# Вероятност

Вероятността на едно събитие А, ще означаваме с *P*(*A*).

**Дефиниция**

На всяко събитие А се съпоставя число Р(А) за което:

1. **Р(А)≥0**
2. **Р(S)=1**
3. **Р е (безкрайно) адитивна, т.е. ако $A_1, A_2, \ldots$ е крайна или безкрайна редица от несъвместими събития, то**

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Как да си представим **практическия смисъл** на понятието “ВЕРОЯТНОСТ:
Тя изразява възможността това събитие на настъпи;
по-голяма вероятност=по-голяма възможност/шанс да наблюдаваме това събитие

ЗАПОМНИ ВЪПРОСА: Ако Събитието А има Р(А)=0, означава ли това, че това събитие **НИКОГА** няма да се наблюдава?

ОТГОВОРЪТ ПО-КЪСНО

# Свойства на вероятността

**Свойство 1** *P*(*невъзможното*)=0

**Свойство 2**

Ако A влече B → P(A)≤P(B)

**Свойство 3** $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

**Свойство 4** $0 \leq P(A) \leq 1$

# Частен случай

## Класическа вероятност

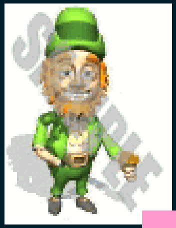
Само за крайномерни пространства

Само в случая, когато всички изходи са равновъзможни

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

*k*- брой благоприятни изходи на събитието А
*n* – брой на всички възможни изходи

# Примери



опит: Хвърляне на монета един път. S={Л,Г}, A={Г}, B={Л}

P(A)=1/2, P(B)=1/2, P(S)=1

**Опит: хвърляне на зарче един път. S={1,2,3,4,5,6},**
**A={нечетен брой точки върху зара}={1,3,5}**
**B={поне 5 точки на зара}={5,6}**
**C= {по-малко от 4 точки на зара}={1,2,3}**

P(A)=3/6=0,5 P(B)=2/6=1/3 P(C)=3/6=0,5

**Опит: избор на семейство измежду всички с две деца.**
**S={BB,AA,BA,AB}, където А-момиче, В-момче**
**A={семейството има едно момче}={BA, AB}**
**B={семейството има поне едно момче}={BA, AB, BB}**

**P(A)=2/4=0,5 P(B)=3/4=0,75**

Опит: избор на листче измежду 4 листчета с написани числата от 1 до 4 върху тях.    S={1,2,3,4},
A={нечетно число върху листчето}={1,3}
B={число по-голямо от 4 върху листчето}=празно

P(A)=2/4    P(B)= 0

Опит: стрелба по кръгова мишена.
S={всички точки от кръга}
A={попадение в десятката}={точките от кръга, които са означени с 10}

P(A)=?????

**Класическата вероятност е неприложима; пространството е безкрайно**

# Опит

Пет карти са избрани случайно от колода карти (52 карти)

А/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е червена?

Колко са всички възможни изходи- начини за избор на 5 карти измежду 52 ?

$$C_5^{52} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52(51)(50)(49)(48)}{1(2)(3)(4)(5)} = 2598960$$

Колко са всички възможни изходи, при които една от картите е червена, а другите 4 са черни?

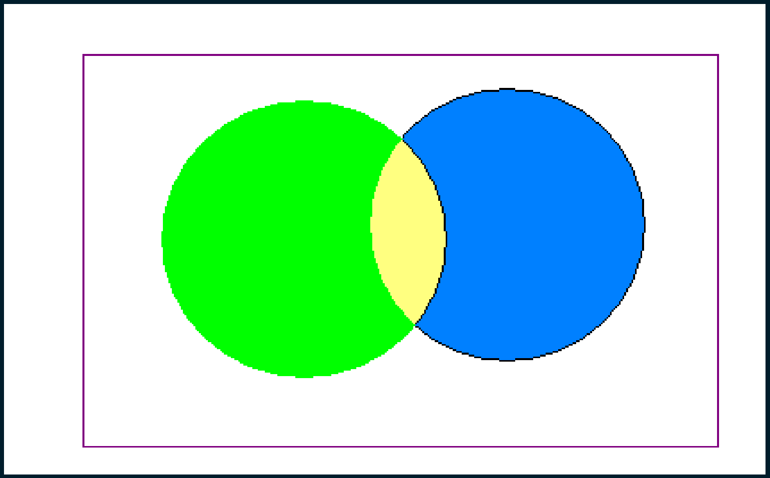
$$26(C_4^{26}) = 26\frac{26(25)(24)(23)}{1(2)(3)(4)} = 388700$$

$$P = \frac{388700}{2598960} \approx 0{,}15$$

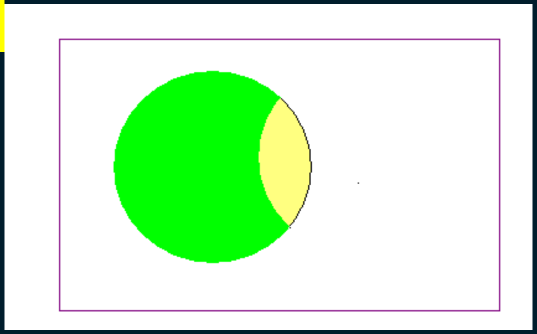
# Формула за събиране на вероятности

$P(A \text{ или} B) = P(A) + P(B) – P(A \text{ и } B)$

P(*A* или *B* ) =

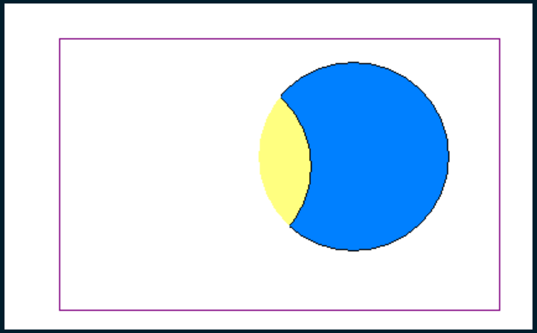


P(*A* )



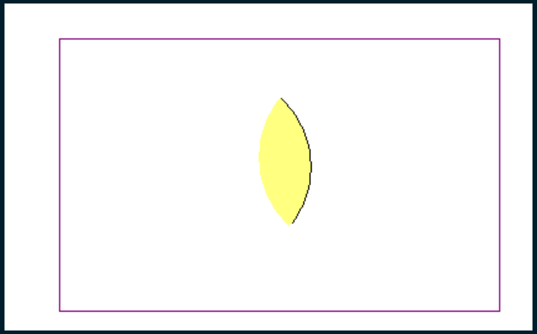
+

P(*B* )



–

P(*A* и *B* )



# Обобщение

## При три събития

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$
$$- P(AB) - P(BC) - P(AC)$$
$$+ P(ABC)$$

# Геометрична вероятност

## *За безкрайномерни пространства*

Нека да може да се установи **взаимно еднозначно съответствие** между S и геометричен обект върху права, в равнина или в пространството.

=>на всяко събитие съответства подмножество на този геометричен обект

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

μ е мярка на множество(геометричен обект)

Върху права - μ е дължина на отсечка

В равнината - μ е лице на фугура

В пространството - μ е обем на тяло

# ПРИМЕР стрелба по кръгова мишена

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

Опит: стрелба по кръгова мишена.

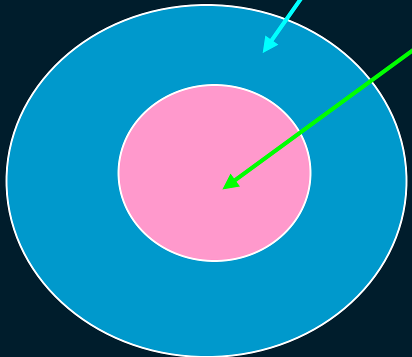
S={всички точки от кръга} ⬄ кръг с радиус 1 => лицето =π

A={попадението в десятката}⬄ кръг със същия център и 10 пъти по-малък радиус , т.е. 0.1 и лице = 0.01 π

$P(A)=\frac{0.01\pi}{\pi}=0.01$

B={попадението е по-близо до центъра отколкото до контура}⬄кръг със същия център и два пъти по малък радиус, т.е. 0.5 и лице =0.25π

$P(A)=\frac{0.25\pi}{\pi}=0.25$



# Условна вероятност

Да разгледаме **вероятностен опит** с **пространство от елементарните изходи** *S*

Нека B е събитие, от S (различно от невъзможното)

Каква е вероятността да настъпи събитието *A*, ***ако е известно***, че събитието *B* е настъпило ?

Означение: P(A|B)

**Пример**

Карта е изтеглена от колода от 52 карти. Ако е известно, че картата е червена, то каква е вероятността тя да е поп?

$$P(A\,|\,B)=\frac{2}{26}$$

$$P(A \text{и } B)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$$

$$P(B)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}$$

## Формула:

Нека *A* и *B* са две събития от едно и също пространство S, и *P*(*B*) > 0. ***Условна вероятност*** на *A* при условие *B*

$$P(A|B)=\frac{P(A\ и\ \ B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$\cap$

## Умножение на вероятности

Каква е вероятността да настъпят и двете събития A и B?

P(A и B)=P(A|B) P(B)

# Пример :

**В курса по информатика от 80 студента само 40 са изкарали над 10 точки и на двете контролни, а 60 са изкарали над 10 точки на втората контролна. Каква е вероятността, случайно избран студент от този курс, който е изкарал на втората контролна над 10 точки, да е изкарал на първата над 10 точки?**

A=студентът е изкарал над 10 точки на първата контролна

B=студентът е изкарал над 10 точки на втората контролна

P(B)=60/80=0,75

P(A и B)=40/80=0,5

P(A|B)=?

P(A|B)= 0, 5/0,75=0,66=2/3

# Пример ( с „малка“ промяна“):

**В курса по информатика от 80 студента 60 са изкарали над 10 точки на първата контролна, а от тях само 20 са изкарали над 10 точки и на втората контролна. Каква е вероятността, случайно избран студент от този курс, да е изкарал над 10 точки и на двете контролни?**

A=студентът е изкарал над 10 точки на първата контролна

B=студентът е изкарал над 10 точки на втората контролна

Търсим P(A и B)=?

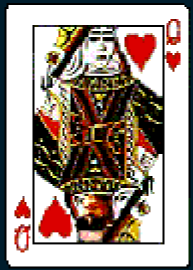
Формула за умножение на вероятности

$P(AиB)=P(A|B)P(B)$ или $P(AиB)=P(B|A)P(A)$

$P(A)=60/80=3/4$ $P(B|A)= 20/60=1/3$

$P(AиB)=P(B|A)P(A)= (1/3)*(3/4)=1/4$

Информацията, която е дадена ВЛИЯЕ съществено върху формулата, която се използва!!!



# Независими събития

Нека *A* и *B* са събития, свързани с един и същ опит.

**Дефиниция 1**

A и B са **независими** , ако **P(A|B)=P(A)**

**Дефиниция 2**

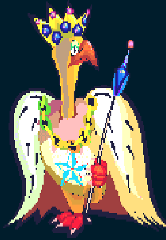
A и B са **независими** , ако **P(A и B)=P(A) P(B)**

Опит: Карта се избира случайно от колода от 52 карти.

A={избраната карта е червена}

B={избраната карта е дама}

Независими ли са A и B?



P(A)=0,5

P(A|B)=2/4=0,5

A и B са независими

# Пример

Опит: две карти са избрани една по една от колода карти.

## с връщане

Каква е вероятността *и* двете карти да са поп?

A= {първата карта е поп}  B= {втората карта е поп}

Съвместими или несъвместими ли са A и B?

A сега – зависими или независи са A и B?

P(A и B)=P(B|A)P(A)

P(B|A)= 4/52

P(A)= 4/52

P(A иB)=(4/52)(4/52)=0,0059

A и B са независими

## без връщане

P(A и B)=P(B|A)P(A)

P(B|A)= 3/51

P(A)= 4/52

P(A и B)=(3/51)(4/52)=0,0045

A и B са зависими

# Обобщение на независимост

Три събития са **независими в съвкупност**, ако

$$\left.\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \end{aligned}\right\} \text{Независими са по двойки}$$

и

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$