

В настоящата глава ще разгледаме възможностите на *CAS Wolfram Mathematica* при решаването на някои типове задачи.

<https://www.wolfram.com/mathematica/> или
cloud версията <https://www.wolframcloud.com/>

A.1 | Теория на множествата

В *Wolfram Language* множествата се моделират чрез списъци. Важно е да се отбележи, че синтаксиса на списъка съвпада със стандартното означение за математическото понятие за множество. Трябва да имаме въпредвид, че *Mathematica* не третира тези списъци от обекти като множества, т.е. не зачита автоматично математическите свойства на множествата. По – специално, повторението и подреждането правят списъците различни, за разлика от математическите множества.

```
set1={1,2,3,1,2};  
set2={2,3,1};  
set1==set2
```

False

```
set1=={1,2,3}
```

False

За да накараме *Mathematica* да разпознае, че `set1` и `set2` са равни като множества, трябва да ги представим в каноничен ред. Това може да бъде направено, чрез функцията `UNION`, която приложена към един списък връща списъка, получен след сортиране и премахване на дубликатите.

```
Union[{4, 2, 1, 1, 3, 2, 4}]
```

```
{1, 2, 3, 4}
```

Тогава чрез използване на `UNION` към два различни списъка, които представляват едно и също математическо множество, ще получим желания резултат.

```
Union[set1]==Union[set2]
```

True

В табличен вид са показани някои от най-често използваните вградени функции при работа с множества (списъци).

Функция	Действие
Обработка на елементите на множества	
MEMBERQ[<i>list</i> , <i>form</i>]	дава True, ако обекта принадлежи на списъка
SUBSETQ[<i>list</i> ₁ , <i>list</i> ₂]	дава True, ако <i>list</i> ₂ е подмножество на <i>list</i> ₁ , в противен случай - False
LENGTH[<i>list</i>]	дава броя на елементите в списъка
Генериране на множества	
RANGE[<i>i</i> _{min} , <i>i</i> _{max} , <i>di</i>]	генериране на списък от последователни стойности
TABLE[<i>expr</i> , { <i>i</i> _{min} , <i>i</i> _{max} , <i>di</i> }]	генериране на списък от стойности на <i>expr</i>
Операции с множества	
SUBSETS[<i>list</i>]	дава списък от всички възможни подмножества на <i>list</i>
UNION[<i>list</i> ₁ , <i>list</i> ₂]	дава сортиран списък на всички различни елементи от дадените списъци
INTERSECTION[<i>list</i> ₁ , <i>list</i> ₂]	дава сортиран списък на всички елементи, които са общи за дадените списъци
COMPLEMENT[<i>e</i> _{all} , <i>e</i> ₁ , <i>e</i> ₂ , ...]	дава елементите на <i>e</i> _{all} , които не принадлежат на никой от другите <i>e</i> _{<i>i</i>}
TUPLES[<i>list</i> ₁ , <i>list</i> ₂]	дава декартово произведение на елементите на дадените списъци



В Wolfram Language, множествата се представят с помощта на списъци, но при извършването на операции с тези множества, операторите пренаредят елементите в каноничен (сортиран) ред и премахват дублиращите се елементи.

В следващите примери ще пожем някои примерни решения с използването на софтуерната система.

Задача 1. Нека универсалното множество е $U = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 10\}$ като множествата A и B са негови подмножества дефинирани по следния начин:

$$A = \{x \mid x \text{ е четно число}\} \quad \text{и} \quad B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x < 8\}.$$

а) Проверете вярно ли е, че:

$$1. \{2, 4\} \subset A \qquad 2. \{3, 5\} \subset B \qquad 3. 8 \in B;$$

б) Образувайте множеството $\mathcal{P}(B)$;

в) Намерете

$$\begin{array}{lll} 1. K = A \cap B & 2. P = A \cap \overline{B} & 3. Q = \overline{A \cup B} \\ 4. R = B - A & 5. S = A \times B & 6. T = A \triangle B. \end{array}$$

Определете мощността на всяко от получените множества.

```
(* генериране на универсалното множество *)
setU=Table[i,{i,0,10}];
(* генериране на множеството A *)
setA=Table[i,{i,0,10,2}];
(* генериране на множеството B *)
setB=Range[5,7];
(* отпечатване на резултат *)
Print["Елементите на множествата са: A = ", setA,
      " B = ", setB, " U = ", setU]
```

Елементите на множествата са: A = {0,2,4,6,8,10} B = {5,6,7}
U = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

```
(* а) проверка за подмножество *)
a1=SubsetQ[setA,{2, 4}];
a2=SubsetQ[setB,{3, 5}];
a3=MemberQ[setB,8];
(* отпечатване на резултат *)
Print["Отговори на а): 1.", a1, " 2.", a2, " 3.", a3]
```

Отговори на а): 1.True 2.False 3.False

```
(* б) затворена обвивка на множество *)
b=Subsets[setB];
(* отпечатване на резултат *)
```

```
Print["b) Търсено множество е: ", b]
```

b) Търсено множество е: $\{\{\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{5, 6, 7\}\}$

```
(* c) операции с множества и определяне на мощността на  
новополученото множество *)
```

```
c1=Intersection[setA,setB];  
c2=Intersection[setA,Complement[setU, setB]];  
c3=Complement[setU, Union[setA, setB]];  
c4=Complement[setB, setA];  
c5=Tuples[{setA, setB}];  
c6=Union[Intersection[setA,Complement[setU,setB]],  
Intersection[setB,Complement[setU,setA]]];
```

```
(* отпечатване на резултат *)
```

```
Print["c) 1. K =", c1, " като |K| = ", Length[c1]]  
Print["c) 2. P =", c2, " като |P| = ", Length[c2]]  
Print["c) 3. Q =", c3, " като |Q| = ", Length[c3]]  
Print["c) 4. R =", c4, " като |R| = ", Length[c4]]  
Print["c) 5. S =", c5, " като |S| = ", Length[c5]]  
Print["c) 6. T =", c6, " като |T| = ", Length[c6]]
```

c) 1. $K = \{6\}$ като $|K| = 1$

c) 2. $P = \{0, 2, 4, 8, 10\}$ като $|P| = 5$

c) 3. $Q = \{1, 3, 9\}$ като $|Q| = 3$

c) 4. $R = \{5, 7\}$ като $|R| = 2$

c) 5. $S = \{\{0, 5\}, \{0, 6\}, \{0, 7\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}, \{6, 5\}, \{6, 6\}, \{6, 7\}, \{8, 5\}, \{8, 6\}, \{8, 7\}, \{10, 5\}, \{10, 6\}, \{10, 7\}\}$ като $|S| = 18$

c) 6. $T = \{0, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ като $|T| = 7$

Задача 2. Да се намери броя на целите положителни числа, които са по-малки или равни на 100 и не се делят нито на 2, нито на 11.

```
(* генериране на множество на всички положителни числа, които  
са
```

```
по-малки или равни на 100 *)
```

```
hundred=Range[100];
```

```
(* премахване на елементите, които се делят на 2 *)
```

```
divBy2=Complement[hundred,Table[2*i, {i, 50}]]
```

```
{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31,
33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61,
63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91,
93, 95, 97, 99}
```

```
(* премахване на елементите, които се делят на 11 *)
divBy11=Complement[hundred, Table[11*i,{i, 9}]]
```

```
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,
19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35,
36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,
52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68,
69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84,
85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 100}
```

```
(* Търсим цели числа, които принадлежат към едното или към
двете от тези множества, т.е. на тяхното обединение: *)
Length[Union[divBy2,divBy11]]
```

96

```
(* съгласно принципа на включването и изключването търсеният
брой може да бъде намерен и чрез формулата *)
Length[divBy2]+Length[divBy11]-
Length[Intersection[divBy2,divBy11]]
```

96

Задачи за самоподготовка

Задача 1. Кои от следните двойки множества са равни?

- а) $\{9, 5, 7, 14\}$ и $\{14, 9, 9, 5, 7, 7, 14, 9, 5, 7\}$;
- б) $\{13, 1, 3, \{10, 12\}\}$ и $\{10, 12, \{1, 3\}, 13\}$;
- в) $\{\{5, 3, 5, 1, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 1, 3, 3\}\}$ и $\{\{1, 3, 5, 1\}, \{6, 4, 2\}, \{6, 6, 4, 4, 6\}\}$;
- г) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ и $\{5, 6, 7\}$;
- д) $\{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 10\}$ и $\{6, 7, 8, 9\}$.

Упътване: Използвайте оператора UNION, за да премахнете дублиращите се елементи и да ги подредите в каноничен ред.

Задача 2. Дадени са множествата

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ е просто число по-малко от } 100\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ е нечетно число по-малко от } 100\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ е четно число по-малко от } 100\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ е число по-малко от } 100, \text{ което се дели на } 2 \text{ или на } 5\}$$

(тук универсалното множество се състои от всички цели положителни числа не по-големи от 100). Намерете:

а) елементите на следните множества и определете мощността на всяко едно от тях:

$$1. M = A \cup B$$

$$5. L = D - C$$

$$2. N = \overline{A} \cap C$$

$$6. S = (\overline{A \cap B}) \cap (C \cap D)$$

$$3. P = (A \cup B) \cap C$$

$$7. T = (\overline{A \triangle B}) \cap (C \triangle D)$$

$$4. Q = (\overline{A \cup B}) \cap C$$

$$8. W = \{A \cap B\} \times D$$

б) 1. $\mathcal{P}(C - D);$

2. $\mathcal{P}(C \triangle D).$

Задача 3. Да се намери броя на целите положителни числа, които са едновременно точен квадрат, точен куб и са по-малки или равни на 10000.

Задача 4. Да се намери броя на целите положителни числа между 1000 и 9999 включителни, които:

а) се делят на 9;

б) са четни;

в) не се делят на 3;

г) се делят на 5 или 7;

д) не се делят нито на 5, нито на 7;

е) се делят на 5 и 7.