# Хомогенни диференциални уравнения

*Информатика*, 2021/2022

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2 \qquad z^2 - 2$$

$$y' = e^{\frac{y}{x}} \qquad e^z$$

$$y' = \operatorname{tg}\frac{y}{x} - 2 \qquad \operatorname{tg} z - 2$$

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x}} \qquad \sqrt{z}$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

където $f$ е дадена непрекъсната функция, се наричат хомогенни уравнения.

- Хомогенните уравнения могат да се сведат до уравнения с разделящи се променливи чрез въвеждане на нова неизвестна функция

$$z = \frac{y}{x}, \Big| \cdot x \quad z = z(x).$$

Имаме $y = zx$, откъдето $y' = z'x + z$. Тогава като заместим в даденото уравнение получаваме

$$z'x + z = f(z), \qquad z'x = f(z) - z \quad \Big| : x$$

откъдето

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}, \quad = \frac{1}{x} \cdot \left( f(z) - z \right)$$

което очевидно е уравнение с разделящи се променливи.

107

$$xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$$ $\cos\frac{y}{x} \neq 0$, $x \neq 0$

$$xy' = y + x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x} \quad \Big| : x$$

$$y' = \frac{y + x\,\mathrm{tg}\left(\frac{y}{x}\right)}{x} = \frac{y}{x} + \frac{\cancel{x}\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}}{\cancel{x}} = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\frac{y}{x} \qquad (*)$$

Пол. $\frac{y}{x} = z$, $z = z(x)$

$$y = zx \Rightarrow y' = z'x + zx' = z'x + z$$

зам в $(*)$ $\Rightarrow$

$$z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + \mathrm{tg}\,z$$

$$z'x = \mathrm{tg}\,z$$

$$z' = \frac{\mathrm{tg}\,z}{x} = \frac{1}{x}\cdot\mathrm{tg}\,z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,z \quad \Big| \cdot dx$$

$$dz = \frac{1}{x}\,\mathrm{tg}\,z \cdot dx \quad \Big| : \mathrm{tg}\,z \neq 0$$

проверим!

$$\underbrace{\int \frac{dz}{\mathrm{tg}\,z}}_{I} = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$

$$I = \int \frac{dz}{\frac{\sin z}{\cos z}} = \int \frac{\cos z}{\sin z}\, dz = \int \frac{d(\sin z)}{\sin z}$$

$\int \cos z \, dz = \sin z$

$$= \ln|\sin z|$$

зам $\Rightarrow$ $\ln|\sin z| = \ln|x| + C$

$$e^{\ln|\sin z|} = e^{\ln|x| + C}$$

$$|\sin z| = |x| \cdot e^{C}$$

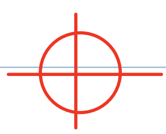
$$\varepsilon_1 \sin z = \varepsilon_2 x \cdot e^{C}$$

$$\sin z = x \cdot \underbrace{\frac{e^{C} \varepsilon_2}{\varepsilon_1}}_{= C_1} \qquad C_1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \sin z = Cx, \quad C \neq 0$$

$$\sin \frac{y}{x} = Cx, \quad C \neq 0$$

проб. $\operatorname{tg} z = 0 \Rightarrow \frac{\sin z}{\cos z} = 0 \Rightarrow \sin z = 0 \Rightarrow$
$z = k\pi$



$k\pi$

зам. в $\quad z' = \dfrac{\operatorname{tg} z}{x}$

$$(k\pi)' \overset{?}{=} \frac{\operatorname{tg} k\pi}{x}$$

$$0 \overset{?}{=} 0 \qquad \checkmark$$

$\Rightarrow \quad z = k\pi \quad$ са допълн. решения

$\Rightarrow \quad \dfrac{y}{x} = k\pi \quad$ — " —

$y = k\pi x \quad$ са допълн. реш.

Отг: $\quad \sin\dfrac{y}{x} = Cx, \quad C \neq 0$

$y = k\pi x, \quad k$ – цяло

(109) $\quad xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$

$$xy' = y + (x+y)\ln\frac{x+y}{x} \qquad \Big|: x$$

$$y' = \frac{y + (x+y)\ln\frac{x+y}{x}}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{(x+y)\ln\frac{x+y}{x}}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x}\cdot\frac{\ln\frac{x+y}{x}}{1}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

Пол. $\frac{y}{x} = z$, $z = z(x)$ $\Rightarrow$ $y = zx$

$y' = z'x + z$

$$z'x + \cancel{z} = \cancel{z} + (1+z)\ln(1+z)$$

$$z' = \frac{(1+z)\ln(1+z)}{x} \quad \Big| : (1+z)\ln(1+z) \neq 0$$

$$\underbrace{\int \frac{dz}{(1+z)\ln(1+z)}}_{I} = \int \frac{1}{x}\,dx + C$$

$$I = \int \frac{d(z+1)}{(z+1)\ln(z+1)} = \int \frac{1\,du}{u\ln u} = \int \frac{d\ln u}{\ln u} =$$

$$= \ln|\ln u| = \ln|\ln(z+1)|$$

зам $\Rightarrow$ $\ln|\ln(z+1)| = \ln|x| + C$

$\ln\left|\ln\left(\frac{y}{x}+1\right)\right| = \ln|x| + C$ отв ?!

пров. $(1+z)\ln(1+z)=0$ ?

102 $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-y}{x+y} = -\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{y}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{y}{x}\right)}$$

Пол. $\frac{y}{x} = z$, $z = z(x)$, $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$\Rightarrow z'x + z = -\frac{1-z}{1+z}$$

$$z'x = \frac{z-1}{1+z} - \overset{1+z}{z} = \frac{\cancel{z}-1-\cancel{z}-z^2}{1+z}$$

$$z'x = -\frac{1+z^2}{1+z}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1+z^2}{1+z}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\int\frac{1+z}{1+z^2}\,dz = -\int\frac{1}{x}\,dx + C$$

пров. $x=0$?

$$\int\frac{1}{1+z^2}\,dz + \int\frac{z}{1+z^2}\,dz = -\ln|x| + C$$

$$\operatorname{arctg} z + \frac{1}{2}\ln|z^2+1| = -\ln|x| + C$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right) = -\ln|x| + C$$

Уравнения от вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

пр. $y' = -\frac{x-y}{x+y}$ $\quad a_1 = 1,\ b_1 = -1,\ c_1 = 0$
$a_2 = 1,\ b_2 = 1,\ c_2 = 0$

$\boxed{\text{I сл.}\quad c_1 = c_2 = 0}$

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right)$$

$$y' = \underbrace{f\left(\frac{\cancel{x}(a_1+b_1\frac{y}{x})}{\cancel{x}(a_2+b_2\frac{y}{x})}\right)}_{F\left(\frac{y}{x}\right)}$$

хомогенно

$\frac{y}{x} = z$

УРП

$\boxed{\text{II. } c_1 \neq 0 \text{ или } c_2 \neq 0}$

а) $a_1x + b_1y = k(a_2x+b_2y)$

$a_1 = ka_2,\ b_1 = kb_2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

$$y' = f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$$

Полаг. $z = a_2x + b_2y$ , $z = z(x)$

$$b_2y = z - a_2x$$

$$y = \frac{1}{b_2}(z - a_2x)$$

$$y' = \frac{1}{b_2}(z' - a_2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{b_2}(z' - a_2) = f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)$$

$$z' = \underbrace{b_2 f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right) + a_2}_{F(z)}$$

УРП (без да се минава през хомо-генно)

б) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

Разгл. $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

От $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ системата има $!$ реш. $(x_0, y_0)$

Полаг.

$$\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases} \qquad v = v(u)$$

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+y_0)}{d(u+x_0)} = \frac{dv}{du}$$

зам. $\Rightarrow$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u+x_0) + b_1(v+y_0) + c_1}{a_2(u+x_0) + b_2(v+y_0) + c_2}\right)$$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + a_1 x_0 + b_1 v + b_1 y_0 + c_1}{a_2 u + a_2 x_0 + b_2 v + b_2 y_0 + c_2}\right)$$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v}\right)$$

$\Sigma$ сл. своб. коеф. $= 0$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{\cancel{u}(a_1 + b_1 \frac{v}{u})}{\cancel{u}(a_2 + b_2 \frac{v}{u})}\right)$$

хомогенно

Пол. $\frac{v}{u} = z$, $\qquad z = z(u)$

$$\Rightarrow \quad v = zu \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{du} = v' = z'u + zu' = z'u + z.1$$

$$\Rightarrow \quad z'u + z = f\left(\frac{a_1 + b_1 z}{a_2 + b_2 z}\right)$$

<u>УРП</u>

## Задача 1

*Да се решат уравненията:*
*1)* $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$;
*2)* $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$;
*3)* $(y^2 - 2xy)\, dx + x^2\, dy = 0$.

Решение. 1) Първо трябва да изразим производната $y'$. При $x \neq 0$ имаме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}.$$

Това уравнение е хомогенно, защото дясната му страна е функция на $\frac{y}{x}$.

Полагаме

$$\frac{y}{x} = z, \quad z = z(x),$$
$$y' = z'x + z.$$

След заместването получаваме

$$z'x + z = z - e^z,$$
$$z'x = -e^z.$$

Последното уравнение е уравнение с разделящи се променливи. Записваме $z' = \frac{dz}{dx}$ и намираме

$$-\frac{dz}{e^z} = \frac{dx}{x},$$
$$-\int e^{-z}\,dz = \int \frac{dx}{x} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$
$$e^{-z} = \ln|x| + \ln e^{C_1},$$
$$e^{-z} = \ln(Cx), \quad C \neq 0.$$

Сега заместваме $z$ с $\frac{y}{x}$ и получаваме

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln(Cx),$$

откъдето

$$y = -x \ln \ln Cx, \quad C \neq 0,$$

което е общото решение на даденото диференциално уравнение.

2) Отг. $\operatorname{ctg} \frac{\ln \frac{y}{x}}{2} = \ln Cx;\quad y = e^{2k\pi} x,\ k \in \mathbb{Z}.$

3) Отг. $\frac{y}{x-y} = Cx;\quad x = 0;\quad y = 0;\quad y = x.$

- Да разгледаме уравненията от вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

където $f$ е дадена непрекъсната функция, а $a_i$, $b_i$, $c_i$ $(i = 1, 2)$ са дадени реални числа.

I случай. Ако $c_1 = c_2 = 0$, то имаме

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right).$$

Изваждайки $x$ пред скоби в числителя и знаменателя, след съкращаване получаваме

$$y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2 + b_2\frac{y}{x}}\right),$$

дясната страна на което е от вида $g\left(\frac{y}{x}\right)$. Следователно полученото уравнение е хомогенно.

II случай. Нека $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$.
1) Ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

то съществува константа $k$, такава че $a_2 = ka_1$, $b_2 = kb_1$.
Тогава

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ka_1x + kb_1y + c_2}\right) = f\left(\frac{(a_1x + b_1y) + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right).$$

Полагаме $z = a_1x + b_1y$, $z = z(x)$. Оттук

$$y = \frac{z - a_1x}{b_1}, \quad y' = \frac{z' - a_1}{b_1}.$$

Тогава

$$\frac{z' - a_1}{b_1} = f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right).$$

Решаваме последното уравнение спрямо $z'$ и получаваме

$$z' = a_1 + b_1\, f\left(\frac{z + c_1}{kz + c_2}\right),$$

което е уравнение с разделящи се променливи, защото дясната страна е функция само на $z$.

2) Ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то съществува единствена двойка числа $(x_0, y_0)$, за които

$$\left| \begin{array}{l} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \\ a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 = 0. \end{array} \right.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция $v$ и нова независима променлива $u$ с равенствата

$$\left| \begin{array}{l} x = u + x_0 \\ y = v + y_0. \end{array} \right.$$

Тъй като $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+y_0)}{d(u+x_0)} = \frac{dv}{du}$, то получаваме

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{du} &= f\left(\frac{a_1(u+x_0)+b_1(v+y_0)+c_1}{a_2(u+x_0)+b_2(v+y_0)+c_2}\right)\\
&= f\left(\frac{a_1u+a_1x_0+b_1v+b_1y_0+c_1}{a_2u+a_2x_0+b_2v+b_2y_0+c_2}\right)\\
&= f\left(\frac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right),
\end{aligned}$$

заради избора на $x_0$ и $y_0$. Оттук нататък работим както в I случай.

## Задача 2

*Да се решат уравненията:*

*1)* $(x+y+1)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0$;

*2)* $(2x-4y+6)\,dx + (x+y-3)\,dy = 0$;

*3)* $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\dfrac{y-2x}{x+1}$.

Решение. 1) Започваме с изразяване на $\frac{dy}{dx}$. Имаме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+1}{2x+2y-1}.$$

Очевидно сме във II случай, 1), тъй като $\Delta = 0$. Тогава

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y+1}{2(x+y)-1}$$

и полагаме $x+y=z$, $z=z(x)$, $y'=z'-1$.

След заместване последователно получаваме

$$
\begin{aligned}
z' - 1 &= -\frac{z+1}{2z-1}, \\
z' &= \frac{z-2}{2z-1}, \\
\frac{2z-1}{z-2}\,dz &= dx, \quad z \neq 2, \\
\int \frac{2z-1-3+3}{z-2}\,dz &= \int dx + C_1, \\
\int \left(2 + \frac{3}{z-2}\right) dz &= x + C_1, \\
2z + 3\ln|z-2| &= x + C_1, \\
\ln|z-2|^3 + C_2 &= x - 2z, \\
\ln C(z-2)^3 &= x - 2z.
\end{aligned}
$$

От $z = x + y$ следва, че

$$\ln C(x+y-2)^3 = -x - 2y.$$

Накрая ще отбележим, че $z = 2 \Leftrightarrow x + y = 2$ и след заместване в даденото уравнение се вижда, че $y = 2 - x$ също е решение.

2) Имаме

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}.$$

Тъй като $\Delta \neq 0$, то уравнението е от вида във II случай, 2). Решаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{array}\right.$$

и намираме $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

Въвеждаме нова неизвестна функция $v$ и нова независима променлива $u$ с равенствата

$$\left| \begin{array}{l} x = u + 1 \\ y = v + 2. \end{array} \right.$$

Тогава

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2u - 4v}{u + v}.$$

Това уравнение е от вида в I случай. Записваме

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2 - 4\frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}$$

и полагаме $\frac{v}{u} = z$, $z = z(u)$. Сега $v' = z'u + z$ и след заместване

$$z'u + z = -\frac{2 - 4z}{1 + z}.$$

Оттук

$$z'u = -\frac{z^2 - 3z + 2}{1 + z},$$

$$\frac{1+z}{(z-1)(z-2)}\,dz = -\frac{du}{u},$$

$$\int \left(\frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1}\right) dz = -\frac{du}{u} + C_1,$$

$$3\ln|z-2| - 2\ln|z-1| = -\ln|u| + \ln e^{C_1},$$

$$u(z-2)^3 = C(z-1)^2.$$

Връщаме се към променливата $v$ като заместваме $z = \frac{v}{u}$, а след това заместваме и $u = x - 1$, $v = y - 2$. След преобразуване на последното равенство намираме общото решение

$$(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2.$$

Накрая добавяме и решенията $y = x + 1$, $y = 2x$, които се пораждат съответно от $z = 1$ и $z = 2$.

3) Имаме

$$y' = \frac{y - 2x + 2x + 2}{x + 1} + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1},$$

откъдето

$$y' = \frac{y - 2x}{x + 1} + 2 + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1}.$$

Това уравнение е от вида във II случай, 2).
Отг. $\sin \frac{y-2x}{x+1} = C(x + 1)$.