# Производна на функция

Нека е дадена функцията $f:X\to\mathbb{R}, X\subset\mathbb{R}$ и нека $x_0$ е точка на сгъстяване на $X$, $x_0\in X$.

**Определение:** Производна на функцията $y=f(x)$ в точката $x_0$ се нарича границата

$$f'(x_0)\overset{def}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

при условие, че съществува, а функцията в този случай се нарича диференцируема в точката $x_0$.

## *Основни правила за диференциране:*

Нека са дадени функциите $f,g:X\to\mathbb{R}$ и нека са диференцируеми в точка от дефиниционното си множество. Тогава:

- $(c.f)'=c.f'$, където $c=const.$.
- $(f\pm g)'=f'\pm g'$.
- $(f.g)'=f'.g+f.g'$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$.
- $(f(g))'=f_g'.g'$, където $g=g(x)$.

**Забележка:** Производни на функции от вида $f^g$ се намират като предварително се представят във вида $f^g=e^{g\ln f}$

## *Основни формули за диференциране:*

| | |
|---|---|
| 1) $(const)'=0$ | За $u=u(x)$ |
| 2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ | 2) $(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}.u'$, $\alpha\in\mathbb{R}$ |
| 3) $(a^x)'=a^x.\ln a$, $0<a\neq 1$ | 3) $(a^u)'=a^u.\ln a.u'$, $0<a\neq 1$ |
| 4) $(e^x)'=e^x$ | 4) $(e^u)'=e^u.u'$ |
| 5) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, $x>0,\ 0<a\neq 1$<br>$(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $x>0$ | 5) $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}.u'$, $u>0,\ 0<a\neq 1$<br>$(\ln u)'=\frac{1}{u}.u'$, $u>0$ |
| 6) $(\sin x)'=\cos x$ | 6) $(\sin u)'=\cos u.u'$ |
| 7) $(\cos x)'=-\sin x$ | 7) $(\cos u)'=-\sin u.u'$ |
| 8) $(tg\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ | 8) $(tg\,u)'=\frac{1}{\cos^2 u}.u'$, $u\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ |
| 9) $(cotg\,x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$, $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ | 9) $(cotg\,u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}.u'$, $u\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ |
| 10) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$ | 10) $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$, $u\in(-1,1)$ |
| 11) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$ | 11) $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.u'$, $u\in(-1,1)$ |
| 12) $(arctg\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$ | 12) $(arctg\,u)'=\frac{1}{1+u^2}.u'$ |
| 13) $(arccotg\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$ | 13) $(arccotg\,u)'=-\frac{1}{1+u^2}.u'$ |