1 Теория на множествата

Според Кантор: "Множество е съвкупност от еднотипни обекти на нашите възприятия или на нашето мислене. Обектите наричаме елементи на множеството."

Множествата се означават с латински букви $A, B, \ldots, Z, a, b, \ldots, z$.

Нека A е произволно множество. Тогава ще използваме следните означения:

- $x \in A$, т.е. елементът x принадлежи на множеството A;
- $x \notin A$, т.е. елементът x не принадлежи на множеството A.

Има няколко начина за задаване елементите в едно множество като най-често това са:

- чрез явно изброяване, ако са краен брой - $M = \{2, 4, 6, 8\}$;
- чрез определена зависимост, на които тези елементи трябва да отговарят - *множеството на целите положителни числа, които се делят на 3* $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ се дели на } 3\}$.

Някои специални множества:

$\varnothing$ **Празното множество** е множество, което не съдържа елементи

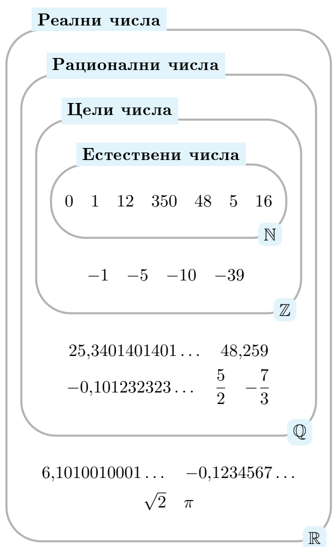
$\mathbb{U}$ **Универсалното множество** е множество на всички елементи

$\mathbb{N}$ Множеството на **естествените числа**

$\mathbb{Z}$ Множеството на **целите числа**

$\mathbb{Q}$ Множеството на **рационалните числа**

$\mathbb{R}$ Множеството на **реалните числа**



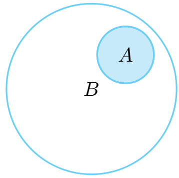
Дефиниция

Множеството A е *подмножество* на B (означава се с $A \subseteq B$), ако всеки елемент на A е елемент и на B. Множеството B се нарича *супермножество* на A.

Дефиниция

Ако всеки елемент на множеството A е елемент и от множеството B, но в B има елементи, които не са от A, казваме, че A е *истинско подмножество* на A и бележим с $A \subset B$.

$A \subset B$



Дефиниция

Множеството A е *еквивалентно* на множеството B, ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Запомнете:

- ☐ *Две множества са еднакви, ако съдържат едни и същи елементи ($A = B$);*
- ☐ *Две множества са различни, съществува поне един елемент, който принадлежи та едното, но не принадлежи на другото множество ($A \neq B$);*
- ☐ *Един елемент не може да се повтаря в едно множество; т.е.* $\{2,7,5,2,7,5\} = \{2,5,5,7,2\} = \{2,7,5,2,7,5\} = \{2,5,7\}$;
- ☐ *Елементите на едно множество не са подредени, т.е.* $\{2,5,7\} = \{7,5,2\} = \{5,7,2\}$.

Теорема 1

За всяко произволно множество A е вярно: $\varnothing \subset A$.

В много случаи се налага да разгледаме всички подмножества на дадено множество.

Дефиниция

Множеството от всички подмножества на A се нарича обвивка на A и се означава с $\mathcal{P}(A)$, т.е. $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

Пример: Нека $A = \{3,5\}$. Тогава $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}\}$.

Дефиниция

Ако множеството A има краен брой елементи, то A е крайно множество и мощността му е броя на тези елементи, т.е. $|A| = n$.

Пример: Нека $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$. Тогава $|A| = 5$.

Задачи за самоподготовка

***Задача* 1**. Определете всички елементи на следните множества:

а) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 5\}$;

б) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 < x \leq 15\}$;

в) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$;

г) $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 < 2x + 1 \leq 15\}$;

д) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ е четно число и } x \leq 64\}$.

***Задача* 2**. Запишете чрез формула следните множества:

а) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$;

б) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

в) $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9\}$;

г) $\{2, 5, 8, \ldots, 32\}$;

д) $\{23, 18, 13, 8, 3, -2, -7\}$.

***Задача* 3**. Кои от следните двойки множества са равни?

а) $\{0, 1, 2\}$ и $\{1, 0, 2\}$;

б) $\{0, 1, 3, \{1, 2\}\}$ и $\{0, 1, 2, \{2, 3\}\}$;

в) $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{5, 1, 4\}\}$ и $\{\{5, 3, 1\}, \{2, 4, 6\}, 5, 1, 4\}$;

г) $\{5, \{2, 4, 6\}, 3, \{5, 1, 3\}, 1\}$ и $\{\{1, 3, 5\}, \{5, 3, \}, \{6, 4\}, 1, 2\}$;

д) $\varnothing$ и $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 1 \text{ и } x^2 = x\}$.

***Задача* 4.** На мястото на $\square$ поставете необходимият символ измежду $=, \in, \notin, \subset, \supset$, така че да се получи вярно твърдение:

а) $2 \,\square\, \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x < 5\}$;

б) $\varnothing \,\square\, \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x < 5\}$;

в) $\{2, 4\} \,\square\, \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x \leq 5\}$;

г) $\{1, 3, 5\} \,\square\, \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x \leq 5\}$;

д) $\{1, 2, 3, 4, 5\} \,\square\, \{x \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq x < 5\}$.

***Задача* 5.** Нека $S = \{\varnothing, a, \{a\}\}$. Определете дали следващите множества са елементи на S, подмножество на S, нито едното или и двете.

а) $\{a\}$;

б) $\{\{a\}\}$;

в) $\varnothing$;

г)$\{\{\varnothing\}, a\}$;

д) $\{\{\varnothing\}\}$;

е) $\{\varnothing, a\}$.

***Задача* 6.** Дадени са множествата $A = \{1, 3, 5, 12\}$; $B = \{1, 5, 12, 35\}$, $C = \{12, 3, 5, 1\}$ и $D = \{1, 5, 12, 35, 104\}$. Вярно ли е, че:

а) $A \subseteq B$; **б)** $A \subseteq C$; **в)** $A \subset C$; **г)** $B \subset D$.

***Задача* 7.** Образувайте множеството $\mathcal{P}(A)$, ако:

а) $A = \{2, 3, 5, 11\}$;

б) $A = \{\varnothing, \{7, 9\}, 14, 16\}$;

в) $A = \{\varnothing, \{0\}\}$.

***Задача* 8.** Нека $A = \{1, 2, 4, 61, 17, 9, 11\}$. Напишете всички подмножества на A, които

- съдържат точно две четни и точно едно нечетно число;
- съдържат точно пет елемента;
- не съдържат четни елементи.

***Задача* 9**. Нека е дадено множеството
$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 3k + 5 \text{ за някое } k \in \mathbb{N}\}.$$
Проверете дали е вярно, че

а) $23 \in A$; **б)** $52 \in A$; **в)** $35 \notin A$.

***Задача* 10**. Нека са дадени множествата:
$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k + 1 \text{ за някое } k \in \mathbb{N}\},$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 4k + 1 \text{ за някое } k \in \mathbb{N}\},$$
$$C = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k - 1 \text{ за някое } k \in \mathbb{N}\}.$$
Проверете дали е вярно, че

а) $35 \in A$; **б)** $35 \in B$; **в)** $35 \notin B$;

г) $A = C$; **д)** $B \subset C$; **е)** $B \subset A$.

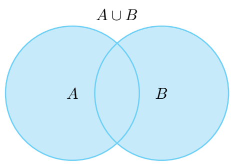
1.1 | Операции с множества

Диаграмата на Вен е нагледно графично представяне на отношения между крайни множества. Тези диаграми се използват при теорията на множествата, логически следствия, положения от теория на вероятностите и други.

Дефиниция

Обединение на множествата A и B е множеството от всички обекти, които са елементи или на A, или на B.

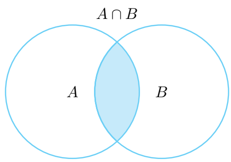
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$



Пример: Нека $A = \{3, 5, 17\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Тогава $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 17\}$.

Дефиниция

Сечение на множествата A и B е множеството от всички обекти, участващи едновременно и в A, и в B.
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$



Пример: Нека $A = \{3, 5, 17\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Тогава $A \cap B = \{3, 5\}$.

Дефиниция

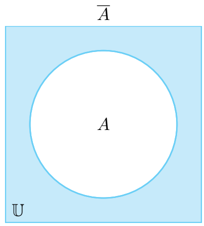
Две множества се наричат *непресичащи се*, ако тяхното сечение е празното множество.

Пример: Нека $C = \{a, b, c, d\}$ и $D = \{m, n, k\}$. Тогава $C \cap D = \varnothing$.

Дефиниция

Допълнение (или комплимент) на множеството A е множеството от всички елементи на $\mathbb{U}$, които не са в A.

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{U} \mid x \notin A\}$$



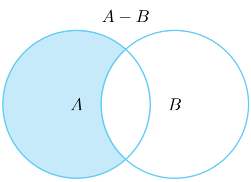
Пример: Нека $A = \{a, e, i, o, u\}$, а универсалното множество е множеството от всички латински букви. Тогава

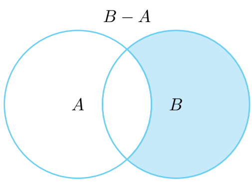
$$\overline{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}.$$

Дефиниция

Разлика на множествата A и B е множеството от елементи на A, които не са от B.

$$A - B = A \cap \overline{B} \quad \text{или} \quad A - B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$$





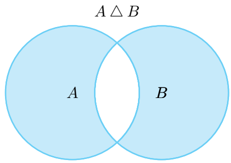
Пример: Нека $A = \{3, 5, 17\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Тогава

$$A - B = \{17\} \qquad B - A = \{1, 7\}.$$

Дефиниция

Симетрична разлика на множествата A и B е множеството от всички елементи на A, които не са в B или са елементи на B, но не са в A.

$A \triangle B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} \cup \{x \mid x \in B \text{ и } x \notin A\}$



Пример: Нека $A = \{3, 5, 17\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Тогава $A \triangle B = \{1, 7, 17\}$.

В следващата таблица са зададени някои от основните правила при работа с множества.

Закони за множества	
Комутативен	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Дистрибутивен	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Неутрални елементи	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap \mathbb{U} = A$
Инверсни елементи	$A \cup \overline{A} = \mathbb{U}$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$
Идемпотентност	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Асоциативност	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Абсорбация	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Де Морган	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
Поглъщане	$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
Двойно отрицание	$\overline{\overline{A}} = A$

Нека да разгледаме няколко примера за използването на различните операции с множества.

Пример 1: Да се намерят елементите на множествата A и B, ако е известно, че $A - B = \{1, 2, 7, 8\}$, $B - A = \{3, 4, 9\}$ и $A \cap B = \{0, 5, 6\}$.
Решение: Можем да представим множеството A по следния начин

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)$$

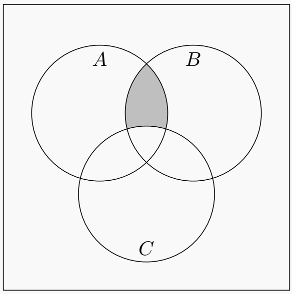
Тогава елементите на множеството A са

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) = \{1, 2, 7, 8\} \cup \{0, 5, 6\} = \{0, 1, 2, 5, 6, 7, 8\}.$$

Аналогично елементите на множеството B са

$$B = (B - A) \cup (A \cap B) = \{3, 4, 9\} \cup \{0, 5, 6\} = \{0, 3, 4, 5, 6, 9\}.$$

Пример 2: Нека са дадени множествата A, B и C. Като използвате диаграмите на Вен представете графично множеството $A \cap (B - C)$.
Решение: Търсеното множество $A \cap (B - C)$ е оцветено в сив цвят.



Задачи за самоподготовка

Задача 1. За множествата $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ намерете

а) $A \cap B \cap C$; **б)** $A \cup B \cup C$; **в)** $(A \cup B) \cap C$; **г)** $(A \cap B) \cup C$.

Задача 2. Да се определят множествата $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ и $A \triangle B$, ако A и B са следните множества

а) $A = \{1, 5, 10, 15, 20, 25\}$ и $B = \{1, 5, 10, 30\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 46\}$ и $B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 20 \leq x < 37\}$;

в) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq x < 16\}$ и $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x < 17\}$.

***Задача* 3**. Дадени са множествата $A = \{2, 5, 7, 3\}$, $B = \{4, 1, 3, 5\}$ и $C = \{7, 10, 2\}$ като $\mathbb{U} = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Намерете:

а) $M = A \cup B$; **б)** $N = \overline{A} \cap C$; **в)** $P = (A \cup B) \cap C$;

г) $Q = (\overline{A \cup B}) \cap C$; **д)** $L = \mathbb{U} - B$; **е)** $S = (A \bigtriangleup B) \cup C$.

Определете мощността на всяко от получените множества.

***Задача* 4**. Нека $A = \{5, 6, 7\}$, $B = \{7, 4, 9, x\}$ и $C = \{x, y, 6, 10\}$. Да се намерят числата x и y така, че $A \cap B = \{5, 7\}$ и $A \subset C$.

***Задача* 5**. Намерете множествата A и B, ако е известно, че
$A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$ и $A \cap B = \{3, 6, 9\}$.

***Задача* 6**. Дадени са множествата
$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ е просто число не по-голямо от $15\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ е нечетно число не по-голямо от $15\}$;
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ е четно число не по-голямо от $15\}$;
$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ е число не по-голямо от 15, което се дели едновременно и на 2, и на $3\}$.

а) Вярно ли е, че:
1. $A \subset B$ **2.** $B \subseteq A$ **3.** $A \subset C$ **4.** $D \subseteq C$;

б) Намерете:
1. $|\{A \cap B\} \times D|$ **2.** $\mathcal{P}(B - A)$;

***Задача* 7**. Нека са дадени множествата A, B и C. Като използвате диаграмите на Вен представете графично следните множества:

а) $A \cup \overline{B}$; **б)** $\overline{A \cup B}$; **в)** $A \cap (B \cup C)$;

г) $(A \cap B) \cup C$; **д)** $\overline{A} \cap B \cap \overline{C}$; **е)** $(A \cup B) - C$.

1.2 | Наредени двойки. Декартово произведение

Дефиниция

Елементите x и y образуват *наредена двойка*, ако единият от тях е приет за първи, а другият - за втори. Означаваме с (x, y). В някои случаи x и y се наричат координати.

Две наредени двойки (a, b) и (c, d) са *еквивалентни*, когато $a = c$ и $b = d$.

При множествата не е от значение подредбата на елементите, но за наредените двойки не е така: $\{a, b\} = \{b, a\}$*, но* $(a, b) \neq (b, a)$*.*

Аналогично *наредена* n*-торка* ще наричаме всяко множество от n елемента, в който е указано кой е първи, кой втори и т.н. кой е $n-$ ти и ще означаваме с $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Наредената n-торка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се нарича още *крайна последователност* или *нареден списък*.

Всеки елемент в множеството се съдържа само веднъж в него, а елементите му са неподредени.

Дефиниция

Обекти, подобни на множествата, в които даден елемент може да се срещне няколко пъти се нарича *списък*.

Дефиниция

Декартово произведение на множествата A и B е множеството от наредени двойки с първи елемент от A и втори – от B. Бележим с $A \times B$ и

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}.$$

Декартово произведение на n *множества* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се въвежда по аналогичен начин

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Пример: Нека A представлява множеството на всички студенти в университета, а B представлява всички учебни курсове. Тогава декартовото произведение $A \times B$ се състои от наредена двойка *(студент, учебен курс)*.

Пример: Нека са дадени множествата $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{x, y\}$. Намерете декартовото произведение $A \times B$ и $B \times A$.
Решение: $A \times B = \{(1, x); (1, y); (2, x); (2, y); (3, x); (3, y)\}$
$B \times A = \{(x, 1,); (y, 1); (x, 2); (y, 2); (x, 3); (y, 3)\}$

Важно е да се отбележи, че двете множества не са равни $A \times B \neq B \times A$

въпреки, че броят на елементите им е равен, т.е. $|A \times B| = |B \times A|$.

Друг начин за представяне на декартово произведение е чрез таблица:

A/B	x	y
1	$(1,x)$	$(1,y)$
2	$(2,x)$	$(2,y)$
3	$(3,x)$	$(3,y)$

Задачи за самоподготовка

***Задача* 1**. Нека $A = \{1,5,7\}$ и $B = \{3,4,9\}$ и $C = \{2,3\}$. Образувайте:

а) $A \times B$; **б)** $A \times B \times C$; **в)** C^2.

***Задача* 2**. Нека $A = \{a,b,c\}$ и $B = \{x,y\}$ и $C = \{0,1\}$. Намерете:

а) $A \times B \times C$; **б)** $C \times B \times A$;

в) $C \times A \times B$; **г)** $B \times B \times B$.

***Задача* 3**. Даден е наредения списък (a,a,b,a,c). Напишете всички под последователности от този списък с дължина 3.

***Задача* 4**. Намерете декартовото произведение $A \times B$, $A \times C$, $B \times C$, $A \times B \times C$ и определете броя на елементите им, ако A, B и C са следните множества:

а) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$ и $C = \{x,y\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3 < x \leq 7\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, |y| < 2\}$ и $C = \{z \in \mathbb{N} \,|\, |z| = 1\}$.

***Задача* 5**. Намерете декартовото произведение $A \times B$ и го онагледете геометрично, ако

а) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -1 \leq x < 2\}$ и $B = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, 0 < y \leq 3\}$;

б) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, -5 \leq x < 3\}$ и $B = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, -2 < y \leq 2\}$;

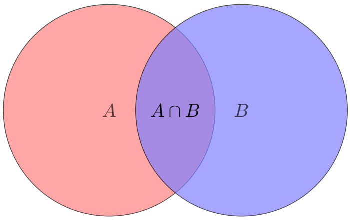
в) $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 4 < x \leq 6\}$ и $B = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, |y| \leq 2\}$;

г) $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 - 1 > 0\}$ и $B = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, y \leq 2\}$.

1.3 Принцип на включването и изключването

Определяне броя на елементите на обединението на две множества A и B:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



Пример: Една софтуерна компания има 52 служители. От тях 32 владеят Java, 15 владеят Python, а 11 не владеят нито един от тези два езика. Колко са служителите в тази компания, които владеят и Java, и Python?

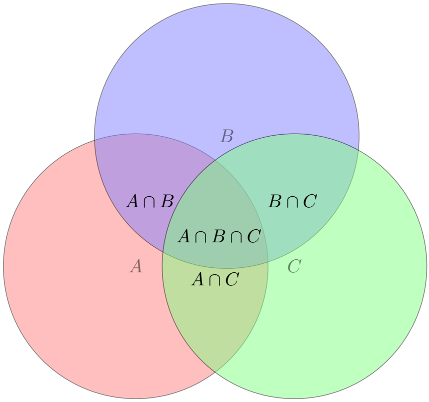
Решение: Нека означим с U множеството от всички служители, а с J и P- множеството програмисти, владеещи съответно Java и Python. Тогава броят на служителите, които владеят поне един програмен език е $52 - 11 = 41$, т.е. $|J \cup P| = 41$. От принципа на включването и изключването е в сила следното равенство:

$$|J \cup P| = |J| + |P| - |J \cap P|$$

Заместваме и получаваме $41 = 32 + 15 - |J \cap P| \Rightarrow |J \cap P| = 6$.

Определяне броя на елементите на обединението на три множества A, B и C:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

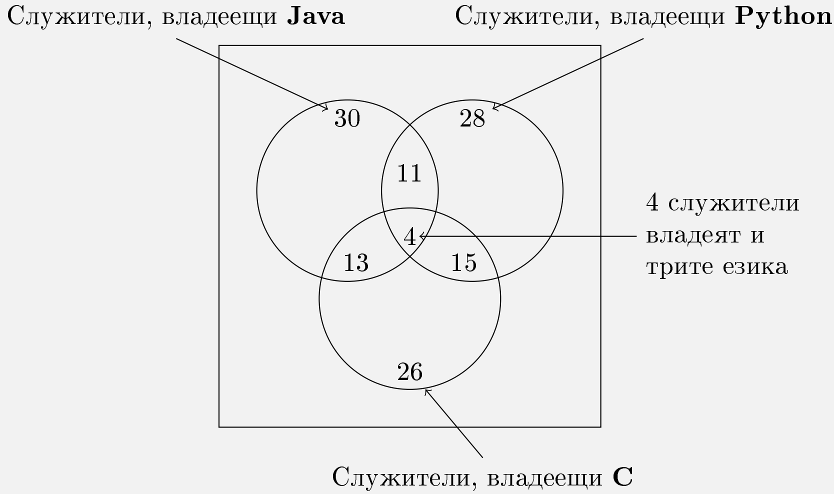


Пример: Една софтуерна компания провела анкета сред служителите си за владеене на програмни езици като всеки служител владее поне по един програмен език. Като резултат се получило, че 30 владеят Java, 28 владеят Python, а 26 - C. Резултатите от анкетата показват още, че 13 владеят Java и C, 15 - Python и C, 11 - Java и Python, а 4 души владеят и трите езика. Колко служители са участвали в анкетата?

Решение: Нека означим с U множеството от всички служители, а с J, P и C- множеството програмисти, владеещи съответно Java, Python и C. От принципа на включването и изключването е в сила следното равенство:

$$\begin{aligned}|J\cup P\cup C| &= |J|+|P|+|C|-|J\cap P|-|J\cap C|-|P\cap C|+|J\cap P\cap C| \\ &= 30+28+26-11-13-15+4=49.\end{aligned}$$

На фигурата подолу е показано графично решение с помощта на Диаграмите на Вен.



Задачи за самоподготовка

***Задача* 1**. Колко естествени числа не надминаващи 1000 се делят на 7 или 11?

***Задача* 2**. Във ФМИ има 1807 второкурсници. От тях 453 посещават лекции по информатика, 567 посещават лекции по математика, а 299 посещават лекции и по двете и по информатика и по математика. Колко от тях не посещават лекции по информатика или по математика?

***Задача* 3**. Проучване на домакинствата показва, че 96% имат поне един телевизор, 98% имат домашен телефон, а 95% имат домашен телефон и поне един телевизор. Какъв процент от домакинствата нямат нито домашен телефон, нито един телевизор?

***Задача* 4**. Общо 1232 студенти са преминали курс по испански, 879 са преминали курс по френски и 114 са взели курс по руски език. Освен това 103 са преминали курсове както по испански, така и по френски език, 23 са преминали курсове както по испански, така и по руски език, а 14 са взели курсове и по двата езика френски и руски. Ако 2092 студента са преминали поне един от курсовете по езиците испански, френски и руски, колко студента са преминали курс по трите езика?

***Задача* 5**. Има 2504 студенти по компютърни науки. 1876 са преминали курс по Java, 999 са преминали курс по Linux и 345 са преминали курс по C. Освен това, 876 са преминали курсове по Java и Linux, 231 са преминали курсове както по Linux, така и по C и 290 са преминали курсове по Java и C. Ако 189 от тези студенти са взели курсове по Linux, Java и C, колко от всичките 2504 студенти не са преминали курс по нито един от тези три езика за програмиране?

***Задача* 6**. В една фирма работят общо 900 души. От тях 615 са жени, 345 са хора, по-млади от 35 години, а 482 са завършили университет. Известно е, че служителките с висше образование са 295, а тези, по-млади от 35 години, са 190. Също се знае, че от хората под 35 години 187 са завършили университет, а жените с висше образувание и по-млади от 35 години са 120. Колко от служителите в тази фирма са мъже поне на 35 години, които не са завършили университет?

***Задача* 7**. Нека S е крайно множество от естествени числа. Известно е, че сред тях има 80 числа, кратни на 2, 95 числа, кратни на 3, 70 числа, кратни на 5, 30 числа, кратни на 6, 33 числа, кратни на 10, 25 числа, кратни на 15, и 13 числа, кратни на 30. Намерете мощността на множеството S.

2 Функции и релации

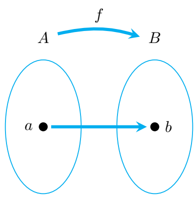
2.1 | Функции

В много случаи ние асоциираме на всеки елемент от едно множество определен елемент от второ множество (който може да е същият като първия). Концепцията за функция е изключително важна в математика и компютърни науки. Например в дискретната математика чрез функции се задават различни дискретни структури. Много от компютърните програми и подпрограми са предназначени за изчисляване на стойностите на функциите.

2.1.1 | Основни дефиниции

Дефиниция

Функция $f\colon A \to B$ наричаме правилото, според което на всеки елемент $a \in A$ се съпоставя точно един елемент $b = f(a) \in B$.



Множеството A се нарича дефиниционно множество или множество от допустими стойности, а множеството B - множество от стойности или кообласт.

От гледна точка на множествата една функция от A към B е подмножество на $A \times B$. Всички елементи от дефиниционната област на една функция се появяват като първа координата на наредената двойка на функцията, но не всички елементи на кообластта се появяват като втора координата.

Дефиниция

Рангът на функцията $f\colon A \to B$ се дефинира чрез

$$range(f) = \{b \in B \mid \exists a \in A\colon (a,b) \in f\} \text{ или } range(f) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

С други думи рангът на една функция е подмножество на множеството на стойности на тази на функцията.

Дефиниция

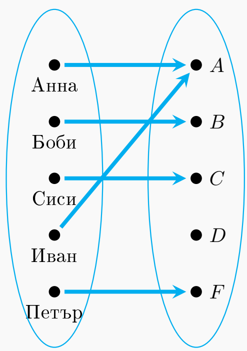
Две функции са *еквивалентни*, тогава и само тогава, когато и трите им множества (*множество от допустими стойности, кооблаcт и ранг*) са съответно еквивалентни.

Нека да разгледаме някои примери с различен подход при дефинирането на функция като ще определим дефиниционното множество, множеството от стойности и рангът на така дефинираните функции.

Пример 1: Нека $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(n) = 3n$.
За функция f дефиниционното множество и множеството от стойности и за двете е множеството на целите числа. Но рангът се състои само от целите числа, които се делят на 3.
Пример 2: Нека функцията $g : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ се дефинира чрез равенствата $g(1) = c$, $g(2) = a$, $g(3) = a$.
За функция g дефиниционното множество е $\{1, 2, 3\}$, множеството от стойности е $\{a, b, c\}$ и рангът $\{a, c\}$.
Пример 3: Нека функцията $h : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$ се дефинира чрез таблицата

x	1	2	3	4
$h(x)$	3	6	9	12

За функция h дефиниционното множество е крайното множество $\{1, 2, 3, 4\}$, а множеството от стойности е множеството на естествените числа.
Ще отбележим, че функциите f и h не са еквивалентни тъй като множествата им стойности (кооблаcтите) не са еквивалентни.
Пример 4: Всеки студент по дискретна математика получава буквена оценка от множеството $\{A, B, C, D, F\}$ като A за Анна, C за Сиси, B за Боби, A за Иван и F за Петър.
Графично това може да се представи както е показано в дясно.
За така дефинираната функция дефиниционното множество е множеството $\{$Анна, Боби, Иван, Петър, Сиси$\}$, множеството от стойности е $\{A, B, C, D, F\}$ и рангът е множеството $\{A, B, C, F\}$.



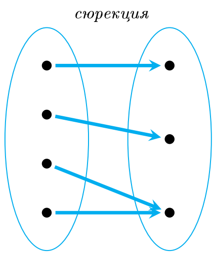
В следващия пример ще разгледаме и друг подход за дефиниране на функция, а именно - рекурсивно.

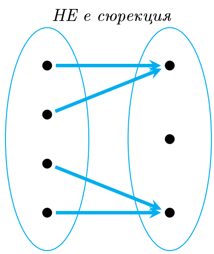
Пример 5: Разглеждаме функцията $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинирана чрез $f(0) = 0$ и $f(n+1) = f(n) + 2n + 1$. Намерете $f(6)$.
Решение: Според зададеното правило имаме $f(6) = f(5) + 11$, но ние не знаем стойността на $f(5)$. Тук трябва отново да приложим правилото $f(5) = f(4) + 9$. Така за да достигнем до $f(6)$ трябва да пресметнем всички стойности от $f(1)$, т.е. ще работим отзад напред

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + 1 = 0 + 1 = 1 & f(2) &= f(1) + 3 = 1 + 3 = 4 \\ f(3) &= f(2) + 5 = 4 + 5 = 9 & f(4) &= f(3) + 7 = 9 + 7 = 16 \\ f(5) &= f(4) + 9 = 16 + 9 = 25 & f(6) &= f(5) + 11 = 25 + 11 = 36 \end{aligned}$$

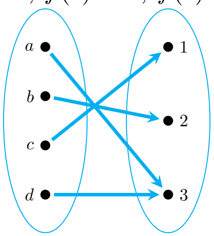
Дефиниция

Функцията $f\colon A \to B$ се нарича ***сюрекция***, ако за всяко $b \in B$ съществува $a \in A$, така че $f(a) = b$, т.е. всеки елемент от B е изображение на един или повече елементи от A.





Пример 1: Нека функцията $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3\}$ се дефинира чрез $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 3$. Определете дали f е сюрекция.



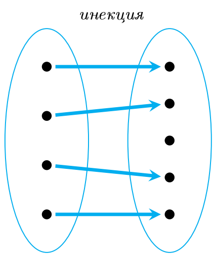
На фигурата в ляво е показано графичното представяне на дадената функция. От това, че всичките три елемента от кообластта са изображения на елементи от дефиниционното множество, то f е сюрекция.
Ще отбележим, че ако кообластта беше $\{1, 2, 3, 4\}$, то f нямаше да бъде сюрекция.

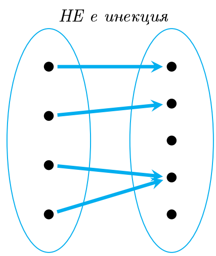
Пример 2: Определете дали $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ дефинирана, чрез $f(x) = x^2$ е сюрекция.

Решение: Функцията не е сюрекция, например: няма цяло число x такова, че $x^2 = -1$.

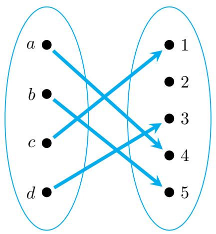
Дефиниция

Функцията $f\colon A \to B$ се нарича *инекция*, ако на всеки елемент $a \in A$ се съпоставя най-много един елемент $b \in B$.





Пример 1: Нека функцията $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ се дефинира чрез $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 3$. Определете дали f е инекция.



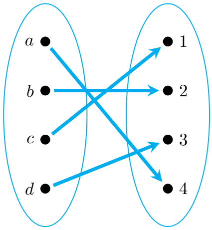
Функцията f е инекция, защото приема различни стойности за всеки от четирите елемента в дефиниционното множество. На фигурата в ляво е показано графичното представяне на дадената функция.

Пример 2: Определете дали $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ дефинирана, чрез $f(x) = x^2$ е инекция.

Решение: Функцията не е инекция, например: $f(-1) = f(1) = 1$.

Дефиниция

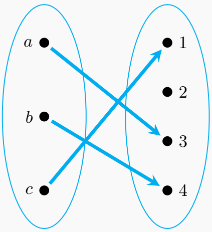
Функцията $f\colon A \to B$ се нарича *биекция*, ако е едновременно сюрекция и инекция.



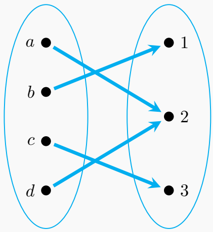
Пример: Нека функцията $f\colon \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4\}$ се дефинира чрез равенствата $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 3$. Определете дали f е биекция.
Решение: Функцията е биекция, защото е едновременно сюрекция и инекция.

Пример 1: За дадените изпбражения определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

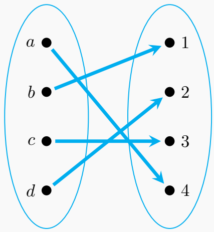
1) *инекция*
не е сюрекция



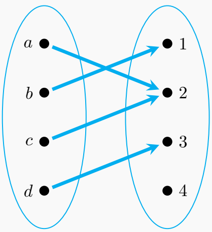
2) *сюрекция*
не е инекция



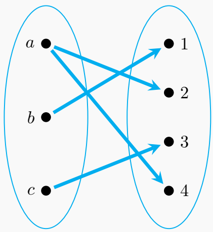
3) *биекция*



4) *не е сюрекция*
не е инекция



5) *не е функция*



Първите четири изображения са функции като първата е инекция, но не е сюрекция, втората е сюрекция но не е инекция, третата е едновременно инекция и сюрекция, т.е. е биекция и четвъртата не е инекция нито сюрекция. Петото изображение не е функция.

Пример 2: За дадените функции определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.
1. $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(n) = 3n$;
2. $g\colon \{1,2,3\} \to \{a,b,c\}$ се дефинира чрез равенствата $g(1) = c$, $g(2) = a$, $g(3) = a$;

3. $h\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ се дефинира чрез $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

За всяка от тях определете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

Решение:

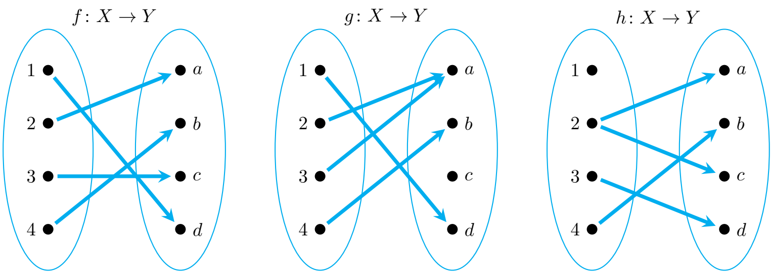
функция	f	g	h
инекция	да	не	да
сюрекция	не	не	да
биекция	не	не	да

Инекция: g не е, защото $g(2) = a$ и $g(3) = a$.
Сюрекция: f не е, защото има елементи в кообластта, които не са елементи на ранга на функцията. g не е, защото няма елемент x такъв, че $g(x) = b$, т.е. b е от кообластта, но не е в ранга на функцията.

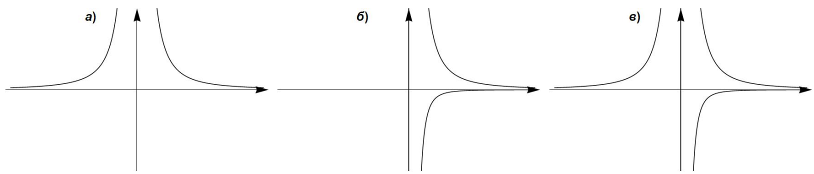
Задачи за самоподготовка

***Задача* 1**. Кои от следните изображения са функции?

а) Нека $X = \{1,2,3,4\}$ и $Y = \{a,b,c,d\}$.



б) Нека $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



***Задача* 2**. Дадена е функцията $f\colon A \to B$, където $A = \{1,2,3\}$ и $B = \{1,2,3,4\}$. Кои от следните изображения са функции?

а) $(2,3)$; **б)** $\{(2,3)\}$;

в) $\{(1,3),(3,1),(2,1)\}$; **г)** $\{(1,3),(2,1)\}$;

д) $\{(1,3),(2,1),(1,4),(3,2)\}$; **е)** $\{(1,3),(3,1),(2,5)\}$.

***Задача* 3**. Нека $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ се дефинира рекурентно чрез формулата $f(n+1) = f(n)+3$. Определете стойността на $f(5)$, ако

а) $f(0) = 0$; **б)** $f(0) = 1$;

в) $f(0) = 2$; **г)** $f(0) = 100$.

***Задача* 4**. Нека е дадена функцията $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$. Определете дали тя е (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция, ако:

а) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $f(x) = 6 - x$;

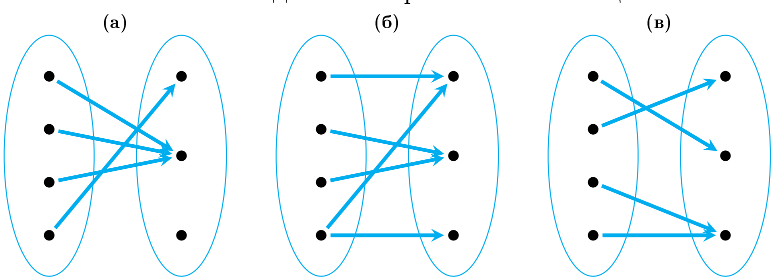
в) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{ако } x \text{ е четно} \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{ако } x \text{ е нечетно} \end{cases}$;

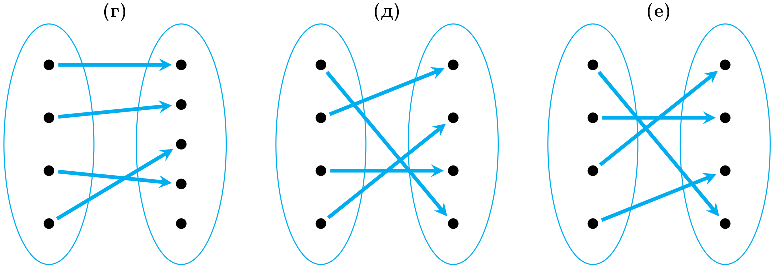
***Задача* 5**. За следните функции проверете дали са (само) инекция, (само) сюрекция, биекция или нито инекция, нито сюрекция.

а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$; **б)** $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4$;

в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ f(x) = x^4$; **г)** $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ f(x) = |x|$.

***Задача* 6**. Кои от следните изображения са биекции?





Задача 7. Определете вида на следните функции:

а) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, дефинирана с $g(x) = 2x + 1$;

б) $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, дефинирана с $h(x) = x^2 + 2$.

Задача 8. В края на семестъра учителя поставил оценка на всеки от неговите ученици. Това функция ли е? Ако е да, кое ще е дефиниционното множество, множеството от стойности? Функцията инекция, сюрекция или биекция е?

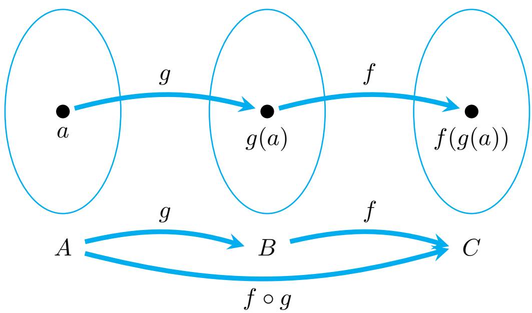
2.1.2 | Операции над функции

Дефиниция

Нека $g\colon A \to B$, $f\colon B \to C$. Тогава *суперпозиция* на функциите f и g за всяко $a \in A$, наричаме

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)),$$

т.е. образуваме съставни функции (или функция във функция).



Пример: Нека функциите $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(x) = 2x+3$ и $g(x) = 3x + 2$. Определете $f \circ g$ и $g \circ f$.

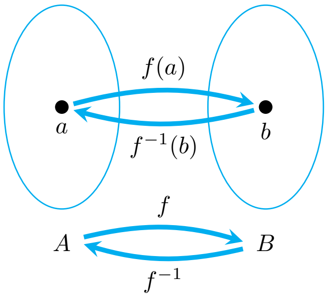
Решение:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

Дефиниция

Нека е дадена функция $f\colon A \to B$, за която $b = f(a)$. Тогава функцията $f^{-1}\colon B \to A$ наричаме *обратна функция* на функцията f и е в сила $f^{-1}(b) = a$.



Пример: Нека функцията $f\colon \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ се дефинира чрез равенствата $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ и $f(d) = 3$. Определете дали f е обратима.

Решение: Функцията е биекция и е обратима. В сила са следните равенства $f^{-1}(4) = a$, $f^{-1}(2) = b$, $f^{-1}(1) = c$ и $f^{-1}(3) = d$.

Задачи за самоподготовка

***Задача* 1**. Нека $x \in \mathbb{Z}$ е такова, че $x > 1$ и $y = f(x)$ е сумата от всички прости числа по-големи от 1, които са делители на x. Нека $g(y) = 10y$. Тогава изчислете:

а) $f(100)$; **б)** $f(f(30))$; **в)** $f(3 + 5)$;

г) $f(3) + f(5)$; **д)** $f(3).f(5)$; **е)** $f(3.5)$;

ж) $g(f(100))$; **з)** $f(g(f(42)))$.

***Задача* 2**. Нека функциите $f, g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(x) = x^2 - 4$ и $g(y) = 5y^2 + 10$. Намерете :

а) $(g \circ f)(x)$; **б)** $(g \circ f)(x - 1)$.

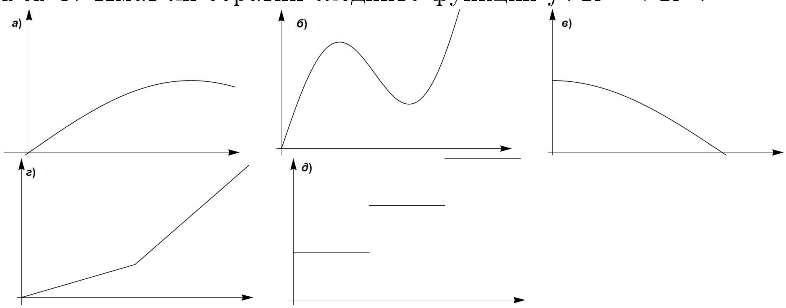
***Задача* 3**. Нека $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$, където a, b, c и d са константи. Намерете необходимо и достатъчно условие за константите a, b, c и d така, че

$$f \circ g = g \circ f.$$

***Задача* 4**. Нека функцията $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ се дефинира чрез $f(x) = x + 1$. Намерете:

а) $g^{-1}(1)$; **б)** $g^{-1}(2)$; **в)** $g^{-1}(3)$; **г)** $g^{-1}(10)$.

***Задача* 5**. Имат ли обратни следните функции $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$?



***Задача* 6**. Нека функцията $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ се дефинира чрез $f(x) = 3x$ и A е множеството на нечетните естествени числа. Намерете:

а) $f(A)$; **б)** $f^{-1}(A)$; **в)** $f^{-1}(\{12\})$; **г)** $f^{-1}(\{5\})$.

***Задача* 7**. Нека $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 999\}$. Дефинираме функция $f\colon A \to \mathbb{N}$ по следния начин $f(abc) = a + b + c$, където a, b, и c са цифрите на числото от A. *Например* $f(253) = 2 + 5 + 3 = 10$.

а) Намерете $f^{-1}(3)$ и $f^{-1}(28)$;

б) Определете дали функцията е инекция. А сюрекция?

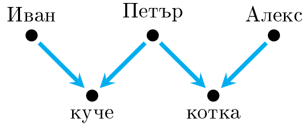
2.2 | Релации

Дефиниция

Всяко множество $R \subseteq A \times B$ наричаме бинарна релация, т.е. за $a \in A$ и $b \in B$ означението $a\,R\,b$ означава $(a, b) \in R$.

Пример: Нека $P = \{$Иван, Петър, Алекс$\}$ и $A = \{$куче, котка$\}$. Релацията *има*: $P \times A$ определя кой човек какво животно има, т.е.

Иван има куче
Петър има куче
Петър има котка
Алекс има котка



Има няколко начина, по които може да бъде зададена една релация. Нека R е бинарна релация над A , т.е. $R \subseteq A \times A$, където $A = \{a, b, c, d\}$.

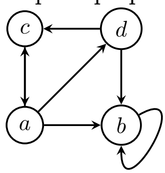
- чрез наредени двойки

$R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, a), (d, b), (d, c)\}$

- чрез таблица/матрица

	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	0	1	0	0
c	1	0	0	0
d	0	1	1	0

- чрез граф



Дефиниция

Нека A е непразно множество и $R \subseteq A \times A$ е релация.
- R е *рефлексивна* релация, ако за всяко $a \in A$ е в сила $(a, a) \in R$;
- R е *симетрична* релация, ако за всички $a, b \in A$ от $(a, b) \in R$ следва, че $(b, a) \in R$;
- R е *транзитивна* релация, ако за всички $a, b, c \in A$ от $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$ следва, че $(a, c) \in R$.

Дефиниция

Нека A е непразно множество и $R \subseteq A \times A$ е релация.
- R е *антирефлексивна* релация, ако за всяко $a \in A$ е в сила $(a, a) \notin R$;

• R е *антисиметрична* релация, ако за всички $a, b \in A$ от $(a, b) \in R$ следва, че или $a = b$, или $(b, a) \notin R$;

Дефиниция

Релация R се нарича *релация на еквивалентност*, ако тя е едновременно
• *рефлексивна*;
• *симетрична*;
• *транзитивна*.

Дефиниция

Релация R се нарича *релация на наредба*, ако тя е едновременно
• *рефлексивна*;
• *антисиметрична*;
• *транзитивна*.

Дефиниция

Клас на еквивалентност с представител елемента a се нарича множеството $K(a)$ на всички елементи x на множеството A, които са в релация R с елемента a, т.е.

$$K(a) = \{x \in A \mid xRa\}.$$

Пример: Нека е дадено множеството $A = \{2, 3, 6, 7, 11\}$. Дефинираме релация $R \subseteq A \times A$ чрез

$$R = \{(a, b) \mid a + b \text{ е нечетно число}\}.$$

Определете:

а) кои наредени двойки са в релация?

б) дали релацията е рефлексивна, симетрична и/или транзитивна.

Решение: а) Наредените двойки в релацията R са
$R = \{\{2, 3\}, \{2, 7\}, \{2, 11\}, \{3, 2\}, \{3, 6\}, \{6, 3\}, \{6, 7\}, \{6, 11\}, \{7, 2\}, \{7, 6\}, \{11, 2\}, \{11, 6\}\}$.
б) Ще представим решението в табличен вид:

рефлексивност	не	$(3,3) \notin R$
симетричност	да	ако $a+b$ е нечетно, то и $b+a$ е нечетно
транзитивност	не	$(2,3) \in R$, $(3,6) \in R$, но $(2,6) \notin R$

Задачи за самоподготовка

***Задача* 1**. Нека $A = \{1,2,3,4\}$. Кои наредени двойки са в релация

$$R = \{(a,b) \mid a \text{ се дели на } b\}.$$

Представете ги таблично и графично.

***Задача* 2**. Разглеждаме следните релации в множеството на целите числа:

$R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$
$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$
$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ или } a = -b\}$
$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$
$R_5 = \{(a,b) \mid a = b+1\}$
$R_6 = \{(a,b) \mid a+b \leq 3\}$

а) Кои от тези релации съдържат двойките $(1,1), (1,2), (2,1), (2,-1), (2,2)$?

б) Определете кои от тях са рефлексивни, симетрични, транзитивни.

***Задача* 3**. Разглеждаме следните релации в множеството $\{1,2,3,4\}$:

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
$R_3 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
$R_4 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
$R_5 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
$R_6 = \{(3,4)\}$

Определете кои от тях са рефлексивни, симетрични, транзитивни.

***Задача* 4**. Определете вида на релацията R зададена чрез:

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	1
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	1	1	0
6	1	1	0	0	0	1

***Задача* 5**. Проверете дали релацията / (дели) е релация на еквивалентност или наредба в $\mathbb{N}$.

***Задача* 6**. Нека R е "=" върху множеството на обикновените дроби, които са положителни. Проверете дали "=" е релация на еквивалентност. Ако е определете класовете на еквивалентност.

***Задача* 7**. Напишете в матрична форма релацията $\subseteq$ върху обвивката $\mathcal{P}(A)$ на множеството $A = \{a, b, c\}$. Проверете дали релацията $\subseteq$ е релация на еквивалентност или наредба в множеството $\mathcal{P}(A)$.

Теория на графите. Дървета

Графи

➢ <u>Дефиниция:</u> **Граф** *G = (V, E)*, където:

- $V \neq \varnothing$ е множество на възлите;
- *E* - множество на връзките между възлите, наречени ребра.

Ребрата са неподредена двойка от по два възела $e = \{u, v\}$.

*Казваме, че графите са **прости** или **ненасочени**, ако ребрата са им ненасочени, т.е. няма значение кой е първи и кой втори възел.*

➢ <u>Дефиниция:</u> Два възела *u* и *v* в ненасочения граф *G = (V, E)* се наричат ***съседни*** в *G*, ако *u* и *v* са крайни точки на реброто *e* в *G*. Реброто *e* се нарича ***инцидентно*** *с върховете u* и *v* или казваме, че *e свързва u* и *v*.

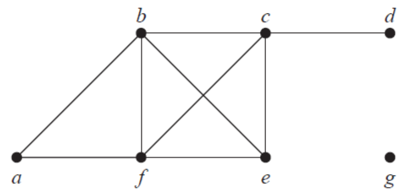
➢ <u>Дефиниция:</u> Броят на ребрата, инцидентни с върха $a \in V$ ще наричаме ***степен*** на върха a и ще означаваме с $\deg(a)$.

➢ <u>Дефиниция:</u> Един връх $a \in V$ се нарича ***изолиран***, ако $\deg(a) = 0$ и ***краен (лист),*** ако $\deg(a) = 1$.

➢ <u>Дефиниция:</u> За граф *G = (V, E)* с $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ матрица на съседство наричаме квадратна матрица $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ с размерност броя на върховете $|V| = n$, където

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{ако } \{v_i, v_j\} \notin E \end{cases}.$$

Пример: За ненасочения граф *G* имаме:



G

Степени:

$$\deg(a) = 2, \deg(b) = 4, \deg(c) = 4$$

$$\deg(d) = 1, \deg(e) = 3, \deg(f) = 4, \deg(g) = 0$$

Списък на съседство:	Матрица на съседство:
$a: b, f$ $b: a, c, e, f$ $c: b, d, e, f$ $d: c$ $e: b, c, f$ $f: a, b, c, e$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

➢ <u>Дефиниция:</u> *G = (V, E)* е **насочен граф**, ако:

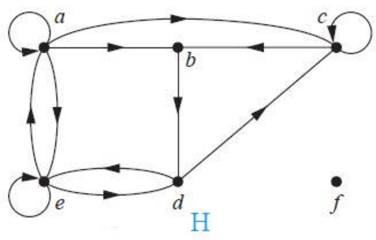
- *G = (V, E)* е граф;
- Е - множество от наредени двойки върху *V*.

Ребрата в насочения граф се наричат клони.

*От ненасочен граф ще получим насочен, ако във всяко ребро дефинираме **начало** и **край**.*

➢ <u>Дефиниция:</u> Ако $a \in V$, то с $\deg^{+}(a)$ ще означаваме броя на ребрата с начало a (**изходящи** или **излизащи** ребра за a), а с $\deg^{-}(a)$ – броя на ребрата с край a (**входящи** или **влизащи** ребра за a).

Пример: За насочения граф *H* имаме:



Входящи:

$$\deg^{-}(a) = 2, \deg^{-}(b) = 2, \deg^{-}(c) = 3,$$
$$\deg^{-}(d) = 2, \deg^{-}(e) = 3, \deg^{-}(f) = 0$$

Изходящи:

$$\deg^{+}(a) = 4, \deg^{+}(b) = 1, \deg^{+}(c) = 2,\ \deg^{+}(d) = 2, \deg^{+}(e) = 3, \deg^{+}(f) = 0$$

Задачи:

<u>Задача 1.</u> Постройте ненасочените графи *G = (V, E):*

а) V = {*a, b, c, d, e*}
E = {*aa, ac, bc, ad, de, ae*}

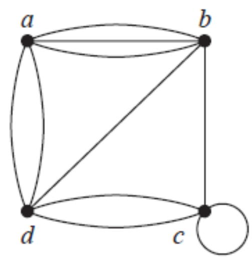
б) V = {*a, m, p, s, v*}
E = {*am, ap, av, pv*}

<u>Задача 2.</u> За графите от ***задача 1***

а) постройте матрицата на съседство;

б) списъка на съседство.

<u>Задача 3.</u> За дадения граф:



а) постройте матрицата на съседство;

б) определете списъка на съседство;.

в) определете степените на върховете.

<u>Задача 4.</u> Постройте насочения граф *G = (V, E)*

V = {*a, b, c, d, e, f, g*}

E = *{(a ,a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, e), (e, f), (f, d), (g, a)}*

а) постройте матрицата на съседство;

б) списъка на съседство;

в) определете степените на върховете.

Движения през граф

➢ <u>Дефиниция:</u> Нека *G = (V, E),* е граф. ***Маршрут (walk) W*** с дължина $n > 0$ в G наричаме редицата:

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n,$$

така че $v_k \in V$, а $e_k \in E$ за всяко $k = 1, \ldots, n$ като e_k свързва v_{k-1} и v_k, т.е. *W* свързва v_0 и v_n от v_0 към v_n.

- *Всяко ребро може да се разглежда като маршрут с дължина 1.*
- *Ако $v_0 = v_n$ и $n \geq 1$, то казваме че маршрута W е затворен. В противен случай е незатворен.*

- *Ако всички ребра в W са различни - се нарича **верига** (trail), (ако не е затворен).*
- *Ако всички възли му са различни се нарича **елементарен маршрут** или път.*
- *Ако W е затворен и е верига като всичките му възли са различни, казваме че W е **цикъл**.*
- *Забелязваме, че в геометрична реализация елементарната верига образува проста незатворена линия, а елементарния цикъл - проста затворена линия.*

<u>Задача 5.</u> За графа от ***задача 1. а)*** проверете дали:

а) *b, c, a, d, a* е маршрут

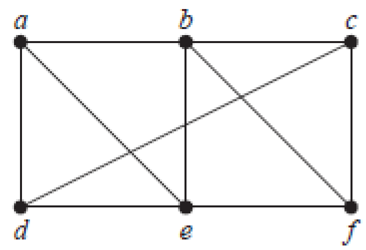
б) *b, c, a, d, a* е верига

в) *b, c, a, a, d, e* е елементарна верига

г) *a, a, d, e, a* е затворена верига

д) *a, a, d, e, a* е цикъл

<u>Задача 6.</u> За дадения граф определете вида на :



а) *a, d, c, f, e*

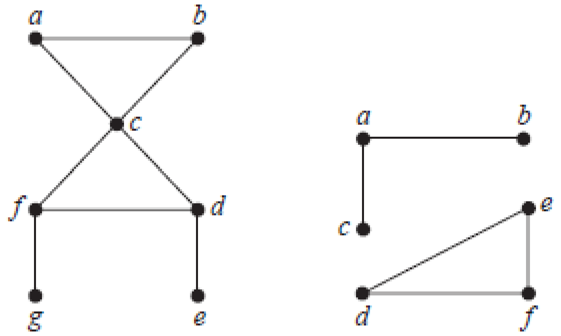
б) *d, e, c, a*

в) *b, c, f, e, b*

г) *a, b, e, d, a, b*

➢ <u>Дефиниция:</u> Казваме, че *G = (V, E)* е ***свързан граф***, ако за всеки два възела съществува маршрут от единия към втория.

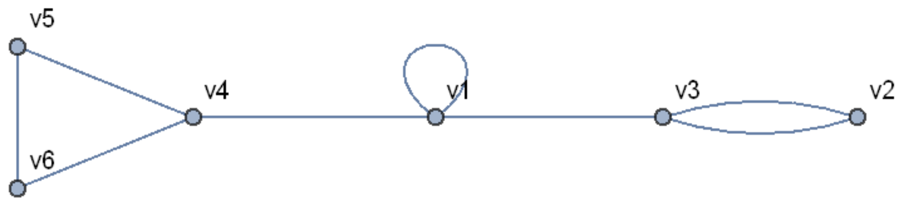
Задача 7. Определете дали следните графи са свързани или не



➢ ***Компонент*** на *G* е един максимален свързан подграф на *G*, (т.е. един свързан подграф на *G*), който не е подграф на никой друг свързан подграф на *G*.

Задача 8. Свързани ли са графите от ***задача 1***. Определете компонентите им, ако не са.

Задача 9. За графа:



а) Определете колко вериги можем да построим между *v1* и *v2* ?

б) Коя от тях е с най-малка дължина *r(v1, v2)*?

в) Коя е най-дългата верига, която можем да построим в графа?

г) А най-дългия път?

д) Има ли цикли – кои са те?

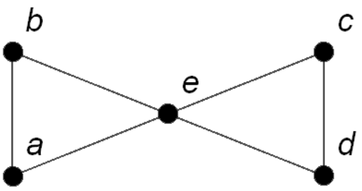
е) А паралелни ребра?

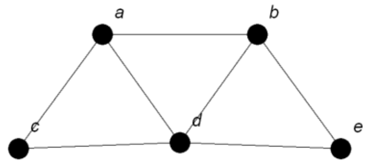
Ойлеров и Хамилтънов граф

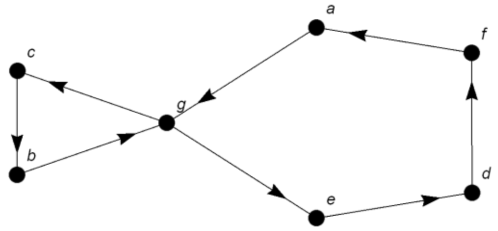
➢ Дефиниция: ***Цикъл (или тур) на Ойлер*** в G е затворена верига, която съдържа всяко ребро само веднъж. Всеки граф, който притежава ***Ойлеров цикъл*** се нарича ***Ойлеров граф***.

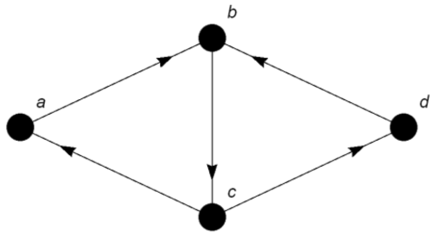
➢ Дефиниция: ***Ойлеров път*** в G е елементарна верига, която съдържа всяко ребро на G.

Задача 10. Определете дали следните насочени и ненасочени графи имат Ойлеров цикъл или Ойлеров път:





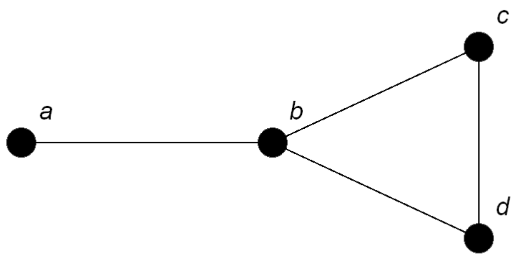


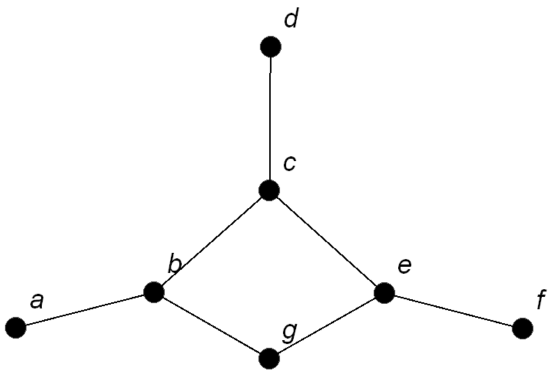


- Дефиниция: ***Цикъл на Хамилтън*** в G е цикъл, който съдържа всеки възел на графа. Граф, притежаващ Хамилтънов цикъл се нарича ***Хамилтънов граф.***

- ***Хамилтънов цикъл*** *в G е свързан подграф на G, съдържащ всичките му възли, в който всеки възел има степен 2.*
- *Всяка проста верига, съдържаща всички възли на един граф G е* ***Хамилтънова верига***.
- *Ако един граф е* ***Хамилтънова верига****, но не е Хамилтънов цикъл, то той е* ***полухамилтънов*** *граф.*

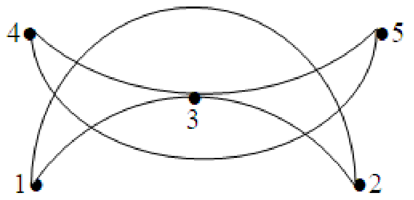
Задача 11. Определете дали следните графи имат Хамилтънов цикъл или Хамилтънова верига.



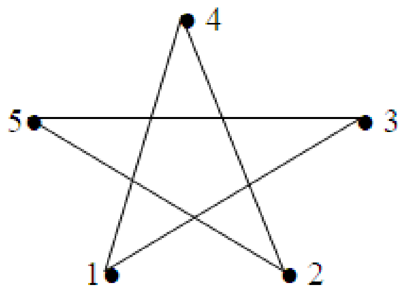


Задача 12. Покажете, че можете да начертаете следните графи без да вдигате молива. Определете дали са Ойлерови цикли, Хамилтънови цикли или Хамилтънови вериги:

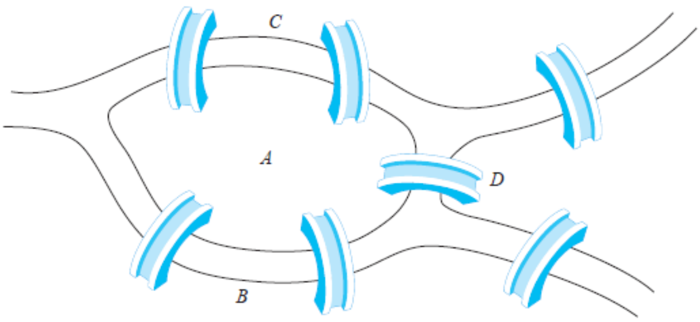
а)" Мохамедовите саби"

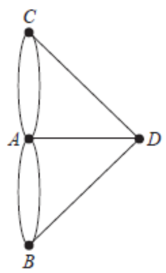


б)



Задача 13. *Задачата за Кьонингсбергските мостове* Можем ли да обходим всички мостове като минаваме по тях само веднъж?

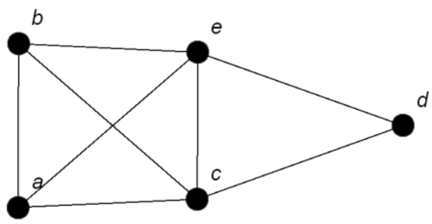




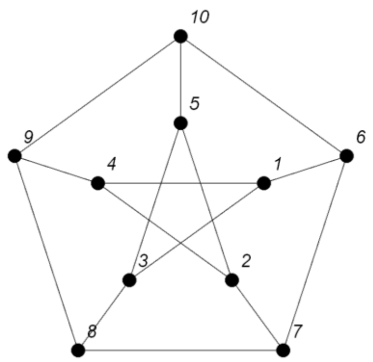
Задача 14. За дадения граф проверете дали е

а) Ойлеров цикъл

б) Хамилтънов цикъл



Задача 15. Граф на Петерсон



а) Може ли да построим Ойлеров цикъл?

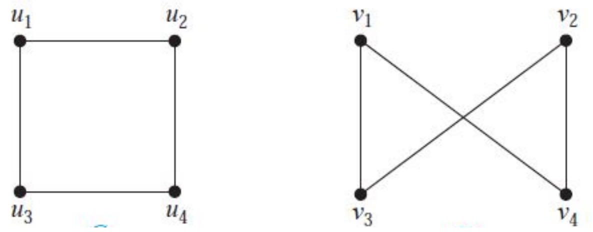
б) А Хамилтънов цикъл?

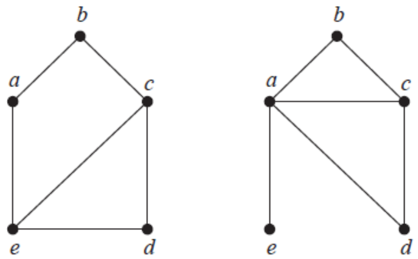
в) А Хамилтънова верига?

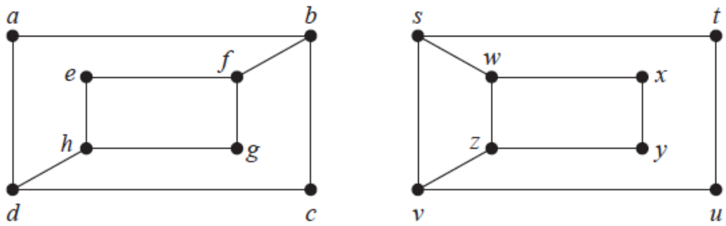
Изоморфизъм

➢ <u>Дефиниция:</u> Нека $G = (V, E)$ и $H = (W, F)$ са графи. Казваме, че са ***изоморфни***, ако съществува биекция $\varphi : V \to W$, така че за всяко u, v от V: $\{u, v\} \in E$ следва, че $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in F$. Тази биекция φ наричаме ***изоморфизъм*** между двата графа.

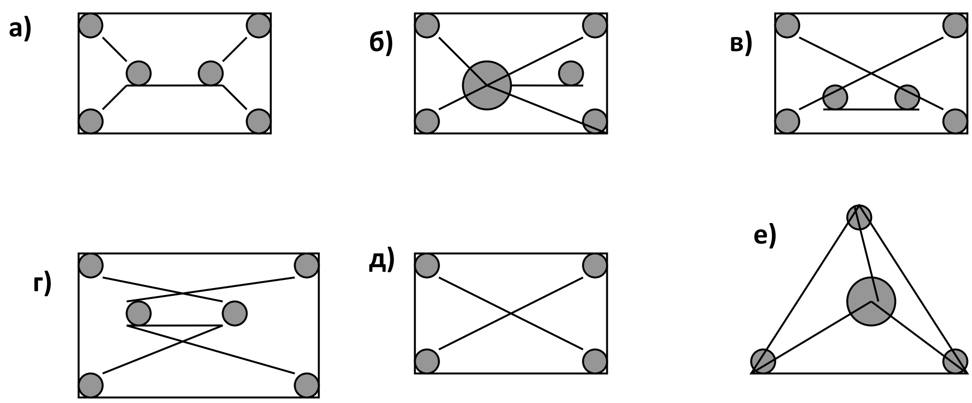
<u>Задача 16.</u> Определете дали следните двойки графите са изоморфни.

А) 

Б) 

В) 

<u>Задача 17.</u> Някои от графите са изоморфни. Кои са те?



Дървета

➢ <u>Дефиниция:</u> ***Дървото*** е свързан, ориентиран граф, който не съдържа затворени вериги. Обикновено се бележи с Т.

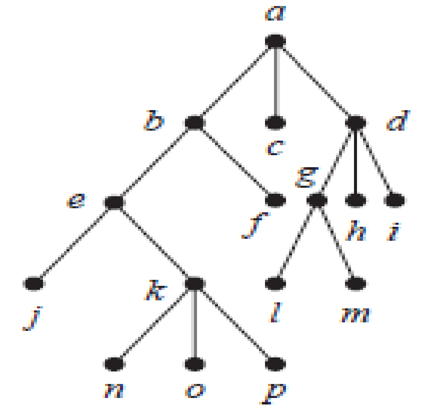
- Дървото има един специален възел - корен.
- Дърво с корен бележим - (T,r).
- Възли, от които не излиза ребро се наричат листа.
- Останалите - вътрешни възли.
- Дължината на пътя от корена до най-далечното листо се нарича височина на дървото.

➢ <u>Дефиниция:</u> Две дървета са ***изоморфни*** тогава и само тогава, когато съществува биекция между множествата на възлите им, която запазва съседите, не съседите и възела.

Обхождане на дървета

<table>
<tr><th>Алгоритъм за Preorder за генериране списък на възлите (от горе - надолу)</th><th>Алгоритъм за Inorder за генериране списък на възлите</th></tr>
<tr><td>procedure preorder (T: ordered rooted tree)
r:= root of T
list r
for each child c of r from left to right
T(c):=subtree with c as its root
preorder (T(c))</td><td rowspan="3">procedure inorder (T: ordered rooted tree)
r:= root of T
if r is a leaf then list r
else
l:= first child of r from left to right
T(l):=subtree with l as its root
inorder (T(l))
list r
for each child c of r except for l from left to right
T(c):=subtree with c as its root
inorder (T(c))</td></tr>
<tr><td>Алгоритъм за Postorder за генериране списък на възлите (отдолу нагоре)</td></tr>
<tr><td>procedure postorder (T: ordered rooted tree)
r:= root of T
for each child c of r from left to right
T(c):=subtree with c as its root
postorder (T(c))
list r</td></tr>
</table>

Пример: Обхождане на дървото:

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Preorder: обхождане първо на корена, а после на поддърветата от ляво на дясно
a b e j k n o p f c d g l m h i</td></tr>
<tr><td>Postorder: обхождане на поддърветата от ляво на дясно, а след това обхождане на корена
j n o p k e f b c l m g h i d a</td></tr>
<tr><td>Inorder
j e n k o p b f a c l g m d h i</td></tr>
</table>

Задачи:

Задача 1. Начертайте всички неизоморфни дървета с 5 възела.

Задача 2. Начертайте всички неизоморфни дървета с корен с 4 възела.

Задача 3. Начертайте пълно бинарно дърво с корен с

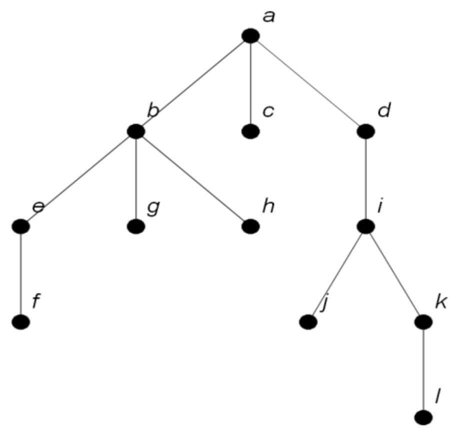
а) 11 възела б) 14 възела.

Възможно ли е? Колко листа и вътрешни възли има?

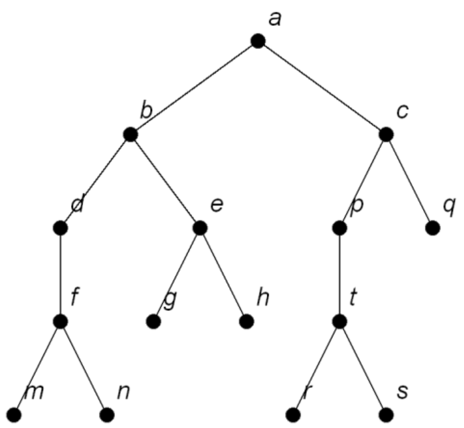
Задача 4. Как ще обходим дървото, ако използваме

а) преордер (от горе - надолу)

б) постордер (отдолу нагоре)



Задача 5. За двоичното дърво обходете възлите с **inorder**



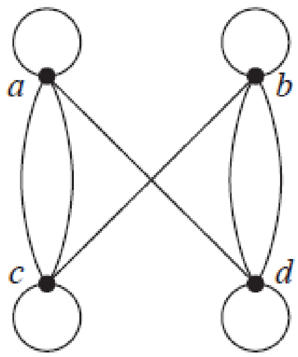
Допълнителни задачи:

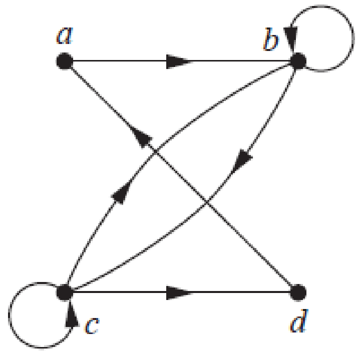
Задача 1. За дадените графи:

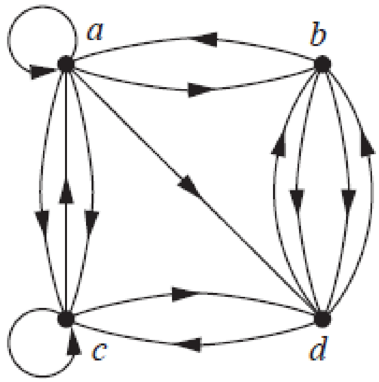
а) постройте матрицата на съседство;

б) определете списъка на съседство;.

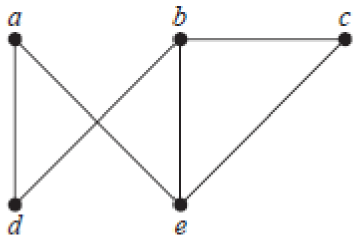
в) определете степените на върховете.



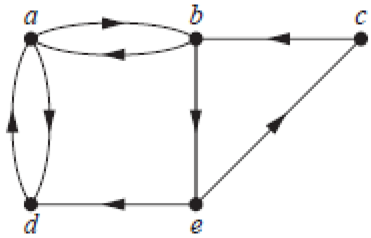




Задача 2. За дадените графи определете вида на:



а) *a, e, b, c, b*
б) *a, e, a, d, b, c, a*
в) *e, b, a, d, b, e*
г) *c, b, d, a, e, c*



а) *a, b, e, c, b*
б) *a, d, a, d, a*
в) *a, d, b, e, a*
г) *a, b, e, c, b, d, a*

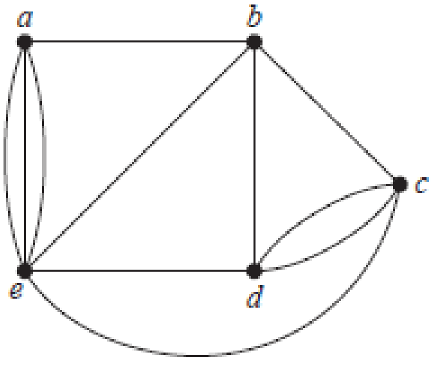
Задача 3. Определете дали в дадените графи има:

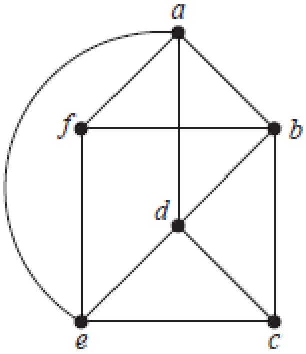
а) Ойлеров цикъл;

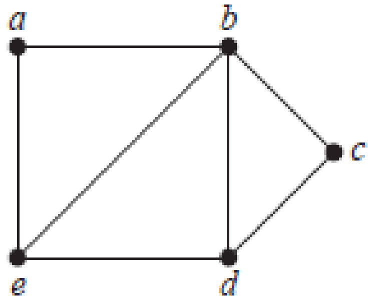
б) Ойлерови път;

в) Хамилтънов цикъл;

г) Хамилтънова верига.

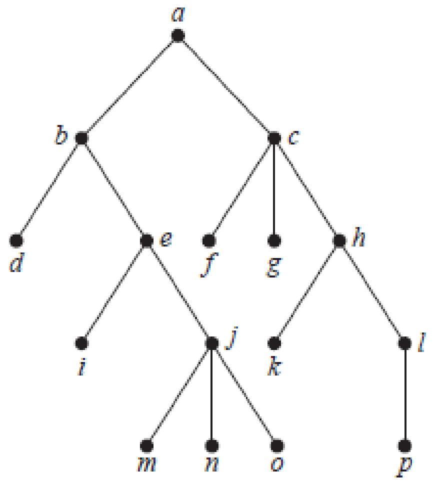


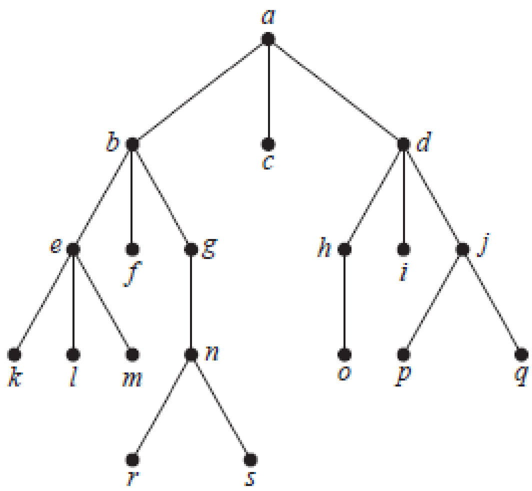




Задача 4. Как ще обходим дървото, ако използваме метод за генериране на списък на възлите:

а) Preorder б) Postorder в) Inorder





Математическа логика

Съждително смятане

- ***Съждение*** е всяка мисъл (*разказно изречение*), която е вярна или невярна.
- ***Съждителна константа*** **-** вярно съждение (истина **T**) или невярно (лъжа **F**)

Пример: Кои от следните изречения са съждения?

- Пловдив е град в България. – съждение, което е истина
- Испания е река в България. – съждение, което е лъжа
- Кога ще ядем? – не е съждение
- 3 + 3 = 8 – съждение, което е лъжа
- $x + 6 \neq 9$ – не е съждение
- Прочетете този текст внимателно! – не е съждение

Операции върху съждения:

- **Конюнкция** на две съждения $P \wedge Q$ се нарича съждението „*P и Q*“, което е вярно тогава и само когато са верни едновременно и двете съждения.
- **Дизюнкция** на две съждения $P \vee Q$ се нарича съждението „*P или Q*“, което е вярно, тогава и само тогава когато поне едно от двете дадени съждения е вярно.
- **Импликация** на две съждения $P \rightarrow Q$ се нарича съждението „*Ако P то Q*“, което е невярно съждение тогава и само тогава, когато съждението P е вярно и съждението Q е невярно. Ще наричаме P – хипотеза, а Q – заключение.
- **Логическо отрицание** на съждението P се нарича съждението, което се получава по правилото „*Не е вярно, че P*“ и ще означаваме с $\neg P$ и ще казваме, че $\neg P$ е вярно, когато P е невярно и обратно. (възможни означения $\rceil P$, $\overline{P}$ или !P)
- **Двойна импликация на съжденията (Еквиваленция)** $P \leftrightarrow Q$ се нарича съждението „*P тогава и само тогава, когато Q*“ и е вярна тогава и само тогава, когато двете съждения имат еднакви верностни стойности.

Таблица от верностни стойности

P	**Q**	**$P \vee Q$**	**$P \wedge Q$**	**$P \rightarrow Q$**	**$P \leftrightarrow Q$**	**$\neg P$**	**$\neg Q$**
T	T	T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T	T

Приоритет при изчисляване на логически изрази:

- Скоби ()
- Отрицание ¬
- Конюнкция ∧
- Дизюнкция ∨
- Импликация →
- Двойна импликация ↔

Задачи:

Задача 1. Нека P, Q и R са следните съждения:

P: ”4 е по-малко от 7.”

Q: ”13 е просто число.”

R:” Париж е столицата на Франция.”

Образувайте следните съждения:

1. $\neg R$ 2. $P \vee Q$ 3. $P \rightarrow (Q \wedge R)$
4. $\neg P \vee \neg Q$ 5. $\neg (P \wedge Q)$ 6. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)$

Задача 2. Нека P, Q и R са следните съждения:

P: „Ще си довърша задачите по Дискретна математика.“

Q: „Ще отида на плаж.“

R: „Днес е слънчево.“

S: „Утре ще вали.“

Напишете логически изрази, съответстващи на следните изречения. Използвайте логическите съюзи ¬, ∨ , ∧ , →, ↔.

1. Ще си довърша задачите по Дискретна математика и ще отида на плаж.
2. Ако днес е слънчево, то утре ще вали.
3. Ще отида на плаж тогава и само тогава, когато си довърша задачите по дискретна математика.
4. Утре няма да вали, но няма да отида на плаж и ще си довърша задачите по дискретна математика.

Задача 3. Конструирайте верностна таблица за всяко от следните твърдения:

1. $\neg (P \vee \neg Q) \rightarrow \neg P$ 2. $Q \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
3. $(P \wedge Q) \rightarrow R$ 4. $((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)) \wedge \neg R$
5. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$

Тавтология и еквивалентност. Логическо следствие

- ***Тавтология***: Всяко съждение, което е винаги вярно, независимо от верностните стойности на съставляващите го съждения.
- ***Противоречие:*** Съждение, което е винаги невярно.
  Можем лесно да ги разпознаем, ако във верностната таблица получим само T(тавтология) или само F(противоречие).
- ***Еквивалентност***: Нека S_1 и S_2 са две съждения. Казваме, че те са ***еквивалентни***, когато двете колони във верностната таблица, в които те получават стойностите си са еднакви.
- ***Логически следствия:*** Нека S1 и S2 са съставни съждения. Казваме, че S2 следва от S1, т.е. S1 $\Rightarrow$ S2, ако за всяко разпределение на верностните стойности на съждителните променливи в S1 и S2, от верността на S1 следва верността на S2.

Задача 4. Проверете дали следните твърдения са тавтологии:

1. $P \vee \neg P$
2. $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
3. $\neg P \rightarrow (P \rightarrow Q)$
4. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \vee \neg P)$
5. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \neg R)$

Задача 5. Проверете дали следните съждения са еквиваленции:

1. $\neg (P \vee Q)$ и $\neg P \wedge \neg Q$ – закон на Де Морган
2. $P \wedge (Q \vee R)$ и $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ – дистрибутивен закон
3. $\neg (P \rightarrow Q)$ и $\neg P \wedge Q$ – закон за отрицание на импликацията
4. $\neg (P \leftrightarrow Q)$ и $P \leftrightarrow \neg Q$
5. $\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ и $Q \rightarrow (P \vee R)$

Задача 6. Проверете дали логическите следствия са верни:

1. $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)$ и Q
2. $(P \wedge Q) \rightarrow R$ и $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$
3. $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$ и $(P \wedge Q) \rightarrow R$
4. $\neg P \leftrightarrow Q$ и $P \leftrightarrow \neg Q$
5. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee Q)$ и T

Предикатна логика

- ***Предикат:*** Твърдение, чиято истинност зависи от стойността на променливата като например: $H(x) = "x$ е човек"; $M(x, y) = "x$ е родител на y"; $Q(x) = "x + 2 = x^2"$.

Пример: Нека $P(x) = "x + 3 > 7"$. Тогава:

$P(-3) = F$

$P(5) = T$

$P(5) \wedge \neg P(0) = T$

$P(5) \wedge P(y) -$ не може да се определи

- ***Квантор за съществуване*** на P(x) е твърдението "Съществува елемент x, такъв че P(x)". Означение ∃x:P(x). Променливата x е квантова променлива, а съществуването на x се означава с ∃x.
- ***Универсален квантор*** на P(x) е твърдението „P(x) за всички стойности на x". Означение ∀x:P(x), което се чете: "За всяко x P(x)"

	Истина (T)	**Лъжа (F)**
$\forall x: P(x)$	*P(x)* е истина за всяка стойност на *x*	Има *x,* за което *P(x)* е лъжа
$\exists x: P(x)$	Има *x,* за което *P(x)* е истина	*P(x)* е лъжа за всяка стойност на *x*

Закон на ДеМорган за кванторите

Отрицание	**Еквивалентно твърдение**	**Истина (T) на отрицанието**	**Лъжа (F) на отрицанието**
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	*P(x)* е лъжа за всяка стойност на *x*	Има *x,* за което *P(x)* е истина
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Има *x,* за което *P(x)* е лъжа	*P(x)* е истина за всяка стойност на *x*

Задачи:

Задача 1. Какво означават следните математически записи?

1. $\forall \boldsymbol{x}: \forall \boldsymbol{y}: \forall \boldsymbol{z}: (\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{xz})$
2. $\exists \boldsymbol{z}: (\forall \boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}) \wedge (\forall \boldsymbol{x}: \exists \boldsymbol{y}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z})$

Задача 2. Определете верността на твърденията:

а) $\forall \mathrm{x}: \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2 > 0$;

б) $\exists \mathrm{x}: \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2 = 0$;

в) $\forall \mathrm{x}: \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2 = 0$;

г) $\neg\exists \mathrm{x}: \mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 2 = 0$.

Задача 3. Какви са отрицанията на следните твърдения $\forall x: x^2 > x + 5$ и $\exists x: x^2 + x = 5$.

Задача 4. Верни ли са твърденията:

1. Всички прости числа са нечетни
2. Всяко число, което се дели на 6 се дели и на 2.
3. Съществува правоъгълник, на който диагоналите не са равни.

Изкажете отрицанията им.

Задача 5. Запишете твърденията: „*Някои студенти от този курс са посетили лекция по Дискретна математика*“ и „*Всеки студент от този клас е посетил лекция по Информатика или по Дискретна математика*“ на езика на предикатната логика.

Задача 6. Запишете на езика на предикатната логика отрицанията на следните твърдения: „*Има студенти отличници*“ и „*Всички студенти решават допълнителни задачи*“.

Задача 7. Запишете на езика на предикатната логика следните твърдения:

A:„*Лъвовете са свирепи*“

B: „*Някои лъвове не пият кафе* “

C: “*Някои свирепи създания не пият кафе*”

Допълнителни задачи:

Задача 1. Проверете дали следните твърдения са тавтологии:

1. $P \rightarrow (P \vee Q)$
2. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$
3. $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \rightarrow Q$
4. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$
5. $(P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$
6. $((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow R$

Задача 2. Конструирайте верностна таблица за всяко от следните твърдения:

1. $(P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$
2. $\neg P \wedge (Q \rightarrow P)$. Какво можете да заключите за P и Q, ако твърдението е истина?

Задача 3. Проверете дали следните твърдения са логически еквиваленции, „*Няма да вали дъжд или сняг*“ и „*Няма да вали дъжд и няма да вали сняг*“:

Задача 4. Проверете дали следните твърдения са логически еквиваленции

1. $(P \vee Q) \rightarrow R$ и $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow P)$ 2. $\neg (P \rightarrow Q)$ и $P \wedge \neg Q$

<u>Задача 5.</u> Определете верността на всяко от следните твърдения в множеството на целите числа, ако $P(x)$: $x^2 - 1 > 2x$.

а) $P(0)$

б) $P(2)$

в) $P(-2)$

г) $\exists x P(x)$

д) $\forall x P(x)$

е) $\neg\exists x P(x)$

ж) $\exists x \neg P(x)$

з) $\neg\exists x \neg P(x)$

<u>Задача 6.</u> Нека $C(x) =$ "x e комик" и $F(x) =$ "x е забавен" приложени за всички хора. Изразете следните твърдения на български език:

1. ∀x(C(x) → F(x))
2. ∀x(C(x) ∧ F(x))
3. ∃x(C(x) → F(x))
4. ∃x(C(x) ∧ F(x))

<u>Задача 7.</u> Запишете на езика на предикатната логика следните твърдения:

A:„*Всички синигери пеят добре*“

B: „*Големите птици не живеят в хралупи* “

C: “*Птиците, които не живеят хралупи, не пеят добре*”

D: „*Синигерите са малки*“

Упътване: Използвайте предикатите:

$P(x) =$ "x е синигер"

$Q(x) =$ "x е голям"

$R(x) =$ "x живее в хралупа"

$S(x) =$ "x пее добре"

Двоични функции

➢ ***Дефиниция:*** Функция $f(x_1,\dots,x_n)$ дефинирана в множеството $B^n=\{0,1\}^n$ и приемаща стойности в множеството $B=\{0,1\}$ се нарича ***двоична (булева) функция.***

x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	$\dots$	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	$\dots$	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0	0	$\dots$	1	0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
1	1	$\dots$	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

➢ ***Дефиниция:*** Множеството на всички двоични функции ще означаваме с P_2.

Броят на различните $n-$торки $(x_1,\dots,x_n)$ е 2^n. Тогава е в сила $|P_2|=2^{2^n}$.

Таблица на всички двоични функции на една променлива

x₁	**0**	***x₁***	$\overline{x_1}$	**1**
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1
	константа		**отрицание**	**константа**

Таблица на всички двоични функции на две променливи

x_1	x_2	**0**	**.**		x_1		x_2	+	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\overline{x_2}$		$\overline{x_1}$	$\rightarrow$	|	**1**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		константа 0	**конюнкция**					**сума по модул 2**	**дизюнкция**	**стрелка на Пирс**	**еквиваленция**	**отрицание**		**отрицание**	**импликация**	**черта на Шефер**	**константа 1**

Задачи:

Задача 1. Пресметнете следните изрази

$x_1.0=$	$x_1.x_1=$
$x_1\vee 0=$	$x_1\vee x_1=$
$x_1+0=$	$x_1+x_1=$
$x_1.1=$	$x_1.\overline{x_1}=$
$x_1\vee 1=$	$x_1\vee\overline{x_1}=$
$x_1+1=$	$x_1+\overline{x_1}=$

Задача 2. Докажете законите на ДеМорган

1) $\overline{x_1.x_2}=\overline{x_1}\vee\overline{x_2}$ 2) $\overline{x_1\vee x_2}=\overline{x_1}.\overline{x_2}$

Някои свойства:

$x_1.x_2=x_2.x_1$ $x_1.(x_2.x_3)=(x_1.x_2).x_3$ $x_1.(x_2\vee x_3)=(x_1.x_2)\vee(x_1.x_3)$

$x_1\vee x_2=x_2\vee x_1$ $x_1\vee(x_2\vee x_3)=(x_1\vee x_2)\vee x_3$

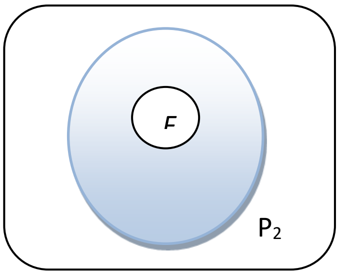
$x_1+x_2=x_2+x_1$ $x_1+(x_2+x_3)=(x_1+x_2)+x_3$ $x_1.(x_2+x_3)=(x_1.x_2)+(x_1.x_3)$

Приоритет при изчисляване на изрази с двоични функции

- Скоби
- Отрицание
- Конюнкция
- Дизюнкция и сума по модул 2
- Останалите двоични функции

➢ ***Дефиниция:*** На всяка формула по естествен начин се съпоставя една единствена двоична функция и казваме, че формулата реализира тази функция.

➢ ***Дефиниция:*** Нека F е множество от двоични функции. Множеството от всички функции, които можем да реализираме чрез формули над F се нарича ***затворена обвивка*** и бележим с $[F]$.



Пример: Определете затворената обвивка на множеството $F=\{.,-\}$.

Пълни множества от двоични функции

- ***Дефиниция:*** Множеството от двоични функции F е ***пълно*** тогава и само тогава, когато $\left[F\right]=P_2$, т.е. всяка двоична функция се реализира с формула над F .

Теорема на Бул: Множеството $F=\{\bullet,\vee,-\}$ е пълно.

Нека $f(x_1,\dots,x_n)$ е произволна двоична функция, различна от 0. Означаваме

$$x^{\alpha}=\begin{cases}\overline{x}, & \alpha=0\\ x, & \alpha=1\end{cases}$$

Не е трудно да се види, че $x^{\alpha}=1$ тогава и само тогава, когато $x=\alpha$. Следователно

$$f(x_1,\dots,x_n)=\bigvee_{f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n},$$

където дизюнкция се взема по всички $n-$торки $\langle\alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle$ за които $f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=1$.

Задачи:

Задача 1 Постройте формула над множеството $F=\{\bullet,\vee,-\}$, която да реализира функцията зададена чрез следната таблица.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Задача 2 Постройте формула над множеството $F=\{\bullet,\vee,-\}$, която да реализира функциите зададени чрез следната таблица.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

Задача 3. Постройте формула над множеството $F = \{\bullet, \vee, -\}$, която да реализира функцията $f = (x_1 + x_2).\overline{x_3}$.

Теорема: Нека са дадени две множества от двоични функции $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$ и $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ при това F ***пълно множество.*** Множеството G е пълно тогава и само о тогава, когато $\forall f_i \in F \Rightarrow f_i \in [G]$, т.е. когато може да се представи като формула над G.

Задача 4. Докажете, че следните множества са пълни:

1) $G = \{\bullet, -\}$ 2) $G = \{\vee, -\}$

3) $G = \{\downarrow\}$ 4) $G = \{|\}$

5) $G = \{\bullet, +, 1\}$ 6) $G = \{\bullet, \vee\}$

Полином на Жегалкин

- ***Дефиниция:*** Израз от вида $x_1, \ldots, x_n$ без повтарящи се множители се нарича ***елементарна конюнкция.***

Забележка: *Понеже* $x_1.x_1 = x_1$*, то всяка конюнкция можем да я направим елементарна*

$$x_1x_2x_3x_2 = x_1x_2x_3$$

- ***Дефиниция:*** Сума от вида $E_1 + E_2 + \cdots + E_k$ без повтарящи се събираеми се нарича полином на Жегалкин и

$$E := \begin{cases} \text{елементарна конюнкция} \\ 1 \end{cases}$$

Забележка: *Понеже* $x_1 + x_1 = 0$*, то всяка сума от елементарни конюнкции и 1 става полином на Жегалкин чрез зачертаване на повтарящите се събираеми*

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_2 = E_1 + E_3$$

Задача 1. Намерете полинома на Жегалкин за следната функция

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Задача 2. Намерете полинома на Жегалкин за следните функции

а)

x_1	x_2	x_3	f_1
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

б)

x_1	x_2	x_3	f_2
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Теорема на Жегалкин: Всяка двоична функция се представя точно с един полином на Жегалкин.

Затворени множества

- ***Дефиниция:*** Едно множество F се нарича ***затворено***, ако $[F]=F$.
- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1,\ldots,x_n)$ **запазва нулата**, ако $f(0,\ldots,0)=0$.

  Множеството от всички функции, запазващи нулата означаваме с $\mathbf{T_0}$.
- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1,\ldots,x_n)$ **запазва единицата**, ако $f(1,\ldots,1)=1$.

  Множеството от всички функции, запазващи единицата означаваме с $\mathbf{T_1}$.
- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f^*(x_1,\ldots,x_n)$ е **двойнствена** на функцията $f(x_1,\ldots,x_n)$, ако

$$f^*(x_1,\ldots,x_n)=\overline{f}(\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$$

Задача 1. Намерете деойнствените на следните функции

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Теорема: $(f^*)^* = f$

Някои основни двойки функция и нейната двойствена функция.

f	0	1	x	$\bar{x}$	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x + y$	$x \leftrightarrow y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
f^*	1	0	x	$\bar{x}$	$x \vee y$	$x \cdot y$	$x \leftrightarrow y$	$x + y$	$x \downarrow y$	$x \mid y$

- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$ **е самодвойствена**, ако $f = f^*$. Множеството от всички самодвойствени функции означаваме с **S**.

Задача 2. Проверете дали функцията е самодвойствена

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Нека $\alpha = (a_1, \ldots a_n)$ и $\beta = (b_1, \ldots b_n)$ са две произволни n-торки от 0 и 1.

- ***Дефиниция:*** Казваме, че α **предхожда** β **и означаваме** $\alpha \prec \beta$, ако са изпълнени следните неравенства

$$a_1 \le b_1,\ a_2 \le b_2,\ \ldots, a_n \le b_n\ .$$

- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1, \ldots, x_n)$ е **монотонна,** ако от $\alpha \prec \beta$ следва, че функцията $f(\alpha) \le f(\beta)$. Множеството от всички монотонни функции означаваме с **M**.

Задача 1. Проверете дали е монотонна следната функция

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Задача 2. Проверете кои от следните функции са монотонни и кои не:

$$x_1,\ \overline{x_1},\ x_1.x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \leftrightarrow x_2$$

- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1,\ldots,x_n)$ е **линейна,** ако тя има линеен полином на Жегалкин, т.е. f може да се представи като

$$f(x_1,x_2,\ldots x_n)=a_n x_n + a_{n-1}x_{n-1}+\ldots+a_1 x_1 + a_0,$$

където от $a_i \in \{0,1\}$. Множеството от всички линейни функции означаваме с **L**.

Теорема: Множествата **T_0, T_1, S, M и L** са затворени множества.

Теорема на Пост-Яблонски

Теорема: Множеството F е пълно тогава и само тогава, когато

$$F \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L.$$

Задача 1. Проверете кои от следните множества са пълни и кои не:

а) $F_1=\{f_1, f_2, f_3\}$

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0

б) $F_2=\{f_1, f_2, f_3\}$

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

в) $F_3=\{0, 1, x_1x_2+1\}$

г) $F_4=\{0, 1, x_1x_2\}$

д) $F_5 = \{\overline{x_1},\ x_1 + x_2 + x_3\}$

е) $F_6 = \{0,\ \overline{x_1}\}$

ж) $F_7 = \{0,\ \overline{x_1 x_2}\}$ - пълно

- ***Дефиниция:*** Казваме, че функцията $f(x_1, \dots, x_n)$ е **шеферова,** ако множеството $\{f\}$ е пълно и $f \notin T_0 \bigcup T_1 \bigcup S$.

Задача 2 За кои стойности на n функцията е шеферова

$$f = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1 + 1$$

Допълнителни задачи:

Задача 1. Постройте формула над множеството $F = \{\bullet, \vee, -\}$, която да реализира функциите:

1) $f = (\overline{x_1} x_2 + x_3).(x_1 x_3 \to x_2);$
2) $f = (x_1 \vee x_2) \to x_3$

Задача 2. Намерете полинома на Жегалкин за следните функции

а) $f = x_1 \to x_2$

б) $f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$

в) $f = x_1(x_1 \vee \overline{x_3})$

г) $f = (x_1 \downarrow x_2) | (x_2 \downarrow x_3)$

д)

x_1	x_2	x_3	f	g
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

Задача 3. Пълна ли е системата от двоични функции:

1) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x + y,\ xy \vee yz \vee zx\};$
2) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x + y + z + 1\};$
3) $A = \{1,\ \overline{x},\ x(y \leftrightarrow z) + \overline{x}(y + z), x \leftrightarrow y\};$
4) $A = \{0,\ \overline{x},\ x(y + z) + yz\};$

5) $A = \{\overline{x},\ x(x \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \vee z),\ x + y + z\}$;

6) $A = \{\overline{x},\ x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow yz,\ x + y + z\}$

Задача 3. За кои стойности на *n* функцията е шеферова

1) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_ix_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1$;

2) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_ix_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n$;

3) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \overline{x}_i\overline{x}_j$; 4*) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j$;

5) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{[n/2]} \leqslant n} \overline{x}_{i_1}\overline{x}_{i_2} \ldots \overline{x}_{i_{]n/2[}}$;

Формални езици и граматики

Думи и езици.

- ***Дефиниция:*** ***Дума*** над азбуката *V* ще наричаме всяка крайна редица от букви на *V*. Дума, в която не влиза нито една буква се нарича празна дума, която се означава с ε. С *V** се означава множеството от всички думи над *V*, включително и празната.

- ***Дефиниция:*** Всяко подмножество *L* на *V** се нарича ***формален език*** над азбуката *V*.

При сечение, обединение, допълнение на два езика ще разбираме езика, който се получава от дадените езици, разглеждани като множества.

Под произведение на езиците L_1 и L_2 ще разбираме езика

$$L_1L_2 = \{\alpha \in V^* \mid \alpha = \beta\gamma,\ \beta \in L_1, \gamma \in L_2\},$$

т.е множеството от всички думи, които се представят като конкатенация на две думи. Първата от които е от L_1, а втората от L_2.

Задача 1. Нека *V*= {0,1,2} е азбука.

а) Образувайте формалния език L_1, който се състои от всички двубуквени и трибуквени думи, съставени от различни букви.

б) за L_2 = {021,20,103,412,40}, намерете:

$L_1 \cup L_2$ $\qquad$ $L_1 \cap L_2$ $\qquad$ $L_1 - L_2$

в) L_2L_3=?, като L_3={aa,bb,c}

г) L_3^2 =?

- ***Дефиниция:*** Под $n-$ та степен на езика L ще разбираме езика

$$L^n = \underbrace{LL\ldots L}_{n}$$

като по дефиниция $L^0 = \varepsilon$.

- ***Дефиниция:*** ***Итерация L**** на произволен език L ще наричаме обединението на всички степени на L, т.е

$$L^* = \bigcup_{n\geq 0} L^n$$

Итерацията се състои от всички възможни конкатенации на произволен брой думи на L. Ако всички думи са с дължина 1, тогава L*=V* - всички думи над V.

Ако L={a,b,c}, то L.L ={aa,ab,ac,ba,bb,bc,ca,cb,cc}, т.е. това са всички двубуквени думи, L^3 – са всички трибуквени и т.н. V* са всички думи над азбуката V.

Задача 2. Нека $L_1 = \{aba\}$ и $L_2 = \{b\}$ са формални езици над азбуката $V = \{a, b\}$. Опишете думите от езика $L = L_1{*}L_2$.

Задача 3. Нека V={0} W={1}. Опишете кои думи изграждат следните езици:

А) $(V \cup W)^*$

Б) $V^*.W^*$

В) Вярно ли е, че $(V\cup W)^* = V^*.W^*$

Граматики

- ***Дефиниция: Граматика-генератор*** е наредена четворка от вида: Г=<V,W,S,P>, където:
  - V е азбука на терминалните символи (азбука на пораждащия език)
  - W е вътрешна нетерминална азбука от вътрешни състояния на УУ(синтактични категории в езика), като $V \cap W = \varnothing$
  - $S \in W$ е начално състояние
  - P е крайно множество от правила на пораждащата граматика, които представляват наредени двойки от думи, съставени от терминални и нетерминални символи $<\alpha,\beta>$ над $V\cup W$, като в α има поне един нетерминален символ (за β не е задължително).

Задача 4. Кои думи поражда граматиката:

$\Gamma =<\{a,b\},\{s\}, s,\{s\to asb\}, s\to ab\}>$

Задача 5. Кои думи поражда граматиката:

$\Gamma=<\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\{s\}, s,\{s\to s0, s\to s1, s\to s2\dots s\to s9, s\to 0, s\to 1, s\to 2, \dots s\to 9\}>$

Задача 6. Кои думи поражда граматиката

$\Gamma=<\{a,b,c\}, \{s\}, s,\{s \to aca;\ s \to asa, s\to bcb, s \to bsb\}>$

Задача 7. Опишете езика, породен от автоматната граматика:

$\Gamma=<\{0,1\}, \{c,a,b\}, c, \{c\to 0a, a \to 0b, b \to 1\}>$

Задача 8. Постройте граматика, която да поражда всички думи от нули и единици, започващи с 10, т.е.

$$L = \{10\alpha \mid \alpha \in \{0,1\}^*\}.$$

Задача 9. Постройте граматика, която да поражда всички думи от следните езици:

$L_1=\{abab\}$

$L_2=\{a^n, n \geq 1\}$
$L_3=\{a^{2n}, n \geq 1\}$

$L_4=\{a^{3n}b,\ n \geq 0\}$

$L_5=\{a^n b^n,\ n \geq 1\}$ $L_6=\{a^n b^{2n},\ n \geq 1\}$

$L_7=\{\alpha\, aa,\ \alpha \in \{a, b\}^*\}$

Автоматни граматики.

- ***Дефиниция:*** Пораждаща граматика Г=<V,W,S,P>, чиито правила са от вида : A $\rightarrow$aB, A$\rightarrow$a, като (A,B $\in$W, a $\in$V) се нарича ***автоматна*** или граматика от тип 3.

Задача 1. Да се напише автоматна граматика, която да поражда думите от езика над азбуката $V=\{0, 1\}^*$.

а) $L_1=\{10\,\alpha\ , \alpha \in \{0, 1\}^*\}$;

б) $L_2=\{\alpha\, 10,\ \alpha \in \{0, 1\}^*\}$;

в) $L_3=\{\ \alpha 10\beta,\ \alpha \in \{0, 1\}^*\}$;

Задача 2. Да се напише автоматна граматика, която да поражда думите от езика над азбуката $V=\{a, b\}^*$.

а) $L_1=\{a^n\, b, n \geq 0\}$;

б) $L_2=\{\ a^n\, b, n \geq 1\}$;

в) $L_3=\{\ a\, b^n, n \geq 0\}$;

г) $L_3=\{\ a\, b^n, n \geq 1\}$;

д) $L_4=\{a^n\, b^m, n, m \geq 0\}$;

е) $L_5=\{a\,\alpha\, b,\ \alpha \in \{a, b\}^*\}$;

ж) $L_6=\{ab\,\alpha\, ba,\ \alpha \in \{a, b\}^*\}$;

з) $L_7=\{\ \alpha\ ,\ \alpha \in \{a, b\}^*$ и започва и завършва с една и съща буква$\}$.

Допълнителни задачи:

Задача 1. Нека $A=\{a\}$ и $B=\{b\}$. Опишете какви думи съдържат следните формални езици:

а) $AB*$;

б) $A*B*$;

в) $(AB)*$;

г) $A\cup B$;

д) $A*\cup B*$

е) $A*\cap B*$

ж) $(A\cup B)*$

з) $(A\cap B)*$

и) $(A\cup B)*ABA$

й) $(A*\cup AB)*A$.

Задача 2. Определете езика породен от граматиката:

а) $\Gamma = \langle \{0,1\}, \{S\}, \{S \to 0S \mid 1S \mid \varepsilon\} \rangle$;

б) $\Gamma = \langle \{0,1\}, \{S,A\}, S, \{S \to 011 \mid 0S1 \mid 01A,$
$A \to 1A \mid 1\} \rangle$;

в) $\Gamma = \langle \{0,1\}, \{S\}, S, \{S \to 1 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 0S0 \mid 1S1\} \rangle$;

г) $\Gamma = \langle \{a,b,c\}, \{S,B,C\}, S, \{S \to aSBC \mid abC,$
$CB \to BC,\ bB \to bb,\ bC \to bc,\ cC \to cc\} \rangle$;

КРАЙНИ АВТОМАТИ

Детерминирани крайни автомати

➢ ***Дефиниция: Детерминиран краен автомат (ДКА)*** над азбуката *V* наричаме наредената петорка: A = <K, V, δ, q_0, F>, където:

- $K \neq \emptyset$ е множество от вътрешни състояния;
- V - множество от входни символи (входна азбука)
- δ - функция на преходите с дефиниционна област $D(\delta)$: $D(\delta) \subseteq KxV$ и област на стойностите $R(\delta)$: $R(\delta) \subseteq K$.
- $q_0 \in K$ - начално състояние;
- $F \subseteq K$ - множество от заключителни състояния

➢ ***Дефиниция:*** ДКА е напълно ***определен,*** когато функцията на преходите δ е дефинирана за всяка наредена двойка от K x V, т.е. $D(\delta) = K \times V$.

Задачи:

<u>Задача 1.</u> За ДКА A1 = <{q0,q1,q2}, {a,b}, δ, q0, {q1}> с функция на преходите:

δ(q0, a)=q0 δ(q1, b)=q1

δ(q0, b)=q1 δ(q2, a)=q0

δ(q1, a)=q2 δ(q2, b)=q2

а) Начертайте графичната диаграма

б) Проверете дали ДКА ще разпознае думите: aabba; abbab; bbaba

в) Напълно определен ли е ДКА?

<u>Задача 2.</u> За ДКА A=<{q_0, q_1, q_2, q_3},{0, 1},δ, q_0, {q_0}> с функция на преходите:

$\delta(q_0, 0)=q_2$ $\delta(q_2, 0)=q_0$

$\delta(q_0, 1)=q_1$ $\delta(q_2, 1)=q_3$

$\delta(q_1, 0)=q_3$ $\delta(q_3, 0)=q_1$

$\delta(q_1, 1)=q_0$ $\delta(q_3, 1)=q_2$

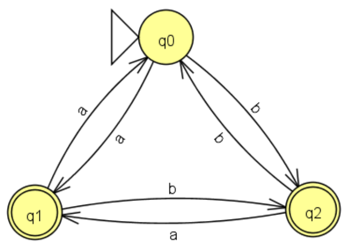
а) Постройте диаграма на преходите и определете езика, разпознаван от A.

б) Ще разпознае ли думата 10101010? А думата 110100?

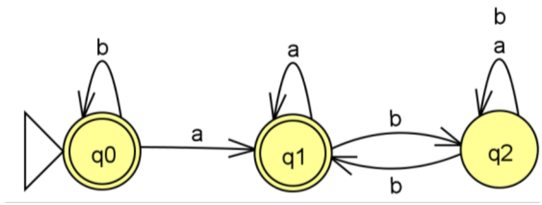
Задача 3. За ДКА с диаграма на преходите:

а) определете езика, който разпознава

б) Ще разпознае ли думите abba; baab; aaab;aaabb



Задача 4. За ДКА с диаграма на преходите:



а) Намерете 5 думи, които автомата ще разпознае.

б) Ще разпознае ли думите : abba; baab; aaab; aaabb?

Недетерминирани крайни автомати.

➢ ***Дефиниция: Недетерминиран краен автомат (НДКА)*** А над азбука V наричаме петорката A=<K,V,δ,q0,F>, където:

- K≠∅ е множество от вътрешни състояния;
- V - крайно множество от входни символи (входна азбука)
- δ - функция на преходите с дефиниционна област D(δ): D(δ)⊆ KxV и област на стойностите R(δ):R(δ)⊆P(K), където P(K) е множеството от всички подмножества на K.
- $q_0 \in K$ - начално състояние;
- F⊆K - множество от заключителни състояния.

Задача 5. За НДКА $A=<\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\}>$ с функция на преходите:

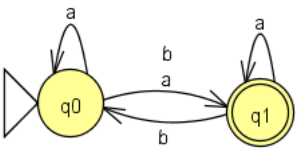
$\delta(q_0, a)=\{q_0, q_1\}$	$\delta(q_2, a)=\{ q_3\}$
$\delta(q_0, b)=\{q_0\}$	$\delta(q_2, b)= \varnothing$
$\delta(q_1, a)=\varnothing$	$\delta(q_3, a)= \varnothing$
$\delta(q_1, b)=\{q_2\}$	$\delta(q_3, b)= \varnothing$

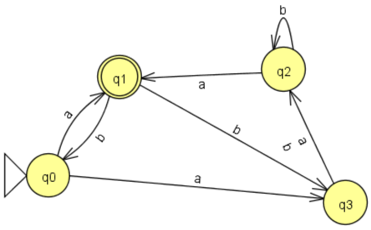
а) Начертайте диаграмата на преходите;

б) Кои думи разпознава автомата?

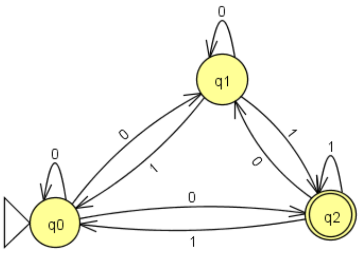
В) Разпознава ли думите: aaabb; aba; aaaaba

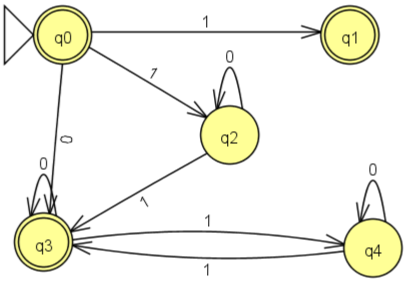
Задача 6. За автоматите намерете по 5 думи, които ще се разпознаят и по 2 думи, които няма да се разпознаят.





(A) (B)





(C) (D)

Задача 7. За автоматната граматика

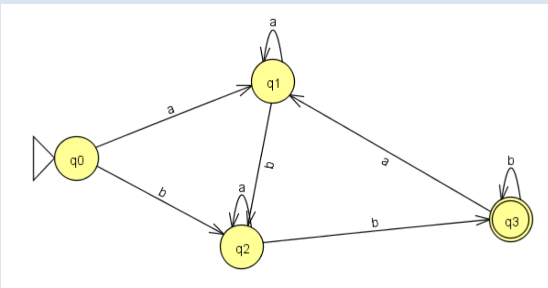
$$\Gamma = \langle\{a, b\}, \{S, A, B\}, S, \{S\rightarrow aS, S \rightarrow bS, S \rightarrow bA, A \rightarrow aB, B \rightarrow aC, C \rightarrow b\}\rangle.$$

Постройте недетерминиран краен автомат разпознаващ езика $L(\Gamma)$.

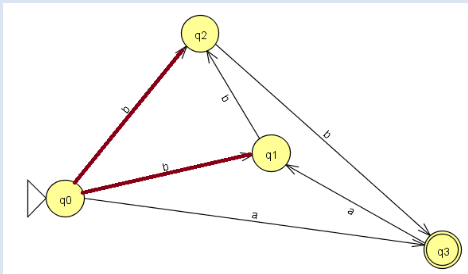
Разлика между детерминиран и недетерминиран краен автомат

При *детерминиран краен автомат* от дадено състояние на автомата с даден символ от входната азбука може да се отиде точно в едно вътрешно състояние на автомата.

При *недетерминираният краен автомат* може изобщо да няма преход или с един входен символ да има няколко прехода.



ДКА



НДКА

Задача 8. Постройте краен автомат (ДКА или НДКА), който да разпознава езика:

$L_1 = \{abba\}$ $\quad L_2 = \{a^n, n \geq 1\}$ $\quad L_3 = \{ab^n, n \geq 0\}$

$L_4 = \{ab^n, n \geq 1\}$ $\quad L_5 = \{ab^na, n \geq 0\}$ $\quad L_6 = \{ ab^na, n \geq 1\}$

$L_7 = \{ a^{3n}, n \geq 0 \}$ $\quad L_8 = \{ a^{3n}, n \geq 1 \}$ $\quad L_9 = \{ab^{2n}a, n \geq 0\}$

$L_{10} = \{ ab^{2n}a, n \geq 1\}$ $\quad L_{11} = \{a^nb^m, n,m \geq 0\}$ $\quad L_{12} = \{a^nb^m, n, m \geq 1\}$

$L_{13} = \{a^nb^n, n \geq 1\}$ $\quad L_{14} = \{ a^nb^{2m}, n, m \geq 0\}$ $\quad L_{15} = \{a\,\omega, \omega \in \{a, b\}^*\}$

$L_{16} = \{a^{3n}\,\omega\, b, n \geq 0, \omega \in \{a, b\}^*\}$ $\quad L_{17} = \{a\,\omega_1\, b\,\omega_2, \omega_1, \omega_2 \in \{a, b\}^*\}$

Допълнителни задачи:

Задача 1. Постройте краен автомат (ДКА или НДКА), който да разпознава езика:

а) $L_1 = \{a^n b,\ \ n \geq 0\}$

б) $L_2 = \{a^n b,\ \ n \geq 1\}$

в) $L_3 = \{\ a^{2n},\ n \geq 1\}$

г) $L_4 = \{a^{2n},\ n \geq 0\}$

д) $L_5 = \{a^{3n} b^m,\ \ n, m \geq 1\}$

е) $L_6 = \{a^n b^m c^p,\ \ n, m, p \geq 0\}$

ж) $L_7 = \{(abc)^n,\ \ n \geq 0\}$

Задача 2. Постройте краен автомат (ДКА или НДКА), който да разпознава езика:

а) $L_1 = \{\omega \mid \omega \in \{0, 1\}^*$ и $|\omega|$ се дели на 3$\}$;

б) $L_2 = \{\omega \mid \omega \in \{0, 1\}^*$ и броят на нулите в ω се дели на 3$\}$;

в) $L_3 = \{\omega \mid \omega \in \{0, 1\}^*$ и в ω се съдържат четен брой нули и четен брой единици$\}$;

г) $L_4 = \{\omega_1 000 \omega_2 \mid \omega_1, \omega_2 \in \{0, 1\}^*\}$;

д) $L_5 = \{a\omega a \mid \omega \in \{a, b\}^*\}$;

Задача 3. Постройте диаграма на преходите за следните автомати и определете езика разпознаван от тях:

а) $A_1 = <\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0, q_1\}>$ с функция на преходите:

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) = q_0 & \delta(q_2, a) = q_2 \\
\delta(q_1, a) = q_2 & \delta(q_1, b) = q_2 \\
\delta(q_0, b) = q_1 & \delta(q_2, b) = q_2
\end{array}
$$

б) $A_2 = <\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\}>$ с функция на преходите:

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_2, a) = q_0 \\
\delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_3, a) = q_2 \\
\delta(q_0, b) = q_2 & \delta(q_1, b) = q_0 \\
\delta(q_2, b) = q_3 & \delta(q_3, b) = q_1
\end{array}
$$

Задача 4. Постройте автоматна граматика, която да поражда езика, разпознаван от недетерминирания краен автомат:

а) $A_1 = <\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_2, q_1\}>$ с функция на преходите:

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) = \{q_0, q_3\} & \delta(q_2, b) = \{q_2\} \\
\delta(q_0, b) = \{q_0, q_1\} & \delta(q_3, a) = \{q_4\} \\
\delta(q_1, a) = \varnothing & \delta(q_3, b) = \varnothing \\
\delta(q_1, b) = \{q_2\} & \delta(q_4, a) = \{q_4\} \\
\delta(q_2, a) = \{q_2\} & \delta(q_4, b) = \{q_4\}
\end{array}
$$

б) $A_2 = <\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_1\}>$ с функция на преходите:

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\} & \delta(q_1, 0) = \varnothing \\
\delta(q_0, 1) = \{q_1\} & \delta(q_1, 1) = \{q_0, q_1\}.
\end{array}
$$

Задача 5. Постройте краен автомат, разпознаващ езика, който се поражда от следните автоматни граматики

а) $\Gamma_1 = <\{a, b, c\}, \{S, A, B, C, D\}, S, \{S \to aB, S \to aC, B \to aA, C \to bD, D \to bC, D \to bD, D \to aC, A \to cA, A \to c\}>$;

б) $\Gamma_2 = <\{0, 1\}, \{S, A, B, C, D, E\}, S, \{S \to 0A, S \to \varepsilon, B \to 0C, B \to 0D, A \to 1B, B \to 1D, D \to 0E, C \to 1B, C \to 0A, E \to 1A, D \to 1E, A \to 0B, A \to OD, E \to 1, C \to 1\}>$.

Задача 6. За автомата $N = <\{q_0, q_1, q_2\},\{a, b\},\{0, 1\}, \delta, q_0>$ с функция на преходите:

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0,a)=\{q_1\} & \delta(q_1,b)=\{q_2\} \\
\delta(q_0,b)=\{q_2\} & \delta(q_2,a)=\{q_1\} \\
\delta(q_1,a)=\{q_1\} & \delta(q_2,b)=\{q_2\}
\end{array}
$$

Начертайте диаграмата на преходите и проверете резултата от думите: aaabbb; aabbaa; ababab.