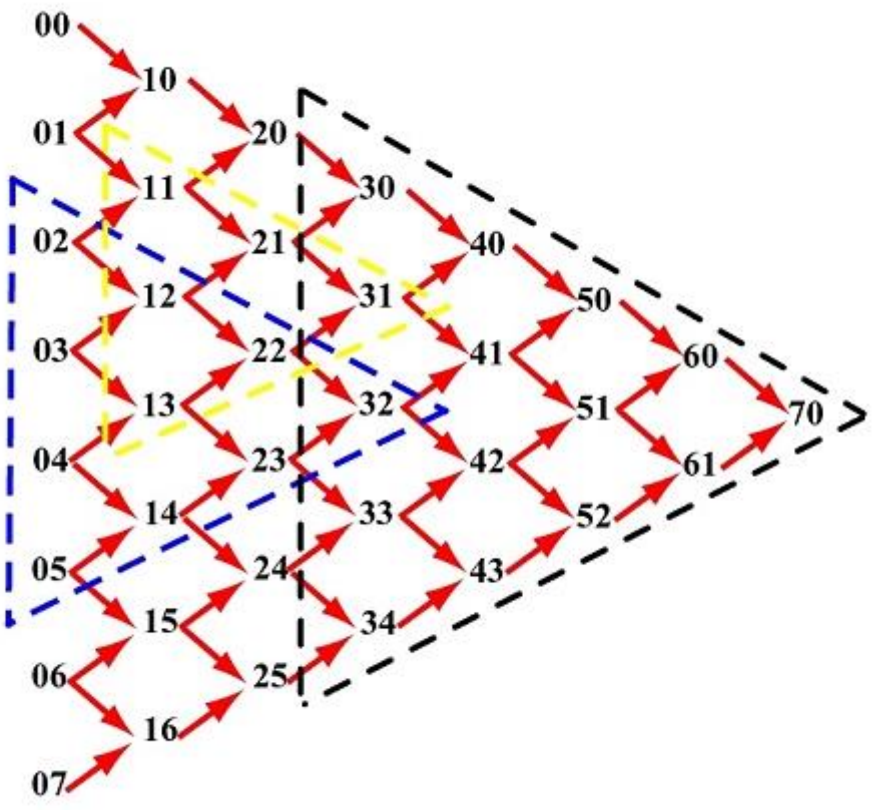
⇒ т. **C**(*u*) е **31**

(жълтия триъгълник).

За крива **C**(*u*): **30-31-32-33-34**

⇒ т. **C**(*u*) е **70**

(черния триъгълник).



Коректност на алгоритъма на дьо Кастелжо

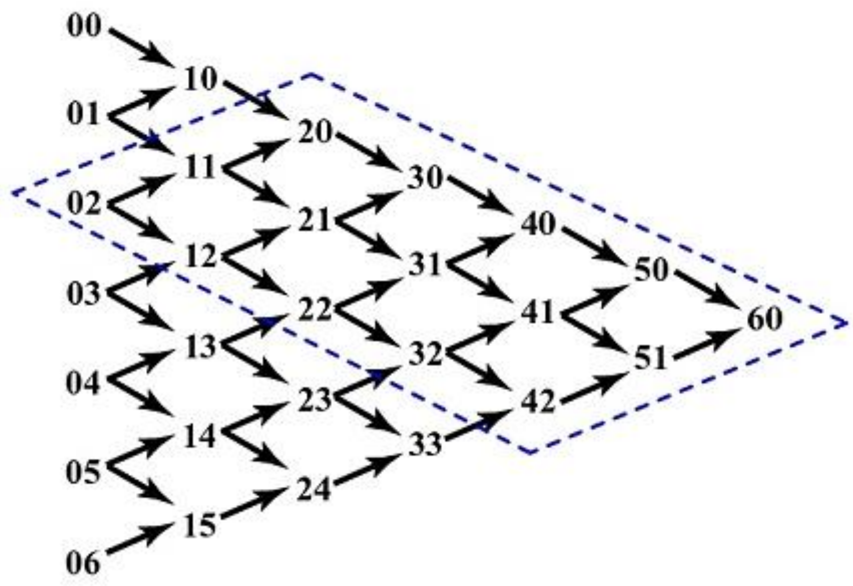
Алг. дК изглежда различен от метода на изчисл. чрез $B_{n,i}(u)$.

Дали по алг. дК се изч. коректно **C**(u)? – „да“ и това се доказва.

Разгл. изчисл. за кр. на Безие **C**(u) с 7 контр.

т.: **00**, **01**, **02**, **03**, **04**, **05** и **06**.

Т. в/у **C** за фикс. u е **60**.



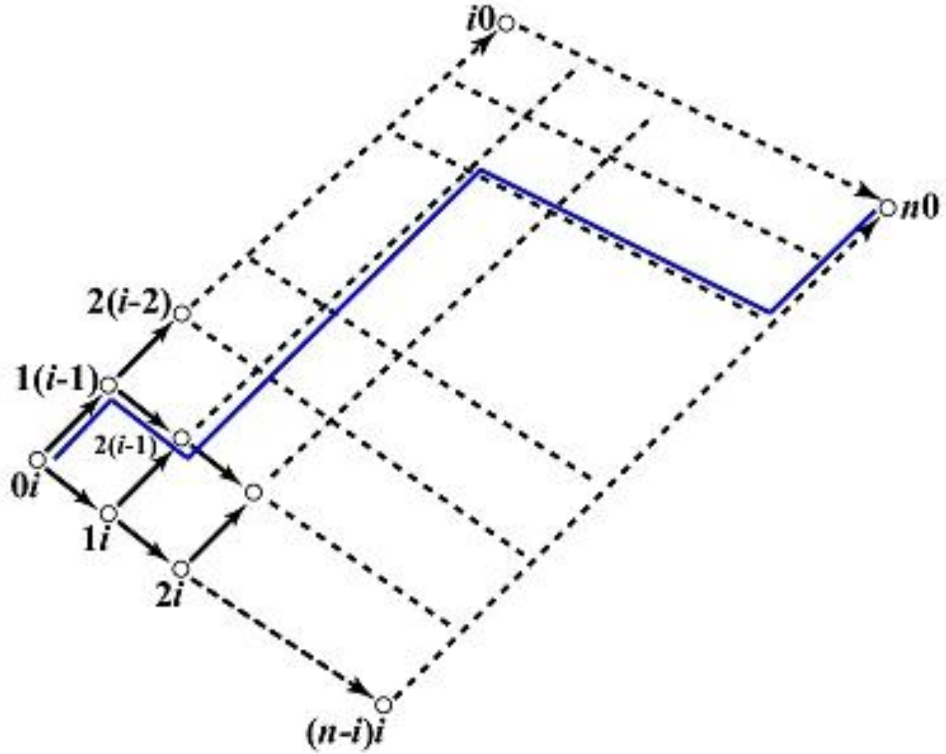
Тъй като **60** е изчислена от 7-те контр. т.

00, ..., **06**, всяка **0*i*** от тях участва

при изчисляването на **60**.

Какво е това участие?

Напр. участието на **02** е при намирането на точките в областта отбел. с пунктир.



- Ако следваме ↗ започваща от **0*i***,

  ∀стъпка дава: +1 на първия индекс

  и -1 на втория.

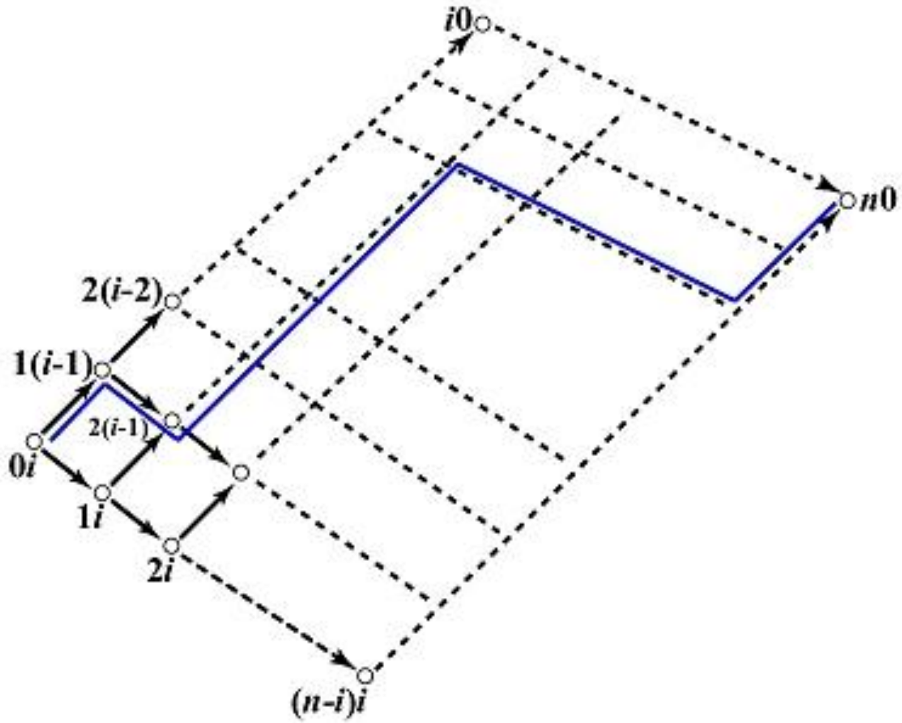
  След *i* стъпки ще сме в ***i*0**.

- Ако следваме ↘ започваща от **0*i***,

  ∀стъпка дава: +1 на първия индекс,

  а вторият се запазва.

  След (n – i) стъпки ще сме в (***n-i***)***i***.



∀ път от **0*i*** до ***n*0** е комбинация от *n* стрелки,

i пъти ↗ и (*n*-*i*) пъти ↘,

защото се върви по мрежа

с размер *i* x (*n*-*i*)

чрез *i* стрелки ↗ и (*n*-*i*) стрелки ↘.

∴ има винаги (*n*-*i*) коефициента (1-*u*)

и *i* на брой *u*-та

и оттук делът на **0*i*** при изчисляването на ***n*0**

е $u^i(1-u)^{n-i}$.

Контр. т. **0*i*** участва при изч. на ***n*0** по ***всички възможни пътища*** от **0*i*** до ***n*0**.

Колко са те? Всеки път има винаги *n* стрелки. От тези *n* стрелки *i* са ↗.

$\therefore$ бр. на начините за разполагане на тези *i* стрелки на *n* места

= бр. на разл. пътища от **0*i*** до ***n*0**, т.е. комбин. коеф. $C(n,i) = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Тъй като делът на $\forall$ път е винаги $u^i(1-u)^{n-i}$ и понеже $\exists\ \frac{n!}{i!(n-i)!}$ пътя,

то ***общият*** дял на **0*i*** за ***n*0** е:

$$\frac{n!}{i!\,(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i}\mathbf{0}\boldsymbol{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}u^i(1-u)^{n-i}\mathbf{P}_i = B_{n,i}(u)\mathbf{P}_i$$

Като добавим дела на всички контр. точки заедно, ще получим кривата на Безие, дефинирана чрез тях.