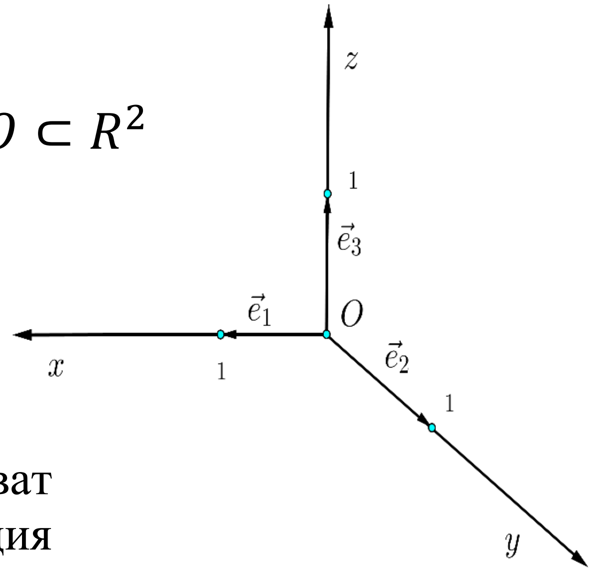
4.1 Допирателна равнина и нормала на повърхнина

I. **Уравнение на повърхнина в пространството** R^3

Нека относно ортонормирана координатна система $Oxyz$ в R^3 е зададена повърхнина $S(u,v)$ чрез параметризацията си (*ВПУ*):



(4.1) $$S(u,v):\ \vec{r}=\vec{r}\,(\,x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\,)\,,\quad (u,v)\in DO\subset R^2$$

- Реалните произволни аргументи $(u,v)\in DO$ наричаме *реални параметри* на повърхнината S **.**

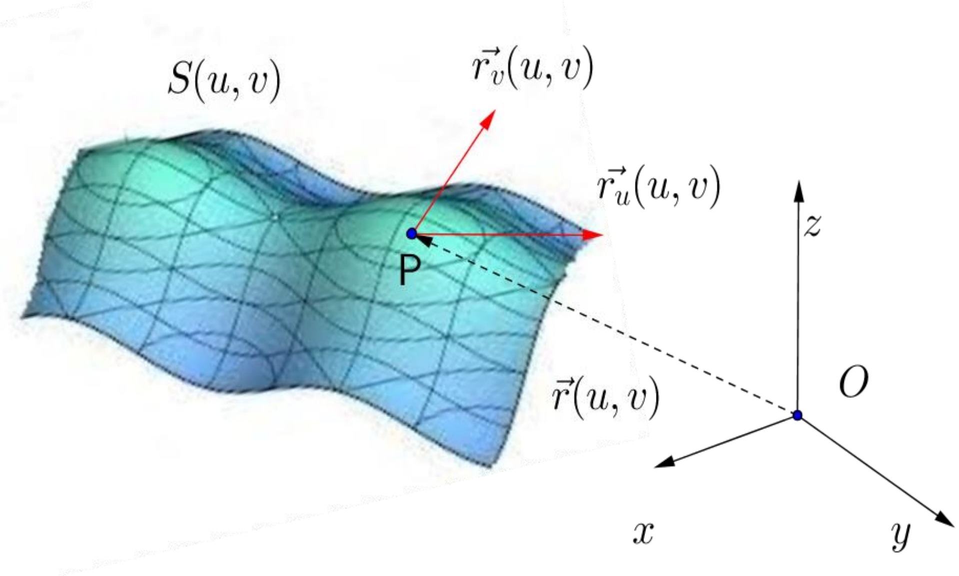
- Повърхнината наричаме *диференцируема (гладка)*, ако съществуват частни производни от произволен ред на нейната векторна функция на двата параметъра $\vec{r}(u,v)$ **.**

- За произволна нейна точка $P\in S(u,v)$ векторът $\vec{r}(u,v)=\overrightarrow{OP}$ наричаме *радиус-вектор* на повърхнината S **.**

- *Скаларно-параметричното уравнение* на повърхнината задаваме с:

$$(*)\qquad S(u,v):\left|\begin{array}{l} x=f(u,v)\\ y=\varphi(u,v)\\ z=\psi(u,v)\end{array}\right. ,\ f,\varphi,\psi\ -$$

имат *обща ДО* и са диференцируеми функции.



II. Допирателни вектори на повърхнината $S(u,v)$

Нека означим първите частни производни на $\vec{r}(u,v)$ относно параметрите u и v с $\vec{r}_u(u,v)$, $\vec{r}_v(u,v)$. Тогава, имаме:

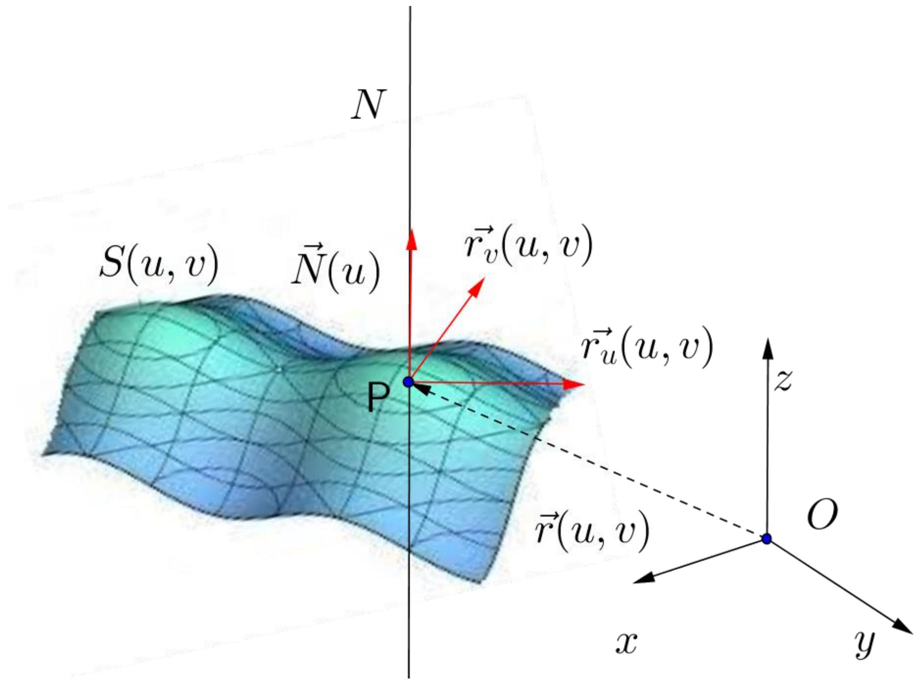
$$(4.2)\qquad \vec{r}_u(u,v)\left(\frac{dx}{du},\ \frac{dy}{du},\ \frac{dz}{du}\right),\ \vec{r}_v(u,v)\left(\frac{dx}{dv},\ \frac{dy}{dv},\ \frac{dz}{dv}\right)$$

- Векторите $\vec{r}_u(u,v)$, $\vec{r}_v(u,v)$, минаващи през точка $P\in S(u,v)$ се наричат *допирателни вектори* на повърхнината.

III. Нормален вектор на повърхнината $S(u, v)$

Единичният вектор $\vec{N}$, определен от равенството:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \quad , \tag{4.3}$$



наричаме *нормален вектор* на повърхнината S в произволна нейна точка $P \in S(u, v)$,

като $|\vec{N}| = 1$, $\vec{N} \perp \vec{r}_u, \vec{r}_v$

IV. Уравнение на нормала на повърхнината $S(u, v)$

Правата, минаваща през точката $P \in S(u, v)$, и съдържаща нормалния вектор $\vec{N}$ се нарича *нормала* на повърхнината.

За да намерим нейното *ВПУ* записваме:

$$(\,?\,)\; N :\; \begin{cases} z\; P(\,x_P, y_P, z_P) \equiv \vec{r}\;(\,x(u,v),\;\; y(u,v),\;\; z(u,v)\,) \\ \parallel\;\; \vec{N}\;(n_1, n_2\,, n_3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_P : \frac{x-x_P}{n_1} = \frac{y-y_P}{n_2} = \frac{z-z_P}{n_3} = \lambda \quad \text{или} \quad \Rightarrow \;\; N : \frac{x-x(u,v)}{n_1} = \frac{y-y(u,v)}{n_2} = \frac{z-z(u,v)}{n_3} = \lambda$$

за конкретна точка $P\big(\,x_P, y_P, z_P\big) \in S$ или в произволна точка от повърхнината S .

V. Уравнение на допирателна равнина на повърхнината $S(u,v)$

Равнината, минаваща през точката $P \in S(u,v)$, и съдържаща допирателните вектори $\{\,\vec{r}_u\,,\;\vec{r}_v\,\}$ се нарича *допирателна равнина* на повърхнината $S(u,v)$.

Записваме я така: $T_P S = \{\,\vec{r}_u\,,\;\vec{r}_v\,\} \;\perp\; N\,,\;\; P \in T_P S$.

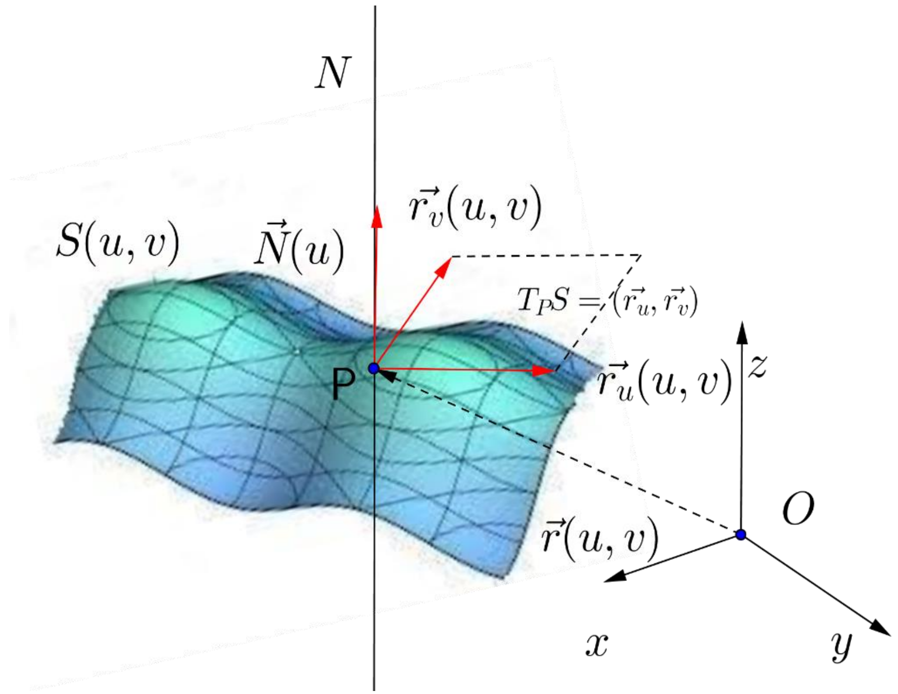
За да намерим нейното *общо уравнение* записваме:

$$(\,?\,) \quad T_P S : \begin{cases} z\,P(\,x_P, y_P, z_P) \equiv \vec{r}\,(\,x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\,) \\ \perp\ N\ \parallel\ \vec{N}\,(n_1, n_2\,, n_3) \parallel\ \vec{r}_u\ \times\ \vec{r}_v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_P S\ : n_1\big(x - x(u,v)\big) + n_2\,\big(y - y(u,v)\big) + n_3\big(z - z(u,v)\big) = 0$$

за произволна точка от повърхнината S .

или



$$T_P S\ : n_1(x - x_P) + n_2\,(y - y_P) + n_3(z - z_P) = 0$$

за конкретна точка $P(\,x_P, y_P, z_P) \in S$.

Задача 4.1 */ стр 58* Намерете единичния нормален вектор $\overrightarrow{N}$ и уравненията на нормалата N и допирателната равнина $T_P S$ в произволна точка от повърхнината S :

в) $S: \ \vec{r}\ (u,\ v,\ uv)$

Решение:

в) $(\,?\,)\ \overrightarrow{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \ ?$

$$\vec{r}\ (u,\ v,\ uv) \Rightarrow \quad \vec{r}_u(u,v)\ ,\ \vec{r}_v(u,v) = ?$$

$$\vec{r}_u(u,v) = \vec{r}_u\ (1,0,v)$$

$$\vec{r}_v(u,v) = \vec{r}_v\ (0,1,u)$$

$$\vec{r}_u \ \times \ \vec{r}_v(-v,-u,1\,) \ \Rightarrow |\vec{r}_u \ \times \ \vec{r}_v| = \sqrt{v^2 + u^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \left(-\frac{v}{\sqrt{v^2+u^2+1}}\ ,-\frac{u}{\sqrt{v^2+u^2+1}},\frac{1}{\sqrt{v^2+u^2+1}}\right) \ (1)$$

Забележка: Когато изписваме уравненията на нормалата и допирателната равнина ще работим с $\vec{r}_u \times \vec{r}_v(-v,-u,1) \parallel \overrightarrow{N}$

$$(\,?\,)\quad N:\ \begin{cases} z\ P(x_P, y_P, z_P) \equiv \vec{r}\,(u,\ v,\ uv) \\ \parallel\ \overrightarrow{N}\,(n_1, n_2, n_3) \parallel \vec{r}_u \times \vec{r}_v(-v,-u,1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad N:\ \frac{x-u}{-v} = \frac{y-v}{-u} = \frac{z-uv}{1} = \lambda$$

$$(\,?\,)\quad T_P S:\ \begin{cases} z\ P(x_P, y_P, z_P) \equiv \vec{r}\,(u,\ v,\ uv) \\ \perp\ N\ \parallel\ \overrightarrow{N}\,(n_1, n_2, n_3) \parallel\ \vec{r}_u \times \vec{r}_v(-v,-u,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad T_P S:\ -v(x-u) - u(y-v) + 1(z-uv) = 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad T_P S:\ vx + uy - z - uv = 0$$

Задача 4.2 */ стр 58* Намерете единичния нормален вектор и уравненията на нормалата и допирателната равнина в точка $P \in S(u, v)$:

в) $S: \ \vec{r}\ (u+v, u-v, \ uv)\ , \ P\ (-1, 3, -2)$

г) $S\colon \ \vec{r}\ (ucosv, \ usinv, \ lnu), \ P\ \left(u = 1, v = \frac{\pi}{2}\right)$

Решение:

в) $(\,?\,)\ \ \overrightarrow{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} \ = \ ?$

$$\vec{r}_u(u, v) = \vec{r}_u\ (1, 1, v)$$

$$\vec{r}_v(u, v) = \vec{r}_v\ (1, -1, u)$$

$$\vec{r}_u \ \times \ \vec{r}_v\ (u+v, v-u, -2\ ) \ \Rightarrow$$

$$|\vec{r}_u \ \times \ \vec{r}_v| = \sqrt{(u+v)^2 + (v-u)^2 + 4} = \ \sqrt{2u^2 + 2v^2 + 4}$$

$$\Rightarrow \ \overrightarrow{N} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2v^2+2u^2+4}}\ , \frac{v-u}{\sqrt{2v^2+2u^2+4}}, -\frac{2}{\sqrt{2v^2+2u^2+4}}\right) \ (1)$$

$$(\,?\,)\;\; N:\; \begin{cases} z\, P(-1,3,-2) \equiv \vec{r}\,(\,u+v, u-v,\; uv\,) \\ \parallel\; \vec{N}\,(n_1, n_2\,, n_3) \parallel \vec{r}_u \;\times\; \vec{r}_v(u+v, v-u, -2\,) \end{cases}$$

$$P(-1,3,-2) \equiv \vec{r}\,(\,u+v, u-v,\; uv\,) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} u+v=-1 \\ u-v=3 \\ uv=-2 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow \cdots \left| \begin{array}{l} u=1 \\ v=-2 \end{array} \right.$$

$$N:\; \begin{cases} z\, P(-1,3,-2) \\ \parallel\; (\vec{r}_u \;\times\; \vec{r}_v)_P(-1,-3,-2\,) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\;\; N:\; \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{-2} = \lambda$$

$$(\,?\,)\quad T_P S:\; \begin{cases} z\, P(-1,3,-2) \\ \perp \vec{N}\,(n_1, n_2\,, n_3) \parallel\; (\vec{r}_u \;\times\; \vec{r}_v)_P(-1,-3,-2\,) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad T_P S:\; -1(x+1) - 3(y-3) - 2(z+2) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\; T_P S:\; -x - 3y - 2z + 4 = 0 \quad \Rightarrow\;\; T_P S:\; x + 3y + 2z - 4 = 0$$

<u>Решение</u>: $\quad S\colon\ \vec{r}\,(ucosv,\ usinv,\ lnu),\ P\ \left(u=1, v=\frac{\pi}{2}\right)$

г) $\quad (\,?\,)\ \ \vec{N}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}\ =\ ?$

$$\vec{r}_u\left(cosv,\ sinv,\ \frac{1}{u}\right)$$

$$\vec{r}_v\,(-usinv,\ ucosv, 0)$$

$$\vec{r}_u\ \times\ \vec{r}_v\,(-cosv, -sinv, u\,)\ \ \Rightarrow\ \ \ |\vec{r}_u\ \times\ \vec{r}_v| = \sqrt{1+u^2}$$

$$\Rightarrow\ \vec{N}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}=\left(-\frac{cosv}{\sqrt{1+u^2}}\ ,-\frac{sinv}{\sqrt{1+u^2}},\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)\ \ (1)$$

$$(\,?\,)\ \ N:\ \begin{cases} z\ P\ \left(u=1, v=\frac{\pi}{2}\right)\equiv\vec{r}\,(\ ucosv,\ usinv,\ lnu\ ) \\ \parallel\ \vec{N}\,(n_1, n_2\,, n_3)\parallel\vec{r}_u\ \times\ \vec{r}_v(-cosv, -sinv, u) \end{cases}$$

$$P\ \left(u=1, v=\frac{\pi}{2}\right)\equiv\vec{r}\,(ucosv,\ usinv,\ lnu\ )\Rightarrow P(0, 1, 0)$$

$$N : \begin{cases} z\ P(0,1,0) \\ \parallel\ (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)_P(0,-1,\ 1\ ) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad N : \frac{x-0}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-0}{1} = \lambda$$

$$(\ ?\ ) \quad T_P S : \begin{cases} z\ P(0,1,0) \\ \perp \vec{N}\ (n_1, n_2\ , n_3) \parallel\ (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)_P(0,-1,1\ ) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_P S : \ 0(x-0) - 1(y-1) + 1(z-0) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad T_P S : \ -y + z + 1 = 0$$

4.2 Първа основна форма на повърхнина. Приложение

I. **Първа основна форма на повърхнината** $S(u,v)$

Дадена е повърхнината $S(u,v):\ \vec{r}(u,v)=\vec{r}\,(\,x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\,)$

Коефициенти на първа основна форма, които се означават с $g_{ij}=g_{ij}(u,v)\,,\ i,j=1{,}2\,,$ се дефинират чрез равенствата:

(4.11)
$$\begin{matrix} g_{11}=\vec{r}_u^{\,2}\ ,\ g_{22}=\vec{r}_v^{\,2} \\ g_{12}=g_{21}=\vec{r}_u.\vec{r}_v=\vec{r}_v.\vec{r}_u \end{matrix}\ \Rightarrow\ \ g=g_{11}.g_{22}-g_{12}^{\ 2}=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)^2>0$$

Следователно първа основна форма е положително определена.

Нека (du,dv) е произволно допирателно направление, лежащо в допирателната равнина T_PS , определено от безкрайно малките нараствания на параметрите на повърхнината. Тогава *първа основна форма* (*метрика*) върху S има вида:

(4.13) $$I(du,dv)=g_{11}.d^2u+2g_{12}.du.dv+g_{22}.d^2v$$

Нека $(\delta u, \delta v)$ е друго допирателно направление, лежащо в допирателната равнина $T_P S$, то скаларното произведение на направленията (du, dv) и $(\delta u, \delta v)$ се пресмята чрез:

$$(4.14) \qquad I(du, dv, \delta u, \delta v) = g_{11}.\, du.\, \delta u + g_{12}.\, (du.\, \delta v + dv.\, \delta u) + g_{22}.\, dv.\, \delta v \ ,$$

която първа основна форма се нарича *полярен вид на първа основна форма*.

II. **Приложение на първа основна форма на повърхнината $S(u, v)$**

Дадена е повърхнината $S(u, v) : \vec{r}(u, v) = \vec{r}\,(\, x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\,)$

- *За измерване на ъгъл между две криви върху повърхнина*. Ако C_1 и C_2 са две криви върху $S(u, v)$, които се пресичат в точка P, $C_1 \cap C_2 = P$ и имат допирателни направления в тази точка съответно $(du, dv)_P$ и $(\delta u, \delta v)_P$, то косинусът на ъгъла между двете криви се получава по формулата:

$$(4.16) \qquad \cos \measuredangle(\, C_1, C_2) = \frac{I_P(du,dv,\delta u,\delta v)}{\sqrt{I_P(du,dv)}\,.\sqrt{I_P(\delta u,\delta v)}} =$$

$$\cos \measuredangle(\, C_1, C_2) = \frac{g^P_{11}.du.\delta u+g^P_{12}.(du.\delta v+dv.\delta u)+g^P_{22}.dv.\delta v}{\sqrt{g^P_{11}.d^2u+2g^P_{12}.du.dv+g^P_{22}.d^2v}\,.\sqrt{g^P_{11}.\delta^2u+2g^P_{12}.\delta u.\delta v+g^P_{22}.\delta^2v}} \ ,$$

където първа основна форма и полярния й вид са изчислени в точка $P = C_1 \cap C_2$.

Задача 4.3 */ стр. 62* Намерете първа основна форма на следните повърхнини $S(u,v)$:

в) $S\,(u,v): \ \vec{r}\ (ucosv,\ usinv,\ bv)\,,\ b = const \neq 0\,;$

г) $S\,(u,v): \ \vec{r}\,(u+v, u-v,\ uv)\ .$

Решение:

в) $(\,?\,)\ \ I(du,dv) = g_{11}.d^2u + 2g_{12}.du.dv + g_{22}.d^2v = \ ?$

$\vec{r}_u(u,v) = \vec{r}_u\ (cosv, sinv, 0) \Rightarrow \qquad \vec{r}_u{}^2 = \ 1 = g_{11}$

$\vec{r}_v(u,v) = \vec{r}_v\ (-usinv\ , ucosv, b) \Rightarrow \ \vec{r}_v{}^2 = \ u^2 + b^2 = g_{22}$

$g_{12} = \vec{r}_u.\vec{r}_v = -usinv.cosv\ + usinvcosv = 0$

$\Rightarrow \quad I(du,dv) = 1.d^2u + 2.0.du.dv + (u^2 + b^2).d^2v \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad I(du,dv) = d^2u + (u^2 + b^2)d^2v$

4.3 г) $S\,(u,v):\ \vec{r}\,(u+v, u-v,\ uv)$.

$$\vec{r}_u(u,v)=\vec{r}_u\,(1,1,v) \Rightarrow \quad \vec{r}_u^{\ 2}=\ 2+v^2=g_{11}$$

$$\vec{r}_v(u,v)=\vec{r}_v\,(1,-1,u)\ \Rightarrow\ \vec{r}_v^{\ 2}=\ 2+u^2=g_{22}$$

$$g_{12}=\vec{r}_u.\vec{r}_v=1.1-1.1\ +u.v=uv$$

$$\Rightarrow \quad I(du,dv)=(2+v^2)d^2u+2uvdudv+(2+u^2)d^2v \quad .$$

<u>*Примерна задача*</u> 4^* : Намерете ъгъла между кривите C_1 и C_2 , които лежат върху повърхнината $S(u,v)$, ако уравненията им са съответно:

$$C_1:\ u=v\ ;\ C_2:\ u=3v-4\,;\ S:\ x\ =\ u,\ y\ =\ uv,\ z\ =\ av^2\ ,\ a=const>0$$

<u>*Решение*</u>*:*

1. $C_1\cap C_2=P:\ \left|\begin{matrix}u=v\\u=3v-4\end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix}u=v\\v=3v-4\end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix}u=v\\2v=4\end{matrix}\right. \Rightarrow P(u=v=2)$

2. $S\,(u, v):\ \vec{r}\,(u\,,\ uv,\ av^2)$

$\vec{r}_u(u, v) = \vec{r}_u\,(1, v, 0) \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_u^{\;2} = 1 + v^2 = g_{11}$

$\vec{r}_v(u, v) = \vec{r}_v\,(0, u\,, 2av) \ \Rightarrow \ \vec{r}_v^{\;2} = u^2 + 4a^2v^2 = g_{22}\,,\ g_{12} = \vec{r}_u.\vec{r}_v = uv + 0 = uv$

3. $g_{11}{}^P = 1 + 2^2 = 5\ ,\ g_{12}{}^P = 2.2 = 4\ ,\ g_{22}{}^P = 2^2 + 4a^2 2^2 = 4 + 16a^2$

4. $C_1\!:\ u = v\ \mid .\,d \quad \Rightarrow \quad du = dv \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dv} = \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad C_1\!:\ (du, dv) \uparrow\uparrow (1, 1)$

5. $C_2\!:\ u = 3v - 4\ \mid .\,\delta \quad \Rightarrow \quad \delta u = 3\delta v \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta u}{\delta v} = \frac{3}{1} \quad \Rightarrow \quad C_2\!:\ (\delta u, \delta v) \uparrow\uparrow (3, 1)$

6. $\cos\sphericalangle(\,C_1, C_2) = \dfrac{5.du.\delta u + 4.(du.\delta v + dv.\delta u) + (4+16a^2).dv.\delta v}{\sqrt{5.d^2u + 2.4.du.dv + (4+16a^2).d^2v}\,.\sqrt{5.\delta^2u + 2.4.\delta u.\delta v + (4+16a^2).\delta^2v}} =$

$\cos\sphericalangle(\,C_1, C_2) = \dfrac{5.1.3 + 4.(1.1 + 1.3) + (4+16a^2).1.1}{\sqrt{5.1^2 + 2.4.1.1 + (4+16a^2).1^2}\,.\sqrt{5.3^2 + 2.4.3.1 + (4+16a^2).1^2}} = \dfrac{15 + 16 + (4+16a^2)}{\sqrt{17+16a^2}\,.\sqrt{73+16a^2}} =$

$\dfrac{35+16a^2}{\sqrt{17+16a^2}\,.\sqrt{73+16a^2}}\ . \quad \begin{matrix} du & dv & \downarrow & \searrow\swarrow & \downarrow \\ \delta u & \delta v & \uparrow & \nearrow\nwarrow & \uparrow \end{matrix}$ – за числителя схемата