

Уравнения с разделящи се променливи

Информатика, 2021/2022

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = f(x)g(y),$$

където f и g са дадени непрекъснати функции, се наричат уравнения с разделящи се променливи.

- Към уравнения с разделящи се променливи се свеждат и уравненията от вида

$$X(x) dx + Y(y) dy = 0,$$

а така също

$$X_1(x)Y_1(y) dx + X_2(x)Y_2(y) dy = 0.$$

Теорема 1 (за съществуване и единственост)

Нека $D : a < x < b, c < y < d$ и да разгледаме уравнението

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f \in C(a, b)$, $g \in C(c, d)$ и $g(y) \neq 0$ за всяко $y \in (c, d)$.
Тогава през всяка точка $(x_0, y_0) \in D$ минава единствено решение на даденото уравнение.

Забележка. С $C(a, b)$ ще означаваме множеството от всички непрекъснати функции в интервала (a, b) .

- ▶ Припомняме, че функцията $F(x)$ се нарича примитивна функция на функцията $f(x)$ в интервала (a, b) , ако $F(x)$ е диференцируема в (a, b) и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a, b)$.
- ▶ Ако $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала (a, b) , то всички примитивни функции на $f(x)$ в този интервал имат вида $F(x) + C$.
- ▶ По дефиниция $\int f(x) dx$ е множеството от всички примитивни функции на $f(x)$, т.е.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ където } F'(x) = f(x).$$

- ▶ Често за удобство с $\int f(x) dx$ ще означаваме една примитивна на $f(x)$ (при решаването на неопределения интеграл няма да добавяме константа C).

Теорема 2 (Формула за общото решение)

Нека е дадено уравнението с разделящи се променливи

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f \in C(a, b)$, $g \in C(c, d)$ и $g(y) \neq 0$ за всяко $y \in (c, d)$.
Тогава, ако $F(x)$ е примитивна на $f(x)$ в интервала (a, b) и $G(y)$ е примитивна на $\frac{1}{g(y)}$ в интервала (c, d) , то общото решение на уравнението е

$$G(y) = F(x) + C,$$

т.е.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

Задача 1

Да се решат уравненията:

$$1) y' = -\frac{1}{x^2};$$

$$2) xy \, dx + (x + 1) \, dy = 0;$$

$$3) (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = -1;$$

$$4) x^2 y' - \cos 2y = 1; \quad y(x) \rightarrow \frac{9\pi}{4} \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Решение.

1) Тъй като дясната страна е функция само на x , можем да решим уравнението чрез непосредствено интегриране. Имаме

$$y = \int \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{1}{x} + C,$$

където $C \in \mathbb{R}$ е произволна константа.

2) Имаме

$$(x + 1) dy = -xy dx.$$

Разделяме двете страни с израза $(x + 1)y \neq 0$ и получаваме

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x + 1} dx.$$

Интегрираме двете страни на уравнението

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(-\frac{x}{x + 1} \right) dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

откъдето

$$\ln |y| = -x + \ln |x + 1| + C_1,$$

и след антилогаритмуване

$$|y| = e^{-x} |x + 1| e^{C_1}.$$

Означаваме $C = \varepsilon e^{C_1}$, където $\varepsilon = \pm 1$. Получаваме общото решение

$$y = Ce^{-x}(x + 1).$$

Остана да проверим дали $x = -1$ и $y = 0$ са решения на изходното уравнение. Първо записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x+1}{xy}.$$

От $x = -1$ имаме $\frac{dx}{dy} = 0$ и след заместване се вижда, че горното равенство е изпълнено за всяко y . Следователно $x = -1$ е решение на уравнението.

Сега записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x+1}.$$

Поставяйки $y = 0$ в него, виждаме, че се получава твърдение и следователно $y = 0$ също е решение.

3) Първо ще намерим общото решение. В уравнението заместваме y' с $\frac{dy}{dx}$ и получаваме

$$(x^2 - 1) dy = -2xy^2 dx,$$

откъдето, при $y^2(x^2 - 1) \neq 0$, следва

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{x^2 - 1} dx.$$

Интегрираме двете страни и получаваме

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Следователно

$$\frac{1}{y} = \ln |x^2 - 1| + C_1,$$

$$\frac{1}{y} = \ln (e^{C_1} |x^2 - 1|).$$

Полагаме $\varepsilon e^{C_1} = C$, $C \neq 0$, и получаваме общото решение

$$y = \frac{1}{\ln C(x^2 - 1)}.$$

Сега ще намерим частното решение, за което $y(0) = -1$. В общото решение заместваем $x = 0$, $y = -1$ и намираме $C = -1/e$. Тогава търсеното частно решение е

$$y = \frac{1}{\ln\left(-\frac{1}{e}(x^2 - 1)\right)} = \frac{1}{\ln(1 - x^2) - 1}.$$

4) Отг. $\operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + 1$.

► Уравнения от вида $y' = f(ax + by + c)$, където f е дадена непрекъснатата функция, можем да сведем до уравнения с разделящи се променливи като въведем нова неизвестна функция z на променливата x по следния начин:

$$z = ax + by + c.$$

Задача 2

Решете уравненията:

1) $y' - y = 2x - 3$;

2) $y' = \cos(y - x)$.

Решение. 1) Имаме

$$y' = 2x + y - 3.$$

Полагаме $z = 2x + y - 3$, $z = z(x)$. Оттук $y = z - 2x + 3$,
 $y' = z' - 2$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$z' - 2 = 2x + z - 2x + 3 - 3,$$

$$z' = z + 2,$$

което е уравнение с разделящи се променливи.

Последователно имаме

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad z+2 \neq 0,$$

$$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$\ln |z+2| = x + C_1,$$

$$|z+2| = e^x e^{C_1},$$

$$z+2 = Ce^x, \quad C \neq 0.$$

Като заместим $z = y + 2x - 3$ в последното равенство, получаваме, че общото решение на даденото уравнение е $y = 1 - 2x + Ce^x, C \neq 0$.

Накрая ще отбележим, че $z = -2$ очевидно е решение на уравнението $z' = z + 2$, откъдето следва, че $2x + y = 1$ е решение на даденото уравнение.

2) Отг. $\operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + C; \quad y - x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$