Линейни хомогенни системи диференциални уравнения с постоянни коефициенти

Информатика, 2021/2022

- Система от вида

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z \\ \dot{y} = a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z \\ \dot{z} = a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z, \end{array}\right. \qquad (1)$$

с неизвестни функциите $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, където a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ са константи, се нарича линейна хомогенна система диференциални уравнения с постоянни коефициенти.

Ако въведем означенията

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то системата (1) може да се запише във вида

$$\dot{X} = AX.$$

Търсим решение на системата (1) във вида

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha\, e^{\lambda t}, \\
y &= \beta\, e^{\lambda t}, \\
z &= \gamma\, e^{\lambda t},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

или

$$X = h\, e^{\lambda t},$$

където

$$h = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

а $\lambda, \alpha, \beta, \gamma$ са подходящи константи. Заместваме с изразите (2) в системата (1), съкращаваме на $e^{\lambda t}$ и прехвърляме всички членове в лявата страна.

Получаваме

$$\left| \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - \lambda)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - \lambda)\gamma = 0 \end{array} \right. \qquad (3)$$

или

$$(A - \lambda E)h = \theta,$$

където E е единичната матрица от трети ред,

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

За да има ненулево решение хомогенната система (3), е необходимо и достатъчно детерминантата й да бъде равна на нула, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\det(A-\lambda E)=0.$$

Като пресметнем детерминантата, се получава уравнение от трета степен, което има три корена (в множеството на комплексните числа). Това уравнение се нарича характеристично уравнение, а неговите корени – характеристични корени.

- Ако всички характеристични корени λ_i $(i = 1, 2, 3)$ са различни, то след като ги заместим в системата (3), определяме съответните им нетривиални α_i, β_i и γ_i. Векторът

$$h_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$$

се нарича собствен вектор, отговарящ на характеристичния корен λ_i. Така получаваме три на брой решения

$$X_i = h_i \, e^{\lambda_i t},$$

за които не е трудно да се покаже, че са линейно независими. Следователно те образуват фундаментална система решения за системата (1), откъдето следва, че общото решение на (1) има вида

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3.$$

- На комплексния корен $\lambda = p + iq$ на характеристичното уравнение съответства комплексен собствен вектор h, откъдето получаваме решението

$$X = h\, e^{\lambda t}. \tag{4}$$

Ако всички коефициенти a_{ij} на системата (1) са реални, то решението (4) може да бъде заменено с две реални решения – съответно реалната част и имагинерната част на (4).

- Ако λ е k-кратен характеристичен корен, на който съответстват m на брой линейно независими собствени вектора, $k > m$, то решение на системата (1), отговарящо на λ търсим във вида

$$\begin{aligned} x &= q_1(t)\, e^{\lambda t}, \\ y &= q_2(t)\, e^{\lambda t}, \\ z &= q_3(t)\, e^{\lambda t}, \end{aligned} \tag{5}$$

където $q_i(t)$ са полиноми от степен $k-m$; при това коефициентите на полиномите $q_i(t)$ се изразяват чрез k на брой независими константи.

Задача 1

Да се решат системите:

1) $$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y + z \\ \dot{y} &= -x + 5y - z \\ \dot{z} &= x - y + 3z; \end{aligned} \right.$$

2) $$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y \\ \dot{y} &= x + 2y; \end{aligned} \right.$$

3) $$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= 4y - x; \end{aligned} \right.$$

4) $$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y - z \\ \dot{y} &= 2x - y - 2z \\ \dot{z} &= -x + y + 2z. \end{aligned} \right.$$

Решение. 1) Имаме

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A-\lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= (3-\lambda)^2(5-\lambda)+1+1 \\ & \quad -(5-\lambda)-(3-\lambda)-(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)((3-\lambda)(5-\lambda)-3) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12). \end{aligned}$$

Характеристичното уравнение

$$0 = \det(A-\lambda E) = (3-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+12)$$

има за корени $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 6$. Първо ще намерим собствения вектор h_1, който отговаря на $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3E)h_1 = \theta$$

или

$$\begin{pmatrix} 3-3 & -1 & 1 \\ -1 & 5-3 & -1 \\ 1 & -1 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Така получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} -\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0, \end{array} \right.$$

откъдето $\alpha = \beta$, $\gamma = \beta$. Тогава векторът h_1 е от вида

$$h_1 = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix},$$

и като изберем $\beta = 1$, намираме

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сега ще намерим собствения вектор h_2, който отговаря на $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2E)h_2 = \theta$$

или

$$\begin{pmatrix} 3-2 & -1 & 1 \\ -1 & 5-2 & -1 \\ 1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Така получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0, \end{array} \right.$$

откъдето $\gamma = -\alpha$, $\beta = 0$. Тогава векторът h_2 е от вида

$$h_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix},$$

и като изберем $\alpha = 1$, намираме

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Накрая ще намерим собствения вектор h_3, който отговаря на $\lambda_3 = 6$:

$$(A - 6E)h_3 = \theta$$

или

$$\begin{pmatrix} 3-6 & -1 & 1 \\ -1 & 5-6 & -1 \\ 1 & -1 & 3-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Така получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} -3\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \beta - 3\gamma = 0, \end{array} \right.$$

откъдето $\beta = -2\alpha$, $\gamma = \alpha$. Тогава векторът h_3 е от вида

$$h_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix},$$

и като изберем $\alpha = 1$, намираме

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общото решение на дадената система е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

2) За дадената система

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристичното уравнение

$$0 = \det(A - \lambda E) = (2-\lambda)^2 + 1$$

има за корени числата $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Ще намерим собствения вектор h_1, съответстващ на корена $\lambda_1 = 2 + i$. Имаме

$$(A - (2+i)E)\, h_1 = \theta$$

или

$$\begin{pmatrix} 2-(2+i) & -1 \\ 1 & 2-(2+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$\left| \begin{array}{l} -i\alpha - \beta = 0 \\ \alpha - i\beta = 0, \end{array} \right.$$

откъдето $\beta = -i\alpha$. Така намираме, че $h_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -i\alpha \end{pmatrix}$ и при $\alpha = 1$ получаваме $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Сега разглеждаме комплекснозначното решение

$$\begin{aligned} X_1 &= h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2t}(\cos t + i \sin t) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -i \cos t + \sin t \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогава общото решение на системата е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + c_2\, e^{2t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}.$$

3) Ще покажем как тази система може да се реши чрез заместване. От първото уравнение изразяваме $y = \dot{x} - 2x$, откъдето $\dot{y} = \ddot{x} - 2\dot{x}$. Заместваме с тези изрази във второто уравнение и получаваме

$$\ddot{x} - 2\dot{x} = 4(\dot{x} - 2x) - x$$

и следователно

$$\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0. \tag{6}$$

Това линейно хомогенно уравнение от втори ред решаваме по метода, показан в Лекция 7. Характеристичното му уравнение е

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0,$$

а характеристичните корени са $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Тогава общото решение на (6) е

$$x = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}. \tag{7}$$

Сега се връщаме в израза за y. Получаваме

$$\begin{aligned} y = \dot{x} - 2x &= (c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t})' - 2(c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}) \\ &= 3c_1 e^{3t} + c_2 e^{3t} + 3c_2 t e^{3t} - 2c_1 e^{3t} - 2c_2 t e^{3t} \\ &= (c_1 + c_2) e^{3t} + c_2 t e^{3t}. \end{aligned}$$

Така получаваме, че решението на системата е

$$\left| \begin{array}{l} x = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \\ y = (c_1 + c_2) e^{3t} + c_2 t e^{3t}. \end{array} \right.$$

4) За дадената система имаме

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A-\lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристичното уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

има за корени $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ще определим колко линейно независими собсвени вектора отговарят на този трикратен корен.

Имаме

$$(A - E)h = \theta$$

или

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & -1 \\ 2 & -1-1 & -2 \\ -1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Така получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0, \end{array} \right.$$

откъдето $\alpha = \beta + \gamma$. Тогава векторът h е от вида

$$h = \begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

т.е. представлява линейна комбинация на два линейно независими вектора.

Следователно, търсим решение на дадената система във вида (5), като вземем предвид, че кратността на корена е $k = 3$, а броят на линейно независимите вектори е $m = 2$. Тогава полиномите $q_i(t)$ трябва да са от степен $k - m = 1$ и

$$\begin{aligned} x &= (at + b)\, e^t \\ y &= (ct + d)\, e^t \\ z &= (et + f)\, e^t. \end{aligned} \tag{8}$$

Коефициентите на полиномите ще определим по метода на неопределените коефициенти като заместим с x, y и z в дадената система. Получаваме

$$\left| \begin{array}{l} ((at + b)\, e^t)' = 2(at + b)\, e^t - (ct + d)\, e^t - (et + f)\, e^t \\ ((ct + d)\, e^t)' = 2(at + b)\, e^t - (ct + d)\, e^t - 2(et + f)\, e^t \\ ((et + f)\, e^t)' = -(at + b)\, e^t + (ct + d)\, e^t + 2(et + f)\, e^t. \end{array} \right.$$

Сега диференцираме, съкращаваме на e^t и намираме

$$\left|\begin{array}{l} at + a + b = (2a - c - e)t + (2b - d - f) \\ ct + c + d = (2a - c - 2e)t + (2b - d - 2f) \\ et + e + f = (-a + c + 2e)t + (-b + d + 2f). \end{array}\right.$$

Коефициентите пред t и свободните коефициенти в лявата и дясната част на трите уравнения трябва да са равни, т.е.

$$\left|\begin{array}{l} a = 2a - c - e \\ a + b = 2b - d - f \\ c = 2a - c - 2e \\ c + d = 2b - d - 2f \\ e = -a + c + 2e \\ e + f = -b + d + 2f. \end{array}\right.$$

Оттук

$$\left| \begin{array}{l} a = b - d - f \\ c = 2b - 2d - 2f \\ e = -b + d + f, \end{array} \right. \tag{9}$$

т.е. три от коефициентите се изразиха чрез останалите три (припомняме, че кратността на корена е 3). Сега полагаме

$$b = C_1, \quad d = C_2, \quad f = C_3$$

и заместваме първо в (9), а после и в (8). Получаваме

$$\begin{aligned} x &= ((C_1 - C_2 - C_3)t + C_1)\, e^t \\ y &= ((2C_1 - 2C_2 - 2C_3)t + C_2)\, e^t \\ z &= ((-C_1 + C_2 + C_3)t + C_3)\, e^t, \end{aligned}$$

или във векторна форма

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ -t \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} -t \\ -2t+1 \\ t \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ t+1 \end{pmatrix} e^t.$$