

Линейни уравнения от първи ред. Уравнения на Бернули

Информатика, 2021/2022

Линейни уравнения от първи ред

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{ctg} x$$

$$y' = (2 \sin x) y + x^3$$

$$y' = 2x^2 y + \ln x$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x) y + b(x), \tag{1}$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати функции в даден интервал Δ , се наричат линейни уравнения от първи ред.

► Първо разглеждаме случая $b(x) \equiv 0$ за всяко $x \in \Delta$. Тогава уравнението (1) става с разделящи се променливи

$$y' = a(x) y. \quad (2)$$

Последователно получаваме

$$\frac{dy}{dx} = a(x) y,$$

$$\frac{dy}{y} = a(x) dx, \quad y \neq 0,$$

$$\ln |y| = \int a(x) dx + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$y = C e^{\int a(x) dx}, \quad C \neq 0.$$

Очевидно $y = 0$ също е решение на (2), което може да се получи от последната формула за y , ако разрешим на C да приема и стойност 0. Тогава общото решение на (2) е

$$y = C e^{\int a(x) dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

► Сега ще потърсим и решението на уравнението (1) във вида

$$y = C(x) e^{\int a(x) dx}.$$

Функцията $C(x)$ определяме така, че за всяко $x \in \Delta$ да е изпълнено тъждеството

$$\left(C(x) e^{\int a(x) dx} \right)' \equiv a(x) \left(C(x) e^{\int a(x) dx} \right) + b(x),$$

т.е.

$$C'(x) e^{\int a(x) dx} + C(x) e^{\int a(x) dx} a(x) \equiv a(x) C(x) e^{\int a(x) dx} + b(x),$$

откъдето

$$C'(x) = b(x) e^{-\int a(x) dx}.$$

Сега интегрираме двете страни и получаваме

$$C(x) = C + \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Следователно решението на линейното уравнение (1) е

$$y = e^{\int a(x) dx} \left(C + \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx \right), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Задача 1

Да се решат уравненията:

1) $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$;

2) $y = x(y' - x \cos x)$;

3) $(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y)y' = 1$.

Решение. 1) Изразяваме y' и намираме

$$y' = -\frac{x+1}{x}y + 3xe^{-x},$$

което е уравнение от вида (1) с $a(x) = -\frac{x+1}{x}$ и $b(x) = 3xe^{-x}$.
Тогава по формулата (3) получаваме

$$\begin{aligned}y &= e^{\int(-\frac{x+1}{x})dx} \left(C + \int 3xe^{-x} e^{\int \frac{x+1}{x} dx} dx \right) \\&= e^{-x-\ln|x|} \left(C + \int 3xe^{-x} e^{x+\ln|x|} dx \right) \\&= \frac{e^{-x}}{|x|} \left(C + \int 3x|x| dx \right) = \frac{e^{-x}}{x} \left(C + \int 3x^2 dx \right) \\&= \frac{e^{-x}}{x} (C + x^3) .\end{aligned}$$

2) Отг. $y = x(C + \sin x)$.

3) Уравнението

$$y' = \frac{1}{\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y},$$

записано по този начин, очевидно не е линейно уравнение, но то е еквивалентно на

$$\frac{dx}{dy} = (\operatorname{ctg} y)x + \sin^2 y,$$

което е линейно по отношение на x . Тогава използваме формулата (3), като разменяме местата на x и y . Получаваме

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \operatorname{ctg} y \, dy} \left(C + \int (\sin^2 y) e^{-\int \operatorname{ctg} y \, dy} \, dy \right) \\ &= e^{\ln |\sin y|} \left(C + \int (\sin^2 y) e^{-\ln |\sin y|} \, dy \right) \\ &= \sin y \left(C + \int \sin y \, dy \right) = \sin y (C - \cos y). \end{aligned}$$

Уравнения на Бернули

- По какво си приличат следните диференциални уравнения?

$$y' = \frac{y}{x} + (\operatorname{ctg} x) y^2$$

$$y' = (2 \sin x) y + \frac{x^3}{y^4}$$

$$y' = 2x^2 y + (\ln x) \sqrt{y}$$

- Диференциални уравнения от вида

$$y' = a(x) y + b(x) y^m, \quad m \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати функции в даден интервал Δ , се наричат уравнения на Бернули.

- при $m = 0 \Rightarrow$ линейно уравнение;
- при $m = 1 \Rightarrow$ уравнение с разделящи се променливи;

► при $m \neq 0$; 1 първо разделяме двете страни на уравнението (4) с $y^m \neq 0$,

$$\frac{y'}{y^m} = a(x)y^{1-m} + b(x) \quad (5)$$

и полагаме

$$y^{1-m} = z, \quad z = z(x).$$

Диференцираме това равенство спрямо x , като не забравяме, че $y = y(x)$,

$$z' = (1-m)y^{1-m-1}y' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^m} = \frac{z'}{1-m}$$

и заместваме в (5). Получаваме

$$\frac{z'}{1-m} = a(x)z + b(x),$$

откъдето

$$z' = (1-m)a(x)z + (1-m)b(x).$$

Последното уравнение е линейно по отношение на z и решенията му можем да опишем с намерената формула. Накрая остава да отбележим, че $y = 0$ също е решение на (4) при $m > 0$.

Задача 2

Да се решат уравненията:

$$1) xy' + y = y^2 \ln x;$$

$$2) 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1};$$

$$3) xy' - 2x^3 \sqrt{y} = 4y;$$

$$4) y' x^3 \sin y = xy' - 2y.$$

Решение. 1) Имаме

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}y^2.$$

Това е уравнение от вида (4) с $m = 2$, $a(x) = -\frac{1}{x}$ и $b(x) = \frac{\ln x}{x}$.
Разделяме двете страни на уравнението с $y^2 \neq 0$ и намираме

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} + \frac{\ln x}{x}.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция $z = z(x)$,

$$z = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{1}{y^2}y'$$

и заместваме в последното уравнение. Получаваме

$$-z' = -\frac{1}{x}z + \frac{\ln x}{x},$$

откъдето

$$z' = \frac{1}{x}z - \frac{\ln x}{x}.$$

По формулата (3) намираме

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) \\ &= x \left(C - \int \frac{\ln x}{x^2} dx \right) \\ &= x \left(C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right), \end{aligned}$$

след интегриране по части. Като заместим z с $\frac{1}{y}$ получаваме

$$\frac{1}{y} = Cx + \ln x + 1.$$

Очевидно $y = 0$ също е решение на даденото уравнение.

2) Отг. $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$.

3) Отг. $y = x^4(C + x)^2$; $y = 0$.

4) Упътване. Имаме

$$y' = -\frac{2y}{x^3 \sin y - x},$$

откъдето

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y} x - \frac{\sin y}{2y} x^3.$$

Това е уравнение на Бернули спрямо x . Разделяме двете страни с $x^3 \neq 0$ и получаваме

$$\frac{x'}{x^3} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{\sin y}{2y}.$$

Въвеждаме нова неизвестна функция $z = z(y)$,

$$z = \frac{1}{x^2}, \quad z' = -\frac{2}{x^3} x'.$$

Заместваме и стигаме до линейно уравнение спрямо x , което отново решаваме с помощта на формула (3).

Отг. $x^2(C - \cos y) = y; \quad y = 0.$

Пример от икономиката

Не малко модели в икономиката се описват с диференциални уравнения.

Пример. Един от първите опростени модели на цикъл на растеж, разглеждан от Haavelmo (1956) изглежда по следния начин. Нека производствената функция е

$$Y = KN^{\alpha},$$

където Y е продукцията, $K > 0$ е капиталното вложение (фиксирано), а N е предлаганата работна сила.

Нарастването на заетостта се моделира като

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{Y}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Комбинирайки двете, получаваме нелинейно уравнение от първи ред

$$\dot{N} = \alpha N - \beta \frac{N^{2-\alpha}}{K},$$

което е уравнение на Бернули и се решава точно.