Уравнения с разделящи се променливи

доц. д-р Теменужка Пенева

Информатика, 2021/2022

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = f(x)g(y),$$

където f и g са дадени непрекъснати функции, се наричат уравнения с разделящи се променливи.

- Към уравнения с разделящи се променливи се свеждат и уравненията от вида

$$X(x)\,dx + Y(y)\,dy = 0, \qquad \Big| : dx$$

$$X(x) + Y(y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

а така също

$$X_1(x)Y_1(y)\,dx + X_2(x)Y_2(y)\,dy = 0\,.$$

Теорема 1 (за съществуване и единственост)

Нека $D : a < x < b,\ c < y < d$ *и да разгледаме уравнението*

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f \in C(a, b)$, $g \in C(c, d)$ *и* $g(y) \neq 0$ *за всяко* $y \in (c, d)$. *Тогава през всяка точка* $(x_0, y_0) \in D$ *минава единствено решение на даденото уравнение.*

Забележка. С $C(a, b)$ ще означаваме множеството от всички непрекъснати функции в интервала (a, b).

- Припомняме, че функцията $F(x)$ се нарича примитивна функция на функцията $f(x)$ в интервала (a,b), ако $F(x)$ е диференцируема в (a,b) и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in (a,b)$.

- Ако $F(x)$ е примитивна функция на $f(x)$ в интервала (a,b), то всички примитивни функции на $f(x)$ в този интервал имат вида $F(x) + C$.

- По дефиниция $\int f(x)\,dx$ е множеството от всички примитивни функции на $f(x)$, т.е.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \text{където} \quad F'(x) = f(x).$$

- Често за удобство с $\int f(x)\,dx$ ще означаваме една примитивна на $f(x)$ (при решаването на неопределения интеграл няма да добавяме константа C).

Теорема 2 (Формула за общото решение)

Нека е дадено уравнението с разделящи се променливи

$$y' = f(x)g(y),$$

мн-во от ∀ ф-ии, непр в (a,b)

където $f \in C(a,b)$, $g \in C(c,d)$ *и* $g(y) \neq 0$ *за всяко* $y \in (c,d)$. *Тогава, ако* $F(x)$ *е примитивна на* $f(x)$ *в интервала* (a,b) *и* $G(y)$ *е примитивна на* $\frac{1}{g(y)}$ *в интервала* (c,d), *то общото решение на уравнението е*

$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \quad \forall y \in (c,d)$

$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = G(y)$

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

$\int f(x)\, dx = F(x)$

$$G(y) = F(x) + C,$$

т.е.

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + C.$$

$$y' = f(x)\,g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \quad \Big|\, dx$$

$$dy = f(x)\,g(y)\,dx \quad \Big|\, : g(y) \neq 0$$

!) $g(y) = 0$ не води до допълн. реш.?

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$$

1) $$y' = \underbrace{(x^2+1)}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g(y)}$$

$y' = f(x)$

$y = \int f(x) + C$

$y = \int (x^2+1) + C$

$= \frac{x^3}{3} + x + C$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \quad \Big|\, dx$$

$$dy = (x^2+1)\,dx$$

$$\int dy = \int (x^2+1)\,dx + C$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{3} + x + C}$$

общо решение на ур-то

② $y' = y^2 + 1$ $\qquad$ $y' = g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$$

$$dy = (y^2+1)\,dx \;\Big|\; : y^2 + 1 \neq 0$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = 1\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx + C$$

$$\boxed{\operatorname{arctg} y = x + C}$$

общее решение в неявном виде

2) $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0;$

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$\dfrac{dx}{dy}$: $dx \to$ ф-я, $dy \to$ произ.

$\dfrac{dy}{dx}$: $dy \to$ ф-я, $dx \to$ произ.

$$(x+1)\,dy = -xy\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x+1}$$

$x + 1 \neq 0$

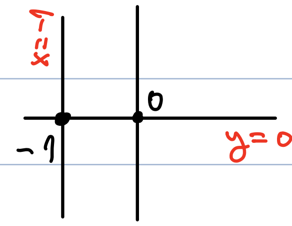
$x = -1$

(x — ф-я от y)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x+1} \cdot y \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$



$$dy = -\frac{x}{x+1}\, y\, dx \quad \Big| : y \neq 0$$

$$\frac{1}{y}\, dy = -\frac{x}{x+1}\, dx$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{x}{x+1}\, dx + C$$

$$\ln|y| = -\int \frac{x+1-1}{x+1}\, dx + C$$

$$\ln|y| = -\int \left(\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+1}} - \frac{1}{x+1} \right) dx + C$$

$$\ln|y| = -\int 1\, dx + \int \frac{1}{x+1}\, d(x+1) + C$$

$$\boxed{\ln|y| = -x + \ln|x+1| + C}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x + \ln|x+1| + C}$$

$$|y| = e^{-x} \cdot e^{\ln|x+1|} \cdot e^{C}$$

$$|y| = e^{-x} \cdot |x+1| \cdot e^{C}$$

$$\varepsilon_1 y = e^{-x} \cdot \varepsilon_2 (x+1)\, e^{C}$$

$$y = \underbrace{\frac{\varepsilon_2 e^{C}}{\varepsilon_1}}_{= C_1} e^{-x}(x+1)$$

$$y = C_1 e^{-x}(x+1), \quad C_1 \neq 0$$

$$y = C e^{-x}(x+1), \quad C \neq 0$$

СБ: $y = C(x+1)e^{-x}$; $x = -1$

1) $y = 0$ $\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{x+1}\, y$

(y е ф-я на x)

$$0 \overset{?}{=} -\frac{x}{x+1} \cdot 0$$ да

$x = -1, y = 0$

$y = 0$ $(x \neq -1)$ е реш. на ур-то

2) $x = -1$ $\qquad \frac{dx}{dy} = -\frac{x+1}{xy}$

(x ф-я на y)

$$0 \stackrel{?}{=} -\frac{0}{x \cdot y}$$

$x = -1 \ (y \neq 0)$ е реш. на ур-то

(53) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0 \ ; \quad y(0) = 1$

$$(x^2-1)y' = -2xy^2$$

$$y' = -\frac{2xy^2}{x^2-1}$$

! Първо изразяване y'

УРП – уравн. с разделящи се променливи

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2}{x^2-1}$$

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2-1}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx + C$$

$$\frac{y^{-2+1}}{-2+1} = -\int \frac{d(x^2-1)}{x^2-1} + C$$

$$-\frac{1}{y} = -\ln|x^2-1| + C$$

$$y = \frac{1}{\ln|x^2-1|+C}$$

$y(0) = 1$

$x \quad y$

$$1 = \frac{1}{\ln|0^2-1|+C} \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{\ln|x^2-1|+1}$$

62 $\quad y' = \cos(y-x)$ $\qquad f(x) \cdot g(y)$

$\cos y \cos x + \sin y \sin x$

$$y' = f(\underbrace{ax+by+c}_{z})$$

Полагаме $\quad ax+by+c = z, \qquad z = z(x)$

$$by = z - ax - c$$

$$y = \frac{1}{b}(z - ax - c)$$

$$y' = \frac{1}{b}(z' - a \cdot \underbrace{x'}_{1} - 0)$$

$$y' = \frac{1}{b}(z' - a)$$

$$\frac{1}{b}(z' - a) = f(z)$$

$$z' - a = b f(z)$$

$$z' = \underbrace{a + b f(z)}_{F(z)}$$

$$\frac{dz}{dx} = F(z)$$

$$dz = F(z)\,dx \quad \Big| : F(z) \neq 0$$

$$\int \frac{dz}{F(z)} = \int dx + C$$

$$y' = \cos(y - x)$$

Понат. $y - x = z$, $z = z(x)$

$$y = z + x \Rightarrow y' = z' + 1$$

$$z' + 1 = \cos z$$

$$z' = \cos z - 1$$

$$(**)\quad \frac{dz}{dx} = \cos z - 1 \qquad \Big| : \cos z - 1 \neq 0$$

$$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx$$

$$\underbrace{\int \frac{dz}{\cos z - 1}}_{I} = \int dx + C \qquad (*)$$

$$\cos 2t = \begin{cases} 2\cos^2 - 1 \\ 1 - 2\sin^2 t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \end{cases}$$

$$I = \int \frac{dz}{-2\sin^2 \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sin^2 \frac{z}{2}} =$$

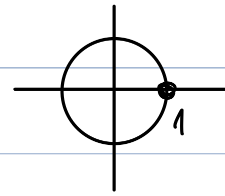
$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \int \frac{d\left(\frac{z}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)} = \operatorname{ctg} \frac{z}{2}$$

Зам. в ур (*) $\Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{ctg} \frac{z}{2} = x + C}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{ctg} \frac{y - x}{2} = x + C}$$

$\cos z - 1 \overset{?}{=} 0$



$\cos z = 1 \Rightarrow z = 0 + 2k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

Зам. в $(**)$ $\dfrac{dz}{dx} = \cos z - 1$

$0 \overset{?}{=} 0$ $\checkmark$ вярно

$\Rightarrow z = 2k\pi$ също са реш. на ур-то

$y - x = 2k\pi$

$\boxed{y = x + 2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$

Отг: $\cot g \dfrac{y-x}{2} = x + C$; $y = x + 2k\pi$

Задача 1

Да се решат уравненията:

1) $y' = -\dfrac{1}{x^2}$*;*

2) $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$*;*

3) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = -1$*;*

4) $x^2y' - \cos 2y = 1$*;* $y(x) \to \frac{9\pi}{4}$ *при* $x \to \infty$*.*

Решение.

1) Тъй като дясната страна е функция само на x, можем да решим уравнението чрез непосредствено интегриране. Имаме

$$y = \int \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{x} + C,$$

където $C \in \mathbb{R}$ е произволна константа.

2) Имаме

$$(x+1)\,dy = -xy\,dx.$$

Разделяме двете страни с израза $(x+1)y \neq 0$ и получаваме

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x+1}\,dx.$$

Интегрираме двете страни на уравнението

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(-\frac{x}{x+1}\right) dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

откъдето

$$\ln|y| = -x + \ln|x+1| + C_1,$$

и след антилогаритмуване

$$|y| = e^{-x}|x+1|e^{C_1}\,.$$

Означаваме $C = \varepsilon e^{C_1}$, където $\varepsilon = \pm 1$. Получаваме общото решение

$$y = Ce^{-x}(x+1)\,.$$

Остана да проверим дали $x = -1$ и $y = 0$ са решения на изходното уравнение. Първо записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x+1}{xy}.$$

От $x = -1$ имаме $\frac{dx}{dy} = 0$ и след заместване се вижда, че горното равенство е изпълнено за всяко y. Следователно $x = -1$ е решение на уравнението.
Сега записваме даденото уравнение във вида

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x+1}.$$

Поставяйки $y = 0$ в него, виждаме, че се получава тъждество и следователно $y = 0$ също е решение.

3) Първо ще намерим общото решение. В уравнението заместваме y' с $\frac{dy}{dx}$ и получаваме

$$(x^2-1)\,dy = -2xy^2\,dx,$$

откъдето, при $y^2(x^2-1)\neq 0$, следва

$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{2x}{x^2-1}\,dx.$$

Интегрираме двете страни и получаваме

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x}{x^2-1}\,dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Следователно

$$\frac{1}{y} = \ln|x^2-1| + C_1,$$

$$\frac{1}{y} = \ln\left(e^{C_1}|x^2-1|\right).$$

Полагаме $\varepsilon e^{C_1} = C$, $C \neq 0$, и получаваме общото решение

$$y = \frac{1}{\ln C(x^2 - 1)}.$$

Сега ще намерим частното решение, за което $y(0) = -1$. В общото решение заместваме $x = 0$, $y = -1$ и намираме $C = -1/e$. Тогава търсеното частно решение е

$$y = \frac{1}{\ln\left(-\frac{1}{e}(x^2 - 1)\right)} = \frac{1}{\ln(1 - x^2) - 1}.$$

4) Отг. $\operatorname{tg} y = -\frac{2}{x} + 1$.

- Уравнения от вида $y' = f(ax + by + c)$, където f е дадена непрекъсната функция, можем да сведем до уравнения с разделящи се променливи като въведем нова неизвестна функция z на променливата x по следния начин:

$$z = ax + by + c.$$

Задача 2

Решете уравненията:
1) $y' - y = 2x - 3$*;*
2) $y' = \cos(y - x)$*.*

Решение. 1) Имаме

$$y' = 2x + y - 3.$$

Полагаме $z = 2x + y - 3,\ z = z(x)$. Оттук $y = z - 2x + 3$, $y' = z' - 2$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$z' - 2 = 2x + z - 2x + 3 - 3,$$
$$z' = z + 2,$$

което е уравнение с разделящи се променливи.

Последователно имаме

$$\frac{dz}{z+2} = dx, \quad z+2 \neq 0,$$

$$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$\ln|z+2| = x + C_1,$$

$$|z+2| = e^x e^{C_1},$$

$$z+2 = Ce^x, \quad C \neq 0.$$

Като заместим $z = y + 2x - 3$ в последното равенство, получаваме, че общото решение на даденото уравнение е $y = 1 - 2x + Ce^x$, $C \neq 0$.

Накрая ще отбележим, че $z = -2$ очевидно е решение на уравнението $z' = z + 2$, откъдето следва, че $2x + y = 1$ е решение на даденото уравнение.

2) Отг. $\operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} = x + C; \quad y - x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.