Линейни хомогенни диференциални уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти

Информатика, 2021/2022

- Уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = 0, \qquad (1)$$

$$(e^{\lambda x})^{(n)} + a_1 (e^{\lambda x})^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} (e^{\lambda x})' + a_n e^{\lambda x} \equiv 0 \quad \forall x$$

където $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, се нарича линейно хомогенно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти.

- Ще покажем, че за това уравнение съществуват частни решения от вида $y = e^{\lambda x}$, където λ е константа. Наистина, като заместим в (1) получаваме

$$\underline{(e^{\lambda x})^{(n)} + a_1\, (e^{\lambda x})^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, (e^{\lambda x})' + a_n\, e^{\lambda x} \equiv 0.}$$

От $(e^{\lambda x})^{(k)} = \lambda^k\, e^{\lambda x}$ следва, че горното равенство е еквивалентно на

$$e^{\lambda x} \left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n\right) \equiv 0.$$

$$\left(e^{\lambda x}\right)' = e^{\lambda x} \cdot (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$\left(e^{\lambda x}\right)'' = \left(\lambda e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x} (\lambda x)' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\vdots$$

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$$

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + a_2 \lambda^{n-2} e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} \equiv 0 \quad \forall x$$

$$\underset{\substack{\neq \\ 0}}{e^{\lambda x}} \left(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \right) \equiv 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow$ $y = e^{\lambda x}$ е реш на (1) $\Leftrightarrow$ λ удовл.

характеристично уравнение

$$\boxed{\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0}$$

пр. $y'' + 3y' + 4y = 0 \quad (*)$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 = \lambda_1 \\ -2 = \lambda_2 \end{cases}$$

$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(-1) \cdot x}$ е реш. на $(*)$

$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(-2) \cdot x}$ е реш. на $(*)$

? лин. незав. $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ (e^{-x})' & (e^{-2x})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{e^{-x} \cdot e^{-2x}}_{\neq 0} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = \underset{\neq 0}{e^{-3x}} \cdot (-2+1)$$

$$\neq 0$$

$\Rightarrow$ e^{-x} и e^{-2x} са лин. незав и обр. ф.с.р. (фундаментална система решения)

$\Rightarrow$ общото решение на ур-то $(*)$ е

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

Корените на характеристичното уравнение

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

се наричат характеристични корени

Делим двете страни на $e^{\lambda x}$ и получаваме за λ уравнението

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{2}$$

което се нарича характеристично уравнение за (1), а неговите корени – характеристични корени.

- Възможни са няколко случая за характеристичните корени.

I случай. Всички корени $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ са различни. Тогава функциите

$$y_i = e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

са n на брой решения на (1). Ще докажем, че те са линейно независими. За целта пресмятаме детерминантата на Вронски

$$
\begin{aligned}
W[e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}] &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\
&= e^{\lambda_1 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
&= \underset{\neq 0}{e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)x}} \prod_{1 \le i < j \le n} \underset{\neq}{(\lambda_i - \lambda_j)}. \quad \neq 0
\end{aligned}
$$

Очевидно, щом $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, то горната детерминанта е различна от 0.

Тогава, съгласно Теорема 3 от Лекция 7, функциите

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

са линейно независими и следователно образуват фундаментална система решения. Съгласно Теорема 7 от Лекция 7, общото решение на (1) е

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x},$$

където $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са произволни константи.

Забележка. (i) Ако уравнението (1) има за решение комплекснозначната функция $y(x) = u(x) + i\, v(x)$, то функциите $u(x)$ и $v(x)$ също са решения на това уравнение.

$\lambda = p + iq \quad , \quad p, q \in \mathbb{R}$

$$e^{\lambda x} = e^{(p+iq)x} = e^{px + iqx} = e^{px} \cdot e^{iqx} =$$

φ

$$= e^{px}\left(\cos qx + i \sin qx\right) =$$

$$= e^{px} \cos qx + i\, e^{px} \sin qx$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi \quad , \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

Тв

Ако $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ е с реални коефициенти, т.е. $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall i$ и $p + iq$ е корен на това ур-е, то $p - iq$ също е корен на ур-то.

$$e^{(p-iq)x} = e^{px}\left(\cos(-qx) + i \sin(-qx)\right) =$$

$$= e^{px}\left(\cos qx - i \sin qx\right)$$

$$= e^{px} \cos qx + i\left(-e^{px} \sin qx\right)$$

(ii) Ако характеристичното уравнение (2) има комплексен корен $p + iq$, то за решението $y = e^{(p+iq)x}$ по формулата на Ойлер имаме

$$e^{(p+iq)x} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$$

и като отделим реалната от имагинерната част получаваме, че реалните функции $e^{px} \cos qx$ и $e^{px} \sin qx$ също са решения на (1). Освен това непосредствено се проверява, че те са линейно независими (докажете го!).

Следователно, ако характеристичното уравнение (2) има комплексно спрегнати корени $p \pm iq$, то двойката комплекснозначни линейно независими функции

$$e^{(p+iq)x}, \ e^{(p-iq)x}$$

може да бъде заменена с двойката

$$e^{px} \cos qx, \ e^{px} \sin qx.$$

(511) $y'' + y' - 2y = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ характеристично ур-е

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$ характеристични корени

$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{1.x}$ $\quad$ $y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-2x}$

$$\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}} \quad (*)$$

общо решение на ур-то

$\Rightarrow y' = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x}$

<u>Задача Коши:</u>

$$\left| \begin{array}{l} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{array} \right.$$

$$1 = y(0) = C_1 \cdot e^{0} + C_2 e^{-2.0}$$

$$-1 = y'(0) = C_1 e^{0} - 2C_2 e^{-2.0}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1 = C_1 + C_2 \quad | \cdot 2 \\ -1 = C_1 - 2C_2 \end{array} \right.$$

$2 = 3C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}$

$1 = 3C_1 \Rightarrow C_1 = 1/3$

зам. с C_1 и C_2 в $(*)$

$$y = \frac{1}{3} e^{x} + \frac{2}{3} e^{-2x}$$

513

$$y'' - 2y' = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$y_1 = e^{0 \cdot x} \qquad y_2 = e^{2 \cdot x}$$

$$y = C_1 \cdot e^{0x} + C_2 e^{2x} = C_1 + C_2 e^{2x}$$

514

$$2y'' - 5y' + 2y = 0$$

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 & \rightarrow y_1 = e^{2x} \\ \frac{1}{2} & \rightarrow y_2 = e^{\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$$

515

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 \qquad \sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = \frac{\cancel{2}(2 \pm i)}{\cancel{2}} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 2 + i \qquad \lambda_2 = 2 - i$$

$$\downarrow$$

$$y_1 = e^{(2+i)x} \qquad y_2 = e^{(2-i)x}$$

$$\cancel{y = C_1 e^{(2+i)x} + C_2 e^{(2-i)x}}$$

е комплекснозначно;
търсим реални реш.

$$e^{(2+i)x} = e^{2x + ix} = e^{2x} \cdot e^{ix} = e^{2x}(\cos x + i \sin x)$$

$$= e^{2x}\cos x + i\, e^{2x} \sin x$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$y_1 \qquad\qquad y_2$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x =$$

$$= e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

516 $\quad y'' + 2y' + 10y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = \frac{\cancel{2}(-1 \pm 3i)}{\cancel{2}} = -1 \pm 3i$$

$$\lambda_1 = -1 + 3i, \qquad \lambda_2 = -1 - 3i$$

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(-1+3i)x} = e^{-x+3ix} =$$

$$= e^{-x}(\cos 3x + i \sin 3x)$$

$$= e^{-x}\cos 3x + ie^{-x}\sin 3x$$

$$y = c_1 e^{-x}\cos 3x + c_2 e^{-x}\sin 3x$$

5.7

$$y'' + 4y = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 2i, \qquad \lambda_2 = -2i$$

$$e^{\lambda_1 x} = e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$$

Ойлер
Euler

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

518 $\quad y''' - 8y = 0$

$$\lambda^3 - 8 = 0$$

$$\lambda^3 - 2^3 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

$\lambda - 2 = 0 \quad \cup \quad \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$

$\lambda_1 = 2 \qquad D = 4 - 16 = -12$

$$y_1 = e^{2x}$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm i\, 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= -1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\lambda_2 = -1 + i\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$e^{\lambda_2 x} = e^{-x}\left(\cos(\sqrt{3}x) + i \sin(\sqrt{3}x)\right)$$

$$= e^{-x}\cos\sqrt{3}x + i\,e^{-x}\sin\sqrt{3}x$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$y_2 \qquad\qquad y_3$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\cos(\sqrt{3}x) + C_3 e^{-x}\sin(\sqrt{3}x)$$

519 $\quad y^{IV} - y = 0$

$\lambda^4 - 1 = 0 \qquad\qquad \sqrt[4]{1}$ Моавр

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)\underbrace{(\lambda - i)(\lambda + i)} = 0$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1 \qquad \lambda_3 = i \qquad \lambda_4 = -i$

$y_1 = e^{1 \cdot x} \qquad y_2 = e^{-1 \cdot x} \qquad e^{\lambda_3 x} = \cos x + i\sin x$

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$$