Метод на Якоби (простата итерация) за решаване на СЛАУ

Задача 1: Дадена е системата линейни алгебрични уравнения (СЛАУ) A.x = b, където векторът от свободни членове b има вида b = (p, q, $p + q)^T$ (в случая p = 1, q = 9) и

$$A = \begin{pmatrix} 10+p & 1 & 2 \\ 5 & p+q+11 & 3 \\ p & q & 22+q \end{pmatrix}$$

По метода на Якоби (проста итерация):

1. Постройте итерационния процес и разпишете покоординатно.
2. Проверете условията на метода.
3. Направете 3 итерации
4. Какъв е минималния брой итерации за достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)} = (-10, 0, 10)^T$?

In[1]:=
```
A = {{11, 1, 2}, {5, 21, 3}, {1, 9, 31}}; b = {1, 9, 10};
```

In[2]:=
```
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

```
За сравнение, точното решение е {0.0173077, 0.394822, 0.207396}
```

---

1. Конструиране на метода - получаване на матрицата **B** и вектора **c**

In[6]:=
```
n = Length[A];
```

In[7]:=
```
c = Table[0, n];
```

In[8]:=
```
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
```

In[9]:=
```
For[i = 1, i ≤ n, i++,
  B[[i]] = -A[[i]]/A[[i, i]];
  B[[i, i]] = 0;
  c[[i]] = b[[i]]/A[[i, i]]
]
```

In[10]:=
```
Print["Итерационния процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ".x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

Итерационния процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0. & -0.0909091 & -0.181818 \\ -0.238095 & 0. & -0.142857 \\ -0.0322581 & -0.290323 & 0. \end{pmatrix} .x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0.0909091 \\ 0.428571 \\ 0.322581 \end{pmatrix}$

2. Проверка на условията за сходимост

Първа норма

In[11]:= $N\left[\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Abs}[B[[i,j]]], \{i, n\}\right]\right]\right]$

Out[11]=

0.380952

Втора норма

In[12]:= $N\left[\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[B[[i,j]]], \{j, n\}\right]\right]\right]$

Out[12]=

0.381232

Трета норма

In[13]:= $N\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B[[i,j]]^2}\right]$

Out[13]=

0.451384

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е втора.

3. Извършваме итерациите

In[14]:=
```
x = {12, 10, -4.8};
```

In[15]:=
```
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
 Print["k = ", k , " x^(k) = ", N[x]];
 x = B.x + c
]
```

k = 0 $x^{(k)}$ = {12., 10., -4.8}

k = 1 $x^{(k)}$ = {0.0545455, -1.74286, -2.96774}

k = 2 $x^{(k)}$ = {0.78894, 0.839548, 0.826812}

k = 3 $x^{(k)}$ = {-0.135743, 0.122613, 0.0533914}

In[16]:=
```
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

```
За сравнение, точното решение е {0.0173077, 0.394822, 0.207396}
```

4. Какъв е минималния брой итерации за достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)}$ = (-10, 0, 10)^T?

In[ ]:=
```
A = (11 1 2
     5 21 3
     1 9 31); b = {1, 9, 10};

(*инициализация на матрицата B и вектора c*)
n = Length[A];
c = Table[0, n];
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = - A[[i]] / A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]] / A[[i, i]]
]
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]

(*проверка на сходимост
 и избор на норма - отделно*)

x = {-10, 0, 10};
N[10^-5] (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]]];
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 17, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", N[x], " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc / (1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{5}{21} & 0 & -\frac{1}{7} \\ -\frac{1}{31} & -\frac{9}{31} & 0 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{3}{7} \\ \frac{10}{31} \end{pmatrix}$

Out[∘]=

0.00001

k = 0 $x^{(k)}$ = {-10., 0., 10.} ε_k = 21.3609

k = 1 $x^{(k)}$ = {-1.72727, 1.38095, 0.645161} ε_k = 8.14344

k = 2 $x^{(k)}$ = {-0.151934, 0.747661, -0.0226225} ε_k = 3.10454

k = 3 $x^{(k)}$ = {0.0270531, 0.467978, 0.110419} ε_k = 1.18355

k = 4 $x^{(k)}$ = {0.0282895, 0.406356, 0.185843} ε_k = 0.451206

k = 5 $x^{(k)}$ = {0.0201779, 0.395287, 0.203694} ε_k = 0.172014

k = 6 $x^{(k)}$ = {0.0179387, 0.394668, 0.207169} ε_k = 0.0655772

k = 7 $x^{(k)}$ = {0.0173631, 0.394705, 0.207421} ε_k = 0.0250001

k = 8 $x^{(k)}$ = {0.0173139, 0.394806, 0.207429} ε_k = 0.00953083

k = 9 $x^{(k)}$ = {0.0173033, 0.394816, 0.207401} ε_k = 0.00363345

k = 10 $x^{(k)}$ = {0.0173074, 0.394823, 0.207398} ε_k = 0.00138519

k = 11 $x^{(k)}$ = {0.0173073, 0.394822, 0.207396} ε_k = 0.000528077

k = 12 $x^{(k)}$ = {0.0173077, 0.394823, 0.207397} ε_k = 0.00020132

k = 13 $x^{(k)}$ = {0.0173077, 0.394822, 0.207396} ε_k = 0.0000767495

k = 14 $x^{(k)}$ = {0.0173077, 0.394822, 0.207396} ε_k = 0.0000292593

k = 15 $x^{(k)}$ = {0.0173077, 0.394822, 0.207396} ε_k = 0.0000111546

k = 16 $x^{(k)}$ = {0.0173077, 0.394822, 0.207396} ε_k = 4.25248×10^{-6}

k = 17 $x^{(k)}$ = {0.0173077, 0.394822, 0.207396} ε_k = 1.62118×10^{-6}

За сравнение, точното решение е {0.0173077, 0.394822, 0.207396}

Извод: За достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)} = (-10, 0, 10)^T$ са необходими 13 итерации.