

Задача 2.2 / стр. 24 Да се намери естествената параметризация на кривата на Безие $C(u)$, определена от контролния полигон:

а) $P_0(-2, 0)$, $P_1(0, 1)$, $P_2(3, 0)$, и чрез нея намерете $C(u_0 = 0.25)$.

б) начертайте контролния полигон с $C(u_0 = 0.25)$.

Решение:

а) Броят на контролните точки е *три*, а от тук следва, че степента на кривата е $n = 2$.

Търсим явния вид на уравнението на кривата, а чрез него *естествената параметризация*

$$C(u) = B_{2,0}(u) \cdot P_0 + B_{2,1}(u) \cdot P_1 + B_{2,2}(u) \cdot P_2 = ?$$

$$B_{2,0}(u) = \frac{2!}{0!(2)!} \cdot u^0 \cdot (1-u)^2 = (1-u)^2 \quad \Rightarrow \quad B_{2,0}(u_0) = B_{2,0}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

$$B_{2,1}(u) = \frac{2!}{1!(1)!} \cdot u^1 \cdot (1-u)^1 = 2u(1-u) \quad \Rightarrow \quad B_{2,1}(u_0) = B_{2,1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

$$B_{2,2}(u) = \frac{2!}{2!(0)!} \cdot u^2 \cdot (1-u)^0 = u^2 \quad \Rightarrow \quad B_{2,2}(u_0) = B_{2,2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

$$C(u) = B_{2,0}(u) \cdot P_0 + B_{2,1}(u) \cdot P_1 + B_{2,2}(u) \cdot P_2$$

$$C(u) = (1-u)^2 \cdot P_0 + 2u(1-u) \cdot P_1 + u^2 \cdot P_2 \Rightarrow$$

$$C(u) = (1-u)^2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2u(1-u) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u^2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

За естествената параметризация – от това уравнение търсим $C(u) = (x(u), y(u))$

$$x(u) = (1-u)^2 \cdot (-2) + 2u(1-u) \cdot 0 + 3u^2 = u^2 + 4u - 2$$

$$y(u) = (1-u)^2 \cdot (0) + 2u(1-u) \cdot 1 + u^2 \cdot 0 = 2u - 2u^2$$

$$C(u_0 = 0.25) = C\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{16} + 1 - 2, \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{16}\right) = \left(-\frac{15}{16}, \frac{3}{8}\right)$$

Отговор: $C(u) = (u^2 + 4u - 2, 2u - 2u^2)$, $C\left(\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{15}{16}, \frac{3}{8}\right)$

Същото трябва да се получи, ако използваме коефициентите

$$B_{2,0}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16}, B_{2,1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} \text{ и } B_{2,2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \Rightarrow$$

$$(*) \quad C\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(-\frac{15}{16}, \frac{3}{8}\right).$$

б) начертайте контролния полигон с $C(u_0 = 0.25) = \left(-\frac{15}{16}, \frac{3}{8}\right)$

