Метод на Гаус-Жордан за решаване на системи линейни алгебрични уравнения (СЛАУ)

въвеждаме разширената матрица

In[39]:= $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

Out[39]=

```
{{1, 2, -1, 3}, {2, -1, 3, 4}, {3, 1, -1, 10}}
```

Основни действия за работа с елементи на матрица

Постъпково прилагане на метода на Гаус-Жордан

броят на стъпките е равен на броя на стълбовете в основната матрица

In[46]:=

```
Length[A]
```

Out[46]=

3

първа стъпка - целта е в A да се получи първи стълб като на единичната матрица

първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{11} = 1$

In[48]:= $A[[1]] = \frac{A[[1]]}{A[[1, 1]]}$

Out[48]=

```
{1, 2, -1, 3}
```

втори етап - получаване на нули във всички останали елементи от стълба

променяме втория ред

In[49]:=

```
A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 1]] * A[[1]]
```

Out[49]=

```
{0, -5, 5, -2}
```

променяме третия ред

In[50]:=
```
A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 1]] * A[[1]]
```
Out[50]=

{0, -5, 2, 1}

In[51]:=
```
A // MatrixForm
```
Out[51]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

втора стъпка - целта е в A да се получи втори стълб като на единичната матрица

първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{22} = 1$

In[52]:=
$$A[[2]] = \frac{A[[2]]}{A[[2, 2]]}$$
Out[52]=

$$\left\{0, 1, -1, \frac{2}{5}\right\}$$

In[53]:=
```
A // MatrixForm
```
Out[53]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

втори етап - получаване на нули във всички останали елементи от стълба

променяме първия ред

In[54]:=
```
A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 2]] * A[[2]]
```
Out[54]=

$$\left\{1, 0, 1, \frac{11}{5}\right\}$$

In[55]:=
```
A // MatrixForm
```
Out[55]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

променяме третия ред

In[56]:=
```
A[[3]] = A[[3]] - A[[3, 2]] * A[[2]]
```
Out[56]=

{0, 0, -3, 3}

In[57]:= `A // MatrixForm`

Out[57]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

трета стъпка - целта е в A да се получи трети стълб като на единичната матрица - **САМОСТОЯТЕЛНО**

първи етап - получаваме единица на мястото на главния елемент $a_{33} = 1$

In[58]:= $A[[3]] = \dfrac{A[[3]]}{A[[3, 3]]}$

Out[58]=

$\{0, 0, 1, -1\}$

In[59]:= `A // MatrixForm`

Out[59]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

втори етап - получаване на нули във всички останали елементи от стълба

Променяме първи елемент

In[60]:= `A[[1]] = A[[1]] - A[[1, 3]] * A[[3]]`

Out[60]=

$\left\{1, 0, 0, \dfrac{16}{5}\right\}$

In[61]:= `A // MatrixForm`

Out[61]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Променяме втория ред

In[62]:= `A[[2]] = A[[2]] - A[[2, 3]] * A[[3]]`

Out[62]=

$\left\{0, 1, 0, -\dfrac{3}{5}\right\}$

In[63]:= `A // MatrixForm`

Out[63]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Съставяне на програмен код

Решаване на СЛАУ

```
In[66]:= A = {{1, 2, -1, 3}, {2, -1, 3, 4}, {3, 1, -1, 10}};(*въвеждаме разширената матрица*)
n = Length[A];
For[col = 1, col ≤ n, col++, (* цикъл по стъпките *)
 (*първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
 A[[col]] = A[[col]] / A[[col, col]];
 (*втори етап-получаване на нули във всички останали елементи от стълба*)
 For[row = 1, row ≤ n, row++,
  If[row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]]]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

За сравнение:

```
In[75]:= LinearSolve[{{1, 2, -1}, {2, -1, 3}, {3, 1, -1}}, {3, 4, 10}]
```

Out[75]=

$$\left\{\frac{16}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right\}$$

добавяме намиране на детерминанта

In[69]:=
```
A = (1  2  -1  3
     2  -1  3   4
     3  1  -1  10); (*въвеждаме разширената матрица*)
n = Length[A];
deter = 1;
For[col = 1, col ≤ n, col++, (* цикъл по стъпките *)
 deter = deter * A[[col, col]];
 (*първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
 A[[col]] = A[[col]] / A[[col, col]];
 (*втори етап-получаване на нули във всички останали елементи от стълба*)
 For[row = 1, row ≤ n, row++,
  If[row ≠ col, A[[row]] = A[[row]] - A[[row, col]] * A[[col]]]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
Print["Детерминантата на матрицата е ", deter]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Детерминантата на матрицата е 15

За сравнение:

In[74]:=
$$\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

Out[74]=
15

добавяме намиране на обратна матрица

In[76]:=
```
A = (1  2  -1  3  1 0 0
     2 -1   3  4  0 1 0
     3  1  -1 10  0 0 1); (*въвеждаме разширената матрица*)
n = Length[A];
deter = 1;
For[col = 1, col ≤ n, col++, (* цикъл по стъпките *)
 deter = deter * A〚col, col〛;
 (*първи етап-получаваме единица на мястото на главния елемент*)
 A〚col〛 = A〚col〛 / A〚col, col〛;
 (*втори етап-получаване на нули във всички останали елементи от стълба*)
 For[row = 1, row ≤ n, row++,
  If[row ≠ col, A〚row〛 = A〚row〛 - A〚row, col〛 * A〚col〛]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
Print["Детерминантата на матрицата е ", deter]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Детерминантата на матрицата е 15

За сравнение:

In[82]:=
```
Inverse[(1  2 -1
         2 -1  3
         3  1 -1)] // MatrixForm
```

Out[82]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$