

Метод на Гаус-Жордан

Дадена е система линейни алгебрични уравнения:

$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 0$$

$$-3.12x_1 + 5.76x_2 - 21x_3 = -0.9$$

$$89x_1 + 7.87x_3 = 90$$

$$-9.8x_2 + 34x_4 = -0.34$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \\ 90 \\ -0.34 \end{pmatrix}$$

1. Да се реши по метода на Гаус-Жордан.
2. В процеса на решаване да се пресметне детерминантата на матрицата A.
3. По метода на Гаус-Жордан да се намери обратната матрица на A.

Въвеждаме разширената матрица:

$$\text{In[*]} := A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 & -0.9 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$$

Out[*]=

$$\{\{1, 2, 0, -1, 0\}, \{-3.12, 5.76, -21, 0, -0.9\}, \\ \{89, 0, 7.87, 0, 90\}, \{0, -9.8, 0, 34, -0.34\}\}$$

1. Постъпково прилагане на метода на Гаус-Жордан

Броят на стъпките е равен на броя на стълбовете на основната матрица

In[*] := Length[A]

Out[*]=

4

Първа стъпка - целта е в A да се получи първи стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{11} = 1$.

$$\text{In[*]} := A[[1]] = \frac{A[[1]]}{A[[1, 1]]}$$

Out[*]=

$$\{1, 2, 0, -1, 0\}$$

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от

стълба.

Променяме втория ред

```
In[*]:= A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 1]] * A[[1]]
Out[*]= {0., 12., -21., -3.12, -0.9}
```

Променяме третия ред

```
In[*]:= A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 1]] * A[[1]]
Out[*]= {0, -178, 7.87, 89, 90}
```

Променяме четвъртия ред

```
In[*]:= A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 1]] * A[[1]]
Out[*]= {0, -9.8, 0, 34, -0.34}
```

```
In[*]:= A // MatrixForm
Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0. & 12. & -21. & -3.12 & -0.9 \\ 0 & -178 & 7.87 & 89 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$$

```

Втора стъпка - целта е в A да се получи втори стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{22} = 1$.

```
In[*]:= A[[2]] =  $\frac{A[[2]]}{A[[2, 2]]}$ 
Out[*]= {0., 1., -1.75, -0.26, -0.075}
```

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

```
In[*]:= A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 2]] * A[[2]]
Out[*]= {1., 0., 3.5, -0.48, 0.15}
```

Променяме третия ред

```
In[*]:= A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 2]] * A[[2]]
Out[*]= {0., 0., -303.63, 42.72, 76.65}
```

Променяме четвъртия ред

```
In[*]:= A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 2]] * A[[2]]
Out[*]= {0., 0., -17.15, 31.452, -1.075}
```

```
In[*]:= A // MatrixForm
Out[*]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 3.5 & -0.48 & 0.15 \\ 0. & 1. & -1.75 & -0.26 & -0.075 \\ 0. & 0. & -303.63 & 42.72 & 76.65 \\ 0. & 0. & -17.15 & 31.452 & -1.075 \end{pmatrix}$$

Трета стъпка - целта е в A да се получи трети стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{33} = 1$.

Променяме третия ред

```
In[*]:= A[[3]] = A[[3]] / A[[3, 3]]
Out[*]= {0., 0., 1., -0.140698, -0.252445}
```

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

```
In[*]:= A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 3]] * A[[3]]
Out[*]= {1., 0., 0., 0.0124415, 1.03356}
```

Променяме втория ред

```
In[*]:= A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 3]] * A[[3]]
Out[*]= {0., 1., 0., -0.506221, -0.516779}
```

Променяме четвъртия ред

```
In[*]:= A[[4]] = A[[4]] - A[[4, 3]] * A[[3]]
Out[*]= {0., 0., 0., 29.039, -5.40444}
```

```
In[*]:= A // MatrixForm
Out[*]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0.0124415 & 1.03356 \\ 0. & 1. & 0. & -0.506221 & -0.516779 \\ 0. & 0. & 1. & -0.140698 & -0.252445 \\ 0. & 0. & 0. & 29.039 & -5.40444 \end{pmatrix}$$

Четвърта стъпка - целта е в A да се получи четвърти стълб като на единичната матрица.

Първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{44} = 1$.

Променяме четвъртия ред

```
In[*]:= A[[4]] =  $\frac{A[[4]]}{A[[4, 4]]}$ 
Out[*]= {0., 0., 0., 1., -0.186109}
```

Втори етап - получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.

Променяме първия ред

```
In[*]:= A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 4]] * A[[4]]
Out[*]= {1., 0., 0.,  $1.73472 \times 10^{-18}$ , 1.03587}
```

Променяме втория ред

```
In[*]:= A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 4]] * A[[4]]
Out[*]= {0., 1., 0.,  $-1.11022 \times 10^{-16}$ , -0.610992}
```

Променяме третия ред

```
In[*]:= A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 4]] * A[[4]]
Out[*]= {0., 0., 1.,  $-2.77556 \times 10^{-17}$ , -0.278631}
```

```
In[*]:= A // MatrixForm
Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 1.73472 \times 10^{-18} & 1.03587 \\ 0. & 1. & 0. & -1.11022 \times 10^{-16} & -0.610992 \\ 0. & 0. & 1. & -2.77556 \times 10^{-17} & -0.278631 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & -0.186109 \end{pmatrix}$$

```

Извод: $x_1 = 1.03$, $x_2 = -0.61$, $x_3 = -0.27$, $x_4 = -0.18$

2. Съставяне на програмен код

Решаване на СЛАУ

```
In[*]:= A =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 & -0.9 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$ ;
In[*]:= n = Length[A];
```

```

In[*]:= For[ col = 1, col ≤ n, col++,
  (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
  A[[col]] =  $\frac{A[[col]]}{A[[col, col]]}$ ;
  (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи от стълба.*)
  For[ row = 1, row ≤ n, row++,
    If[ row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]] ]
  ];
  Print[A // MatrixForm]
]


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0. & 12. & -21. & -3.12 & -0.9 \\ 0 & -178 & 7.87 & 89 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 3.5 & -0.48 & 0.15 \\ 0. & 1. & -1.75 & -0.26 & -0.075 \\ 0. & 0. & -303.63 & 42.72 & 76.65 \\ 0. & 0. & -17.15 & 31.452 & -1.075 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0.0124415 & 1.03356 \\ 0. & 1. & 0. & -0.506221 & -0.516779 \\ 0. & 0. & 1. & -0.140698 & -0.252445 \\ 0. & 0. & 0. & 29.039 & -5.40444 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 1.73472 \times 10^{-18} & 1.03587 \\ 0. & 1. & 0. & -1.11022 \times 10^{-16} & -0.610992 \\ 0. & 0. & 1. & -2.77556 \times 10^{-17} & -0.278631 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & -0.186109 \end{pmatrix}$$


```

3. Намиране на детерминантата

```

In[*]:= A =  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 & -0.9 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$ ;

```

```

In[*]:= n = Length[A];

```

```

In[*]:= deter = 1;

```

```

In[*]:= For[ col = 1, col ≤ n, col++,
  deter = deter * A[[col, col]];
  (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
  A[[col]] =  $\frac{A[[col]]}{A[[col, col]]}$ ;
  (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи
  от стълба.*)
  For[ row = 1, row ≤ n, row++,
    If[ row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]] ]
  ];
  Print[A // MatrixForm]
]

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0. & 12. & -21. & -3.12 & -0.9 \\ 0 & -178 & 7.87 & 89 & 90 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 3.5 & -0.48 & 0.15 \\ 0. & 1. & -1.75 & -0.26 & -0.075 \\ 0. & 0. & -303.63 & 42.72 & 76.65 \\ 0. & 0. & -17.15 & 31.452 & -1.075 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0.0124415 & 1.03356 \\ 0. & 1. & 0. & -0.506221 & -0.516779 \\ 0. & 0. & 1. & -0.140698 & -0.252445 \\ 0. & 0. & 0. & 29.039 & -5.40444 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 1.73472 \times 10^{-18} & 1.03587 \\ 0. & 1. & 0. & -1.11022 \times 10^{-16} & -0.610992 \\ 0. & 0. & 1. & -2.77556 \times 10^{-17} & -0.278631 \\ 0. & 0. & 0. & 1. & -0.186109 \end{pmatrix}$$

```
In[*]:= Print["Детерминантата на матрицата е ", deter]
```

Детерминантата на матрицата е -105805.

4. Намиране на обратната матрица

$$\text{In[*]} := A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3.12 & 5.76 & -21 & 0 & -0.9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 89 & 0 & 7.87 & 0 & 90 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

```
In[*]:= n = Length[A];
```

```
In[*]:= deter = 1;
```

```
In[*]:= For[ col = 1, col ≤ n, col++,
  deter = deter * A[[col, col]];
  (*Първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
  A[[col]] = A[[col]] / A[[col, col]];
  (*Втори етап-получаваме на нули във всички останали елементи
  от стълба.*)
  For[ row = 1, row ≤ n, row++,
    If[ row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]] ]
  ];
  Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix}
 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0. & 12. & -21. & -3.12 & -0.9 & 3.12 & 1. & 0. & 0. \\
 0 & -178 & 7.87 & 89 & 90 & -89 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & -9.8 & 0 & 34 & -0.34 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 1. & 0. & 3.5 & -0.48 & 0.15 & 0.48 & -0.166667 & 0. & 0. \\
 0. & 1. & -1.75 & -0.26 & -0.075 & 0.26 & 0.0833333 & 0. & 0. \\
 0. & 0. & -303.63 & 42.72 & 76.65 & -42.72 & 14.8333 & 1. & 0. \\
 0. & 0. & -17.15 & 31.452 & -1.075 & 2.548 & 0.816667 & 0. & 1.
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 1. & 0. & 0. & 0.0124415 & 1.03356 & -0.0124415 & 0.00431995 & 0.0115272 & 0. \\
 0. & 1. & 0. & -0.506221 & -0.516779 & 0.506221 & -0.00215998 & -0.00576359 & 0. \\
 0. & 0. & 1. & -0.140698 & -0.252445 & 0.140698 & -0.0488533 & -0.00329348 & 0. \\
 0. & 0. & 0. & 29.039 & -5.40444 & 4.96096 & -0.0211678 & -0.0564832 & 1.
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 1. & 0. & 0. & 1.73472 \times 10^{-18} & 1.03587 & -0.0145669 & 0.00432902 & 0.0115514 & -0.000428439 \\
 0. & 1. & 0. & -1.11022 \times 10^{-16} & -0.610992 & 0.592702 & -0.00252898 & -0.00674823 & 0.0174324 \\
 0. & 0. & 1. & -2.77556 \times 10^{-17} & -0.278631 & 0.164734 & -0.0489559 & -0.00356715 & 0.00484512 \\
 0. & 0. & 0. & 1. & -0.186109 & 0.170838 & -0.000728941 & -0.00194508 & 0.0344364
 \end{pmatrix}$$