

Числено решаване на обикновени диференциални уравнения

Дадени са следните задачи: (**a** и **b** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния номер)

а) $y' = y - (2 + a)\sin x$, $y(b) = a + b$, $x \in [b; b + 0.5]$

б) $y' = y - \ln(x^2 + 1) + \frac{2x}{x^2 + 1} + b$, $y(a) = a + b$, $x \in [a; a + 0.1]$

1. Да се намерят точните решения.

2. Да се решат по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки за а) при $h = 0.1$,

за б) при $n = 5$. Да се направи сравнение между точното решение и численото приближение. Да се представи геометрична интерпретация на резултатите.

3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи за всяка от задачите, за да се достигне точност за а) 10^{-4} , за б) 10^{-7} ?

Решение на а)

1. Да се намерят точните решения

Търсим общо решение:

In[1409]:=

```
Clear[x, y]
DSolve[y'[x] == y[x] - 3 Sin[x], y[x], x]
```

Out[1410]=

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow e^x c_1 + \frac{3}{2} (\cos[x] + \sin[x]) \right\} \right\}$$

Търсим частно решение:

In[1411]:=

```
Clear[x, y]
DSolve[{y'[x] == y[x] - 2 Sin[x], y[8] == 8}, y[x], x]
```

Out[1412]=

$$\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8} \right\} \right\}$$

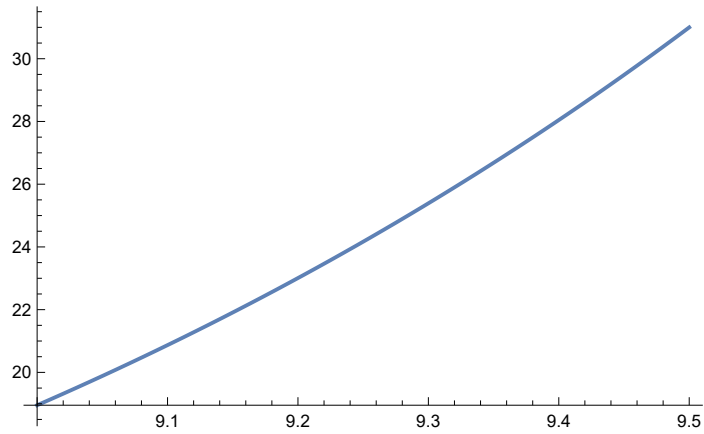
Визуализация на точното решение

In[1413]:=

$$yt[x_] := \frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

Plot[yt[x], {x, 9, 9.5}]

Out[1414]=



Извод: Не можем да намерим точно решение с аналитичен метод

2. Да се реши по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки при $h = 0.1$:

2.1. Ойлер

In[1415]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.01

Теоретичната глобална грешка е 0.1

$i = 0$ $x_i = 9.$ $y_i = 10.$ $f_i = 9.17576$ $y_{\text{точно}} = 18.9534$ Истинска грешка = 8.9534

$i = 1$ $x_i = 9.1$ $y_i = 10.9176$ $f_i = 10.2794$ $y_{\text{точно}} = 20.8696$ Истинска грешка = 9.95204

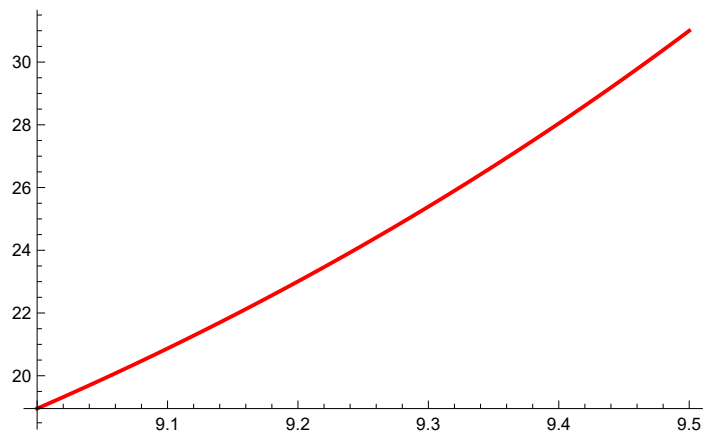
$i = 2$ $x_i = 9.2$ $y_i = 11.9455$ $f_i = 11.4997$ $y_{\text{точно}} = 23.0073$ Истинска грешка = 11.0618

$i = 3$ $x_i = 9.3$ $y_i = 13.0955$ $f_i = 12.8466$ $y_{\text{точно}} = 25.3902$ Истинска грешка = 12.2947

$i = 4$ $x_i = 9.4$ $y_i = 14.3801$ $f_i = 14.3306$ $y_{\text{точно}} = 28.0447$ Истинска грешка = 13.6645

$i = 5$ $x_i = 9.5$ $y_i = 15.8132$ $f_i = 15.9635$ $y_{\text{точно}} = 30.9993$ Истинска грешка = 15.1861

Out[1428]=



2.2. Модифициран метод на Ойлер

In[1429]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 = x +  $\frac{h}{2}$ ;
  y12 = y +  $\frac{h}{2}$  f[x, y];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " xi+1/2 = ", x12, " yi+1/2 = ", y12, " fi+1/2 = ",
    f[x12, y12], " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

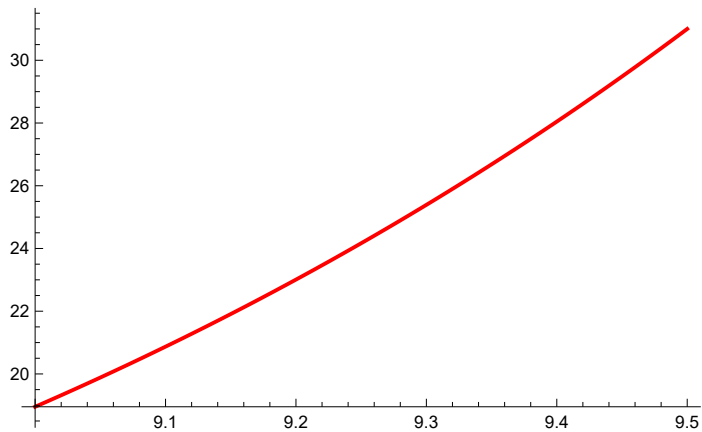
Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 9$ $y_i = 10$ $f_i = 9.17576$ $x_{i+1/2} = 9.05$ $y_{i+1/2} = 10.4588$ $f_{i+1/2} = 9.72666$ $y_{\text{точно}} = 18.9534$ Истинска грешка = 8.9534
 $i = 1$ $x_i = 9.1$ $y_i = 10.9727$ $f_i = 10.3345$ $x_{i+1/2} = 9.15$ $y_{i+1/2} = 11.4894$ $f_{i+1/2} = 10.9467$ $y_{\text{точно}} = 20.8696$ Истинска грешка = 9.89695
 $i = 2$ $x_i = 9.2$ $y_i = 12.0673$ $f_i = 11.6216$ $x_{i+1/2} = 9.25$ $y_{i+1/2} = 12.6484$ $f_{i+1/2} = 12.3006$ $y_{\text{точно}} = 23.0073$ Истинска грешка = 10.9399
 $i = 3$ $x_i = 9.3$ $y_i = 13.2974$ $f_i = 13.0485$ $x_{i+1/2} = 9.35$ $y_{i+1/2} = 13.9498$ $f_{i+1/2} = 13.8004$ $y_{\text{точно}} = 25.3902$ Истинска грешка = 12.0928
 $i = 4$ $x_i = 9.4$ $y_i = 14.6774$ $f_i = 14.6279$ $x_{i+1/2} = 9.45$ $y_{i+1/2} = 15.4088$ $f_{i+1/2} = 15.4593$ $y_{\text{точно}} = 28.0447$ Истинска грешка = 13.3672
 $i = 5$ $x_i = 9.5$ $y_i = 16.2234$ $f_i = 16.3737$ $x_{i+1/2} = 9.55$ $y_{i+1/2} = 17.0421$ $f_{i+1/2} = 17.2918$ $y_{\text{точно}} = 30.9993$ Истинска грешка = 14.7759

Out[1442]=



2.3. РК32 - Формула (1, 1)

In[1443]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 9$. $y_i = 10$. $f_i = 9.17576$ $k_1 = 0.917576$

$k_2 = 1.02794$ $y_{\text{точно}} = 18.9534$ Истинска грешка = 8.9534

$i = 1$ $x_i = 9.1$ $y_i = 10.9728$ $f_i = 10.3346$ $k_1 =$

1.03346 $k_2 = 1.15604$ $y_{\text{точно}} = 20.8696$ Истинска грешка = 9.89686

$i = 2$ $x_i = 9.2$ $y_i = 12.0675$ $f_i = 11.6217$ $k_1 =$

1.16217 $k_2 = 1.29808$ $y_{\text{точно}} = 23.0073$ Истинска грешка = 10.9398

$i = 3$ $x_i = 9.3$ $y_i = 13.2976$ $f_i = 13.0487$ $k_1 =$

1.30487 $k_2 = 1.4553$ $y_{\text{точно}} = 25.3902$ Истинска грешка = 12.0926

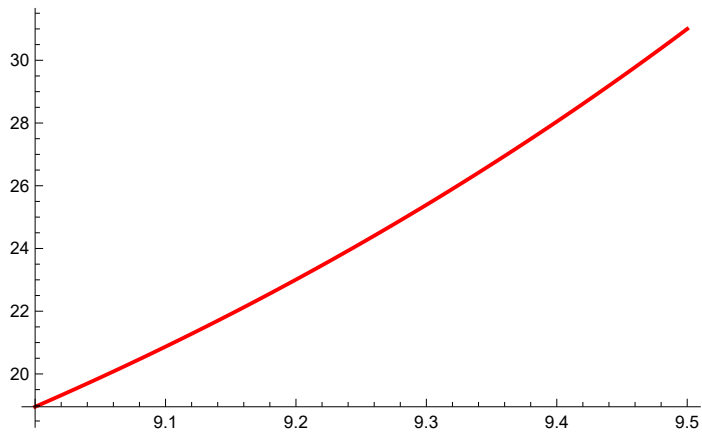
$i = 4$ $x_i = 9.4$ $y_i = 14.6777$ $f_i = 14.6282$ $k_1 =$

1.46282 $k_2 = 1.62908$ $y_{\text{точно}} = 28.0447$ Истинска грешка = 13.367

$i = 5$ $x_i = 9.5$ $y_i = 16.2237$ $f_i = 16.374$ $k_1 =$

1.6374 $k_2 = 1.82097$ $y_{\text{точно}} = 30.9993$ Истинска грешка = 14.7756

Out[145]=



2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

In[1457]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{2}{3}$  * h, y +  $\frac{2}{3}$  * k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{4}$  * k1 +  $\frac{3}{4}$  * k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.001

Теоретичната глобална грешка е 0.01

$i = 0$ $x_i = 9$. $y_i = 10$. $f_i = 9.17576$ $k_1 = 0.917576$

$k_2 = 0.991071$ $y_{\text{точно}} = 18.9534$ Истинска грешка = 8.9534

$i = 1$ $x_i = 9.1$ $y_i = 10.9727$ $f_i = 10.3345$ $k_1 =$

1.03345 $k_2 = 1.11512$ $y_{\text{точно}} = 20.8696$ Истинска грешка = 9.89692

$i = 2$ $x_i = 9.2$ $y_i = 12.0674$ $f_i = 11.6216$ $k_1 =$

1.16216 $k_2 = 1.25273$ $y_{\text{точно}} = 23.0073$ Истинска грешка = 10.9399

$i = 3$ $x_i = 9.3$ $y_i = 13.2975$ $f_i = 13.0486$ $k_1 =$

1.30486 $k_2 = 1.40512$ $y_{\text{точно}} = 25.3902$ Истинска грешка = 12.0928

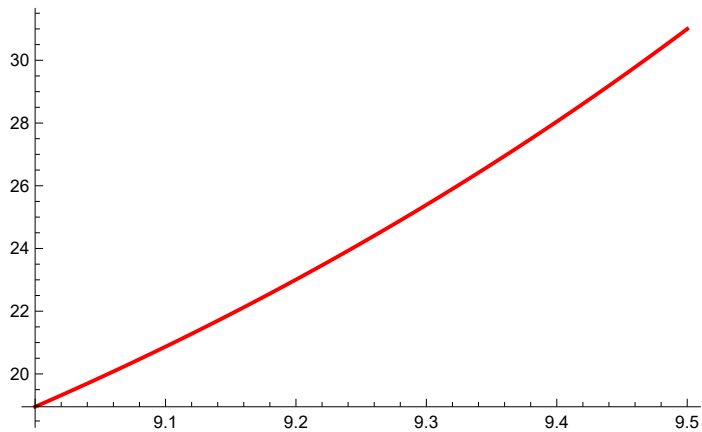
$i = 4$ $x_i = 9.4$ $y_i = 14.6775$ $f_i = 14.628$ $k_1 =$

1.4628 $k_2 = 1.57365$ $y_{\text{точно}} = 28.0447$ Истинска грешка = 13.3671

$i = 5$ $x_i = 9.5$ $y_i = 16.2235$ $f_i = 16.3738$ $k_1 =$

1.63738 $k_2 = 1.75979$ $y_{\text{точно}} = 30.9993$ Истинска грешка = 14.7758

Out[1470]=



2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

In[1471]:=

```

a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
h = 0.1; n =  $\frac{b - a}{h}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]
(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k1}{2}$ ];
  k3 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k2}{2}$ ];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ",
    k4, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]
(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$. и стъпка $h = 0.1$

Теоретичната локална грешка е 0.00001

Теоретичната глобална грешка е 0.0001

$i = 0$ $x_i = 9$. $y_i = 10$. $f_i = 9.17576$ $k_1 = 0.917576$ $k_2 = 0.972666$

$k_3 = 0.97542$ $k_4 = 1.03372$ $y_{\text{точно}} = 18.9534$ Истинска грешка = 8.9534

$i = 1$ $x_i = 9.1$ $y_i = 10.9746$ $f_i = 10.3364$ $k_1 = 1.03364$ $k_2 = 1.09487$

$k_3 = 1.09793$ $k_4 = 1.16267$ $y_{\text{точно}} = 20.8696$ Истинска грешка = 9.89504

$i = 2$ $x_i = 9.2$ $y_i = 12.0716$ $f_i = 11.6258$ $k_1 = 1.16258$ $k_2 =$

1.23051 $k_3 = 1.2339$ $k_4 = 1.30566$ $y_{\text{точно}} = 23.0073$ Истинска грешка = 10.9357

$i = 3$ $x_i = 9.3$ $y_i = 13.3044$ $f_i = 13.0555$ $k_1 = 1.30555$ $k_2 = 1.38078$

$k_3 = 1.38454$ $k_4 = 1.46394$ $y_{\text{точно}} = 25.3902$ Истинска грешка = 12.0858

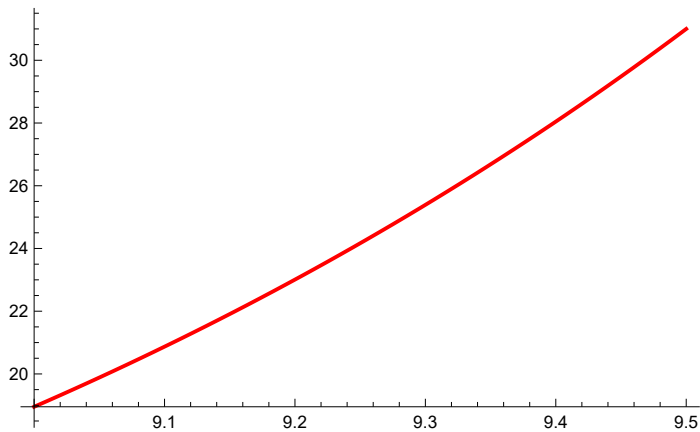
$i = 4$ $x_i = 9.4$ $y_i = 14.6878$ $f_i = 14.6382$ $k_1 = 1.46382$ $k_2 = 1.54701$

$k_3 = 1.55117$ $k_4 = 1.63892$ $y_{\text{точно}} = 28.0447$ Истинска грешка = 13.3569

$i = 5$ $x_i = 9.5$ $y_i = 16.2376$ $f_i = 16.3879$ $k_1 = 1.63879$ $k_2 = 1.73068$

$k_3 = 1.73527$ $k_4 = 1.83215$ $y_{\text{точно}} = 30.9993$ Истинска грешка = 14.7617

Out[1484]=



3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи, за да се достигне точност 10^{-4}

2.1. Ойлер

In[1485]:=

a = 9.; b = 9.5;

Clear[n]

Reduce $\left[\frac{b-a}{n} \leq 10^{-4}\right]$

... **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numerizing the result.

Out[1487]=

$n < 0 \mid n \geq 5000.$

In[1488]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5000; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
Мрежата е с n = 5000 и стъпка h = 0.0001
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-8}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0001

```


2.2. Модифициран метод на Ойлер

In[1498]:=

```

a = 9.; b = 9.5;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{b - a}{n} \leq 10^{-4}$ ]

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1500]=

```
n < 0 || n ≥ 5000.
```

In[1501]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5000; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
Мрежата е с n = 5000 и стъпка h = 0.0001
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-12}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $1. \times 10^{-8}$ 

```


2.3. РК32 - Формула (1, 1)

In[1511]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-4}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1512]=

$n \leq -50. \mid \mid n \geq 50.$

In[1513]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 50; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]
Мрежата е с n = 50 и стъпка h = 0.01
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-6}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0001

```


2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

In[1523]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-4}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1524]=

$n \leq -50. \mid \mid n \geq 50.$

In[1525]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 50; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

Мрежата е с n = 50 и стъпка h = 0.01
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-6}$ 
Теоретичната глобална грешка е 0.0001

```


2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

In[1535]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^4 \leq 10^{-4}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1536]=

$n \leq -5. \mid \mid n \geq 5.$

In[1537]:=

```

a = 9.; b = 9.5;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - 2 Sin[x]
(*Точно решение*)
yt[x_] := 
$$\frac{8 e^x - e^x \cos[8] + e^8 \cos[x] - e^x \sin[8] + e^8 \sin[x]}{e^8}$$

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h = 
$$\frac{b - a}{n}$$
;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]

Мрежата е с n = 5 и стъпка h = 0.1
Теоретичната локална грешка е 0.00001
Теоретичната глобална грешка е 0.0001

```

Решение на б)

1. Да се намерят точните решения

Търсим общо решение:

In[1547]:=

```

Clear[x, y]
DSolve[y' [x] == y[x] - Log[x2 + 1] + 
$$\frac{2 x}{x^2 + 1} + 8, y[x], x]$$


```

Out[1548]=

```
{ {y[x] → -8 + ex c1 + Log[1 + x2] } }
```

Търсим частно решение:

In[1549]:=

```

Clear[x, y]
DSolve[{y' [x] == y[x] - Log[x2 + 1] + 
$$\frac{2 x}{x^2 + 1} + 8, y[0] == 8}, y[x], x]$$


```

Out[1550]=

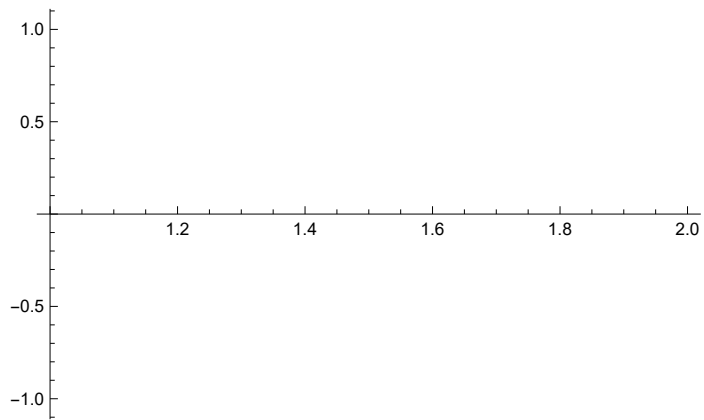
```
{ {y[x] → -8 + 16 ex + Log[1 + x2] } }
```

Визуализация на точното решение

In[1551]:=

```
yt[x_] := y[x] → -8 + 16 ex + Log[1 + x2]  
Plot[yt[x], {x, 1, 2}]
```

Out[1552]=



2. Да се реши по методите: Ойлер, модифициран Ойлер, Рунге-Кута (1, 1), Рунге-Кута (2/3, 2/3), Рунге-Кута с 4 междинни точки при $n = 5$:

2.1. Ойлер

In[1553]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] → -8 + e^x c1 + Log[1 + x^2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]

(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " уточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x, y];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.04

Теоретичната глобална грешка е 0.2

$i = 0$ $x_i = 1.$ $y_i = 10.$ $f_i = 18.3069$ $y_{\text{точно}} = 10. [1.] \rightarrow$

$-7.30685 + 2.71828 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[10. - (10. [1.] \rightarrow -7.30685 + 2.71828 c_1)]$

$i = 1$ $x_i = 1.2$ $y_i = 13.6614$ $f_i = 21.753$ $y_{\text{точно}} = 13.6614 [1.2] \rightarrow$

$-7.108 + 3.32012 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[13.6614 - (13.6614 [1.2] \rightarrow -7.108 + 3.32012 c_1)]$

$i = 2$ $x_i = 1.4$ $y_i = 18.012$ $f_i = 25.8727$ $y_{\text{точно}} = 18.012 [1.4] \rightarrow$

$-6.91481 + 4.0552 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[18.012 - (18.012 [1.4] \rightarrow -6.91481 + 4.0552 c_1)]$

$i = 3$ $x_i = 1.6$ $y_i = 23.1865$ $f_i = 30.8156$ $y_{\text{точно}} = 23.1865 [1.6] \rightarrow$

$-6.73024 + 4.95303 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[23.1865 - (23.1865 [1.6] \rightarrow -6.73024 + 4.95303 c_1)]$

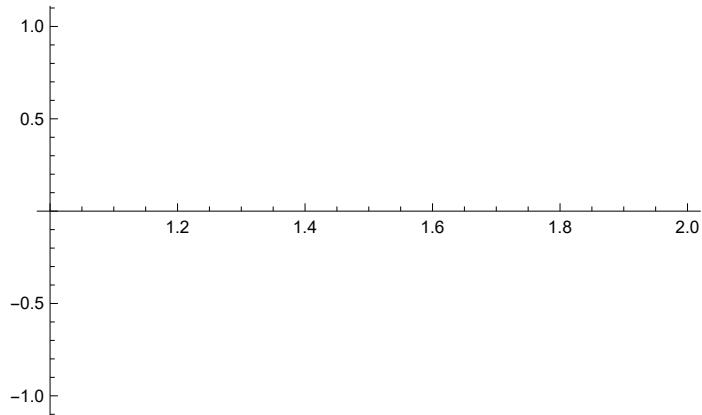
$i = 4$ $x_i = 1.8$ $y_i = 29.3496$ $f_i = 36.7541$ $y_{\text{точно}} = 29.3496 [1.8] \rightarrow$

$-6.55544 + 6.04965 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[29.3496 - (29.3496 [1.8] \rightarrow -6.55544 + 6.04965 c_1)]$

$i = 5$ $x_i = 2.$ $y_i = 36.7005$ $f_i = 43.891$ $y_{\text{точно}} = 36.7005 [2.] \rightarrow$

$-6.39056 + 7.38906 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[36.7005 - (36.7005 [2.] \rightarrow -6.39056 + 7.38906 c_1)]$

Out[1566]=



2.2. Модифициран метод на Ойлер

In[1567]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] → -8 + e^x c1 + Log[1 + x^2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  x12 = x +  $\frac{h}{2}$ ;
  y12 = y +  $\frac{h}{2}$  f[x, y];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " xi+1/2 = ", x12, " yi+1/2 = ", y12, " fi+1/2 = ",
    f[x12, y12], " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y + h * f[x12, y12];
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 1.$ $y_i = 10.$ $f_i = 18.3069$ $x_{i+1/2} = 1.1$ $y_{i+1/2} = 11.8307$ $f_{i+1/2} = 20.0332$ $y_{\text{точно}} = 10. [1.] \rightarrow -7.30685 + 2.71828 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[10. - (10. [1.] \rightarrow -7.30685 + 2.71828 c_1)]$

$i = 1$ $x_i = 1.2$ $y_i = 14.0066$ $f_i = 22.0982$
 $x_{i+1/2} = 1.3$ $y_{i+1/2} = 16.2165$ $f_{i+1/2} = 24.1935$ $y_{\text{точно}} = 14.0066 [1.2] \rightarrow -7.108 + 3.32012 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[14.0066 - (14.0066 [1.2] \rightarrow -7.108 + 3.32012 c_1)]$

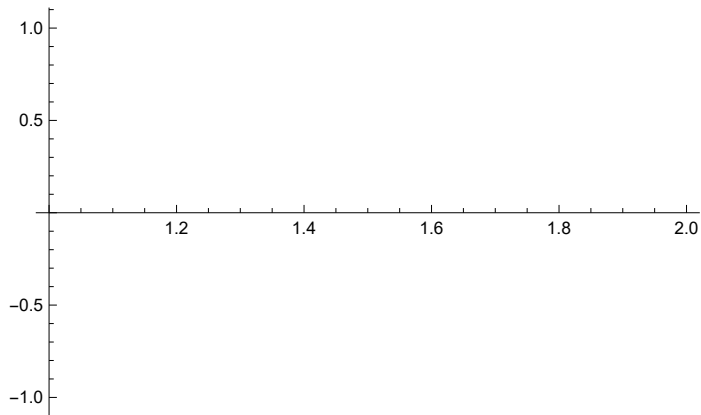
$i = 2$ $x_i = 1.4$ $y_i = 18.8453$ $f_i = 26.7061$
 $x_{i+1/2} = 1.5$ $y_{i+1/2} = 21.5159$ $f_{i+1/2} = 29.2604$ $y_{\text{точно}} = 18.8453 [1.4] \rightarrow -6.91481 + 4.0552 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[18.8453 - (18.8453 [1.4] \rightarrow -6.91481 + 4.0552 c_1)]$

$i = 3$ $x_i = 1.6$ $y_i = 24.6974$ $f_i = 32.3265$
 $x_{i+1/2} = 1.7$ $y_{i+1/2} = 27.93$ $f_{i+1/2} = 35.4457$ $y_{\text{точно}} = 24.6974 [1.6] \rightarrow -6.73024 + 4.95303 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[24.6974 - (24.6974 [1.6] \rightarrow -6.73024 + 4.95303 c_1)]$

$i = 4$ $x_i = 1.8$ $y_i = 31.7865$ $f_i = 39.191$ $x_{i+1/2} = 1.9$ $y_{i+1/2} = 35.7056$ $f_{i+1/2} = 43.0017$ $y_{\text{точно}} = 31.7865 [1.8] \rightarrow -6.55544 + 6.04965 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[31.7865 - (31.7865 [1.8] \rightarrow -6.55544 + 6.04965 c_1)]$

$i = 5$ $x_i = 2.$ $y_i = 40.3869$ $f_i = 47.5774$
 $x_{i+1/2} = 2.1$ $y_{i+1/2} = 45.1446$ $f_{i+1/2} = 52.2327$ $y_{\text{точно}} = 40.3869 [2.] \rightarrow -6.39056 + 7.38906 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[40.3869 - (40.3869 [2.] \rightarrow -6.39056 + 7.38906 c_1)]$

Out[1580]=



2.3. РК32 - Формула (1, 1)

In[1581]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] → -8 + e^x c1 + Log[1 + x^2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x + h, y + k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{2}$  (k1 + k2);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 1.$ $y_i = 10.$ $f_i = 18.3069$ $k_1 = 3.66137$ $k_2 = 4.3506$ $y_{\text{точно}} = 10. [1.] \rightarrow$
 $-7.30685 + 2.71828 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[10. - (10. [1.] \rightarrow -7.30685 + 2.71828 c_1)]$

$i = 1$ $x_i = 1.2$ $y_i = 14.006$ $f_i = 22.0976$ $k_1 = 4.41952$ $k_2 = 5.25725$ $y_{\text{точно}} = 14.006 [1.2] \rightarrow$
 $-7.108 + 3.32012 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[14.006 - (14.006 [1.2] \rightarrow -7.108 + 3.32012 c_1)]$

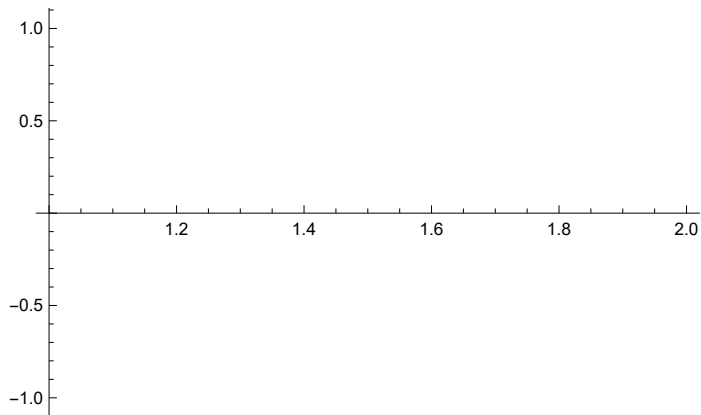
$i = 2$ $x_i = 1.4$ $y_i = 18.8444$ $f_i = 26.7051$ $k_1 = 5.34102$ $k_2 = 6.3629$ $y_{\text{точно}} = 18.8444 [1.4] \rightarrow$
 $-6.91481 + 4.0552 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[18.8444 - (18.8444 [1.4] \rightarrow -6.91481 + 4.0552 c_1)]$

$i = 3$ $x_i = 1.6$ $y_i = 24.6963$ $f_i = 32.3254$ $k_1 = 6.46509$ $k_2 = 7.71318$ $y_{\text{точно}} = 24.6963 [1.6] \rightarrow$
 $-6.73024 + 4.95303 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[24.6963 - (24.6963 [1.6] \rightarrow -6.73024 + 4.95303 c_1)]$

$i = 4$ $x_i = 1.8$ $y_i = 31.7855$ $f_i = 39.19$ $k_1 = 7.83799$ $k_2 = 9.3628$ $y_{\text{точно}} = 31.7855 [1.8] \rightarrow$
 $-6.55544 + 6.04965 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[31.7855 - (31.7855 [1.8] \rightarrow -6.55544 + 6.04965 c_1)]$

$i = 5$ $x_i = 2.$ $y_i = 40.3859$ $f_i = 47.5764$ $k_1 = 9.51529$ $k_2 = 11.378$ $y_{\text{точно}} = 40.3859 [2.] \rightarrow$
 $-6.39056 + 7.38906 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[40.3859 - (40.3859 [2.] \rightarrow -6.39056 + 7.38906 c_1)]$

Out[1594]=



2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

In[1595]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] → -8 + ex c1 + Log[1 + x2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{2}{3}$  * h, y +  $\frac{2}{3}$  * k1];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ", f[x, y], " k1 = ", k1,
    " k2 = ", k2, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{4}$  * k1 +  $\frac{3}{4}$  * k2;
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.008

Теоретичната глобална грешка е 0.04

$i = 0$ $x_i = 1.$ $y_i = 10.$ $f_i = 18.3069$ $k_1 = 3.66137$ $k_2 = 4.1214$ $y_{\text{точно}} = 10. [1.] \rightarrow$
 $-7.30685 + 2.71828 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[10. - (10. [1.] \rightarrow -7.30685 + 2.71828 c_1)]$

$i = 1$ $x_i = 1.2$ $y_i = 14.0064$ $f_i = 22.098$ $k_1 = 4.4196$ $k_2 = 4.97823$ $y_{\text{точно}} = 14.0064 [1.2] \rightarrow$
 $-7.108 + 3.32012 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[14.0064 - (14.0064 [1.2] \rightarrow -7.108 + 3.32012 c_1)]$

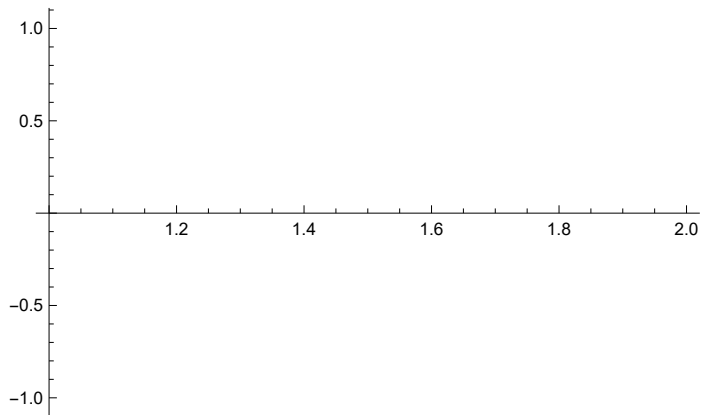
$i = 2$ $x_i = 1.4$ $y_i = 18.845$ $f_i = 26.7057$ $k_1 = 5.34114$ $k_2 = 6.02231$ $y_{\text{точно}} = 18.845 [1.4] \rightarrow$
 $-6.91481 + 4.0552 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[18.845 - (18.845 [1.4] \rightarrow -6.91481 + 4.0552 c_1)]$

$i = 3$ $x_i = 1.6$ $y_i = 24.697$ $f_i = 32.3261$ $k_1 = 6.46522$ $k_2 = 7.29709$ $y_{\text{точно}} = 24.697 [1.6] \rightarrow$
 $-6.73024 + 4.95303 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[24.697 - (24.697 [1.6] \rightarrow -6.73024 + 4.95303 c_1)]$

$i = 4$ $x_i = 1.8$ $y_i = 31.7861$ $f_i = 39.1906$ $k_1 = 7.83812$ $k_2 = 8.85442$ $y_{\text{точно}} = 31.7861 [1.8] \rightarrow$
 $-6.55544 + 6.04965 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[31.7861 - (31.7861 [1.8] \rightarrow -6.55544 + 6.04965 c_1)]$

$i = 5$ $x_i = 2.$ $y_i = 40.3864$ $f_i = 47.577$ $k_1 = 9.5154$ $k_2 = 10.7569$ $y_{\text{точно}} = 40.3864 [2.] \rightarrow$
 $-6.39056 + 7.38906 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[40.3864 - (40.3864 [2.] \rightarrow -6.39056 + 7.38906 c_1)]$

Out[1608]=



2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

In[1609]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] → -8 + ex c1 + Log[1 + x2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 5; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]

(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
  k1 = h * f[x, y];
  k2 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k1}{2}$ ];
  k3 = h * f[x +  $\frac{h}{2}$ , y +  $\frac{k2}{2}$ ];
  k4 = h * f[x + h, y + k3];
  Print["i = ", i, " xi = ", x, " yi = ", y, " fi = ",
    f[x, y], " k1 = ", k1, " k2 = ", k2, " k3 = ", k3, " k4 = ",
    k4, " yточно = ", yt[x], " Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
  y = y +  $\frac{1}{6}$  (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4);
  x = x + h;
  AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]

```

Мрежата е с $n = 5$ и стъпка $h = 0.2$

Теоретичната локална грешка е 0.00032

Теоретичната глобална грешка е 0.0016

$i = 0$ $x_i = 1.$ $y_i = 10.$ $f_i = 18.3069$ $k_1 = 3.66137$ $k_2 = 4.00663$ $k_3 = 4.04116$ $k_4 = 4.42655$ $y_{\text{точно}} = 10.$ $[1.] \rightarrow -7.30685 + 2.71828 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[10. - (10. [1.] \rightarrow -7.30685 + 2.71828 c_1)]$

$i = 1$ $x_i = 1.2$ $y_i = 14.0306$ $f_i = 22.1222$ $k_1 = 4.42444$ $k_2 = 4.84396$ $k_3 = 4.88591$ $k_4 = 5.35545$ $y_{\text{точно}} = 14.0306$ $[1.2] \rightarrow -7.108 + 3.32012 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[14.0306 - (14.0306 [1.2] \rightarrow -7.108 + 3.32012 c_1)]$

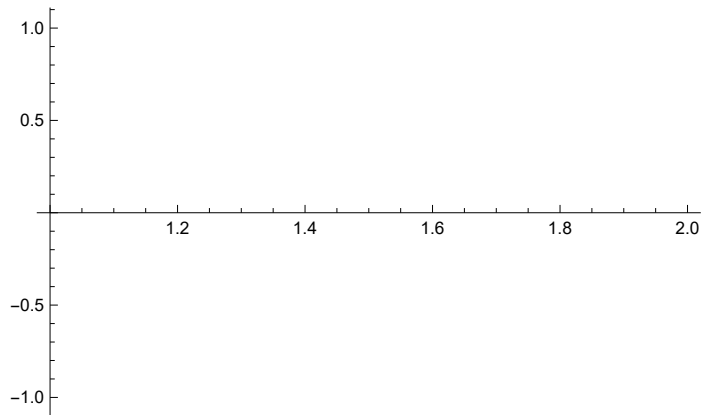
$i = 2$ $x_i = 1.4$ $y_i = 18.9039$ $f_i = 26.7646$ $k_1 = 5.35292$ $k_2 = 5.86495$ $k_3 = 5.91615$ $k_4 = 6.48983$ $y_{\text{точно}} = 18.9039$ $[1.4] \rightarrow -6.91481 + 4.0552 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[18.9039 - (18.9039 [1.4] \rightarrow -6.91481 + 4.0552 c_1)]$

$i = 3$ $x_i = 1.6$ $y_i = 24.8047$ $f_i = 32.4338$ $k_1 = 6.48676$ $k_2 = 7.11274$ $k_3 = 7.17534$ $k_4 = 7.8769$ $y_{\text{точно}} = 24.8047$ $[1.6] \rightarrow -6.73024 + 4.95303 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[24.8047 - (24.8047 [1.6] \rightarrow -6.73024 + 4.95303 c_1)]$

$i = 4$ $x_i = 1.8$ $y_i = 31.9613$ $f_i = 39.3658$ $k_1 = 7.87316$ $k_2 = 8.63879$ $k_3 = 8.71536$ $k_4 = 9.57345$ $y_{\text{точно}} = 31.9613$ $[1.8] \rightarrow -6.55544 + 6.04965 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[31.9613 - (31.9613 [1.8] \rightarrow -6.55544 + 6.04965 c_1)]$

$i = 5$ $x_i = 2.$ $y_i = 40.6538$ $f_i = 47.8444$ $k_1 = 9.56887$ $k_2 = 10.5053$ $k_3 = 10.5989$ $k_4 = 11.6483$ $y_{\text{точно}} = 40.6538$ $[2.] \rightarrow -6.39056 + 7.38906 c_1$ Истинска грешка = $\text{Abs}[40.6538 - (40.6538 [2.] \rightarrow -6.39056 + 7.38906 c_1)]$

Out[1622]=



3. Колко би трябвало да са n и h за всеки един от посочените методи, за да се достигне точност 10^{-7}

2.1. Ойлер

In[1623]:=

```
a = 1.; b = 2.;
```

```
Clear[n]
```

```
Reduce[ $\frac{b-a}{n} \leq 10^{-7}$ ]
```

Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1625]=

```
 $n < 0 \mid \mid n \geq 1. \times 10^7$ 
```

In[1626]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
```

```
a = 1.; b = 2.;
```

```
x = a;
```

```
y = 10.;
```

```
points = {{x, y}};
```

```
f[x_, y_] := y - Log[x2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8
```

```
(*Точно решение*)
```

```
yt[x_] := y[x] → -8 + ex c1 + Log[1 + x2]
```

```
(*Съставяме мрежата*)
```

```
 $n = 10^7$ ;  $h = \frac{b-a}{n}$ ;
```

```
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]
```

```
(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
```

```
Print["Теоретичната локална грешка е ", h2]
```

```
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]
```

```
Мрежата е с n = 10 000 000 и стъпка h = 1. × 10-7
```

```
Теоретичната локална грешка е 1. × 10-14
```

```
Теоретичната глобална грешка е 1. × 10-7
```

2.2. Модифициран метод на Ойлер

In[1636]:=

```
a = 1.; b = 2.;
Clear[n]
Reduce[ $\frac{b-a}{n} \leq 10^{-7}$ ]
```

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1638]=

$n < 0 \mid \mid n \geq 1. \times 10^7$

In[1639]:=

```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] -> -8 + e^x c1 + Log[1 + x^2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 10^7; h =  $\frac{b-a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

Мрежата е с n = 10000000 и стъпка h =  $1. \times 10^{-7}$ 
Теоретичната локална грешка е  $1. \times 10^{-21}$ 
Теоретичната глобална грешка е  $1. \times 10^{-14}$ 
```

2.3. РК32 - Формула (1, 1)

In[1649]:=

```
Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \leq 10^{-7}, n]$ 
```

... Reduce: Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1650]=

$n \leq -3162.28 \mid \mid n \geq 3162.28$

In[1651]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] → -8 + ex c1 + Log[1 + x2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 3163; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

Мрежата е с n = 3163 и стъпка h = 0.000316156
Теоретичната локална грешка е 3.16011×10-11
Теоретичната глобална грешка е 9.99543×10-8

```


2.4. РК32 - Формула (2/3, 2/3)

In[1661]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^2 \leq 10^{-7}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1662]=

$n \leq -3162.28 \mid \mid n \geq 3162.28$

In[1663]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x^2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] → -8 + ex c1 + Log[1 + x2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 3163; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h2]

Мрежата е с n = 3163 и стъпка h = 0.000316156
Теоретичната локална грешка е 3.16011×10-11
Теоретичната глобална грешка е 9.99543×10-8

```


2.5. РК54 - Формула с четири междинни точки

In[1673]:=

```

Clear[n]
Reduce[ $\left(\frac{b - a}{n}\right)^4 \leq 10^{-7}, n]$ 

```

 **Reduce:** Reduce was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[1674]=

$n \leq -56.2341 \mid \mid n \geq 56.2341$

In[1675]:=

```

(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 1.; b = 2.;
x = a;
y = 10.;
points = {{x, y}};

f[x_, y_] := y - Log[x2 + 1] +  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  + 8

(*Точно решение*)
yt[x_] := y[x] → -8 + ex c1 + Log[1 + x2]

(*Съставяме мрежата*)
n = 57; h =  $\frac{b - a}{n}$ ;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка е ", h5]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h4]

Мрежата е с n = 57 и стъпка h = 0.0175439
Теоретичната локална грешка е 1.66198×10-9
Теоретичната глобална грешка е 9.47328×10-8

```