

Методи на Рунге-Кута за решаване задача на Коши с начално условие

Задача 3 а) от файла

$$y' = \frac{y}{x} + 1, x \in [1, 2]$$

$$y(1) = 0$$

търсим точно частно решение:

In[273]:=

```
Clear[x, y]
```

```
DSolve[{y'[x] ==  $\frac{y[x]}{x} + 1$ , y[1] == 0}, y[x], x]
```

Out[274]=

```
{{y[x] -> x Log[x]}}
```

РК32 - Формула (1,1)

In[303]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];

  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.015625

Теоретичната глобална грешка е 0.0625

$i = 0$ $x_i = 1$. $y_i = 0$. $f_i = 1$. $k_1 = 0.25$ $k_2 = 0.3$ $y_{\text{точно}} = 0$. истинска грешка = 0 .

$i = 1$ $x_i = 1.25$ $y_i = 0.275$ $f_i = 1.22$ $k_1 = 0.305$

$k_2 = 0.346667$ $y_{\text{точно}} = 0.278929$ истинска грешка = 0.00392944

$i = 2$ $x_i = 1.5$ $y_i = 0.600833$ $f_i = 1.40056$ $k_1 = 0.350139$

$k_2 = 0.385853$ $y_{\text{точно}} = 0.608198$ истинска грешка = 0.00736433

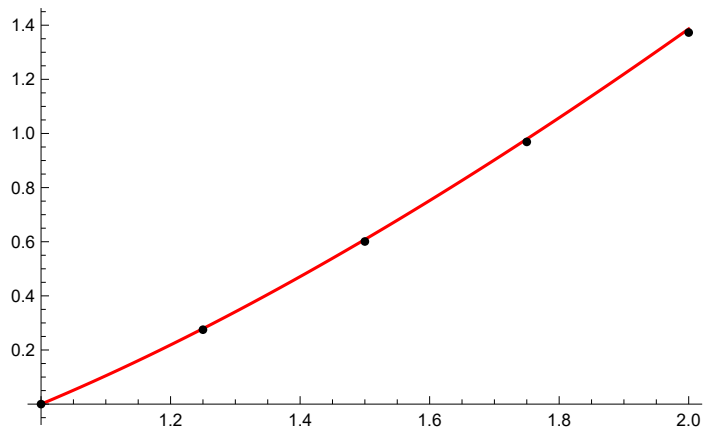
$i = 3$ $x_i = 1.75$ $y_i = 0.968829$ $f_i = 1.55362$ $k_1 = 0.388404$

$k_2 = 0.419654$ $y_{\text{точно}} = 0.979328$ истинска грешка = 0.0104983

$i = 4$ $x_i = 2$. $y_i = 1.37286$ $f_i = 1.68643$ $k_1 = 0.421607$

$k_2 = 0.449385$ $y_{\text{точно}} = 1.38629$ истинска грешка = 0.0134358

Out[316]=



РК32 - Формула (1/2,1/2) - модифициран метод на Ойлер

In[317]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ",  $h^3$ ]
Print["Теоретичната глобална грешка е ",  $h^2$ ]
(*намираме неизвестните стойности за  $y_i$ *)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[ $x + \frac{h}{2}$ ,  $y + \frac{k1}{2}$ ];

  Print["i = ", i, "  $x_i$  = ", x, "  $y_i$  = ", y, "  $f_i$  = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, "  $y_{\text{точно}}$  = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.015625

Теоретичната глобална грешка е 0.0625

$i = 0$ $x_i = 1$. $y_i = 0$. $f_i = 1$. $k1 = 0.25$ $k2 = 0.277778$ $y_{\text{точно}} = 0$. истинска грешка = 0 .

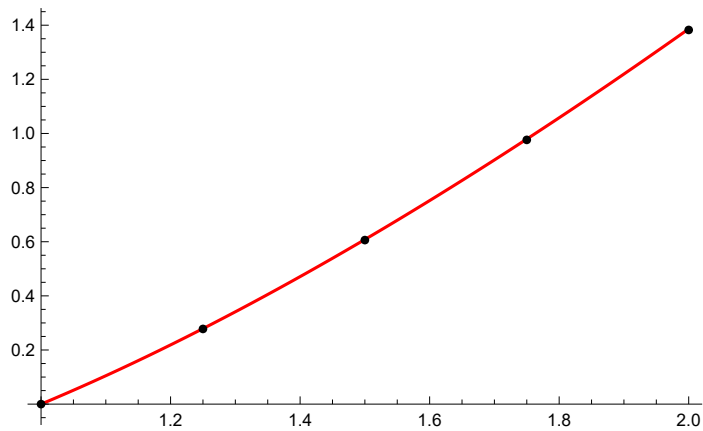
$i = 1$ $x_i = 1.25$ $y_i = 0.277778$ $f_i = 1.22222$ $k1 = 0.305556$
 $k2 = 0.328283$ $y_{\text{точно}} = 0.278929$ истинска грешка = 0.00115166

$i = 2$ $x_i = 1.5$ $y_i = 0.606061$ $f_i = 1.40404$ $k1 = 0.35101$
 $k2 = 0.370241$ $y_{\text{точно}} = 0.608198$ истинска грешка = 0.00213706

$i = 3$ $x_i = 1.75$ $y_i = 0.976301$ $f_i = 1.55789$ $k1 = 0.389472$
 $k2 = 0.406138$ $y_{\text{точно}} = 0.979328$ истинска грешка = 0.00302615

$i = 4$ $x_i = 2$. $y_i = 1.38244$ $f_i = 1.69122$ $k1 = 0.422805$
 $k2 = 0.437511$ $y_{\text{точно}} = 1.38629$ истинска грешка = 0.00385458

Out[330]=



РК32 - Формула (2/3,2/3)

In[331]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ",  $h^3$ ]
Print["Теоретичната глобална грешка е ",  $h^2$ ]
(*намираме неизвестните стойности за  $y_i$ *)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{2}{3}$  * h, y +  $\frac{2}{3}$  * k1];

  Print["i = ", i, "  $x_i$  = ", x, "  $y_i$  = ", y, "  $f_i$  = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, "  $y_{\text{точно}}$  = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{4}$  k1 +  $\frac{3}{4}$  k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.015625

Теоретичната глобална грешка е 0.0625

$i = 0$ $x_i = 1.$ $y_i = 0.$ $f_i = 1.$ $k1 = 0.25$ $k2 = 0.285714$ $y_{\text{точно}} = 0.$ истинска грешка = $0.$

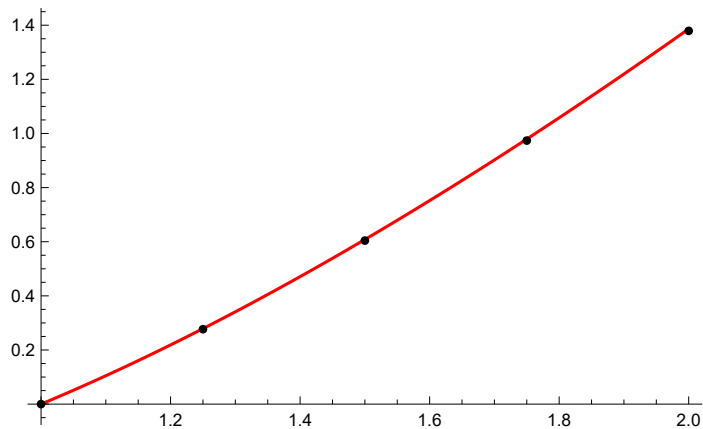
$i = 1$ $x_i = 1.25$ $y_i = 0.276786$ $f_i = 1.22143$ $k1 = 0.305357$
 $k2 = 0.334769$ $y_{\text{точно}} = 0.278929$ истинска грешка = 0.00214372

$i = 2$ $x_i = 1.5$ $y_i = 0.604202$ $f_i = 1.4028$ $k1 = 0.3507$
 $k2 = 0.3757$ $y_{\text{точно}} = 0.608198$ истинска грешка = 0.00399598

$i = 3$ $x_i = 1.75$ $y_i = 0.973652$ $f_i = 1.55637$ $k1 = 0.389093$
 $k2 = 0.410832$ $y_{\text{точно}} = 0.979328$ истинска грешка = 0.00567567

$i = 4$ $x_i = 2.$ $y_i = 1.37905$ $f_i = 1.68952$ $k1 = 0.422381$
 $k2 = 0.441612$ $y_{\text{точно}} = 1.38629$ истинска грешка = 0.00724492

Out[344]=



РК54 - Формула с четири междинни точки

In[443]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2;
x = a;
y = 0.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] :=  $\frac{y}{x} + 1$ 
(*точно решение*)
yt[x_] := x Log[x]
(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]
(*намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k1];
  k3 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k2];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ", k4,
    " yточно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → {Black, PointSize[0.02]}];
Show[gryt, grp]

```


Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.000976563

Теоретичната глобална грешка е 0.00390625

$i = 0$ $x_i = 1.$ $y_i = 0.$ $f_i = 1.$ $k_1 = 0.25$ $k_2 = 0.277778$

$k_3 = 0.280864$ $k_4 = 0.306173$ $y_{\text{точно}} = 0.$ истинска грешка = $0.$

$i = 1$ $x_i = 1.25$ $y_i = 0.278909$ $f_i = 1.22313$ $k_1 = 0.305782$ $k_2 = 0.328509$

$k_3 = 0.330575$ $k_4 = 0.351581$ $y_{\text{точно}} = 0.278929$ истинска грешка = 0.0000199741

$i = 2$ $x_i = 1.5$ $y_i = 0.608165$ $f_i = 1.40544$ $k_1 = 0.351361$ $k_2 = 0.370592$

$k_3 = 0.372071$ $k_4 = 0.390034$ $y_{\text{точно}} = 0.608198$ истинска грешка = 0.0000329341

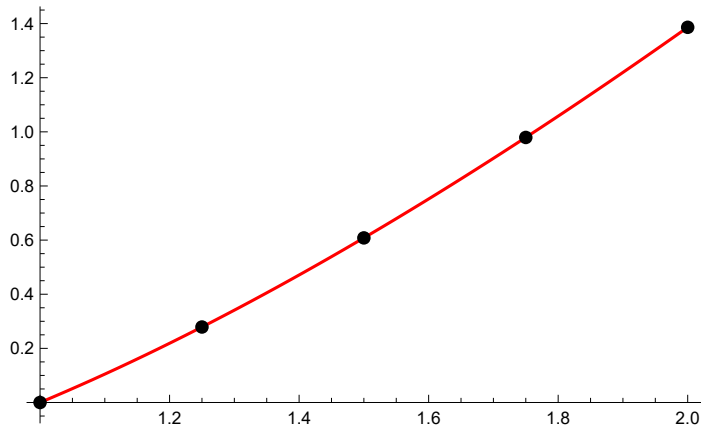
$i = 3$ $x_i = 1.75$ $y_i = 0.979285$ $f_i = 1.55959$ $k_1 = 0.389898$ $k_2 = 0.406564$

$k_3 = 0.407676$ $k_4 = 0.42337$ $y_{\text{точно}} = 0.979328$ истинска грешка = 0.0000430257

$i = 4$ $x_i = 2.$ $y_i = 1.38624$ $f_i = 1.69312$ $k_1 = 0.42328$ $k_2 = 0.437986$

$k_3 = 0.438851$ $k_4 = 0.452788$ $y_{\text{точно}} = 1.38629$ истинска грешка = 0.0000517723

Out[456]=



Задача подобна на б) от домашната

търсим точно частно решение:

In[459]:=

Clear[x, y]

DSolve $\left[\left\{y'[x] == y[x] - \text{Log}[x^2 + 1] + \frac{2x}{x^2 + 1} + 4, y[2] == 11\right\}, y[x], x\right]$

Out[460]=

$\left\{\left\{y[x] \rightarrow \frac{-4 e^2 + 15 e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}\right\}\right\}$

РК32 - Формула (1,1)

In[461]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 2.; b = 3;
x = a;
y = 11.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 4

(*точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-4e^2 + 15e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}$ 

(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];

  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " y_точно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → {Black, PointSize[0.02]}];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.015625

Теоретичната глобална грешка е 0.0625

$i = 0$ $x_i = 2$. $y_i = 11$. $f_i = 14.1906$ $k1 = 3.54764$

$k2 = 4.37195$ $y_{\text{точно}} = 11$. истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 2.25$ $y_i = 14.9598$ $f_i = 17.8999$ $k1 =$

4.47498 $k2 = 5.53586$ $y_{\text{точно}} = 14.9959$ истинска грешка = 0.0361508

$i = 2$ $x_i = 2.5$ $y_i = 19.9652$ $f_i = 22.6739$ $k1 =$

5.66847 $k2 = 7.03216$ $y_{\text{точно}} = 20.0583$ истинска грешка = 0.093091

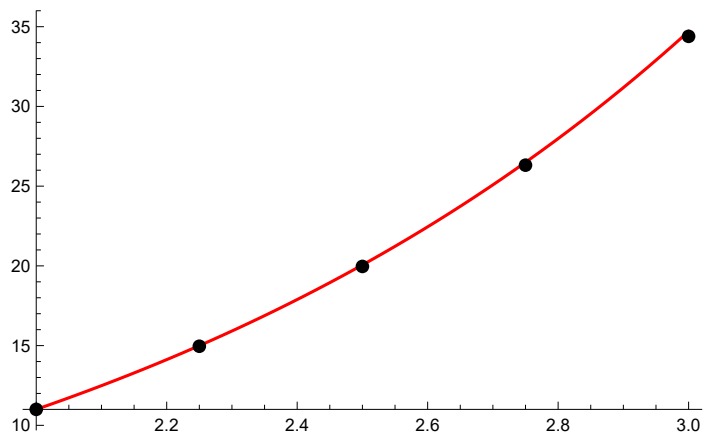
$i = 3$ $x_i = 2.75$ $y_i = 26.3155$ $f_i = 28.8105$ $k1 =$

7.20262 $k2 = 8.95389$ $y_{\text{точно}} = 26.4952$ истинска грешка = 0.179686

$i = 4$ $x_i = 3$. $y_i = 34.3938$ $f_i = 36.6912$ $k1 =$

9.1728 $k2 = 11.4202$ $y_{\text{точно}} = 34.7019$ истинска грешка = 0.308126

Out[474]=



РК32 - Формула (1/2,1/2) - модифициран метод на Ойлер

In[475]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 2.; b = 3;
x = a;
y = 11.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 4

(*точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-4e^2 + 15e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}$ 

(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k1}{2}$ ];

  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " y_точно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.015625

Теоретичната глобална грешка е 0.0625

$i = 0$ $x_i = 2$. $y_i = 11$. $f_i = 14.1906$ $k1 = 3.54764$

$k2 = 3.95919$ $y_{\text{точно}} = 11$. истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 2.25$ $y_i = 14.9592$ $f_i = 17.8993$ $k1 =$

4.47483 $k2 = 5.00467$ $y_{\text{точно}} = 14.9959$ истинска грешка = 0.0367509

$i = 2$ $x_i = 2.5$ $y_i = 19.9639$ $f_i = 22.6725$ $k1 =$

5.66813 $k2 = 6.3494$ $y_{\text{точно}} = 20.0583$ истинска грешка = 0.0944379

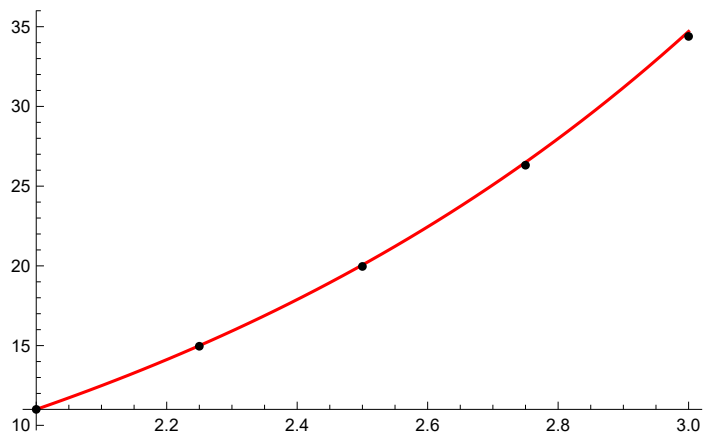
$i = 3$ $x_i = 2.75$ $y_i = 26.3133$ $f_i = 28.8082$ $k1 =$

7.20205 $k2 = 8.07714$ $y_{\text{точно}} = 26.4952$ истинска грешка = 0.181943

$i = 4$ $x_i = 3$. $y_i = 34.3904$ $f_i = 36.6878$ $k1 =$

9.17196 $k2 = 10.2951$ $y_{\text{точно}} = 34.7019$ истинска грешка = 0.311498

Out[488]=



РК32 - Формула (2/3,2/3)

In[489]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 2.; b = 3;
x = a;
y = 11.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 4

(*точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-4e^2 + 15e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}$ 

(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]
(*намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{2}{3}$  * h, y +  $\frac{2}{3}$  * k1];

  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " y_точно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{4}$  k1 +  $\frac{3}{4}$  k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.015625

Теоретичната глобална грешка е 0.0625

$i = 0$ $x_i = 2$, $y_i = 11$, $f_i = 14.1906$ $k1 = 3.54764$

$k2 = 4.09664$ $y_{\text{точно}} = 11$, истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 2.25$ $y_i = 14.9594$ $f_i = 17.8995$ $k1 =$

4.47488 $k2 = 5.18161$ $y_{\text{точно}} = 14.9959$ истинска грешка = 0.0365508

$i = 2$ $x_i = 2.5$ $y_i = 19.9643$ $f_i = 22.673$ $k1 = 5.66824$

$k2 = 6.57686$ $y_{\text{точно}} = 20.0583$ истинска грешка = 0.0939874

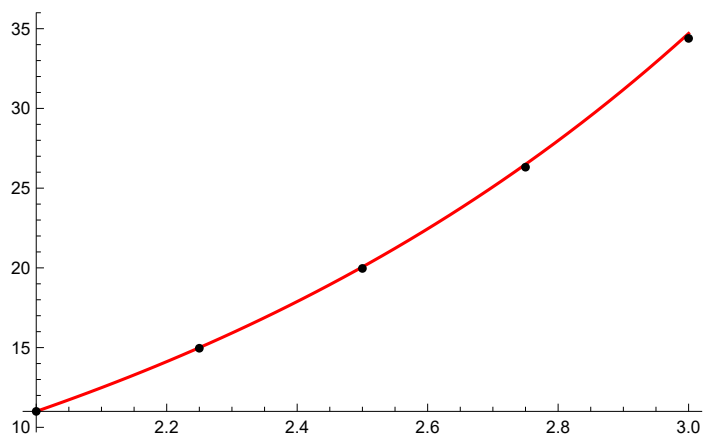
$i = 3$ $x_i = 2.75$ $y_i = 26.314$ $f_i = 28.809$ $k1 =$

7.20224 $k2 = 8.36927$ $y_{\text{точно}} = 26.4952$ истинска грешка = 0.181187

$i = 4$ $x_i = 3$, $y_i = 34.3915$ $f_i = 36.689$ $k1 = 9.17224$

$k2 = 10.6701$ $y_{\text{точно}} = 34.7019$ истинска грешка = 0.310367

Out[502]=



РК54 - Формула с четири междинни точки

In[503]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 2.; b = 3;
x = a;
y = 11.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 4

(*точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-4e^2 + 15e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}$ 

(*съставяме мрежата*)
n = 4; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]
(*намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k1];
  k3 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k2];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ", k4,
    " y_точно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → {Black, PointSize[0.02]}];
Show[gryt, grp]

```


Мрежата е с $n = 4$ и стъпка $h = 0.25$

Теоретичната локална грешка е 0.000976563

Теоретичната глобална грешка е 0.00390625

$i = 0$ $x_i = 2.$ $y_i = 11.$ $f_i = 14.1906$ $k1 = 3.54764$ $k2 = 3.95919$

$k3 = 4.01064$ $k4 = 4.4877$ $y_{\text{точно}} = 11.$ истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 2.25$ $y_i = 14.9958$ $f_i = 17.936$ $k1 = 4.48399$ $k2 = 5.01498$

$k3 = 5.08135$ $k4 = 5.69646$ $y_{\text{точно}} = 14.9959$ истинска грешка = 0.000111306

$i = 2$ $x_i = 2.5$ $y_i = 20.058$ $f_i = 22.7667$ $k1 = 5.69167$ $k2 = 6.37588$

$k3 = 6.46141$ $k4 = 7.25359$ $y_{\text{точно}} = 20.0583$ истинска грешка = 0.000286465

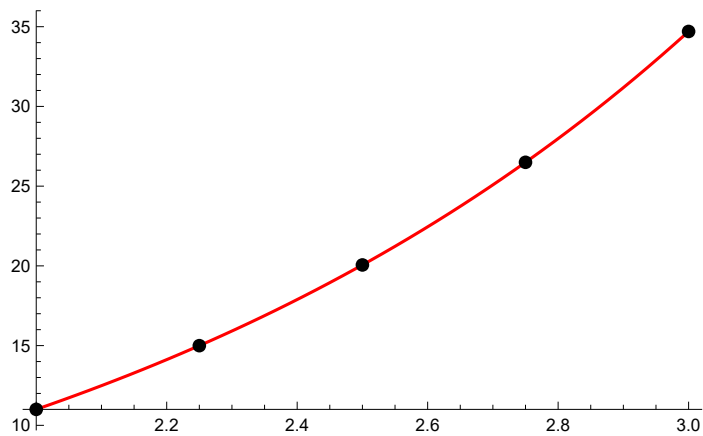
$i = 3$ $x_i = 2.75$ $y_i = 26.4947$ $f_i = 28.9896$ $k1 = 7.2474$ $k2 = 8.12816$

$k3 = 8.23825$ $k4 = 9.25758$ $y_{\text{точно}} = 26.4952$ истинска грешка = 0.00055296

$i = 4$ $x_i = 3.$ $y_i = 34.701$ $f_i = 36.9984$ $k1 = 9.24959$ $k2 = 10.3825$

$k3 = 10.5241$ $k4 = 11.8349$ $y_{\text{точно}} = 34.7019$ истинска грешка = 0.000948573

Out[516]=



РК54 - Формула с четири междинни точки - при дадена стъпка $h = 0.2$

In[517]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 2.; b = 3;
x = a;
y = 11.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 4

(*точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-4e^2 + 15e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}$ 

(*съставяме мрежата*)
h = 0.2;
n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]
(*намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k1];
  k3 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k2];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ", k4,
    " y_точно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → {Black, PointSize[0.02]}];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$, и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.00032

Теоретичната глобална грешка е 0.0016

$i = 0$ $x_i = 2$, $y_i = 11$, $f_i = 14.1906$ $k_1 = 2.83811$ $k_2 = 3.10143$

$k_3 = 3.12776$ $k_4 = 3.42329$ $y_{\text{точно}} = 11$, истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 2.2$ $y_i = 14.12$ $f_i = 17.1087$ $k_1 = 3.42173$ $k_2 = 3.74464$

$k_3 = 3.77693$ $k_4 = 4.13919$ $y_{\text{точно}} = 14.12$ истинска грешка = 0.0000361629

$i = 2$ $x_i = 2.4$ $y_i = 17.8873$ $f_i = 20.6863$ $k_1 = 4.13727$ $k_2 = 4.53292$

$k_3 = 4.57248$ $k_4 = 5.01618$ $y_{\text{точно}} = 17.8874$ истинска грешка = 0.0000884853

$i = 3$ $x_i = 2.6$ $y_i = 22.448$ $f_i = 25.0691$ $k_1 = 5.01383$ $k_2 = 5.49825$

$k_3 = 5.5467$ $k_4 = 6.08978$ $y_{\text{точно}} = 22.4482$ истинска грешка = 0.000162401

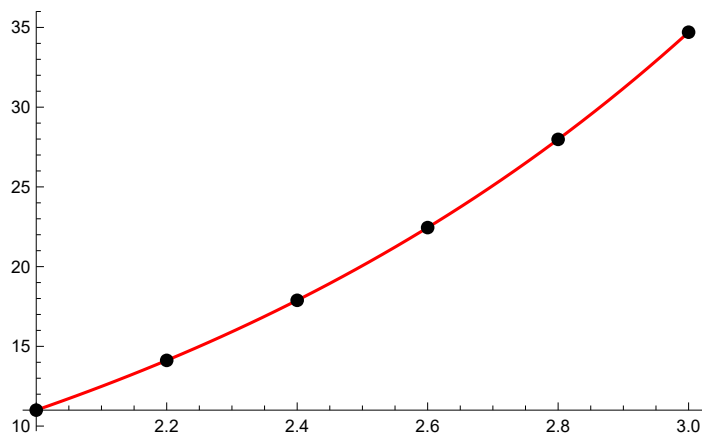
$i = 4$ $x_i = 2.8$ $y_i = 27.9803$ $f_i = 30.4345$ $k_1 = 6.08689$ $k_2 = 6.67966$

$k_3 = 6.73894$ $k_4 = 7.40332$ $y_{\text{точно}} = 27.9805$ истинска грешка = 0.000264925

$i = 5$ $x_i = 3$, $y_i = 34.7015$ $f_i = 36.9989$ $k_1 = 7.39978$ $k_2 = 8.12479$

$k_3 = 8.19729$ $k_4 = 9.00974$ $y_{\text{точно}} = 34.7019$ истинска грешка = 0.0004051

Out[531]=



РК54 - Формула с четири междинни точки - при дадена стъпка $h = 0.01$

In[547]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 2.; b = 3;
x = a;
y = 11.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 4

(*точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-4e^2 + 15e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}$ 

(*съставяме мрежата*)
h = 0.01;
n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]
(*намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k1];
  k3 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k2];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " x_i = ", x, " y_i = ", y, " f_i = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ", k4,
    " y_точно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → {Black, PointSize[0.02]}];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 100$. и стъпка $h = 0.01$ Теоретичната локална грешка е $1. \times 10^{-10}$ Теоретичната глобална грешка е $1. \times 10^{-8}$

$i = 0$ $x_i = 2.$ $y_i = 11.$ $f_i = 14.1906$ $k1 = 0.141906$ $k2 = 0.142563$
 $k3 = 0.142566$ $k4 = 0.143227$ $y_{\text{точно}} = 11.$ истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

$i = 1$ $x_i = 2.01$ $y_i = 11.1426$ $f_i = 14.3227$ $k1 = 0.143227$ $k2 = 0.143892$
 $k3 = 0.143895$ $k4 = 0.144563$ $y_{\text{точно}} = 11.1426$ истинска грешка = 1.09477×10^{-11}

$i = 2$ $x_i = 2.02$ $y_i = 11.2865$ $f_i = 14.4563$ $k1 = 0.144563$ $k2 = 0.145234$
 $k3 = 0.145237$ $k4 = 0.145912$ $y_{\text{точно}} = 11.2865$ истинска грешка = 2.21103×10^{-11}

$i = 3$ $x_i = 2.03$ $y_i = 11.4317$ $f_i = 14.5912$ $k1 = 0.145912$ $k2 = 0.14659$
 $k3 = 0.146593$ $k4 = 0.147275$ $y_{\text{точно}} = 11.4317$ истинска грешка = 3.35021×10^{-11}

$i = 4$ $x_i = 2.04$ $y_i = 11.5783$ $f_i = 14.7275$ $k1 = 0.147275$ $k2 = 0.14796$
 $k3 = 0.147963$ $k4 = 0.148652$ $y_{\text{точно}} = 11.5783$ истинска грешка = 4.5123×10^{-11}

$i = 5$ $x_i = 2.05$ $y_i = 11.7263$ $f_i = 14.8652$ $k1 = 0.148652$ $k2 = 0.149344$
 $k3 = 0.149347$ $k4 = 0.150043$ $y_{\text{точно}} = 11.7263$ истинска грешка = 5.69695×10^{-11}

$i = 6$ $x_i = 2.06$ $y_i = 11.8756$ $f_i = 15.0043$ $k1 = 0.150043$ $k2 = 0.150742$
 $k3 = 0.150746$ $k4 = 0.151449$ $y_{\text{точно}} = 11.8756$ истинска грешка = 6.90559×10^{-11}

$i = 7$ $x_i = 2.07$ $y_i = 12.0263$ $f_i = 15.1449$ $k1 = 0.151449$ $k2 = 0.152155$
 $k3 = 0.152158$ $k4 = 0.152868$ $y_{\text{точно}} = 12.0263$ истинска грешка = 8.13785×10^{-11}

$i = 8$ $x_i = 2.08$ $y_i = 12.1785$ $f_i = 15.2868$ $k1 = 0.152868$ $k2 = 0.153582$
 $k3 = 0.153586$ $k4 = 0.154303$ $y_{\text{точно}} = 12.1785$ истинска грешка = 9.39426×10^{-11}

$i = 9$ $x_i = 2.09$ $y_i = 12.3321$ $f_i = 15.4303$ $k1 = 0.154303$ $k2 = 0.155024$
 $k3 = 0.155027$ $k4 = 0.155752$ $y_{\text{точно}} = 12.3321$ истинска грешка = 1.06754×10^{-10}

$i = 10$ $x_i = 2.1$ $y_i = 12.4871$ $f_i = 15.5752$ $k1 = 0.155752$ $k2 = 0.15648$
 $k3 = 0.156484$ $k4 = 0.157216$ $y_{\text{точно}} = 12.4871$ истинска грешка = 1.19817×10^{-10}

$i = 11$ $x_i = 2.11$ $y_i = 12.6436$ $f_i = 15.7216$ $k1 = 0.157216$ $k2 = 0.157952$
 $k3 = 0.157956$ $k4 = 0.158695$ $y_{\text{точно}} = 12.6436$ истинска грешка = 1.33129×10^{-10}

$i = 12$ $x_i = 2.12$ $y_i = 12.8015$ $f_i = 15.8695$ $k1 = 0.158695$ $k2 = 0.159438$
 $k3 = 0.159442$ $k4 = 0.160189$ $y_{\text{точно}} = 12.8015$ истинска грешка = 1.467×10^{-10}

$i = 13$ $x_i = 2.13$ $y_i = 12.961$ $f_i = 16.0189$ $k1 = 0.160189$ $k2 = 0.16094$
 $k3 = 0.160944$ $k4 = 0.161699$ $y_{\text{точно}} = 12.961$ истинска грешка = 1.60531×10^{-10}

$i = 14$ $x_i = 2.14$ $y_i = 13.1219$ $f_i = 16.1699$ $k1 = 0.161699$ $k2 = 0.162458$
 $k3 = 0.162461$ $k4 = 0.163224$ $y_{\text{точно}} = 13.1219$ истинска грешка = 1.74632×10^{-10}

$i = 15$ $x_i = 2.15$ $y_i = 13.2844$ $f_i = 16.3224$ $k1 = 0.163224$ $k2 = 0.16399$
 $k3 = 0.163994$ $k4 = 0.164765$ $y_{\text{точно}} = 13.2844$ истинска грешка = 1.88995×10^{-10}

$i = 16$ $x_i = 2.16$ $y_i = 13.4484$ $f_i = 16.4765$ $k1 = 0.164765$ $k2 = 0.165539$
 $k3 = 0.165543$ $k4 = 0.166321$ $y_{\text{точно}} = 13.4484$ истинска грешка = 2.03634×10^{-10}

$i = 17$ $x_i = 2.17$ $y_i = 13.6139$ $f_i = 16.6321$ $k1 = 0.166321$ $k2 = 0.167103$
 $k3 = 0.167107$ $k4 = 0.167894$ $y_{\text{точно}} = 13.6139$ истинска грешка = 2.18554×10^{-10}

$i = 18$ $x_i = 2.18$ $y_i = 13.781$ $f_i = 16.7894$ $k1 = 0.167894$ $k2 = 0.168684$
 $k3 = 0.168688$ $k4 = 0.169482$ $y_{\text{точно}} = 13.781$ истинска грешка = 2.33745×10^{-10}

$i = 19$ $x_i = 2.19$ $y_i = 13.9497$ $f_i = 16.9482$ $k1 = 0.169482$ $k2 = 0.17028$
 $k3 = 0.170284$ $k4 = 0.171087$ $y_{\text{точно}} = 13.9497$ истинска грешка = 2.49235×10^{-10}

$i = 20$ $x_i = 2.2$ $y_i = 14.12$ $f_i = 17.1087$ $k1 = 0.171087$ $k2 = 0.171893$
 $k3 = 0.171898$ $k4 = 0.172708$ $y_{\text{точно}} = 14.12$ истинска грешка = 2.65008×10^{-10}

$i = 21$ $x_i = 2.21$ $y_i = 14.2919$ $f_i = 17.2708$ $k1 = 0.172708$ $k2 = 0.173523$
 $k3 = 0.173527$ $k4 = 0.174346$ $y_{\text{точно}} = 14.2919$ истинска грешка = 2.8108×10^{-10}

$i = 22$ $x_i = 2.22$ $y_i = 14.4654$ $f_i = 17.4346$ $k1 = 0.174346$ $k2 = 0.175169$
 $k3 = 0.175173$ $k4 = 0.176001$ $y_{\text{точно}} = 14.4654$ истинска грешка = 2.97442×10^{-10}

$i = 23$ $x_i = 2.23$ $y_i = 14.6406$ $f_i = 17.6001$ $k1 = 0.176001$ $k2 = 0.176832$
 $k3 = 0.176836$ $k4 = 0.177672 y_{\text{точно}} = 14.6406$ истинска грешка = 3.14111×10^{-10}

$i = 24$ $x_i = 2.24$ $y_i = 14.8174$ $f_i = 17.7672$ $k1 = 0.177672$ $k2 = 0.178512$
 $k3 = 0.178517$ $k4 = 0.179361 y_{\text{точно}} = 14.8174$ истинска грешка = 3.31093×10^{-10}

$i = 25$ $x_i = 2.25$ $y_i = 14.9959$ $f_i = 17.9361$ $k1 = 0.179361$ $k2 = 0.18021$
 $k3 = 0.180214$ $k4 = 0.181067 y_{\text{точно}} = 14.9959$ истинска грешка = 3.48377×10^{-10}

$i = 26$ $x_i = 2.26$ $y_i = 15.1762$ $f_i = 18.1067$ $k1 = 0.181067$ $k2 = 0.181924$
 $k3 = 0.181928$ $k4 = 0.18279 y_{\text{точно}} = 15.1762$ истинска грешка = 3.65983×10^{-10}

$i = 27$ $x_i = 2.27$ $y_i = 15.3581$ $f_i = 18.279$ $k1 = 0.18279$ $k2 = 0.183656$
 $k3 = 0.183661$ $k4 = 0.184531 y_{\text{точно}} = 15.3581$ истинска грешка = 3.83912×10^{-10}

$i = 28$ $x_i = 2.28$ $y_i = 15.5417$ $f_i = 18.4531$ $k1 = 0.184531$ $k2 = 0.185406$
 $k3 = 0.185411$ $k4 = 0.18629 y_{\text{точно}} = 15.5417$ истинска грешка = 4.02165×10^{-10}

$i = 29$ $x_i = 2.29$ $y_i = 15.7272$ $f_i = 18.629$ $k1 = 0.18629$ $k2 = 0.187174$
 $k3 = 0.187178$ $k4 = 0.188067 y_{\text{точно}} = 15.7272$ истинска грешка = 4.20744×10^{-10}

$i = 30$ $x_i = 2.3$ $y_i = 15.9143$ $f_i = 18.8067$ $k1 = 0.188067$ $k2 = 0.18896$
 $k3 = 0.188964$ $k4 = 0.189862 y_{\text{точно}} = 15.9143$ истинска грешка = 4.39661×10^{-10}

$i = 31$ $x_i = 2.31$ $y_i = 16.1033$ $f_i = 18.9862$ $k1 = 0.189862$ $k2 = 0.190764$
 $k3 = 0.190768$ $k4 = 0.191675 y_{\text{точно}} = 16.1033$ истинска грешка = 4.58922×10^{-10}

$i = 32$ $x_i = 2.32$ $y_i = 16.2941$ $f_i = 19.1675$ $k1 = 0.191675$ $k2 = 0.192586$
 $k3 = 0.192591$ $k4 = 0.193507 y_{\text{точно}} = 16.2941$ истинска грешка = 4.78526×10^{-10}

$i = 33$ $x_i = 2.33$ $y_i = 16.4866$ $f_i = 19.3507$ $k1 = 0.193507$ $k2 = 0.194428$
 $k3 = 0.194432$ $k4 = 0.195358 y_{\text{точно}} = 16.4866$ истинска грешка = 4.98481×10^{-10}

$i = 34$ $x_i = 2.34$ $y_i = 16.6811$ $f_i = 19.5358$ $k1 = 0.195358$ $k2 = 0.196288$
 $k3 = 0.196292$ $k4 = 0.197227 y_{\text{точно}} = 16.6811$ истинска грешка = 5.18789×10^{-10}

$i = 35$ $x_i = 2.35$ $y_i = 16.8774$ $f_i = 19.7227$ $k1 = 0.197227$ $k2 = 0.198166$
 $k3 = 0.198171$ $k4 = 0.199115 y_{\text{точно}} = 16.8774$ истинска грешка = 5.39458×10^{-10}

$i = 36$ $x_i = 2.36$ $y_i = 17.0755$ $f_i = 19.9115$ $k1 = 0.199115$ $k2 = 0.200065$
 $k3 = 0.200069$ $k4 = 0.201023 y_{\text{точно}} = 17.0755$ истинска грешка = 5.60501×10^{-10}

$i = 37$ $x_i = 2.37$ $y_i = 17.2756$ $f_i = 20.1023$ $k1 = 0.201023$ $k2 = 0.201982$
 $k3 = 0.201987$ $k4 = 0.202951 y_{\text{точно}} = 17.2756$ истинска грешка = 5.81903×10^{-10}

$i = 38$ $x_i = 2.38$ $y_i = 17.4776$ $f_i = 20.2951$ $k1 = 0.202951$ $k2 = 0.203919$
 $k3 = 0.203924$ $k4 = 0.204898 y_{\text{точно}} = 17.4776$ истинска грешка = 6.03684×10^{-10}

$i = 39$ $x_i = 2.39$ $y_i = 17.6815$ $f_i = 20.4897$ $k1 = 0.204897$ $k2 = 0.205876$
 $k3 = 0.205881$ $k4 = 0.206864 y_{\text{точно}} = 17.6815$ истинска грешка = 6.25853×10^{-10}

$i = 40$ $x_i = 2.4$ $y_i = 17.8874$ $f_i = 20.6864$ $k1 = 0.206864$ $k2 = 0.207853$
 $k3 = 0.207858$ $k4 = 0.208851 y_{\text{точно}} = 17.8874$ истинска грешка = 6.48402×10^{-10}

$i = 41$ $x_i = 2.41$ $y_i = 18.0953$ $f_i = 20.8851$ $k1 = 0.208851$ $k2 = 0.20985$
 $k3 = 0.209855$ $k4 = 0.210858 y_{\text{точно}} = 18.0953$ истинска грешка = 6.71349×10^{-10}

$i = 42$ $x_i = 2.42$ $y_i = 18.3051$ $f_i = 21.0858$ $k1 = 0.210858$ $k2 = 0.211867$
 $k3 = 0.211872$ $k4 = 0.212886 y_{\text{точно}} = 18.3051$ истинска грешка = 6.94694×10^{-10}

$i = 43$ $x_i = 2.43$ $y_i = 18.517$ $f_i = 21.2886$ $k1 = 0.212886$ $k2 = 0.213905$
 $k3 = 0.21391$ $k4 = 0.214934 y_{\text{точно}} = 18.517$ истинска грешка = 7.1844×10^{-10}

$i = 44$ $x_i = 2.44$ $y_i = 18.7309$ $f_i = 21.4934$ $k1 = 0.214934$ $k2 = 0.215964$
 $k3 = 0.215969$ $k4 = 0.217003 y_{\text{точно}} = 18.7309$ истинска грешка = 7.42602×10^{-10}

$i = 45$ $x_i = 2.45$ $y_i = 18.9468$ $f_i = 21.7003$ $k1 = 0.217003$ $k2 = 0.218043$
 $k3 = 0.218048$ $k4 = 0.219094 y_{\text{точно}} = 18.9468$ истинска грешка = 7.6718×10^{-10}

$i = 46$ $x_i = 2.46$ $y_i = 19.1649$ $f_i = 21.9094$ $k1 = 0.219094$ $k2 = 0.220144$
 $k3 = 0.220149$ $k4 = 0.221205$ $y_{\text{точно}} = 19.1649$ истинска грешка = 7.92173×10^{-10}

$i = 47$ $x_i = 2.47$ $y_i = 19.385$ $f_i = 22.1205$ $k1 = 0.221205$ $k2 = 0.222266$
 $k3 = 0.222272$ $k4 = 0.223338$ $y_{\text{точно}} = 19.385$ истинска грешка = 8.17593×10^{-10}

$i = 48$ $x_i = 2.48$ $y_i = 19.6073$ $f_i = 22.3338$ $k1 = 0.223338$ $k2 = 0.22441$
 $k3 = 0.224415$ $k4 = 0.225493$ $y_{\text{точно}} = 19.6073$ истинска грешка = 8.43453×10^{-10}

$i = 49$ $x_i = 2.49$ $y_i = 19.8317$ $f_i = 22.5493$ $k1 = 0.225493$ $k2 = 0.226576$
 $k3 = 0.226581$ $k4 = 0.22767$ $y_{\text{точно}} = 19.8317$ истинска грешка = 8.69754×10^{-10}

$i = 50$ $x_i = 2.5$ $y_i = 20.0583$ $f_i = 22.767$ $k1 = 0.22767$ $k2 = 0.228764$
 $k3 = 0.228769$ $k4 = 0.229868$ $y_{\text{точно}} = 20.0583$ истинска грешка = 8.96495×10^{-10}

$i = 51$ $x_i = 2.51$ $y_i = 20.2871$ $f_i = 22.9868$ $k1 = 0.229868$ $k2 = 0.230974$
 $k3 = 0.230979$ $k4 = 0.23209$ $y_{\text{точно}} = 20.2871$ истинска грешка = 9.23695×10^{-10}

$i = 52$ $x_i = 2.52$ $y_i = 20.5181$ $f_i = 23.209$ $k1 = 0.23209$ $k2 = 0.233206$
 $k3 = 0.233212$ $k4 = 0.234334$ $y_{\text{точно}} = 20.5181$ истинска грешка = 9.51356×10^{-10}

$i = 53$ $x_i = 2.53$ $y_i = 20.7513$ $f_i = 23.4334$ $k1 = 0.234334$ $k2 = 0.235461$
 $k3 = 0.235467$ $k4 = 0.2366$ $y_{\text{точно}} = 20.7513$ истинска грешка = 9.79476×10^{-10}

$i = 54$ $x_i = 2.54$ $y_i = 20.9867$ $f_i = 23.66$ $k1 = 0.2366$ $k2 = 0.237739$
 $k3 = 0.237745$ $k4 = 0.23889$ $y_{\text{точно}} = 20.9867$ истинска грешка = 1.00807×10^{-9}

$i = 55$ $x_i = 2.55$ $y_i = 21.2245$ $f_i = 23.889$ $k1 = 0.23889$ $k2 = 0.240041$
 $k3 = 0.240047$ $k4 = 0.241203$ $y_{\text{точно}} = 21.2245$ истинска грешка = 1.03714×10^{-9}

$i = 56$ $x_i = 2.56$ $y_i = 21.4645$ $f_i = 24.1203$ $k1 = 0.241203$ $k2 = 0.242366$
 $k3 = 0.242371$ $k4 = 0.24354$ $y_{\text{точно}} = 21.4645$ истинска грешка = 1.06671×10^{-9}

$i = 57$ $x_i = 2.57$ $y_i = 21.7069$ $f_i = 24.354$ $k1 = 0.24354$ $k2 = 0.244714$
 $k3 = 0.24472$ $k4 = 0.2459$ $y_{\text{точно}} = 21.7069$ истинска грешка = 1.09675×10^{-9}

$i = 58$ $x_i = 2.58$ $y_i = 21.9516$ $f_i = 24.59$ $k1 = 0.2459$ $k2 = 0.247086$
 $k3 = 0.247092$ $k4 = 0.248284$ $y_{\text{точно}} = 21.9516$ истинска грешка = 1.1273×10^{-9}

$i = 59$ $x_i = 2.59$ $y_i = 22.1987$ $f_i = 24.8284$ $k1 = 0.248284$ $k2 = 0.249483$
 $k3 = 0.249489$ $k4 = 0.250693$ $y_{\text{точно}} = 22.1987$ истинска грешка = 1.15836×10^{-9}

$i = 60$ $x_i = 2.6$ $y_i = 22.4482$ $f_i = 25.0693$ $k1 = 0.250693$ $k2 = 0.251903$
 $k3 = 0.251909$ $k4 = 0.253126$ $y_{\text{точно}} = 22.4482$ истинска грешка = 1.18993×10^{-9}

$i = 61$ $x_i = 2.61$ $y_i = 22.7001$ $f_i = 25.3126$ $k1 = 0.253126$ $k2 = 0.254349$
 $k3 = 0.254355$ $k4 = 0.255584$ $y_{\text{точно}} = 22.7001$ истинска грешка = 1.22202×10^{-9}

$i = 62$ $x_i = 2.62$ $y_i = 22.9544$ $f_i = 25.5584$ $k1 = 0.255584$ $k2 = 0.256819$
 $k3 = 0.256825$ $k4 = 0.258067$ $y_{\text{точно}} = 22.9544$ истинска грешка = 1.25464×10^{-9}

$i = 63$ $x_i = 2.63$ $y_i = 23.2113$ $f_i = 25.8067$ $k1 = 0.258067$ $k2 = 0.259314$
 $k3 = 0.259321$ $k4 = 0.260575$ $y_{\text{точно}} = 23.2113$ истинска грешка = 1.2878×10^{-9}

$i = 64$ $x_i = 2.64$ $y_i = 23.4706$ $f_i = 26.0575$ $k1 = 0.260575$ $k2 = 0.261835$
 $k3 = 0.261841$ $k4 = 0.263108$ $y_{\text{точно}} = 23.4706$ истинска грешка = 1.32149×10^{-9}

$i = 65$ $x_i = 2.65$ $y_i = 23.7324$ $f_i = 26.3108$ $k1 = 0.263108$ $k2 = 0.264381$
 $k3 = 0.264388$ $k4 = 0.265667$ $y_{\text{точно}} = 23.7324$ истинска грешка = 1.35574×10^{-9}

$i = 66$ $x_i = 2.66$ $y_i = 23.9968$ $f_i = 26.5667$ $k1 = 0.265667$ $k2 = 0.266953$
 $k3 = 0.26696$ $k4 = 0.268253$ $y_{\text{точно}} = 23.9968$ истинска грешка = 1.39055×10^{-9}

$i = 67$ $x_i = 2.67$ $y_i = 24.2638$ $f_i = 26.8253$ $k1 = 0.268253$ $k2 = 0.269552$
 $k3 = 0.269558$ $k4 = 0.270864$ $y_{\text{точно}} = 24.2638$ истинска грешка = 1.42592×10^{-9}

$i = 68$ $x_i = 2.68$ $y_i = 24.5333$ $f_i = 27.0864$ $k1 = 0.270864$ $k2 = 0.272176$
 $k3 = 0.272183$ $k4 = 0.273502$ $y_{\text{точно}} = 24.5333$ истинска грешка = 1.46186×10^{-9}

$i = 69$ $x_i = 2.69$ $y_i = 24.8055$ $f_i = 27.3502$ $k1 = 0.273502$ $k2 = 0.274828$
 $k3 = 0.274834$ $k4 = 0.276167y_{\text{точно}} = 24.8055$ истинска грешка = 1.49839×10^{-9}

$i = 70$ $x_i = 2.7$ $y_i = 25.0803$ $f_i = 27.6167$ $k1 = 0.276167$ $k2 = 0.277506$
 $k3 = 0.277513$ $k4 = 0.278858y_{\text{точно}} = 25.0803$ истинска грешка = 1.5355×10^{-9}

$i = 71$ $x_i = 2.71$ $y_i = 25.3578$ $f_i = 27.8858$ $k1 = 0.278858$ $k2 = 0.280211$
 $k3 = 0.280218$ $k4 = 0.281578y_{\text{точно}} = 25.3578$ истинска грешка = 1.57322×10^{-9}

$i = 72$ $x_i = 2.72$ $y_i = 25.6381$ $f_i = 28.1578$ $k1 = 0.281578$ $k2 = 0.282944$
 $k3 = 0.282951$ $k4 = 0.284324y_{\text{точно}} = 25.6381$ истинска грешка = 1.61153×10^{-9}

$i = 73$ $x_i = 2.73$ $y_i = 25.921$ $f_i = 28.4324$ $k1 = 0.284324$ $k2 = 0.285705$
 $k3 = 0.285712$ $k4 = 0.287099y_{\text{точно}} = 25.921$ истинска грешка = 1.65046×10^{-9}

$i = 74$ $x_i = 2.74$ $y_i = 26.2067$ $f_i = 28.7099$ $k1 = 0.287099$ $k2 = 0.288493$
 $k3 = 0.2885$ $k4 = 0.289902y_{\text{точно}} = 26.2067$ истинска грешка = 1.69002×10^{-9}

$i = 75$ $x_i = 2.75$ $y_i = 26.4952$ $f_i = 28.9902$ $k1 = 0.289902$ $k2 = 0.29131$
 $k3 = 0.291317$ $k4 = 0.292733y_{\text{точно}} = 26.4952$ истинска грешка = 1.73021×10^{-9}

$i = 76$ $x_i = 2.76$ $y_i = 26.7865$ $f_i = 29.2733$ $k1 = 0.292733$ $k2 = 0.294155$
 $k3 = 0.294163$ $k4 = 0.295593y_{\text{точно}} = 26.7865$ истинска грешка = 1.77104×10^{-9}

$i = 77$ $x_i = 2.77$ $y_i = 27.0807$ $f_i = 29.5593$ $k1 = 0.295593$ $k2 = 0.29703$
 $k3 = 0.297037$ $k4 = 0.298481y_{\text{точно}} = 27.0807$ истинска грешка = 1.81251×10^{-9}

$i = 78$ $x_i = 2.78$ $y_i = 27.3777$ $f_i = 29.8481$ $k1 = 0.298481$ $k2 = 0.299933$
 $k3 = 0.29994$ $k4 = 0.3014y_{\text{точно}} = 27.3777$ истинска грешка = 1.85465×10^{-9}

$i = 79$ $x_i = 2.79$ $y_i = 27.6777$ $f_i = 30.14$ $k1 = 0.3014$ $k2 = 0.302866$
 $k3 = 0.302873$ $k4 = 0.304347y_{\text{точно}} = 27.6777$ истинска грешка = 1.89745×10^{-9}

$i = 80$ $x_i = 2.8$ $y_i = 27.9805$ $f_i = 30.4347$ $k1 = 0.304347$ $k2 = 0.305829$
 $k3 = 0.305836$ $k4 = 0.307325y_{\text{точно}} = 27.9805$ истинска грешка = 1.94093×10^{-9}

$i = 81$ $x_i = 2.81$ $y_i = 28.2864$ $f_i = 30.7325$ $k1 = 0.307325$ $k2 = 0.308821$
 $k3 = 0.308829$ $k4 = 0.310333y_{\text{точно}} = 28.2864$ истинска грешка = 1.98508×10^{-9}

$i = 82$ $x_i = 2.82$ $y_i = 28.5952$ $f_i = 31.0333$ $k1 = 0.310333$ $k2 = 0.311844$
 $k3 = 0.311852$ $k4 = 0.313371y_{\text{точно}} = 28.5952$ истинска грешка = 2.02995×10^{-9}

$i = 83$ $x_i = 2.83$ $y_i = 28.907$ $f_i = 31.3371$ $k1 = 0.313371$ $k2 = 0.314898$
 $k3 = 0.314905$ $k4 = 0.31644y_{\text{точно}} = 28.907$ истинска грешка = 2.07551×10^{-9}

$i = 84$ $x_i = 2.84$ $y_i = 29.2219$ $f_i = 31.644$ $k1 = 0.31644$ $k2 = 0.317982$
 $k3 = 0.31799$ $k4 = 0.31954y_{\text{точно}} = 29.2219$ истинска грешка = 2.12178×10^{-9}

$i = 85$ $x_i = 2.85$ $y_i = 29.5399$ $f_i = 31.954$ $k1 = 0.31954$ $k2 = 0.321098$
 $k3 = 0.321106$ $k4 = 0.322672y_{\text{точно}} = 29.5399$ истинска грешка = 2.16878×10^{-9}

$i = 86$ $x_i = 2.86$ $y_i = 29.861$ $f_i = 32.2672$ $k1 = 0.322672$ $k2 = 0.324245$
 $k3 = 0.324253$ $k4 = 0.325835y_{\text{точно}} = 29.861$ истинска грешка = 2.21651×10^{-9}

$i = 87$ $x_i = 2.87$ $y_i = 30.1853$ $f_i = 32.5835$ $k1 = 0.325835$ $k2 = 0.327425$
 $k3 = 0.327433$ $k4 = 0.32903y_{\text{точно}} = 30.1853$ истинска грешка = 2.26499×10^{-9}

$i = 88$ $x_i = 2.88$ $y_i = 30.5127$ $f_i = 32.903$ $k1 = 0.32903$ $k2 = 0.330636$
 $k3 = 0.330644$ $k4 = 0.332258y_{\text{точно}} = 30.5127$ истинска грешка = 2.31421×10^{-9}

$i = 89$ $x_i = 2.89$ $y_i = 30.8434$ $f_i = 33.2258$ $k1 = 0.332258$ $k2 = 0.33388$
 $k3 = 0.333888$ $k4 = 0.335518y_{\text{точно}} = 30.8434$ истинска грешка = 2.3642×10^{-9}

$i = 90$ $x_i = 2.9$ $y_i = 31.1772$ $f_i = 33.5518$ $k1 = 0.335518$ $k2 = 0.337157$
 $k3 = 0.337165$ $k4 = 0.338812y_{\text{точно}} = 31.1772$ истинска грешка = 2.41496×10^{-9}

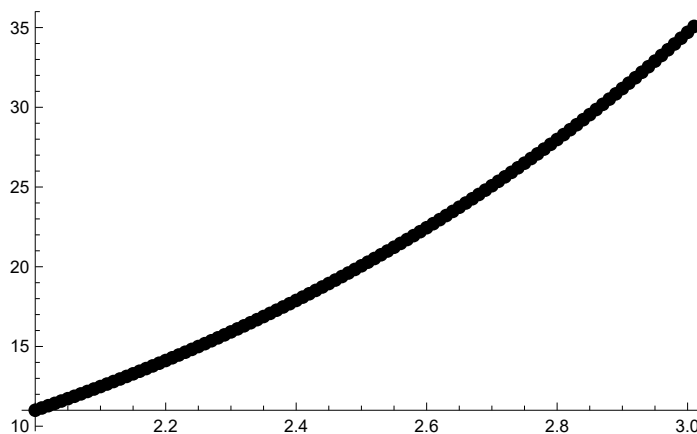
$i = 91$ $x_i = 2.91$ $y_i = 31.5144$ $f_i = 33.8812$ $k1 = 0.338812$ $k2 = 0.340467$
 $k3 = 0.340475$ $k4 = 0.342138y_{\text{точно}} = 31.5144$ истинска грешка = 2.46651×10^{-9}


```

i = 92 xi = 2.92 yi = 31.8549 fi = 34.2138 k1 = 0.342138 k2 = 0.34381
k3= 0.343819 k4= 0.345499 yточно = 31.8549 истинска грешка = 2.51886×10-9
i = 93 xi = 2.93 yi = 32.1987 fi = 34.5499 k1 = 0.345499 k2 = 0.347188
k3= 0.347196 k4= 0.348893 yточно = 32.1987 истинска грешка = 2.57202×10-9
i = 94 xi = 2.94 yi = 32.5459 fi = 34.8893 k1 = 0.348893 k2 = 0.350599
k3= 0.350608 k4= 0.352322 yточно = 32.5459 истинска грешка = 2.62597×10-9
i = 95 xi = 2.95 yi = 32.8965 fi = 35.2322 k1 = 0.352322 k2 = 0.354045
k3= 0.354054 k4= 0.355785 yточно = 32.8965 истинска грешка = 2.68077×10-9
i = 96 xi = 2.96 yi = 33.2505 fi = 35.5785 k1 = 0.355785 k2 = 0.357526
k3= 0.357535 k4= 0.359284 yточно = 33.2505 истинска грешка = 2.73641×10-9
i = 97 xi = 2.97 yi = 33.6081 fi = 35.9284 k1 = 0.359284 k2 = 0.361042
k3= 0.361051 k4= 0.362818 yточно = 33.6081 истинска грешка = 2.7929×10-9
i = 98 xi = 2.98 yi = 33.9691 fi = 36.2818 k1 = 0.362818 k2 = 0.364594
k3= 0.364603 k4= 0.366387 yточно = 33.9691 истинска грешка = 2.85024×10-9
i = 99 xi = 2.99 yi = 34.3337 fi = 36.6387 k1 = 0.366387 k2 = 0.368181
k3= 0.36819 k4= 0.369993 yточно = 34.3337 истинска грешка = 2.90846×10-9
i = 100 xi = 3. yi = 34.7019 fi = 36.9993 k1 = 0.369993 k2 = 0.371805
k3= 0.371814 k4= 0.373635 yточно = 34.7019 истинска грешка = 2.96757×10-9

```

Out[561]=



РК54 - Формула с четири междинни точки - при зададена точност 10^{-7}

In[562]:=

Clear [n]

$$\text{Reduce}\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)^4 \leq 10^{-7}, n\right]$$

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[563]=

$$n \leq -56.2341 \mid \mid n \geq 56.2341$$

In[564]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 2.; b = 3;
x = a;
y = 11.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 4

(*точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-4e^2 + 15e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}$ 

(*съставяме мрежата*)
n = 57;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^4]
(*намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k1];
  k3 = h * f[x +  $\frac{1}{2}$  h, y +  $\frac{1}{2}$  k2];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ", k4,
    " yточно = ", yt[x], " истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → {Black, PointSize[0.02]}];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с n = 57 и стъпка h = 0.0175439

Теоретичната локална грешка е 1.66198×10^{-9}

Теоретичната глобална грешка е 9.47328×10^{-8}

i = 0 x_i = 2. y_i = 11. f_i = 14.1906 k1 = 0.248957 k2 = 0.250981
 k3 = 0.250999 k4 = 0.253041 y_{точно} = 11. истинска грешка = 1.77636×10^{-15}

i = 1 x_i = 2.01754 y_i = 11.251 f_i = 14.4234 k1 = 0.253041 k2 = 0.255102
 k3 = 0.25512 k4 = 0.2572 y_{точно} = 11.251 истинска грешка = 1.82185×10^{-10}

$i = 2$ $x_i = 2.03509$ $y_i = 11.5061$ $f_i = 14.6604$ $k_1 = 0.257199$ $k_2 = 0.259297$
 $k_3 = 0.259316$ $k_4 = 0.261433 y_{\text{точно}} = 11.5061$ истинска грешка = 3.70839×10^{-10}

$i = 3$ $x_i = 2.05263$ $y_i = 11.7654$ $f_i = 14.9017$ $k_1 = 0.261433$ $k_2 = 0.263569$
 $k_3 = 0.263587$ $k_4 = 0.265743 y_{\text{точно}} = 11.7654$ истинска грешка = 5.66153×10^{-10}

$i = 4$ $x_i = 2.07018$ $y_i = 12.029$ $f_i = 15.1473$ $k_1 = 0.265743$ $k_2 = 0.267917$
 $k_3 = 0.267936$ $k_4 = 0.270131 y_{\text{точно}} = 12.029$ истинска грешка = 7.68306×10^{-10}

$i = 5$ $x_i = 2.08772$ $y_i = 12.2969$ $f_i = 15.3974$ $k_1 = 0.27013$ $k_2 = 0.272344$
 $k_3 = 0.272364$ $k_4 = 0.274598 y_{\text{точно}} = 12.2969$ истинска грешка = 9.77476×10^{-10}

$i = 6$ $x_i = 2.10526$ $y_i = 12.5693$ $f_i = 15.6521$ $k_1 = 0.274598$ $k_2 = 0.276852$
 $k_3 = 0.276871$ $k_4 = 0.279146 y_{\text{точно}} = 12.5693$ истинска грешка = 1.19385×10^{-9}

$i = 7$ $x_i = 2.12281$ $y_i = 12.8462$ $f_i = 15.9113$ $k_1 = 0.279146$ $k_2 = 0.28144$
 $k_3 = 0.28146$ $k_4 = 0.283776 y_{\text{точно}} = 12.8462$ истинска грешка = 1.41764×10^{-9}

$i = 8$ $x_i = 2.14035$ $y_i = 13.1276$ $f_i = 16.1752$ $k_1 = 0.283776$ $k_2 = 0.286112$
 $k_3 = 0.286132$ $k_4 = 0.28849 y_{\text{точно}} = 13.1276$ истинска грешка = 1.64902×10^{-9}

$i = 9$ $x_i = 2.15789$ $y_i = 13.4137$ $f_i = 16.4439$ $k_1 = 0.288489$ $k_2 = 0.290868$
 $k_3 = 0.290889$ $k_4 = 0.293288 y_{\text{точно}} = 13.4137$ истинска грешка = 1.8882×10^{-9}

$i = 10$ $x_i = 2.17544$ $y_i = 13.7046$ $f_i = 16.7174$ $k_1 = 0.293288$ $k_2 = 0.295709$
 $k_3 = 0.295731$ $k_4 = 0.298174 y_{\text{точно}} = 13.7046$ истинска грешка = 2.1354×10^{-9}

$i = 11$ $x_i = 2.19298$ $y_i = 14.0003$ $f_i = 16.9959$ $k_1 = 0.298174$ $k_2 = 0.300639$
 $k_3 = 0.30066$ $k_4 = 0.303147 y_{\text{точно}} = 14.0003$ истинска грешка = 2.39081×10^{-9}

$i = 12$ $x_i = 2.21053$ $y_i = 14.301$ $f_i = 17.2794$ $k_1 = 0.303147$ $k_2 = 0.305657$
 $k_3 = 0.305679$ $k_4 = 0.308211 y_{\text{точно}} = 14.301$ истинска грешка = 2.65466×10^{-9}

$i = 13$ $x_i = 2.22807$ $y_i = 14.6067$ $f_i = 17.568$ $k_1 = 0.308211$ $k_2 = 0.310765$
 $k_3 = 0.310788$ $k_4 = 0.313365 y_{\text{точно}} = 14.6067$ истинска грешка = 2.92717×10^{-9}

$i = 14$ $x_i = 2.24561$ $y_i = 14.9174$ $f_i = 17.8618$ $k_1 = 0.313365$ $k_2 = 0.315966$
 $k_3 = 0.315989$ $k_4 = 0.318613 y_{\text{точно}} = 14.9174$ истинска грешка = 3.20856×10^{-9}

$i = 15$ $x_i = 2.26316$ $y_i = 15.2334$ $f_i = 18.1609$ $k_1 = 0.318613$ $k_2 = 0.32126$
 $k_3 = 0.321283$ $k_4 = 0.323955 y_{\text{точно}} = 15.2334$ истинска грешка = 3.49907×10^{-9}

$i = 16$ $x_i = 2.2807$ $y_i = 15.5547$ $f_i = 18.4654$ $k_1 = 0.323955$ $k_2 = 0.32665$
 $k_3 = 0.326673$ $k_4 = 0.329393 y_{\text{точно}} = 15.5547$ истинска грешка = 3.79893×10^{-9}

$i = 17$ $x_i = 2.29825$ $y_i = 15.8814$ $f_i = 18.7754$ $k_1 = 0.329393$ $k_2 = 0.332136$
 $k_3 = 0.33216$ $k_4 = 0.334929 y_{\text{точно}} = 15.8814$ истинска грешка = 4.10838×10^{-9}

$i = 18$ $x_i = 2.31579$ $y_i = 16.2135$ $f_i = 19.0909$ $k_1 = 0.334929$ $k_2 = 0.337722$
 $k_3 = 0.337746$ $k_4 = 0.340565 y_{\text{точно}} = 16.2135$ истинска грешка = 4.42767×10^{-9}

$i = 19$ $x_i = 2.33333$ $y_i = 16.5513$ $f_i = 19.4122$ $k_1 = 0.340564$ $k_2 = 0.343408$
 $k_3 = 0.343433$ $k_4 = 0.346302 y_{\text{точно}} = 16.5513$ истинска грешка = 4.75705×10^{-9}

$i = 20$ $x_i = 2.35088$ $y_i = 16.8947$ $f_i = 19.7392$ $k_1 = 0.346301$ $k_2 = 0.349196$
 $k_3 = 0.349221$ $k_4 = 0.352142 y_{\text{точно}} = 16.8947$ истинска грешка = 5.09679×10^{-9}

$i = 21$ $x_i = 2.36842$ $y_i = 17.2439$ $f_i = 20.0721$ $k_1 = 0.352142$ $k_2 = 0.355088$
 $k_3 = 0.355114$ $k_4 = 0.358087 y_{\text{точно}} = 17.2439$ истинска грешка = 5.44713×10^{-9}

$i = 22$ $x_i = 2.38596$ $y_i = 17.599$ $f_i = 20.411$ $k_1 = 0.358087$ $k_2 = 0.361086$
 $k_3 = 0.361113$ $k_4 = 0.364139 y_{\text{точно}} = 17.599$ истинска грешка = 5.80837×10^{-9}

$i = 23$ $x_i = 2.40351$ $y_i = 17.9601$ $f_i = 20.7559$ $k_1 = 0.364139$ $k_2 = 0.367192$
 $k_3 = 0.367219$ $k_4 = 0.3703 y_{\text{точно}} = 17.9601$ истинска грешка = 6.18077×10^{-9}

$i = 24$ $x_i = 2.42105$ $y_i = 18.3273$ $f_i = 21.1071$ $k_1 = 0.3703$ $k_2 = 0.373408$
 $k_3 = 0.373435$ $k_4 = 0.376571 y_{\text{точно}} = 18.3273$ истинска грешка = 6.56462×10^{-9}

$i = 25$ $x_i = 2.4386$ $y_i = 18.7007$ $f_i = 21.4645$ $k_1 = 0.376571$ $k_2 = 0.379735$
 $k_3 = 0.379763$ $k_4 = 0.382955 y_{\text{точно}} = 18.7007$ истинска грешка = 6.96019×10^{-9}

$i = 26$ $x_i = 2.45614$ $y_i = 19.0805$ $f_i = 21.8284$ $k_1 = 0.382955$ $k_2 = 0.386176$
 $k_3 = 0.386204$ $k_4 = 0.389454 y_{\text{точно}} = 19.0805$ истинска грешка = 7.36781×10^{-9}

$i = 27$ $x_i = 2.47368$ $y_i = 19.4667$ $f_i = 22.1988$ $k_1 = 0.389453$ $k_2 = 0.392732$
 $k_3 = 0.392761$ $k_4 = 0.396069 y_{\text{точно}} = 19.4667$ истинска грешка = 7.78775×10^{-9}

$i = 28$ $x_i = 2.49123$ $y_i = 19.8594$ $f_i = 22.5759$ $k_1 = 0.396068$ $k_2 = 0.399406$
 $k_3 = 0.399435$ $k_4 = 0.402802 y_{\text{точно}} = 19.8594$ истинска грешка = 8.22034×10^{-9}

$i = 29$ $x_i = 2.50877$ $y_i = 20.2589$ $f_i = 22.9597$ $k_1 = 0.402802$ $k_2 = 0.406199$
 $k_3 = 0.406229$ $k_4 = 0.409657 y_{\text{точно}} = 20.2589$ истинска грешка = 8.66589×10^{-9}

$i = 30$ $x_i = 2.52632$ $y_i = 20.6651$ $f_i = 23.3504$ $k_1 = 0.409657$ $k_2 = 0.413115$
 $k_3 = 0.413145$ $k_4 = 0.416634 y_{\text{точно}} = 20.6651$ истинска грешка = 9.12472×10^{-9}

$i = 31$ $x_i = 2.54386$ $y_i = 21.0782$ $f_i = 23.7481$ $k_1 = 0.416634$ $k_2 = 0.420154$
 $k_3 = 0.420185$ $k_4 = 0.423736 y_{\text{точно}} = 21.0782$ истинска грешка = 9.59716×10^{-9}

$i = 32$ $x_i = 2.5614$ $y_i = 21.4984$ $f_i = 24.153$ $k_1 = 0.423736$ $k_2 = 0.427319$
 $k_3 = 0.427351$ $k_4 = 0.430966 y_{\text{точно}} = 21.4984$ истинска грешка = 1.00836×10^{-8}

$i = 33$ $x_i = 2.57895$ $y_i = 21.9257$ $f_i = 24.565$ $k_1 = 0.430966$ $k_2 = 0.434613$
 $k_3 = 0.434645$ $k_4 = 0.438325 y_{\text{точно}} = 21.9257$ истинска грешка = 1.05843×10^{-8}

$i = 34$ $x_i = 2.59649$ $y_i = 22.3604$ $f_i = 24.9845$ $k_1 = 0.438325$ $k_2 = 0.442037$
 $k_3 = 0.44207$ $k_4 = 0.445816 y_{\text{точно}} = 22.3604$ истинска грешка = 1.10996×10^{-8}

$i = 35$ $x_i = 2.61404$ $y_i = 22.8024$ $f_i = 25.4115$ $k_1 = 0.445815$ $k_2 =$
 0.449594 $k_3 = 0.449627$ $k_4 = 0.45344 y_{\text{точно}} = 22.8024$ истинска грешка = 1.163×10^{-8}

$i = 36$ $x_i = 2.63158$ $y_i = 23.252$ $f_i = 25.8461$ $k_1 = 0.45344$ $k_2 = 0.457287$
 $k_3 = 0.45732$ $k_4 = 0.461202 y_{\text{точно}} = 23.252$ истинска грешка = 1.21757×10^{-8}

$i = 37$ $x_i = 2.64912$ $y_i = 23.7093$ $f_i = 26.2885$ $k_1 = 0.461201$ $k_2 = 0.465117$
 $k_3 = 0.465151$ $k_4 = 0.469102 y_{\text{точно}} = 23.7093$ истинска грешка = 1.27372×10^{-8}

$i = 38$ $x_i = 2.66667$ $y_i = 24.1745$ $f_i = 26.7388$ $k_1 = 0.469102$ $k_2 = 0.473087$
 $k_3 = 0.473122$ $k_4 = 0.477143 y_{\text{точно}} = 24.1745$ истинска грешка = 1.33149×10^{-8}

$i = 39$ $x_i = 2.68421$ $y_i = 24.6476$ $f_i = 27.1971$ $k_1 = 0.477143$ $k_2 = 0.481199$
 $k_3 = 0.481235$ $k_4 = 0.485328 y_{\text{точно}} = 24.6476$ истинска грешка = 1.39091×10^{-8}

$i = 40$ $x_i = 2.70175$ $y_i = 25.1288$ $f_i = 27.6637$ $k_1 = 0.485328$ $k_2 = 0.489457$
 $k_3 = 0.489493$ $k_4 = 0.49366 y_{\text{точно}} = 25.1288$ истинска грешка = 1.45203×10^{-8}

$i = 41$ $x_i = 2.7193$ $y_i = 25.6183$ $f_i = 28.1386$ $k_1 = 0.493659$ $k_2 = 0.497862$
 $k_3 = 0.497899$ $k_4 = 0.50214 y_{\text{точно}} = 25.6183$ истинска грешка = 1.51488×10^{-8}

$i = 42$ $x_i = 2.73684$ $y_i = 26.1162$ $f_i = 28.622$ $k_1 = 0.50214$ $k_2 = 0.506418$
 $k_3 = 0.506455$ $k_4 = 0.510772 y_{\text{точно}} = 26.1162$ истинска грешка = 1.57951×10^{-8}

$i = 43$ $x_i = 2.75439$ $y_i = 26.6226$ $f_i = 29.114$ $k_1 = 0.510772$ $k_2 = 0.515126$
 $k_3 = 0.515164$ $k_4 = 0.519558 y_{\text{точно}} = 26.6226$ истинска грешка = 1.64597×10^{-8}

$i = 44$ $x_i = 2.77193$ $y_i = 27.1378$ $f_i = 29.6148$ $k_1 = 0.519558$ $k_2 = 0.52399$
 $k_3 = 0.524029$ $k_4 = 0.528501 y_{\text{точно}} = 27.1378$ истинска грешка = 1.71428×10^{-8}

$i = 45$ $x_i = 2.78947$ $y_i = 27.6618$ $f_i = 30.1245$ $k_1 = 0.5285$ $k_2 = 0.533012$
 $k_3 = 0.533051$ $k_4 = 0.537603 y_{\text{точно}} = 27.6618$ истинска грешка = 1.78452×10^{-8}

$i = 46$ $x_i = 2.80702$ $y_i = 28.1948$ $f_i = 30.6434$ $k_1 = 0.537603$ $k_2 = 0.542195$
 $k_3 = 0.542235$ $k_4 = 0.546868 y_{\text{точно}} = 28.1948$ истинска грешка = 1.85671×10^{-8}

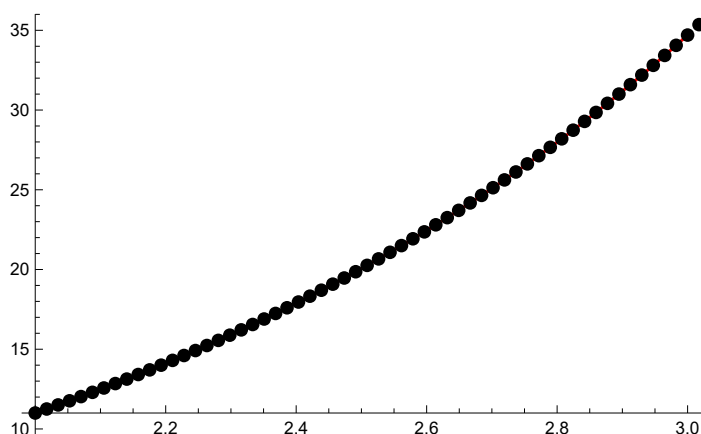
$i = 47$ $x_i = 2.82456$ $y_i = 28.7371$ $f_i = 31.1715$ $k_1 = 0.546868$ $k_2 = 0.551542$
 $k_3 = 0.551583$ $k_4 = 0.556299 y_{\text{точно}} = 28.7371$ истинска грешка = 1.9309×10^{-8}

```

i = 48 xi = 2.84211 yi = 29.2886 fi = 31.709 k1 = 0.556298 k2 = 0.561056
k3 = 0.561097 k4 = 0.565897 yточно = 29.2886 истинска грешка = 2.00715 × 10-8
i = 49 xi = 2.85965 yi = 29.8497 fi = 32.2561 k1 = 0.565897 k2 = 0.570739
k3 = 0.570782 k4 = 0.575667 yточно = 29.8497 истинска грешка = 2.0855 × 10-8
i = 50 xi = 2.87719 yi = 30.4205 fi = 32.813 k1 = 0.575667 k2 = 0.580595
k3 = 0.580639 k4 = 0.585611 yточно = 30.4205 истинска грешка = 2.166 × 10-8
i = 51 xi = 2.89474 yi = 31.0011 fi = 33.3798 k1 = 0.585611 k2 = 0.590627
k3 = 0.590671 k4 = 0.595733 yточно = 31.0011 истинска грешка = 2.24871 × 10-8
i = 52 xi = 2.91228 yi = 31.5918 fi = 33.9567 k1 = 0.595732 k2 = 0.600838
k3 = 0.600883 k4 = 0.606035 yточно = 31.5918 истинска грешка = 2.33368 × 10-8
i = 53 xi = 2.92982 yi = 32.1926 fi = 34.544 k1 = 0.606034 k2 = 0.611231
k3 = 0.611277 k4 = 0.61652 yточно = 32.1926 истинска грешка = 2.42095 × 10-8
i = 54 xi = 2.94737 yi = 32.8039 fi = 35.1416 k1 = 0.61652 k2 = 0.621809
k3 = 0.621856 k4 = 0.627193 yточно = 32.8039 истинска грешка = 2.5106 × 10-8
i = 55 xi = 2.96491 yi = 33.4257 fi = 35.75 k1 = 0.627192 k2 = 0.632576
k3 = 0.632623 k4 = 0.638055 yточно = 33.4257 истинска грешка = 2.60266 × 10-8
i = 56 xi = 2.98246 yi = 34.0583 fi = 36.3691 k1 = 0.638055 k2 = 0.643534
k3 = 0.643582 k4 = 0.649111 yточно = 34.0583 истинска грешка = 2.69721 × 10-8
i = 57 xi = 3. yi = 34.7019 fi = 36.9993 k1 = 0.649111 k2 = 0.654688
k3 = 0.654737 k4 = 0.660364 yточно = 34.7019 истинска грешка = 2.7943 × 10-8

```

Out[578]=



РК54 - Формула с четири междинни точки - при зададена точност 10^{-15} - САМО определяне на мрежата

In[579]:=

Clear [n]

$$\text{Reduce}\left[\left(\frac{b-a}{n}\right)^4 \leq 10^{-15}, n\right]$$

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[580]=

$$n \leq -5623.41 \mid \mid n \geq 5623.41$$

In[581]:=

```

(*въвеждаме условието на задачата*)
a = 2.; b = 3;
x = a;
y = 11.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 4

(*точно решение*)
yt[x_] :=  $\frac{-4e^2 + 15e^x - e^x \text{Log}[5] + e^2 \text{Log}[1 + x^2]}{e^2}$ 

(*съставяме мрежата*)
n = 5624;
h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]

```

Мрежата е с n = 5624 и стъпка h = 0.000177809

Теоретичната локална грешка е 1.77735×10^{-19}

Теоретичната глобална грешка е 9.99583×10^{-16}