# 2 Функции и релации

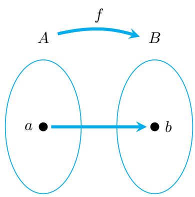
## 2.1 Функции

В много случаи ние асоциираме на всеки елемент от едно множество определен елемент от второ множество (който може да е същият като първия). Концепцията за функция е изключително важна в математика и компютърни науки. Например в дискретната математика чрез функции се задават различни дискретни структури. Много от компютърните програми и подпрограми са предназначени за изчисляване на стойностите на функциите.

### 2.1.1 Основни дефиниции

**Дефиниция**

*Функция* $f\colon A \to B$ наричаме правилото, според което на всеки елемент $a \in A$ се съпоставя точно един елемент $b = f(a) \in B$.




*Множеството $A$ се нарича дефиниционно множество или множество от допустими стойности, а множеството $B$ - множество от стойности или кообласт.*

От гледна точка на множествата една функция от $A$ към $B$ е подмножество на $A \times B$. Всички елементи от дефиниционната област на една функция се появяват като първа координата на наредената двойка на функцията, но не всички елементи на кообластта се появяват като втора координата.

**Дефиниция**

*Рангът* на функцията $f\colon A \to B$ се дефинира чрез

$$range(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A\colon (a, b) \in f\} \text{ или } range(f) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

С други думи рангът на една функция е подмножество на множеството на стойности на тази на функцията.

**Дефиниция**

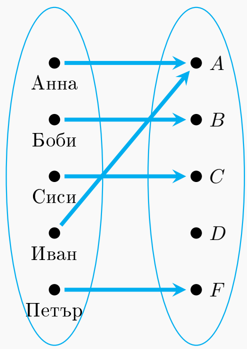
Две функции са *еквивалентни*, тогава и само тогава, когато и трите им множества (*множество от допустими стойности, кообласт и ранг*) са съответно еквивалентни.

Нека да разгледаме някои примери с различен подход при дефинирането на функция като ще определим дефиниционното множество, множеството от стойности и рангът на така дефинираните функции.

**Пример 1:** Нека $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(n) = 3n$.
За функция $f$ дефиниционното множество и множеството от стойности и за двете е множеството на целите числа. Но рангът се състои само от целите числа, които се делят на 3.
**Пример 2:** Нека функцията $g\colon \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ се дефинира чрез равенствата $g(1) = c$, $g(2) = a$, $g(3) = a$.
За функция $g$ дефиниционното множество е $\{1,2,3\}$, множеството от стойности е $\{a,b,c\}$ и рангът $\{a,c\}$.
**Пример 3:** Нека функцията $h\colon \{1,2,3,4\} \to \mathbb{N}$ се дефинира чрез таблицата

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | 3 | 6 | 9 | 12 |

За функция $h$ дефиниционното множество е крайното множество $\{1,2,3,4\}$, а множеството от стойности е множеството на естествените числа.
*Ще отбележим, че функциите $f$ и $h$ не са еквивалентни тъй като множествата им стойности (кообластите) не са еквивалентни.*
**Пример 4:** Всеки студент по дискретна математика получава буквена оценка от множеството $\{A,B,C,D,F\}$ като $A$ за Анна, $C$ за Сиси, $B$ за Боби, $A$ за Иван и $F$ за Петър.
Графично това може да се представи както е показано в дясно.
За така дефинираната функция дефиниционното множество е множеството {Анна, Боби, Иван, Петър, Сиси}, множеството от стойности е $\{A,B,C,D,F\}$ и рангът е множеството $\{A,B,C,F\}$.



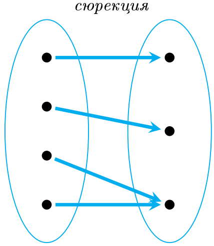
В следващия пример ще разгледаме и друг подход за дефиниране на функция, а именно - рекурсивно.

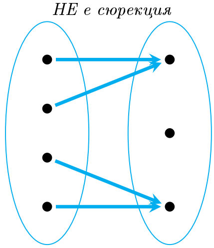
**Пример 5:** Разглеждаме функцията $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинирана чрез $f(0) = 0$ и $f(n+1) = f(n) + 2n + 1$. Намерете $f(6)$.
*Решение:* Според зададеното правило имаме $f(6) = f(5) + 11$, но ние не знаем стойността на $f(5)$. Тук трябва отново да приложим правилото $f(5) = f(4) + 9$. Така за да достигнем до $f(6)$ трябва да пресметнем всички стойности от $f(1)$, т.е. ще работим отзад напред

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + 1 = 0 + 1 = 1 & f(2) = f(1) + 3 = 1 + 3 = 4 \\ f(3) &= f(2) + 5 = 4 + 5 = 9 & f(4) = f(3) + 7 = 9 + 7 = 16 \\ f(5) &= f(4) + 9 = 16 + 9 = 25 & f(6) = f(5) + 11 = 25 + 11 = 36 \end{aligned}$$

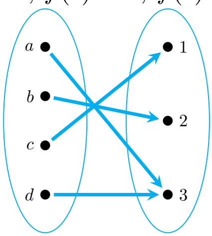
**Дефиниция**

Функцията $f\colon A \to B$ се нарича ***сюрекция***, ако за всяко $b \in B$ съществува $a \in A$, така че $f(a) = b$, т.е. всеки елемент от $B$ е изображение на един или повече елементи от $A$.




*Пример 1:* Нека функцията $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3\}$ се дефинира чрез $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 3$. Определете дали $f$ е сюрекция.



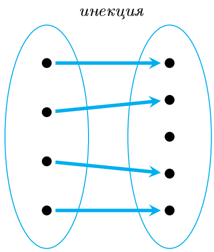

На фигурата в ляво е показано графичното представяне на дадената функция. От това, че всичките три елемента от кообластта са изображения на елементи от дефиниционното множество, то $f$ е сюрекция.
*Ще отбележим, че ако кообластта беше $\{1, 2, 3, 4\}$, то $f$ нямаше да бъде сюрекция.*

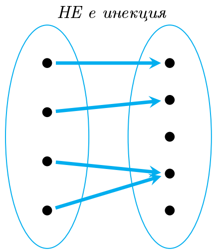
*Пример 2:* Определете дали $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ дефинирана, чрез $f(x) = x^2$ е сюрекция.

*Решение:* Функцията не е сюрекция, например: няма цяло число $x$ такова, че $x^2 = -1$.

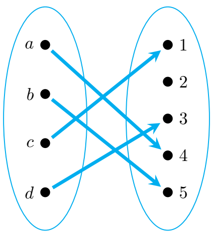
**Дефиниция**

Функцията $f\colon A \to B$ се нарича ***инекция***, ако на всеки елемент $a \in A$ се съпоставя най-много един елемент $b \in B$.




*Пример 1:* Нека функцията $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ се дефинира чрез $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 3$. Определете дали $f$ е инекция.



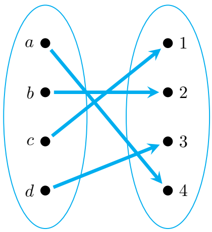

Функцията $f$ е инекция, защото приема различни стойности за всеки от четирите елемента в дефиниционното множество. На фигурата в ляво е показано графичното представяне на дадената функция.

*Пример 2:* Определете дали $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ дефинирана, чрез $f(x) = x^2$ е инекция.

*Решение:* Функцията не е инекция, например: $f(-1) = f(1) = 1$.

**Дефиниция**

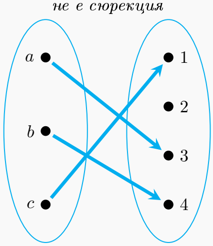
Функцията $f\colon A \to B$ се нарича ***биекция***, ако е едновременно сюрекция и инекция.



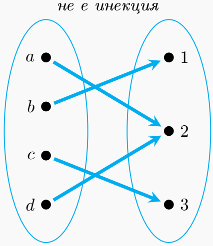

*Пример:* Нека функцията $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ се дефинира чрез равенствата $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 3$. Определете дали $f$ е биекция.
*Решение:* Функцията е биекция, защото е едновременно сюрекция и инекция.

**Пример 1:** За дадените изпбражения определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

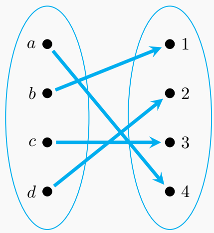
**1)** *инекция не е сюрекция*



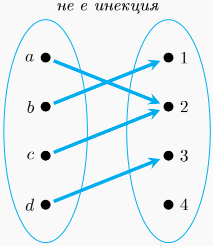

**2)** *сюрекция не е инекция*



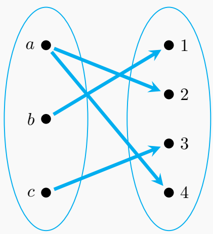

**3)** *биекция*




**4)** *не е сюрекция не е инекция*




**5)** *не е функция*




Първите четири изображения са функции като първата е инекция, но не е сюрекция, втората е сюрекция но не е инекция, третата е едновременно инекция и сюрекция, т.е. е биекция и четвъртата не е инекция нито сюрекция. Петото изображение не е функция.

**Пример 2:** За дадените функции определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.
1. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(n) = 3n$;
2. $g\colon \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ се дефинира чрез равенствата $g(1) = c$, $g(2) = a$, $g(3) = a$;

3. $h\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ се дефинира чрез $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

За всяка от тях определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

*Решение:*

| функция | $f$ | $g$ | $h$ |
|---|---|---|---|
| инекция | да | не | да |
| сюрекция | не | не | да |
| биекция | не | не | да |

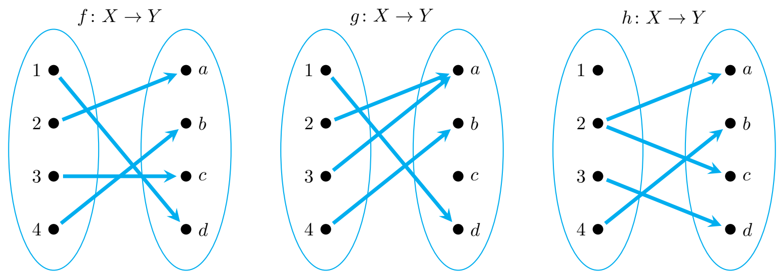
*Инекция*: $g$ не е, защото $g(2) = a$ и $g(3) = a$.

*Сюрекция*: $f$ не е, защото има елементи в кообластта, които не са елементи на ранга на функцията. $g$ не е, защото няма елемент $x$ такъв, че $g(x) = b$, т.е. $b$ е от кообластта, но не е в ранга на функцията.

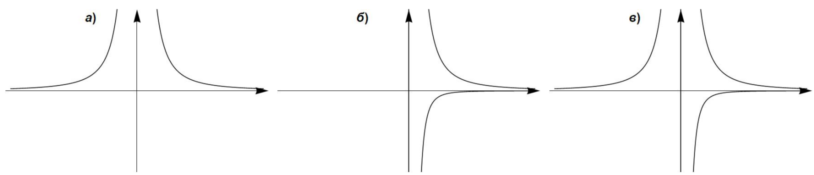
# Задачи за самоподготовка

***Задача 1.*** Кои от следните изображения са функции?

**а)** Нека $X = \{1,2,3,4\}$ и $Y = \{a,b,c,d\}$.




**б)** Нека $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.




***Задача 2.*** Дадена е функцията $f\colon A \to B$, където $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{1,2,3,4\}$. Кои от следните изображения са функции?

**а)** $(2,3)$;

**б)** $\{(2,3)\}$;

**в)** $\{(1,3),(3,1),(2,1)\}$;

**г)** $\{(1,3),(2,1)\}$;

**д)** $\{(1,3),(2,1),(1,4),(3,2)\}$;

**е)** $\{(1,3),(3,1),(2,5)\}$.

***Задача* 3.** Нека $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ се дефинира рекурентно чрез формулата $f(n+1) = f(n) + 3$. Определете стойността на $f(5)$, ако

**а)** $f(0) = 0$;

**б)** $f(0) = 1$;

**в)** $f(0) = 2$;

**г)** $f(0) = 100$.

***Задача* 4.** Нека е дадена функцията $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$. Определете дали тя е (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция, ако:

**а)** $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

**б)** $f(x) = 6 - x$;

**в)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$;

***Задача* 5.** За следните функции проверете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

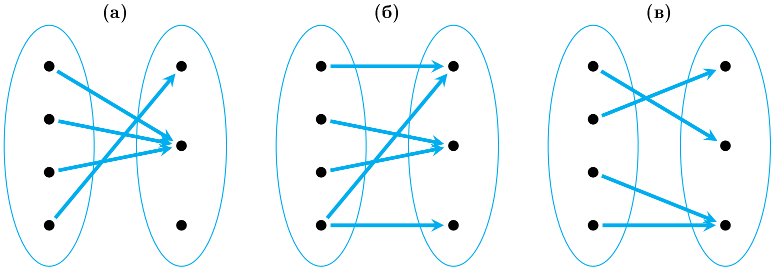
**а)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$;

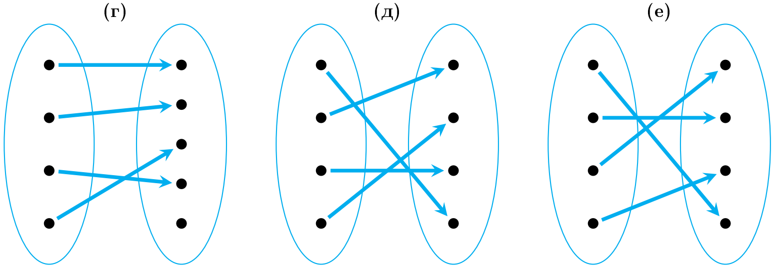
**б)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$;

**в)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ f(x) = x^4$;

**г)** $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ f(x) = |x|$.

***Задача* 6.** Кои от следните изображения са биекции?






***Задача* 7.** Определете вида на следните функции:

**а)** $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана с $g(x) = 2x + 1$;

**б)** $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана с $h(x) = x^2 + 2$.

***Задача* 8.** В края на семестъра учителя поставил оценка на всеки от неговите ученици. Това функция ли е? Ако е да, кое ще е дефиниционното множество, множеството от стойности? Функцията инекция, сюрекция или биекция е?

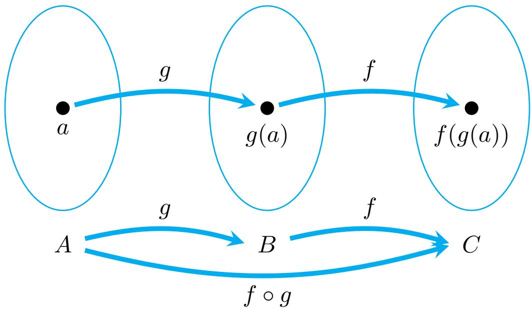
## 2.1.2 Операции над функции

**Дефиниция**

Нека $g \colon A \to B$, $f \colon B \to C$. Тогава *суперпозиция* на функциите $f$ и $g$ за всяко $a \in A$, наричаме

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)),$$

т.е. образуваме съставни функции (или функция във функция).



*Пример:* Нека функциите $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(x) = 2x+3$ и $g(x) = 3x + 2$. Определете $f \circ g$ и $g \circ f$.

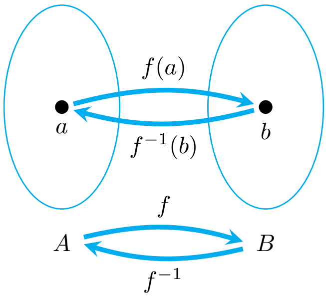
*Решение:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

**Дефиниция**

Нека е дадена функция $f\colon A \to B$, за която $b = f(a)$. Тогава функцията $f^{-1}\colon B \to A$ наричаме ***обратна функция*** на функцията $f$ и е в сила $f^{-1}(b) = a$.




*Пример:* Нека функцията $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ се дефинира чрез равенствата $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 3$. Определете дали $f$ е обратима.

*Решение:* Функцията е биекция и е обратима. В сила са следните равенства $f^{-1}(4) = a$, $f^{-1}(2) = b$, $f^{-1}(1) = c$ и $f^{-1}(3) = d$.

# *Задачи за самоподготовка*

***Задача* 1**. Нека $x \in \mathbb{Z}$ е такова, че $x > 1$ и $y = f(x)$ е сумата от всички прости числа по-големи от 1, които са делители на $x$. Нека $g(y) = 10y$. Тогава изчислете:

**а)** $f(100)$; **б)** $f(f(30))$; **в)** $f(3 + 5)$;

**г)** $f(3) + f(5)$; **д)** $f(3).f(5)$; **е)** $f(3.5)$;

**ж)** $g(f(100))$; **з)** $f(g(f(42)))$.

***Задача* 2**. Нека функциите $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(x) = x^2 - 4$ и $g(y) = 5y^2 + 10$. Намерете :

**а)** $(g \circ f)(x)$; **б)** $(g \circ f)(x - 1)$.

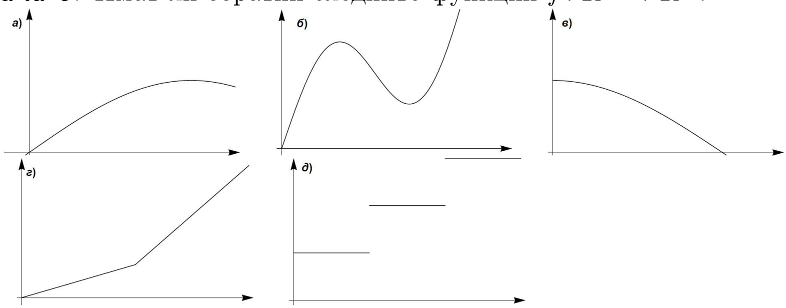
***Задача* 3**. Нека $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$, където $a$, $b$, $c$ и $d$ са константи. Намерете необходимо и достатъчно условие за константите $a$, $b$, $c$ и $d$ така, че

$$f \circ g = g \circ f.$$

***Задача* 4**. Нека функцията $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(x) = x + 1$. Намерете:

**а)** $g^{-1}(1)$; **б)** $g^{-1}(2)$; **в)** $g^{-1}(3)$; **г)** $g^{-1}(10)$.

***Задача* 5**. Имат ли обратни следните функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$?




***Задача* 6**. Нека функцията $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ се дефинира чрез $f(x) = 3x$ и $A$ е множеството на нечетните естествени числа. Намерете:

**а)** $f(A)$; **б)** $f^{-1}(A)$; **в)** $f^{-1}(\{12\})$; **г)** $f^{-1}(\{5\})$.

***Задача* 7**. Нека $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 999\}$. Дефинираме функция $f\colon A \to \mathbb{N}$ по следния начин $f(abc) = a + b + c$, където $a$, $b$, и $c$ са цифрите на числото от $A$. *Например* $f(253) = 2 + 5 + 3 = 10$.

**а)** Намерете $f^{-1}(3)$ и $f^{-1}(28)$;

**б)** Определете дали функцията е инекция. А сюрекция?

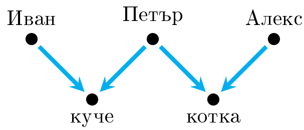
## 2.2 Релации

**Дефиниция**

Всяко множество $R \subseteq A \times B$ наричаме бинарна релация, т.е. за $a \in A$ и $b \in B$ означението $a\,R\,b$ означава $(a, b) \in R$.

*Пример:* Нека $P = \{$Иван, Петър, Алекс$\}$ и $A = \{$куче, котка$\}$. Релацията *има*: $P \times A$ определя кой човек какво животно има, т.е.

*Иван има куче*
*Петър има куче*
*Петър има котка*
*Алекс има котка*



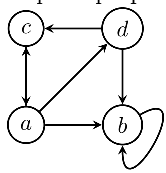

Има няколко начина, по които може да бъде зададена една релация. Нека $R$ е бинарна релация над $A$ , т.е. $R \subseteq A \times A$, където $A = \{a, b, c, d\}$.

• чрез наредени двойки
$R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (d, b), (d, c)\}$

• чрез таблица/матрица

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $b$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $c$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $d$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

• чрез граф




**Дефиниция**

Нека $A$ е непразно множество и $R \subseteq A \times A$ е релация.
• $R$ е *рефлексивна* релация, ако за всяко $a \in A$ е в сила $(a, a) \in R$;
• $R$ е *симетрична* релация, ако за всички $a, b \in A$ от $(a, b) \in R$ следва, че $(b, a) \in R$;
• $R$ е *транзитивна* релация, ако за всички $a, b, c \in A$ от $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$ следва, че $(a, c) \in R$.

**Дефиниция**

Нека $A$ е непразно множество и $R \subseteq A \times A$ е релация.
• $R$ е *антирефлексивна* релация, ако за всяко $a \in A$ е в сила $(a, a) \notin R$;

• $R$ е *антисиметрична* релация, ако за всички $a, b \in A$ от $(a, b) \in R$ следва, че или $a = b$, или $(b, a) \notin R$;

**Дефиниция**

Релация $R$ се нарича *релация на еквивалентност*, ако тя е едновременно
• *рефлексивна*;
• *симетрична*;
• *транзитивна*.

**Дефиниция**

Релация $R$ се нарича *релация на наредба*, ако тя е едновременно
• *рефлексивна*;
• *антисиметрична*;
• *транзитивна*.

**Дефиниция**

*Клас на еквивалентност* с представител елемента $a$ се нарича множеството $K(a)$ на всички елементи $x$ на множеството $A$, които са в релация $R$ с елемента $a$, т.е.

$$K(a) = \{x \in A \mid xRa\}.$$

**Пример:** Нека е дадено множеството $A = \{2, 3, 6, 7, 11\}$. Дефинираме релация $R \subseteq A \times A$ чрез

$$R = \{(a, b) \mid a + b \text{ е нечетно число}\}.$$

Определете:

**а)** кои наредени двойки са в релация?

**б)** дали релацията е рефлексивна, симетрична и/или транзитивна.

*Решение:* а) Наредените двойки в релацията $R$ са
$R = \{\{2, 3\}, \{2, 7\}, \{2, 11\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}, \{6, 3\}, \{6, 7\}, \{6, 11\}, \{7, 2\}, \{7, 6\}, \{11, 2\}, \{11, 6\}\}$.
б) Ще представим решението в табличен вид:

| | | |
|---|---|---|
| *рефлексивност* | не | $(3,3) \notin R$ |
| *симетричност* | да | ако $a+b$ е нечетно, то и $b+a$ е нечетно |
| *транзитивност* | не | $(2,3) \in R$ , $(3,6) \in R$, но $(2,6) \notin R$ |

# *Задачи за самоподготовка*

***Задача* 1**. Нека $A = \{1,2,3,4\}$. Кои наредени двойки са в релация

$$R = \{(a,b) \mid a \text{ се дели на } b\}.$$

Представете ги таблично и графично.

***Задача* 2**. Разглеждаме следните релации в множеството на целите числа:

$R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$
$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$
$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ или } a = -b\}$
$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$
$R_5 = \{(a,b) \mid a = b+1\}$
$R_6 = \{(a,b) \mid a+b \leq 3\}$

**а)** Кои от тези релации съдържат двойките $(1,1), (1,2), (2,1), (2,-1), (2,2)$?

**б)** Определете кои от тях са рефлексивни, симетрични, транзитивни.

***Задача* 3**. Разглеждаме следните релации в множеството $\{1,2,3,4\}$:

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
$R_6 = \{(3,4)\}$

Определете кои от тях са рефлексивни, симетрични, транзитивни.

***Задача* 4**. Определете вида на релацията $R$ зададена чрез:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

***Задача* 5**. Проверете дали релацията / (дели) е релация на еквивалентност или наредба в $\mathbb{N}$.

***Задача* 6**. Нека $R$ е "=" върху множеството на обикновените дроби, които са положителни. Проверете дали "=" е релация на еквивалентност. Ако е определете класовете на еквивалентност.

***Задача* 7**. Напишете в матрична форма релацията $\subseteq$ върху обвивката $\mathcal{P}(A)$ на множеството $A = \{a, b, c\}$. Проверете дали релацията $\subseteq$ е релация на еквивалентност или наредба в множеството $\mathcal{P}(A)$.