Метод на допирателните (Нютон) за решаване на уравнения

f(x) = 0

Задача3 Дадено е уравнението

$\frac{x^3+45\cos x-2}{(x-2)(x+3)}$+tg2x **= 0**.

а) Да се намери броят на всички корени и да се локализира този, който е най-близо до нулата.

б) Направете 2 итерации по метода на Нютон (допирателните).

в) Каква е точността на последно полученото в б) приближение?

г) Да се намери локализирания от подточка а) корен с точност 10^{-14}.

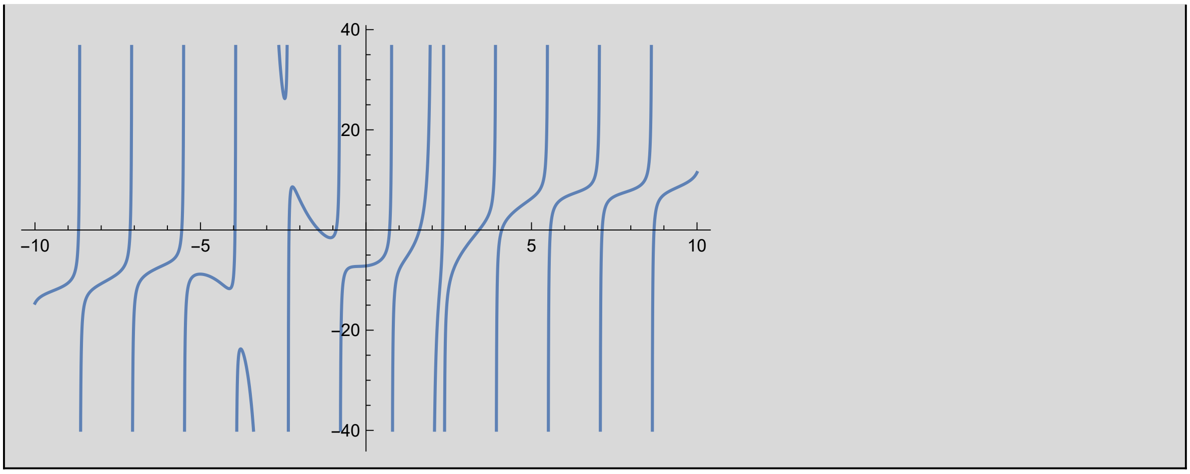
д) Да се направи сравнение между метода на Нютон за поставената задача и метода на хордите и метода на разполовяването.

In[∘]:=

$$f[x\_] := \frac{x^3 + 45\,\mathrm{Cos}[x] - 2}{(x-2)\,(x+3)} + \mathrm{Tan}[2\,x]$$

```
Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

Out[∘]=

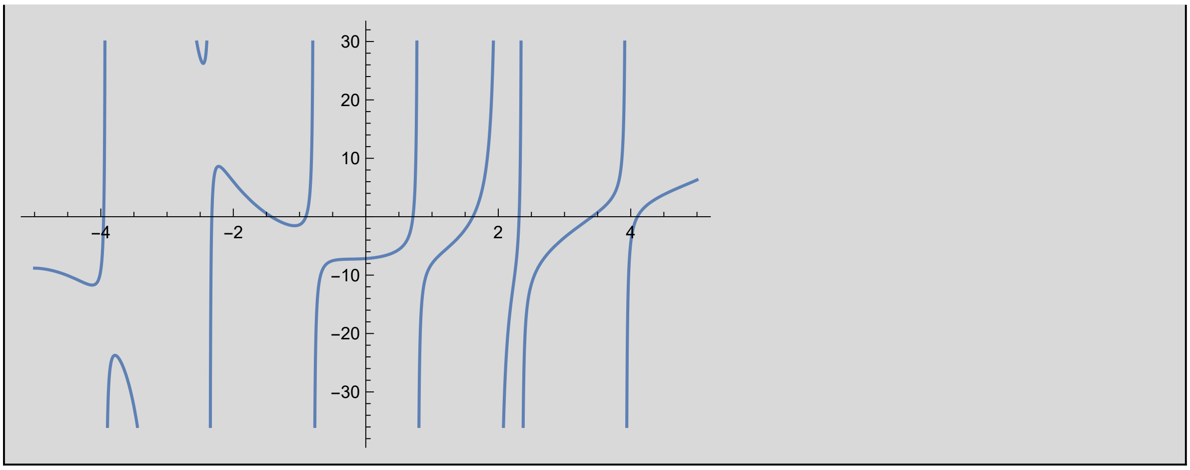


ДС: (x-2)(x+3) ≠ 0, cos 2x ≠ 0

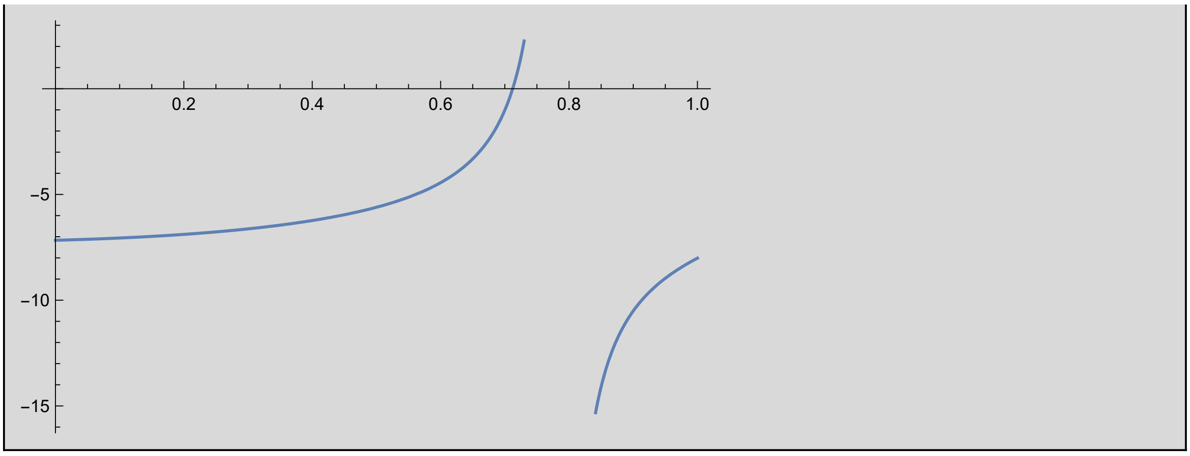
Извод: Функцията има безброй много корени.

I. Локализация на корен:
a = ?, b = ? , такива че $x^* \in [a, b]$

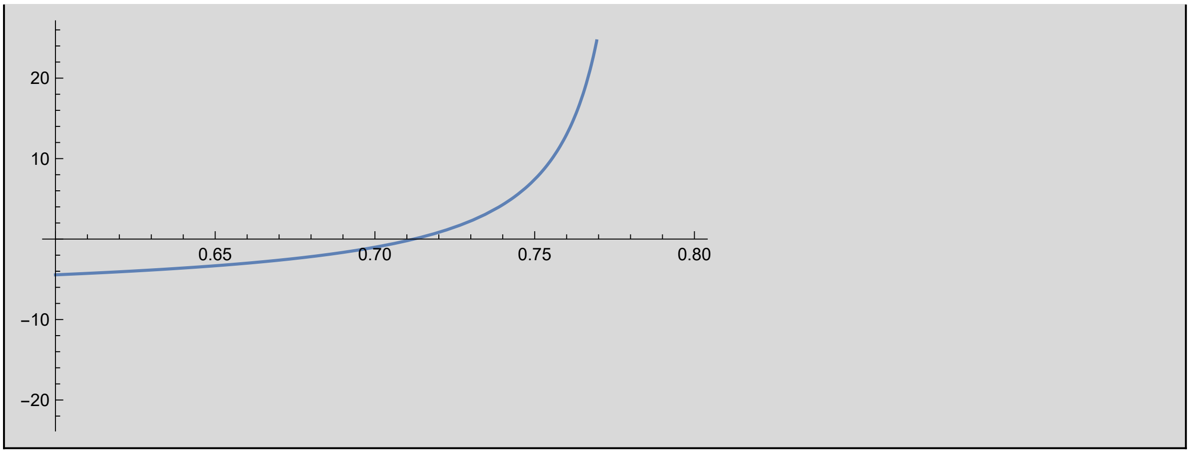
In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```
Out[ ]=



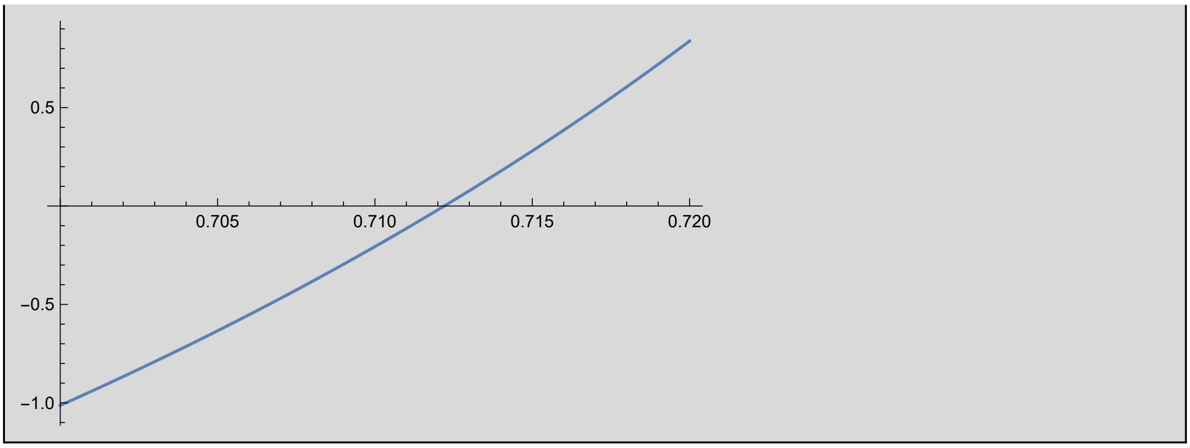
In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, 0, 1}]
```
Out[ ]=



In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, 0.6, 0.8}]
```
Out[ ]=

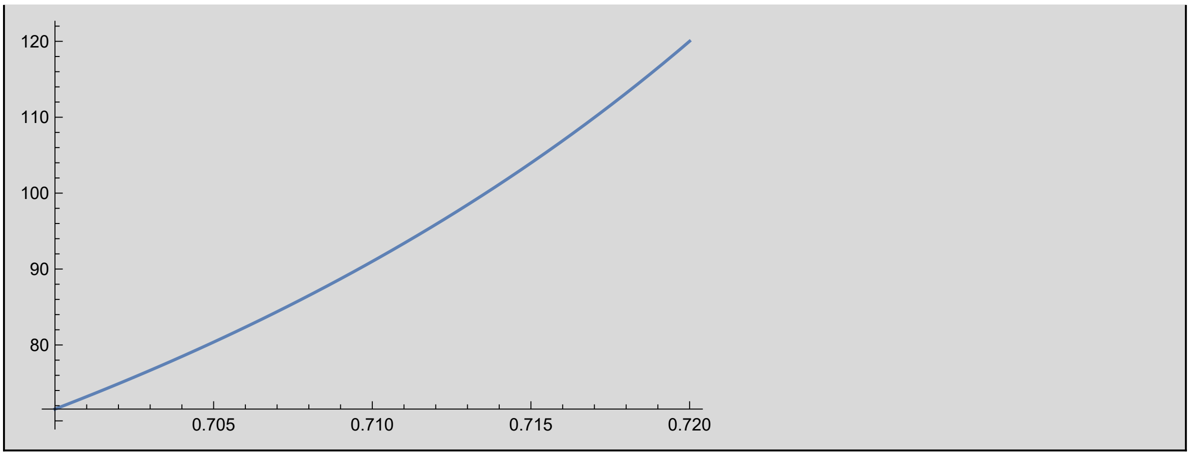


In[∘]:=
```
Plot[f[x], {x, 0.7, 0.72}]
```
Out[∘]=

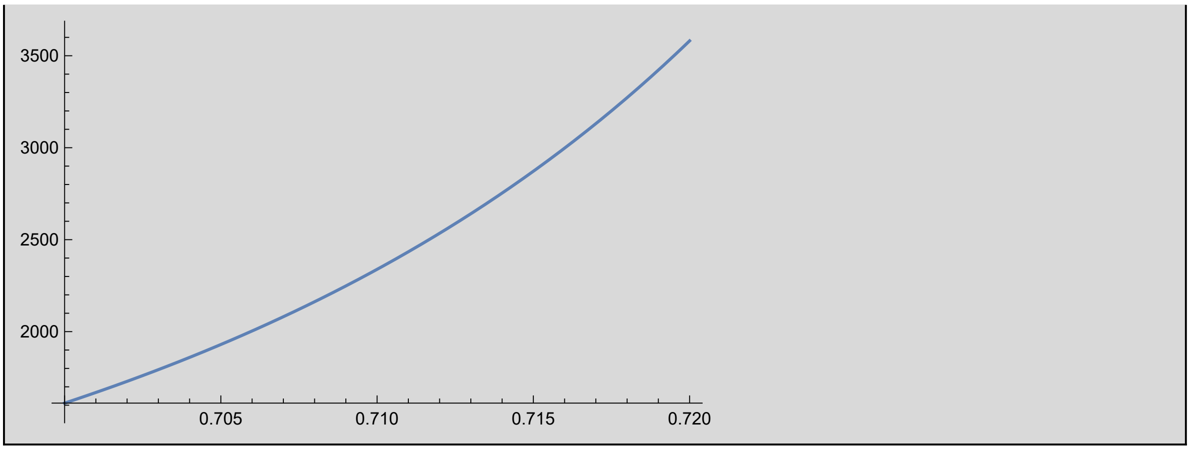


II. Проверка на условията за сходимост на метода:
f’(x), f’’(x) да са с постоянни знаци в интервала [a, b]

In[∘]:=
```
Plot[f'[x], {x, 0.7, 0.72}]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
Plot[f''[x], {x, 0.7, 0.72}]
```
Out[∘]=



III. Определяне на начално приближение:
x_0 = ?, такова че $f(x_0).f''(x) > 0$

f''(x) > 0 за избрания интервал => $f(x_0)$ >0

In[*]:=
```
f[0.7]
```
Out[*]=
```
-1.01311
```

In[*]:=
```
f[0.72]
```
Out[*]=
```
0.838447
```

In[*]:=
```
x0 = 0.72
```
Out[*]=
```
0.72
```

IV. Уточняване на корена:
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0,1,2,...$

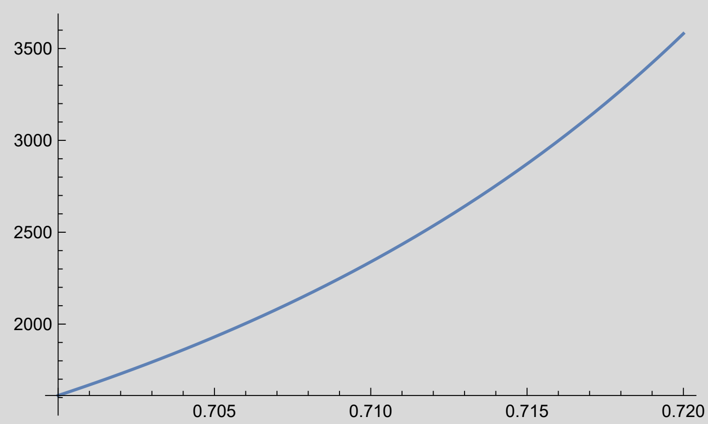
с оценка на грешката $\epsilon_n = |x^* - x_n|$:

$\epsilon_n \leqslant \frac{M_2}{2\, m_1} \;|\, x_n - x_{n-1}\,|^2,$

където $M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$, $m_1 = \min_{[a,b]}|f'(x)|$

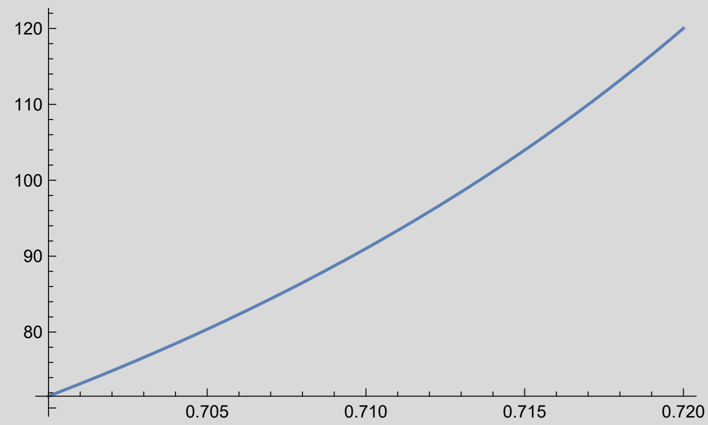
Определяне на постоянните величини
M_2 = ?, m_1 =?

In[*]:=
```
Plot[Abs[f''[x]], {x, 0.7, 0.72}]
```
Out[*]=



In[∘]:=
```
M2 = Abs[f''[0.72]]
```
Out[∘]=
```
3581.01
```

In[∘]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, 0.7, 0.72}]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
m1 = Abs[f'[0.7]]
```
Out[∘]=
```
71.5539
```

In[∘]:=

$$P = \frac{M2}{2\,m1}$$

Out[∘]=
```
25.0232
```

Извършване на итерациите

Съставяме програмен код на *Mathematica*, който извършва итерациите и печата необходимите ни величини:

```
In[•]:= f[x_] := (x^3 + 45 Cos[x] - 2)/((x - 2) (x + 3)) + Tan[2 x]
x0 = 0.72;
M2 = Abs[f''[0.72]];
m1 = Abs[f'[0.7]];
P = M2/(2 m1);
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " f(xn) = ", f[x0], " f'(xn) = ", f'[x0]]
For[n = 1, n ≤ 2, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/f'[x0];
 eps = P * Abs[x1 - x0]^2;
 x0 = x1;
 Print["n = ", n, " xn = ", x0,
  " f(xn) = ", f[x0], " f'(xn) = ", f'[x0], " εn = ", eps]
]
```

n = 0 x_n = 0.72 f(x_n) = 0.838447 f'(x_n) = 120.015

n = 1 x_n = 0.713014 f(x_n) = 0.0789681 f'(x_n) = 98.4969 ε_n = 0.00122131

n = 2 x_n = 0.712212 f(x_n) = 0.000839976 f'(x_n) = 96.4129 ε_n = 0.0000160843

повече итерации

```
In[•]:= f[x_] := (x^3 + 45 Cos[x] - 2)/((x - 2) (x + 3)) + Tan[2 x]
x0 = 0.72;
M2 = Abs[f''[0.72]];
m1 = Abs[f'[0.7]];
P = M2/(2 m1);
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " f(xn) = ", f[x0], " f'(xn) = ", f'[x0]]
For[n = 1, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/f'[x0];
 eps = P * Abs[x1 - x0]^2;
 x0 = x1;
 Print["n = ", n, " xn = ", x0,
  " f(xn) = ", f[x0], " f'(xn) = ", f'[x0], " εn = ", eps]
]
```

n = 0 x_n = 0.72 $f(x_n)$ = 0.838447 $f'(x_n)$ = 120.015

n = 1 x_n = 0.713014 $f(x_n)$ = 0.0789681 $f'(x_n)$ = 98.4969 ε_n = 0.00122131

n = 2 x_n = 0.712212 $f(x_n)$ = 0.000839976 $f'(x_n)$ = 96.4129 ε_n = 0.0000160843

n = 3 x_n = 0.712203 $f(x_n)$ = 9.70224×10^{-8} $f'(x_n)$ = 96.3907 ε_n = 1.89935×10^{-9}

n = 4 x_n = 0.712203 $f(x_n)$ = 8.88178×10^{-16} $f'(x_n)$ = 96.3907 ε_n = 2.53523×10^{-17}

n = 5 x_n = 0.712203 $f(x_n)$ = 8.88178×10^{-16} $f'(x_n)$ = 96.3907 ε_n = 0.

n = 6 x_n = 0.712203 $f(x_n)$ = 8.88178×10^{-16} $f'(x_n)$ = 96.3907 ε_n = 0.

n = 7 x_n = 0.712203 $f(x_n)$ = 8.88178×10^{-16} $f'(x_n)$ = 96.3907 ε_n = 0.

n = 8 x_n = 0.712203 $f(x_n)$ = 8.88178×10^{-16} $f'(x_n)$ = 96.3907 ε_n = 0.

n = 9 x_n = 0.712203 $f(x_n)$ = 8.88178×10^{-16} $f'(x_n)$ = 96.3907 ε_n = 0.

n = 10 x_n = 0.712203 $f(x_n)$ = 8.88178×10^{-16} $f'(x_n)$ = 96.3907 ε_n = 0.

In[∘]:=
```
Precision[eps]
```
Out[∘]=
```
MachinePrecision
```

In[∘]:=
```
% // N
```
Out[∘]=
```
15.9546
```

Тайни козове

Solve

FindRoot