Метод на Якоби (проста итерация) за решаване на СЛАУ

In[1]:=
```
A = (5     0.36  0.4
     0.3   7     0.22
     0.72  0.77  -6  ); b = {12, 15, 79};
LinearSolve[A, b] (*за сравнение на резултатите *)
```

Out[2]= {3.22521, 2.39661, -12.4721}

Конструиране на метода - получаване на матрицата *B* и вектора *c*

```
n = Length[A]
B = Table[0, {i, n}, {j, n}] (*инициализираме нулева матрица*)
```

Out[3]= 3

Out[4]= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

In[5]:=
```
B // MatrixForm
```

Out[5]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = -A[[i]]/A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0
 ] (*запълваме елементите на B*)
```

In[9]:=
```
B // MatrixForm
```

Out[9]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & -0.072 & -0.08 \\ -0.0428571 & 0 & -0.0314286 \\ 0.12 & 0.128333 & 0 \end{pmatrix}$$

Инициализиране вектора c и добавяме пресмятане на неговите координати към цикъла

In[10]:=
```
c = Table[0, n]
```

Out[10]=

{0, 0, 0}

In[11]:=
```
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = -A[[i]] / A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]] / A[[i, i]]
](*запълваме елементите на B и c*)
```

In[12]:=
```
c
```

Out[12]=

$$\left\{\frac{12}{5}, \frac{15}{7}, -\frac{79}{6}\right\}$$

In[13]:=
```
x = {0, 0, 0};
(*избора на начално приближение - не е задължително да е нулев вектор*)
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
 Print["k = ", k, " x = ", x];
 x = B.x + c
]
```

```
k = 0 x = {0, 0, 0}
k = 1 x = {2.4, 2.14286, -13.1667}
k = 2 x = {3.29905, 2.45381, -12.6037}
k = 3 x = {3.23162, 2.39758, -12.4559}
```

за сравнение:
{3.22521, 2.39661, -12.4721}

пускаме повече итерации

In[15]:=
```
x = {0, 0, 0};
(*избора на начално приближение - не е задължително да е нулев вектор*)
For[k = 0, k ≤ 10, k++,
 Print["k = ", k, " x = ", x];
 x = B.x + c
]
```

```
k = 0 x = {0, 0, 0}
k = 1 x = {2.4, 2.14286, -13.1667}
k = 2 x = {3.29905, 2.45381, -12.6037}
k = 3 x = {3.23162, 2.39758, -12.4559}
k = 4 x = {3.22384, 2.39583, -12.4712}
k = 5 x = {3.22519, 2.39664, -12.4723}
k = 6 x = {3.22523, 2.39662, -12.4721}
k = 7 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 8 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 9 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 10 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

за сравнение:

```
{3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

с друго начално приближение

```
In[17]:= x = {7, 3, 11};
(*избора на начално приближение - не е задължително да е нулев вектор*)
For[k = 0, k ≤ 10, k++,
 Print["k = ", k, " x = ", x];
 x = B.x + c
]
```

```
k = 0 x = {7, 3, 11}
k = 1 x = {1.304, 1.49714, -11.9417}
k = 2 x = {3.24754, 2.46228, -12.8181}
k = 3 x = {3.24816, 2.40653, -12.461}
k = 4 x = {3.22361, 2.39528, -12.468}
k = 5 x = {3.22498, 2.39656, -12.4724}
k = 6 x = {3.22524, 2.39663, -12.4721}
k = 7 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 8 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 9 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
k = 10 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

за сравнение:

```
{3.22521, 2.39661, -12.4721}
```

избор на начално приближение, което е далеч от решението

```
In[23]:= x = {10^7, -7^6, 345782344567788};
(*избора на начално приближение - не е задължително да е нулев вектор*)
For[k = 0, k ≤ 30, k++,
 Print["k = ", k, " x = ", x];
 x = B.x + c
]
```

k = 0 x = {10 000 000, -117 649, 345 782 344 567 788}

k = 1 x = $\{-2.76626\times10^{13}, -1.08674\times10^{13}, 1.18489\times10^{6}\}$

k = 2 x = $\{7.82456\times10^{11}, 1.18554\times10^{12}, -4.71417\times10^{12}\}$

k = 3 x = $\{2.91774\times10^{11}, 1.14626\times10^{11}, 2.46039\times10^{11}\}$

k = 4 x = $\{-2.79362\times10^{10}, -2.02373\times10^{10}, 4.97232\times10^{10}\}$

k = 5 x = $\{-2.52077\times10^{9}, -3.65466\times10^{8}, -5.94946\times10^{9}\}$

k = 6 x = $\{5.0227\times10^{8}, 2.95016\times10^{8}, -3.49394\times10^{8}\}$

k = 7 x = $\{6.7104\times10^{6}, -1.05449\times10^{7}, 9.81328\times10^{7}\}$

k = 8 x = $\{-7.09139\times10^{6}, -3.37176\times10^{6}, -548026.\}$

k = 9 x = $\{286611., 321143., -1.28369\times10^{6}\}$

k = 10 x = {79 575.3, 28 063.3, 75 593.5}

k = 11 x = {-8065.64, -5784.02, 13 137.3}

k = 12 x = {-632.136, -65.0743, -1723.33}

k = 13 x = {144.951, 83.3961, -97.3742}

k = 14 x = {4.18542, -1.00901, 14.93}

k = 15 x = {1.27825, 1.49425, -12.7939}

k = 16 x = {3.31593, 2.49017, -12.8215}

k = 17 x = {3.24643, 2.40371, -12.4492}

k = 18 x = {3.22287, 2.39498, -12.4686}

k = 19 x = {3.22505, 2.39661, -12.4726}

k = 20 x = {3.22525, 2.39664, -12.4721}

k = 21 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 22 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 23 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 24 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 25 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 26 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 27 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 28 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 29 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

k = 30 x = {3.22521, 2.39661, -12.4721}

за сравнение:
{3.22521, 2.39661, -12.4721}

Векторни и матрични норми (основни сведения от ЛА)

Пример:

```
In[25]:= a = {1, -2, 0.6}
Out[25]=
{1, -2, 0.6}
```

In[27]:= $Z = \begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -1.17 \\ 13 & -6 & -2.5 \\ 77 & 0.69 & \pi \end{pmatrix}$

```
Out[27]=
{{3, 0.2, -1.17}, {13, -6, -2.5}, {77, 0.69, π}}
```

векторни норми

първа - кубична

```
In[29]:= Max[Abs[a[[1]]], Abs[a[[2]]], Abs[a[[3]]]]
Out[29]=
2
In[30]:= Norm[a, ∞]
Out[30]=
2.
```

втора - октаедрична

```
In[31]:= Abs[a[[1]]] + Abs[a[[2]]] + Abs[a[[3]]]
Out[31]=
3.6
In[32]:= Norm[a, 1]
Out[32]=
3.6
```

трета - сферична

In[33]:= $\sqrt{a[[1]]^2 + a[[2]]^2 + a[[3]]^2}$

```
Out[33]=
2.31517
In[34]:= Norm[a]
Out[34]=
2.31517
```

матрични норми

```
In[35]:= Norm[Z]
Out[35]=
78.1924
```

In[38]:=
```
Z // MatrixForm
```
Out[38]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 0.2 & -1.17 \\ 13 & -6 & -2.5 \\ 77 & 0.69 & \pi \end{pmatrix}$$

първа - кубична

In[39]:=
$$\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Abs}[Z[[i, j]]], \{i, n\}\right]$$

Out[39]=
{4.37, 21.5, 80.8316}

In[40]:=
$$\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Abs}[Z[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]$$

Out[40]=
80.8316

втора - октаедрична

In[41]:=
$$\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[Z[[i, j]]], \{j, n\}\right]$$

Out[41]=
{93, 6.89, 6.81159}

In[42]:=
$$\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[Z[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]$$

Out[42]=
93

трета - сферична

In[43]:=
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Z[[i, j]]^2}$$

Out[43]=
78.4921

In[44]:=
```
Norm[Z]
```
Out[44]=
78.1924

Проверка на сходимост

$||B|| < 1$

първа - кубична

In[45]:=
$$\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]$$

Out[45]=

0.248333

втора - октаедрична

In[46]:=
$$\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]$$

Out[46]=

0.200333

трета - сферична

In[47]:=
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B[[i, j]]^2}$$

Out[47]=

0.212786

Избираме норма, която да е по-малка от единица.
В случая ще изберем най-малката възможна за да си подсигурим по-бърза сходимост - **втора норма**

Извод: $\|B\|_2 = 0.20033 < 1$. Следователно итерационният процес ще бъде сходящ **при всеки избор на начално приближение.**

Краен вариант на кода

In[64]:=
```
A = {{5, 0.36, 0.4}, {0.3, 7, 0.22}, {0.72, 0.77, -6}}; b = {12, 15, 79};
Print["За сравнение решението е ", LinearSolve[A, b] ]
n = Length[A];
B = Table[0, {i, n}, {j, n}] ;(*инициализираме нулева матрица*)
c = Table[0, n];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = -A[[i]]/A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]]/A[[i, i]]
](*запълваме елементите на B и c*)
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]
x = {10^7, -7^6, 345 782 344 567 788};
(*избора на начално приближение - не е задължително да е нулев вектор*)
(*избрали сме да работим с втора норма -
 вж. разсъжденията при проверка на сходимостта*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]];
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 5, k++,
 Print["k = ", k, " x = ", x, " εk = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
```

За сравнение решението е {3.22521, 2.39661, -12.4721}

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.072 & -0.08 \\ -0.0428571 & 0 & -0.0314286 \\ 0.12 & 0.128333 & 0 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{15}{7} \\ -\frac{79}{6} \end{pmatrix}$

k = 0 x = {10 000 000, -117 649, 345 782 344 567 788} ε_k = 3.45782×10^{14}

k = 1 x = $\{-2.76626\times10^{13}, -1.08674\times10^{13}, 1.18489\times10^{6}\}$ ε_k = 6.92717×10^{13}

k = 2 x = $\{7.82456\times10^{11}, 1.18554\times10^{12}, -4.71417\times10^{12}\}$ ε_k = 1.38774×10^{13}

k = 3 x = $\{2.91774\times10^{11}, 1.14626\times10^{11}, 2.46039\times10^{11}\}$ ε_k = 2.78011×10^{12}

k = 4 x = $\{-2.79362\times10^{10}, -2.02373\times10^{10}, 4.97232\times10^{10}\}$ ε_k = 5.56949×10^{11}

k = 5 x = $\{-2.52077\times10^{9}, -3.65466\times10^{8}, -5.94946\times10^{9}\}$ ε_k = 1.11576×10^{11}