Линейни нехомогенни системи диференциални уравнения.
Метод на Лагранж.
Метод на неопределените коефициенти

Информатика, 2021/2022

Линейни нехомогенни системи диференциални уравнения

- Система от вида

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x} = a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y + a_{13}(t)\,z + f_1(t) \\ \dot{y} = a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y + a_{23}(t)\,z + f_2(t) \\ \dot{z} = a_{31}(t)\,x + a_{32}(t)\,y + a_{33}(t)\,z + f_3(t), \end{array} \right. \qquad (1)$$

с неизвестни функциите $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$, където $f_i(t)$, $a_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2, 3)$ са непрекъснати функции в интервала (α, β), се нарича линейна нехомогенна система диференциални уравнения.

Ако въведем означенията

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

то системата (1) може да се запише във вида

$$\dot{X} = AX + F. \tag{2}$$

- За решаването на системата (2) следваме следния алгоритъм:

I. Разглеждаме съответната на (2) хомогенна система

$$\dot{X} = AX \tag{3}$$

и намираме общото й решение

$$X_{\text{хом}} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3.$$

II. Намираме едно частно решение

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \eta_3(t) \end{pmatrix}$$

на нехомогенната система (2).

III. Общото решение на нехомогенната система (2) е равно на сумата от общото решение на хомогенната система (3) и намереното частно решение $\eta(t)$, т.е.

$$X_{\text{нехом}} = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \eta(t).$$

Метод на Лагранж

Нека

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

където c_1, c_2, c_3 са произволни реални константи, е общото решение на хомогенното уравнение (3).

Частно решение на (2) по метода на Лагранж търсим във вида

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = c_1(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + c_3(t) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

където $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$ са решения на системата

$$\left|\begin{array}{l}\dot{c}_1x_1+\dot{c}_2x_2+\dot{c}_3x_3=f_1\\ \dot{c}_1y_1+\dot{c}_2y_2+\dot{c}_3y_3=f_2\\ \dot{c}_1z_1+\dot{c}_2z_2+\dot{c}_3z_3=f_3.\end{array}\right.$$

За всяко $t\in(\alpha,\beta)$ можем да намерим $\dot{c}_1(t)$, $\dot{c}_2(t)$ и $\dot{c}_3(t)$, а след това чрез интегриране от производните да получим и самите функции $c_1(t)$, $c_2(t)$ и $c_3(t)$. С това частното решение $\eta(t)$ е намерено.

Задача 1

Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l}\dot{x} = x - y + \frac{1}{\cos t}\\ \dot{y} = 2x - y.\end{array}\right.$$

Решение. Първо решаваме съответната хомогенна система

$$\left|\begin{array}{l}\dot{x} = x - y\\ \dot{y} = 2x - y.\end{array}\right.$$

За тази система

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристичното уравнение

$$0 = |A - \lambda E| = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1$$

има за корени числата $\lambda_{1,2} = \pm i$. Ще намерим собствен вектор $h_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, съответстващ на корена $\lambda_1 = i$. Имаме

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$\left| \begin{array}{l} (1-i)\alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + (-1-i)\beta = 0, \end{array} \right.$$

откъдето $\beta = (1-i)\alpha$. Така намираме, че $h_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ (1-i)\alpha \end{pmatrix}$ и избираме $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Сега разглеждаме комплекснозначното решение на дадената система

$$\begin{aligned} X_1 &= h_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{it} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ \cos t + i \sin t - i \cos t + \sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогава общото решение на хомогенната система е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{хом}} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Преминаме към търсене на частно решение на дадената нехомогенна система по метода на Лагранж от вида

$$\eta = c_1(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2(t)\begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

където $c_1(t)$ и $c_2(t)$ са решения на

$$\left| \begin{array}{l} \dot{c}_1 \cos t + \dot{c}_2 \sin t = \frac{1}{\cos t} \\ \\ \dot{c}_1(\cos t + \sin t) + \dot{c}_2(\sin t - \cos t) = 0. \end{array} \right.$$

Имаме $\dot{c}_1 = 1 - \frac{\sin t}{\cos t}$, откъдето $c_1(t) = t + \ln|\cos t|$. Аналогично $\dot{c}_2 = \frac{\sin t}{\cos t} + 1$, откъдето $c_2(t) = t - \ln|\cos t|$. Сега заместваме получените изрази за $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в (5) и намираме $\eta(t)$.

Търсеното решение на нехомогенната система получаваме след събиране на изразите в (4) и (5):

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{нехом}} &= c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \\ &+ (t + \ln|\cos t|) \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} \\ &+ (t - \ln|\cos t|) \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Метод на неопределените коефициенти

- Ако е дадена линейна нехомогенна система (1) с постоянни коефициенти (т.е. всички $a_{ij} = const$) и функциите f_1, f_2 и f_3 са от някой от видовете по-долу, то за търсене на частното решение на (1) може да се приложи методът на неопределените коефициенти.

- Нека е дадена линейна нехомогенна система (1), в която

$$\begin{aligned} f_1 &= q_1(t)\, e^{\alpha t}, \\ f_2 &= q_2(t)\, e^{\alpha t}, \\ f_3 &= q_3(t)\, e^{\alpha t}, \end{aligned} \tag{6}$$

където $q_i(t)$ са полиноми, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогава тази система допуска частно решение от вида

$$\begin{aligned} \eta_1 &= Q_1(t)\, e^{\alpha t}, \\ \eta_2 &= Q_2(t)\, e^{\alpha t}, \\ \eta_3 &= Q_3(t)\, e^{\alpha t}, \end{aligned} \tag{7}$$

където $Q_i(t)$ са полиноми от степен $k+m$; k е кратността на α като характеристичен корен ($k=0$, ако α не е характеристичен корен); m е най-високата степен на дадените полиноми $q_i(t)$.

- Нека е дадена линейна нехомогенна система (1), в която

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(p_1(t)\cos\beta t + q_1(t)\sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \\ f_2 &= \left(p_2(t)\cos\beta t + q_2(t)\sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \\ f_3 &= \left(p_3(t)\cos\beta t + q_3(t)\sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \end{aligned} \tag{8}$$

където $p_i(t)$, $q_i(t)$ са полиноми, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогава тази система допуска частно решение от вида

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \left(P_1(t)\cos\beta t + Q_1(t)\sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \\ \eta_2 &= \left(P_2(t)\cos\beta t + Q_2(t)\sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \\ \eta_3 &= \left(P_3(t)\cos\beta t + Q_3(t)\sin\beta t\right)e^{\alpha t}, \end{aligned} \tag{9}$$

където $P_i(t)$, $Q_i(t)$ са полиноми от степен $k+m$; k е кратността на $\alpha + i\beta$ като характеристичен корен ($k = 0$, ако $\alpha + i\beta$ не е характеристичен корен); m е най-високата степен на дадените полиноми $p_i(t)$, $q_i(t)$.

Задача 2

Да се решат системите:

1) $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = -2x + y; \end{array} \right.$

2) $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5\sin t; \end{array} \right.$

3) $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = 2x + y + 2e^{t} \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{array} \right.$

Решение. 1) Характеристичните корени на системата са $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Ще покажем само как се намира частното решение. В дадената система

$$\begin{aligned} f_1 &= (-1).e^{2t}, \\ f_2 &= 0.e^{2t}, \end{aligned}$$

следователно имаме случая (6) с $\alpha = 2$, $q_1(t) = -1$, $q_2(t) = 0$ и търсим частното решение във вида (7). Числото $\alpha = 2$ е еднократен характеристичен корен, откъдето следва, че $k = 1$. Полиномите q_1 и q_2 са от нулева степен, следователно $m = 0$. Тогава $k + m = 1$, $Q_1 = at + b$, $Q_2 = ct + d$,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (at+b)\, e^{2t}, \\ \eta_2 &= (ct+d)\, e^{2t}. \end{aligned}$$

Сега заместваме в дадената система x с η_1 и y – с η_2. Имаме

$$\left|\begin{array}{l} \left((at+b)\, e^{2t}\right)' = 4(at+b)e^{2t} + (ct+d)e^{2t} - e^{2t} \\ \left((ct+d)\, e^{2t}\right)' = -2(at+b)e^{2t} + (ct+d)e^{2t}, \end{array}\right.$$

диференцираме, съкращаваме на e^{2t} и тогава получаваме

$$\left|\begin{array}{l} 2at + a + 2b = (4a + c)t + 4b + d - 1 \\ 2ct + c + 2d = (-2a + c)t - 2b + d. \end{array}\right.$$

Приравняваме коефициентите пред съответните степени на t:

$$\left|\begin{array}{l} 2a = 4a + c \\ a + 2b = 4b + d - 1 \\ 2c = -2a + c \\ c + 2d = -2b + d. \end{array}\right.$$

За решения на тази неопределена система намираме, например, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 0$. Следователно

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (t+1)\, e^{2t}, \\ \eta_2 &= -2t\, e^{2t}. \end{aligned}$$

Решението на нехомогенната система е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} t+1 \\ -2t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

2) Характеристичните корени на системата са $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. В дадената система

$$\begin{aligned} f_1 &= (0.\cos t + 0.\sin t)e^{0.t}, \\ f_2 &= (0.\cos t - 5\sin t)e^{0.t}, \end{aligned}$$

следователно имаме случая (8) с $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $p_1(t) = 0$, $q_1(t) = 0$, $p_2(t) = 0$, $q_2(t) = -5$ и търсим частното решение във вида (9). Числото $\alpha + i\beta = i$ не е характеристичен корен, откъдето следва, че $k = 0$. Полиномите p_i и q_i са от нулева степен, следователно $m = 0$. Тогава $k + m = 0$, $P_1(t) = a$, $Q_1(t) = b$, $P_2(t) = c$, $Q_2(t) = d$,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a\cos t + b\sin t, \\ \eta_2 &= c\cos t + d\sin t. \end{aligned}$$

Сега заместваме в дадената система x с η_1 и y с η_2. Имаме

$$\left|\begin{array}{l}(a\cos t + b\sin t)' = (a\cos t + b\sin t) + 2(c\cos t + d\sin t)\\ (c\cos t + d\sin t)' = (a\cos t + b\sin t) - 5\sin t,\end{array}\right.$$

откъдето

$$\left|\begin{array}{l}-a\sin t + b\cos t = (a+2c)\cos t + (b+d)\sin t\\ -c\sin t + d\cos t = a\cos t + (b-5)\sin t.\end{array}\right.$$

Във всяко от уравненията приравняваме съответните коефициенти пред $\cos t$ и $\sin t$:

$$\left|\begin{array}{l}b = a + 2c\\ -a = b + d\\ d = a\\ -c = b - 5.\end{array}\right.$$

За решение на тази система намираме $a = -1$, $b = 3$, $c = 2$, $d = -1$. Следователно

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\cos t + 3\sin t, \\ \eta_2 &= 2\cos t - \sin t. \end{aligned}$$

Решението на нехомогенната система е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -\cos t + 3\sin t \\ 2\cos t - \sin t \end{pmatrix}.$$

3) В тази система

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^{4t} \end{pmatrix}$$

и тъй като числото пред t в степенния показател е различно за f_1 и f_2, то F не е от вида (6). Ще използваме следната

Лема. Ако $\eta^{(1)}$ е частно решение на линейната нехомогенна система $\dot{X} = AX + F_1$, а $\eta^{(2)}$ е частно решение на $\dot{X} = AX + F_2$, то $\eta = \eta^{(1)} + \eta^{(2)}$ е частно решение на $\dot{X} = AX + F_1 + F_2$.

Представяме вектор-функцията F в нашата задача по следния начин:

$$F = \begin{pmatrix} 2e^t \\ -3e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3e^{4t} \end{pmatrix} = F_1 + F_2.$$

Тогава съгласно горната лема, трябва да намерим две частни решения $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$, съответно на системите

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y + 0 \end{array}\right.$$

и

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = 2x + y + 0 \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{array}\right.$$

Сумата $\eta^{(1)} + \eta^{(2)}$ ще бъде решение на дадената система.