Локални екстремуми на ф-я на една независима пром.

Def 1 Нека $f: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$. Т.-га f има локален максимум (минимум) в т. x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists$ околност U на x_0, $U \subset X$, че за всяко $x \in U$ да е в сила неравенството $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$). Ако равенството се достига само в x_0, локалният максимум (минимум) се нарича строг. Локалните максимуми и минимуми ще наричаме локални екстремуми.

Th 1 (НУ за екстремум) Ако ф-та f има в т. x_0 локален екстремум, то или $f'(x_0)$ не съществува, или $f'(x_0) = 0$

Cor 1 Ако $f'(x_0)$ съществува и $f'(x_0) \neq 0$ то f няма екстремум в т. x_0

Точките в които се анулира първата производна или тя не съществува се наричат критични точки

Th 2 (Първо ДУ за $\exists$ на екстр.)

Ако x_0 е крит. точка и f' в околност на тази точка отляво и отдясно си променя знака имаме локален максимум – ако е положителен знак отляво и отрицателен отдясно на т. x_0. и минимум – ако е отрицателен знак отляво и положителен отдясно

Th 3 (Второ ДУ за $\exists$ на екстр.) → от учебника

План: 1. $f'(x)$ $\quad f'(x) = 0 \to$ крит. точки

2. $f''(x) = ?$ Във втората производна зам. крит. точки и ако

$f''(x_0) < 0 \to \max \quad \underset{\min}{f''(x_0) > 0}$

① Намерете лок. екстремуми на ф-та $\underline{\underline{y = x^3 - 12x}}$

Д.О.: $x \in (-\infty; +\infty)$

Чрез второто ДУ

$y' = 3x^2 - 12 \qquad y' = 0$

$3x^2 - 12 = 0 \,/:3 \qquad x^2 - 4 = 0$

$x_{1,2} = \pm 2$ => критични точки

$y'' = 6x$

$y''(-2) = 6.(-2) = -12 < 0$ => при $x = -2$ имаме локален максимум

$y''(2) = 6.2 = 12 > 0$ => при $x = 2$ имаме локален минимум

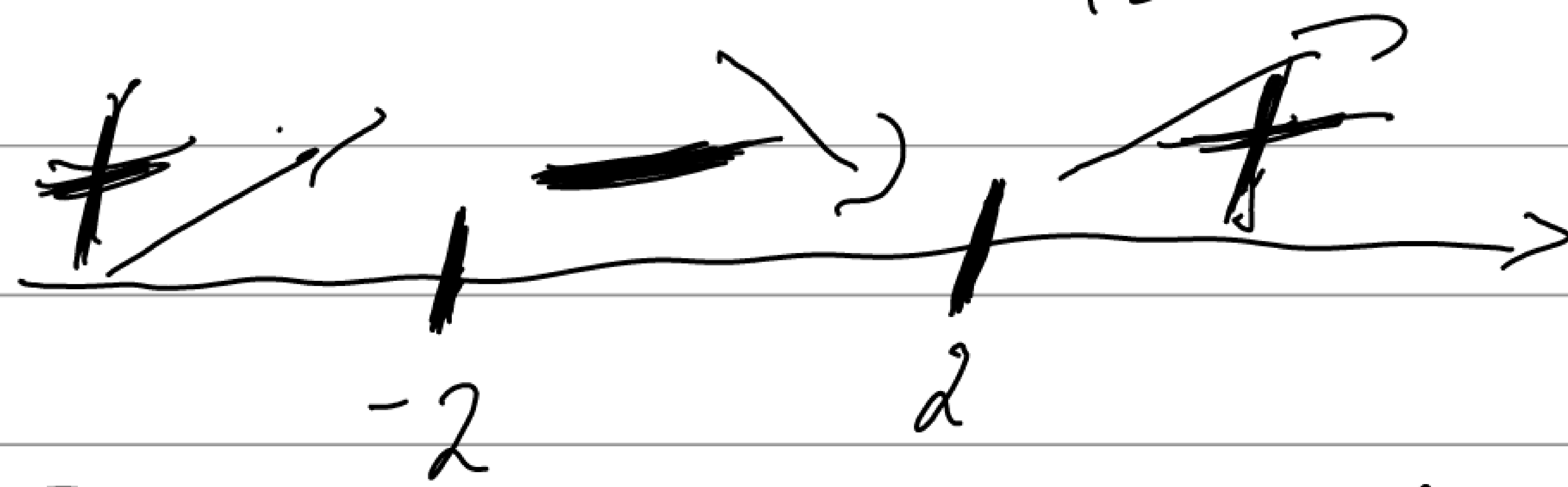
$y_{max}(-2) = (-2)^3 - 12.(-2) = -8 + 24 = 16$

$y_{min}(2) = 2^3 - 12.2 = -16$

Зред [illegible] $D\,y$

$y' = 3x^2 - 12$ $\quad$ $y' = 0$ $\quad$ $3x^2 - 12 = 0$

$x_{1,2} = \pm 2$



$(x-2)(x+2) > 0$

$y' > 0$ $\quad$ $y' < 0$

$y_{max}(-2) = \text{———} =$

$y_{min}(2) = \text{———}$

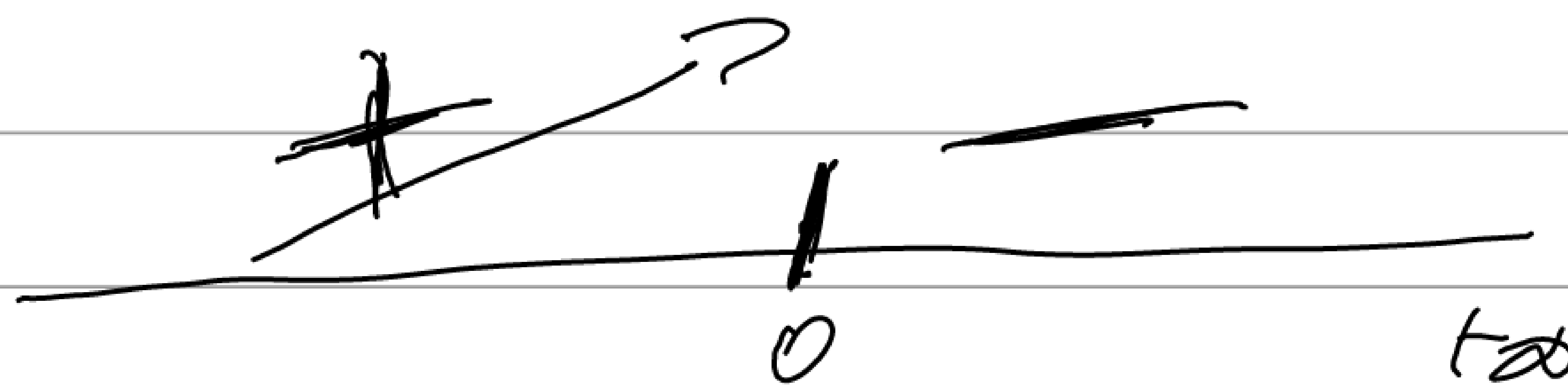
$y \uparrow$ в $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$y \downarrow$ $(-2; 2)$

② $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ $D O$: $x \in (-\infty; +\infty)$

$y' = -2 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{x}}$ $\quad$ $y' \nexists$ при $x = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ є крит. точка

$y' = 0$ н.р.



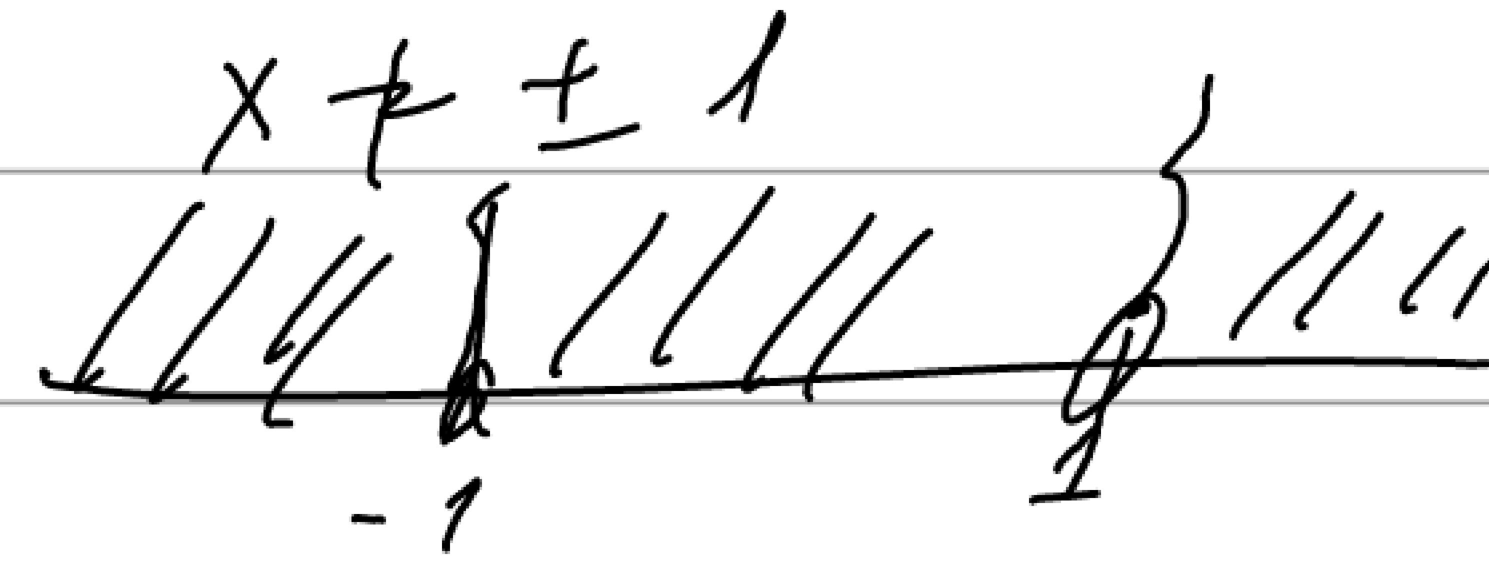
$y_{max}(0) = 3$

$y \uparrow$ в $(-\infty; 0)$

$y \downarrow$ в $(0; +\infty)$

③* $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ Д.О. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

$x \neq \pm 1$



$$y' = \frac{3x^2(1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

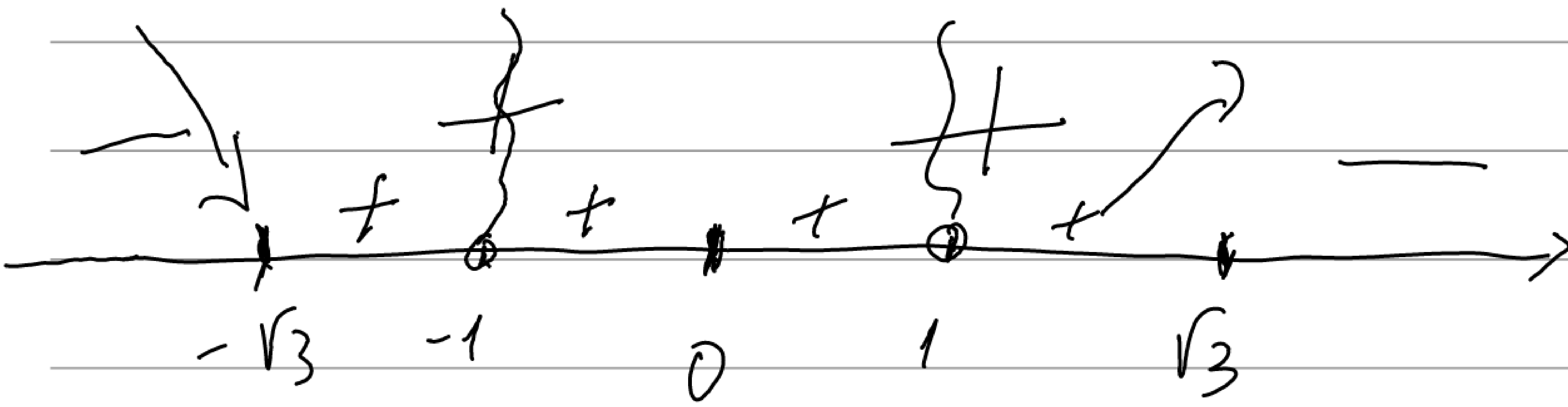
$$= \frac{3x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = 0 \iff 3x^2 - x^4 = 0$$

$3x^2 - x^4 = 0 \qquad x^2(\underset{(\sqrt{3})^2}{3} - x^2) = 0$

$x^2(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{3} \quad x_3 = -\sqrt{3}$



$y_{min}(-\sqrt{3}) = \dfrac{(-\sqrt{3})^3}{1-(-\sqrt{3})^2} = \dfrac{-3\sqrt{3}}{-2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$y_{max}(\sqrt{3}) = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2}$

$y \downarrow (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$

$y \uparrow (-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3})$

(4) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$ (иссл. на мон. и лок. экстр.)

(5) $y = (x+2)^2(x-1)^3$ (иссл. на мон. и лок. экстр.)

НГС и НМС на ф-я на една нез. пром.
(абсолютен екстремум)

Опр 1 Нека $f: X \to \mathbb{R}$ и $\{f(x)\}$ е означено множеството от функционалните ѝ стойности. Ако $\{f(x)\}$, $x \in X$ притежава максимален (минимален) елемент, той се нарича най-голяма (най-малка) стойност на ф-та f в X и се означава $\max\limits_{x \in X} f(x)$ $\left(\min\limits_{x \in X} f(x)\right)$

Нека $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ и е непрекъсната. Тогава НГС и НМС на f се намират по следният начин:

1. Определят се критичните точки на ф-та f и се пресмятат стойностите ѝ в тях
2. Пресмятат се стойностите на ф-та в точките a и b
3. Сравняват се получените стойности

и от тях се определят НГС и НМС, които са съответно $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Нека $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ е непрекъсната
(a и b могат да бъдат $-\infty$ и $+\infty$)
Тогава намирането на НГС и НМС на f (ако съществуват) става по следният начин

1. Определят се критичните точки на f и се пресмятат стойностите на ф-та f в тях
2. Намират се границите $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ (ако $\exists$)
3. Сравняват се A, B и стойностите на f в критичните точки

<u>Забележка</u>: Ф-та не притежава $\max\limits_{x\in(a,b)} f(x)$ $\left(\min\limits_{x\in(a,b)} f(x)\right.$ в следните случаи: $A=+\infty$ или $B=+\infty$ ($A=-\infty$ или $B=-\infty$)

или A, B – крайни, но $\max\{A, B\}$ $(\min\{A, B\})$ е по-голямо (по-малко) от всички стойности в критичните точки.

① Да се нам НМС и НГС на ф-та

$y = x^3 - 6x^2 + 9 \quad x \in [-1; 2]$

$y' = 3x^2 - 12x \qquad y' = 0$

$3x^2 - 12x = 0 \quad /:3$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = -2 \notin [-1;]$

$y(0) = 9$

$y(2) = 2^3 - 6.2^2 + 9 = 8 - 24 + 9 = -7$

$y(-1) = (-1)^3 - 6.(-1)^2 + 9 = -1 - 6 + 9 = 2$

$\max\limits_{x \in [-1;2]} f(0) = 9 \qquad \min\limits_{x \in [-1;2]} f(2) = -7$

② Да се намери НГС и НМС на ф-ята $f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad, x \in [1; e]$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} =$$

$$= 2x \cdot \ln x + x$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x \cdot \ln x + x = 0$$

$$x(2\ln x + 1) = 0$$

$x_1 = 0 \qquad 2\ln x + 1 = 0 \qquad -1 = (-1) \cdot 1 = \ln e$

$$2\ln x = -1\ln e$$

$$\ln x^2 = \ln e^{-1}$$

$x^2 = e^{-1} \qquad x^2 = \frac{1}{e} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{e}}$

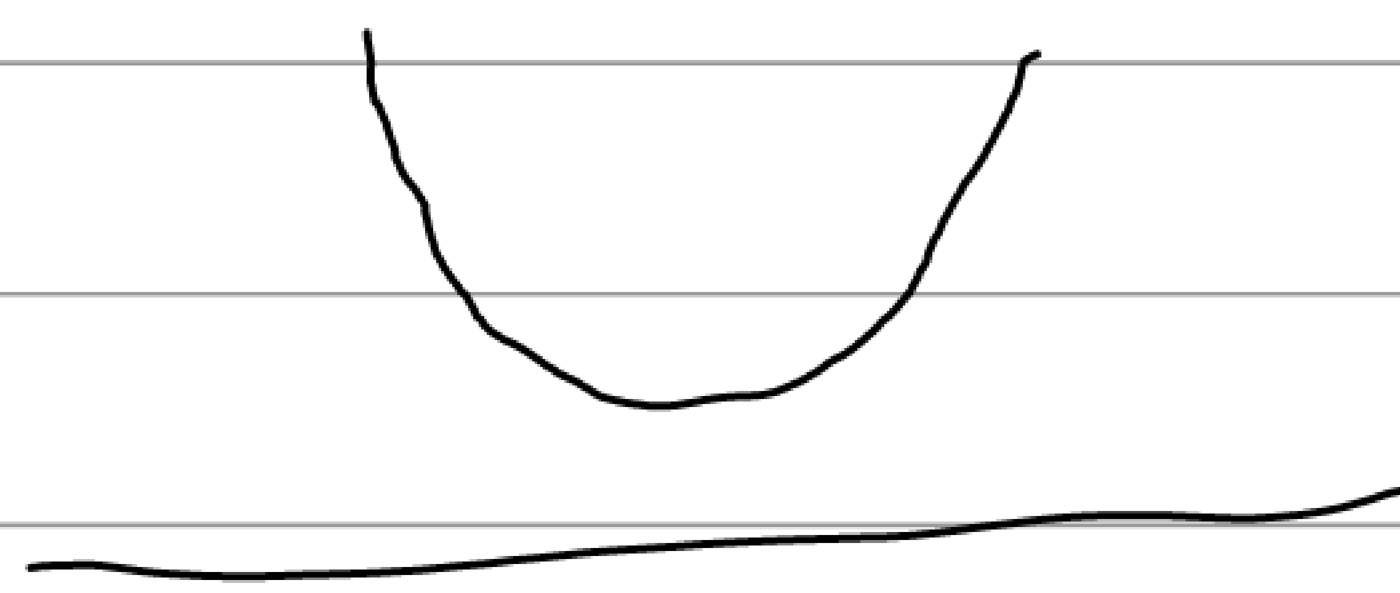
$\pm\frac{1}{\sqrt{e}} \notin [1; e] \qquad 0 \notin [1; e]$

$$f(1) = 1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} = 0$$

$$f(e) = e^2 \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} = e^2$$

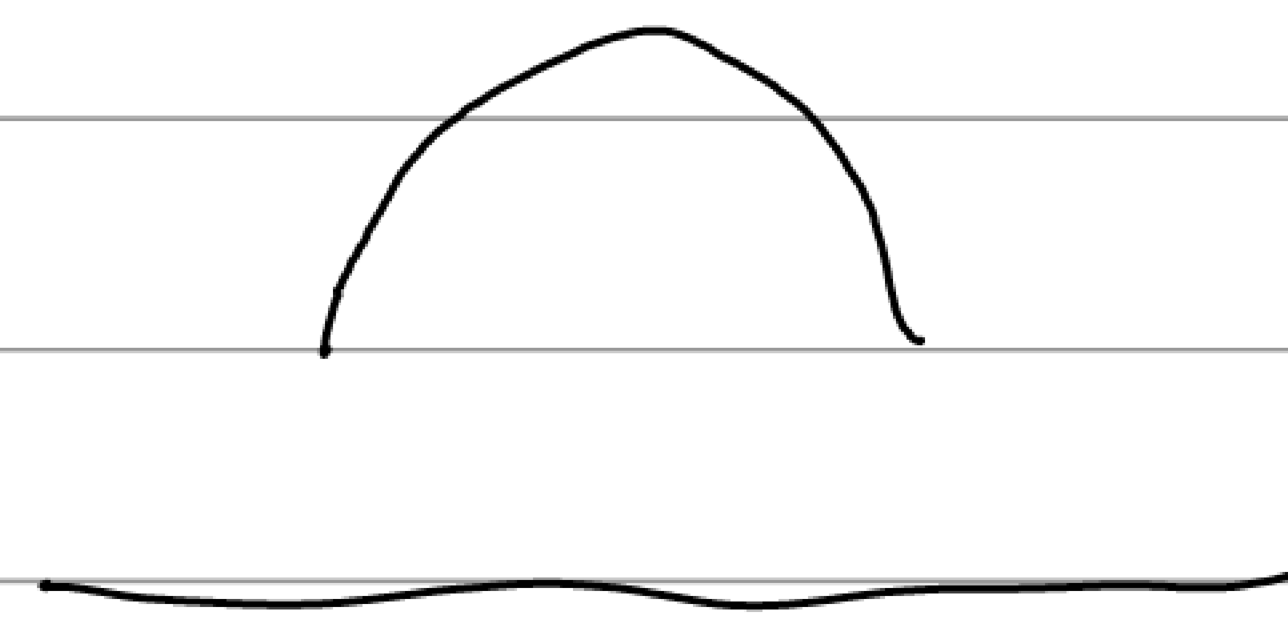
$\max\limits_{x \in [1; e]} f(x) = f(1) = e^2 \qquad \min\limits_{x \in [1; e]} f(x) = f(1) = 0$

Изпъкналост и вдлъбнатост. Инфлексни точки



$y'' > 0$

Изпъкнала



$y'' < 0$

Вдлъбната

① Изследвайте за изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексни точки $f(x) = x^3 - 12x$

$y' = 3x^2 - 12$

$y'' = 6x$

$y'' = 0 \quad 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

т. $(0, 0)$ е инфлексна т.

Т.к. $y'' < 0 \Rightarrow f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty; 0)$

$y'' > 0 \Rightarrow f(x)$ е изпъкнала в $(0; +\infty)$

(2) $\qquad (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1}$

$$y = 3 - \sqrt[3]{x^2}$$

$$y' = \frac{-4}{3\sqrt[3]{x}} \qquad y'' = \frac{(-4)' \cdot 3\sqrt[3]{x} + 4 \cdot (3\sqrt[3]{x})'}{(3\sqrt[3]{x})^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} x^{-\frac{2}{3}}}{9(\sqrt[3]{x})^2} = \frac{4}{9} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \cdot x^{-\frac{4}{3}} > 0$$

При $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е изпъкнала

(3) $\qquad y = \frac{x^3}{1-x^2} \qquad y' = \frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$

$$y'' = \frac{(6x - 4x^3)(1-x^2)^2 - (3x^2 - x^4)\,2(1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4}$$

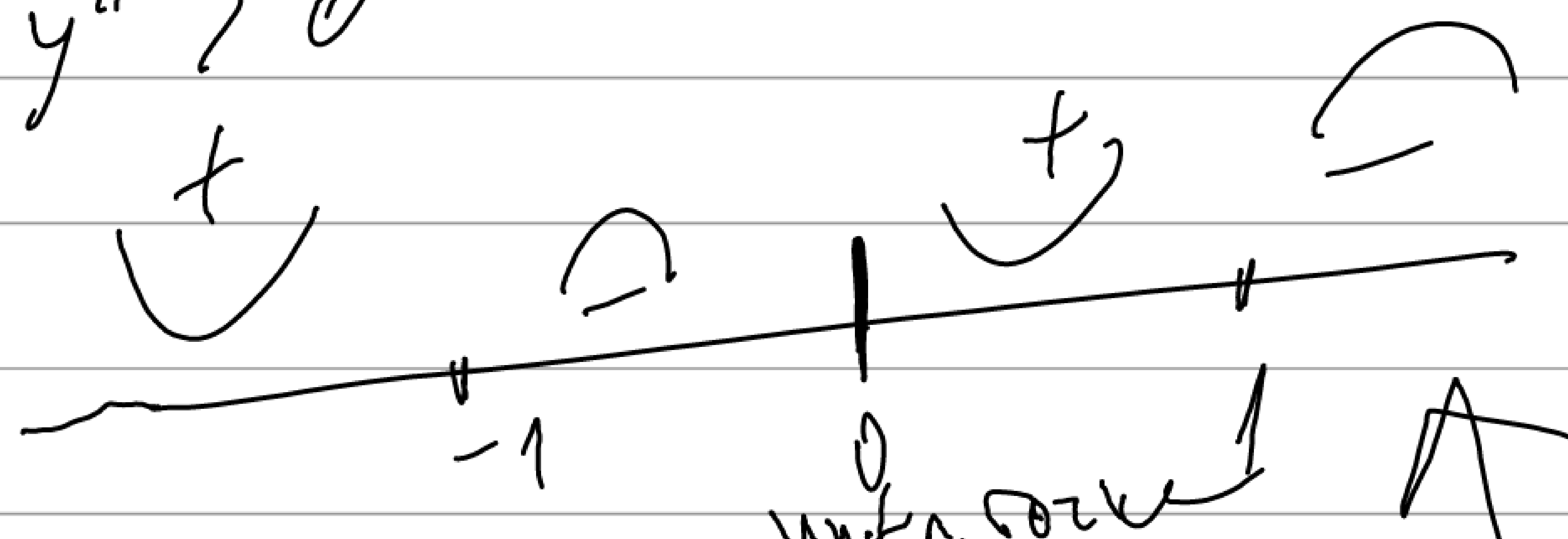
$$y'' = \frac{\cancel{(1-x^2)}\left[(6x-4x^3)(1-x^2) + 4x(3x^2 - x^4)\right]}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$y'' = \frac{6x - 6x^3 - 4x^3 + \cancel{4x^5} + 12x^3 - \cancel{4x^5}}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{6x + 2x^3}{(1-x^2)^3} = \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$y'' = 0 \qquad 2x(3+x^2) = 0 \qquad x = 0$

$y'' > 0$



$$\frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} > 0$$

$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$

$2x(\cancel{3+x^2})(1-x^2)^3 > 0$

$2x(1-x)(1+x) > 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -1$

Построяване на графики на функции

1. Определяне ДО на ф-та D
2. Изследване за четност, нечетност, периодичност и определяне на областта $D_0 \subset D$, в която ще се изследва ф-та
3. Поведение на ф-та в границата на D_0 и изследване за асимптоти
4. Изследване за растене, намаляване и екстремум
5. Изследване за изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексни точки
6. Определяне на пресечните точки с координатните оси (ако има такива)
7. Нанасяне на получените резултати в таблица
8. Построяване на графиката на ф-та

Опр. 1 Правата $x = a$ се нарича вертикална асимптота на граф. на ф-та f, ако поне една от границите $\lim_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim_{x \to a+0} f(x)$ е равна на $+\infty$ или $-\infty$.

Опр. 2 Правата $y = b$ се нарича хоризонтална асимптота на граф. на ф-та f, при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, ако $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ $\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = b\right)$

Опр. 3 Правата $y = kx + b$ се нарича наклонена асимптота на граф. на ф-та f при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, ако $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ $\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k\right)$ и $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$ $\left(\lim_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b\right)$

① Начертайте граф. на ф-ята $y=\frac{x^3}{1-x^2}$

1) $D: x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$

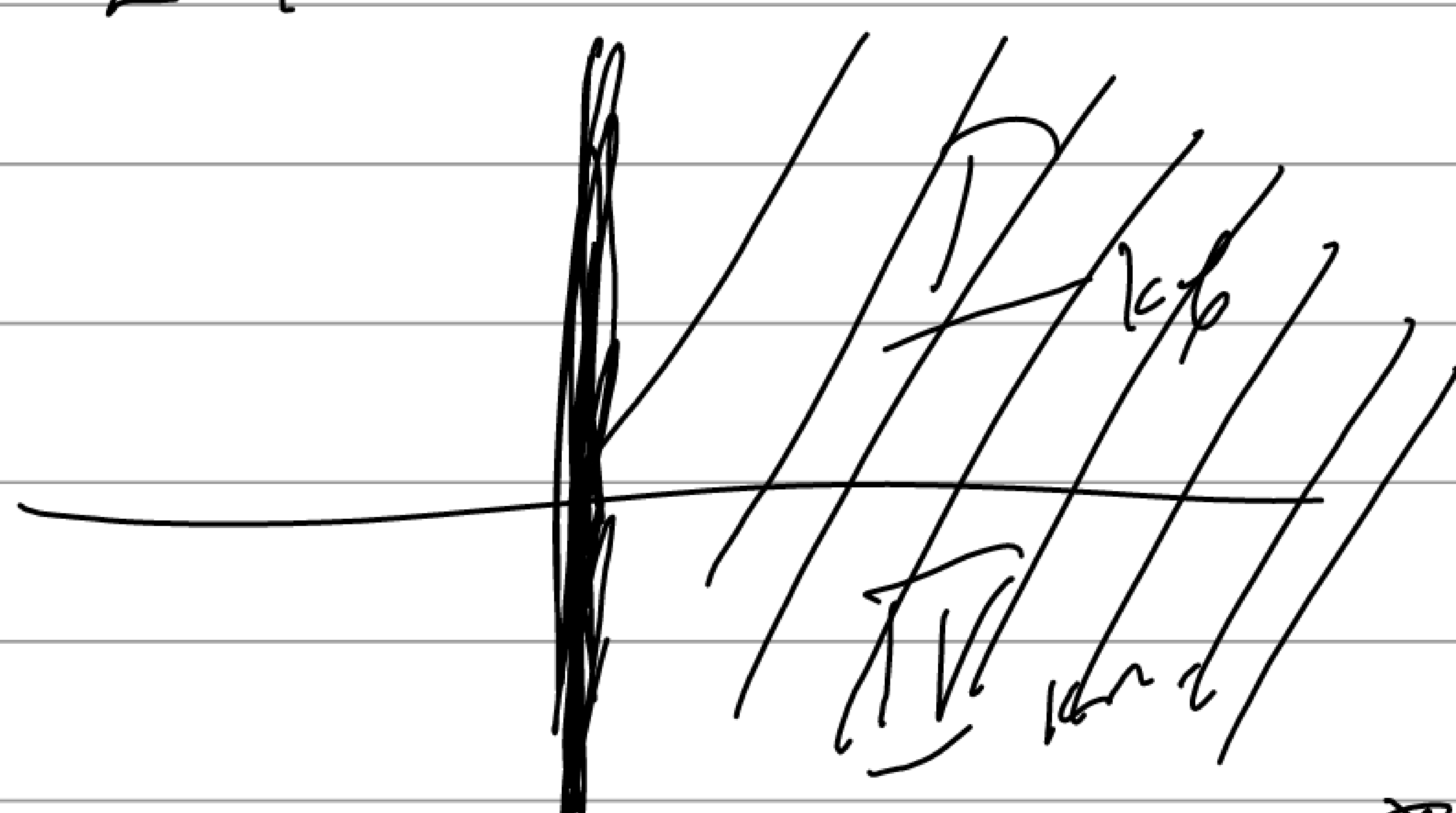
2) $f(-x)=f(x)$ – четна

$f(-x)=-f(x) \to$ нечетна

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=\frac{-x^3}{1-x^2}=-\underbrace{\left[\frac{x^3}{1-x^2}\right]}_{f(x)}$$

$f(-x)=-f(x) \Rightarrow$ ф-ята е нечетна

$D_0=[0;1)\cup(1;+\infty)$



3) и 4) са от зад. 3 от съответното от урока за локален екстремум и урока за изп., вдлъбнатост и инфл. т-ки

3) $f(0)=0$ $\quad \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

Т.к. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -\infty$

Опр 1 $\Rightarrow$ че $x=1$ е вертикална асимптота,

а от $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{x(1-x^2)} = -1 = k$

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - \overset{=-1}{k}x] = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} + x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\cancel{x^3} + x - \cancel{x^3}}{1-x^2}\right) = 0$

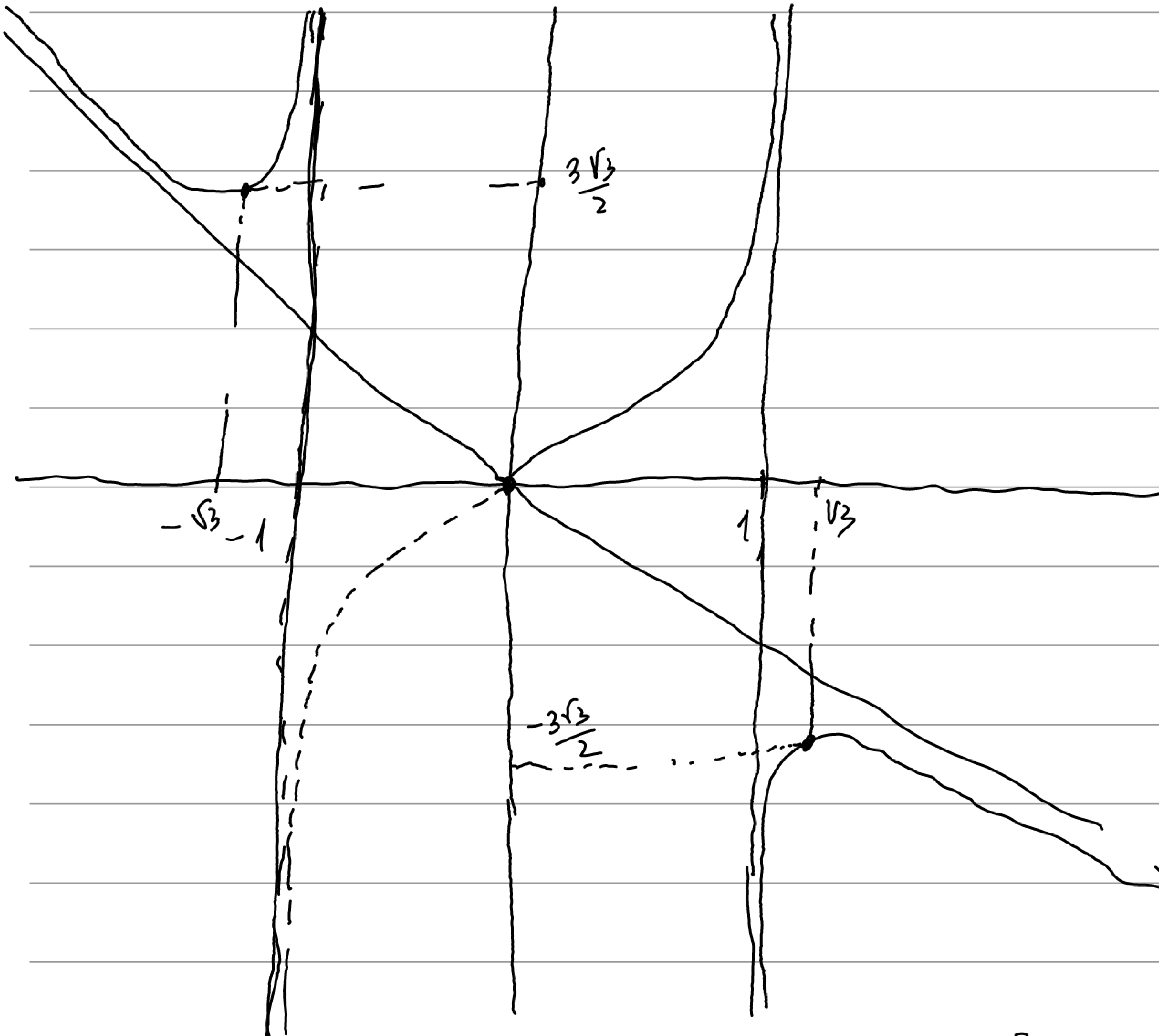
$y = -x$ е наклонена асимптота

$f(x) = 0 \to$ пресеч. точки с оста O_x

$f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$ $\quad x=0$ пресеч. точка с O_x

$y=0$ пресеч. точка с O_y

x	0		$+1$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty \,\vert\, -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ max	$\searrow$	$-\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	
y''		$+$			$-$		



За дом $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ $\quad y = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$