Метод на Гаус-Жордан за решаване на системи линейни алгебрични уравнения (СЛАУ)

въвеждаме разширената матрица

In[2]:= $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$

Out[2]= {{1, 2, -1, 3}, {2, -1, 3, 4}, {3, 1, -1, 10}}

Основни действия с елементи на матрици

Постъпково извършване на действията

правим толкова стъпки, колкото са редовете на матрицата A

първа стъпка - целта е първият стълб на A да стане като единичната матрица

първи етап - достигане единица по главния диагонал $a_{11} = 1$

In[11]:= $A[\![1]\!] = \frac{A[\![1]\!]}{A[\![1, 1]\!]}$

Out[11]=

{1, 2, -1, 3}

втори етап - нули във всички останали елементи от стълба

промени във втория ред

In[12]:= $A[\![2]\!] = A[\![2]\!] - A[\![2, 1]\!] * A[\![1]\!]$

Out[12]=

{0, -5, 5, -2}

In[13]:= A // MatrixForm

Out[13]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

промени в третия ред

In[14]:=
```
A⟦3⟧ = A⟦3⟧ - A⟦3, 1⟧ * A⟦1⟧
```
Out[14]=
```
{0, -5, 2, 1}
```

In[15]:=
```
A // MatrixForm
```
Out[15]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

втора стъпка - целта е вторият стълб на A да стане като единичната матрица

обозначаваме номера на реда (row) с **r**, а номера на колоната (column) с **c**

стъпките съответстват на колоните, т.е. ще имаме цикъл по **c**

In[16]:=
```
c = 2
```
Out[16]=
```
2
```

първи етап - достигане единица по главния диагонал $a_{22} = 1$

In[17]:=

$$A⟦c⟧ = \frac{A⟦c⟧}{A⟦c, c⟧}$$

Out[17]=

$$\left\{0, 1, -1, \frac{2}{5}\right\}$$

In[18]:=
```
A // MatrixForm
```
Out[18]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

втори етап - нули във всички останали елементи от стълба

промени в първия ред

In[19]:=
```
r = 1
```
Out[19]=
```
1
```

In[20]:=
```
A⟦r⟧ = A⟦r⟧ - A⟦r, c⟧ * A⟦c⟧
```
Out[20]=

$$\left\{1, 0, 1, \frac{11}{5}\right\}$$

In[21]:=
```
A // MatrixForm
```
Out[21]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

промени в третия ред

In[22]:=
```
r = 3
A⟦r⟧ = A⟦r⟧ - A⟦r, c⟧ * A⟦c⟧
A // MatrixForm
```

Out[22]=

3

Out[23]=

{0, 0, -3, 3}

Out[24]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

трета стъпка - целта е третият стълб на A да стане като единичната матрица - **самостоятелно**

първи етап - достигане единица по главния диагонал $a_{33} = 1$

втори етап - нули във всички останали елементи от стълба

Програмен код

Решаваме СЛАУ

In[25]:=
```
A = (1  2 -1  3
     2 -1  3  4
     3  1 -1 10); (*въвеждаме разширената матрица*)
n = Length[A];
For[c = 1, c ≤ n, c++, (* цикъл по колоните - стъпките *)
 (*първи етап - достигане единица по главния диагонал*)
 A⟦c⟧ = A⟦c⟧ / A⟦c, c⟧;
 (*втори етап-нули във всички останали елементи от стълба*)
 For[r = 1, r ≤ n, r++,
  If[r ≠ c, A⟦r⟧ = A⟦r⟧ - A⟦r, c⟧ * A⟦c⟧]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

добавяме изчисляване на детерминантата

In[28]:=
```
A = (1  2 -1  3
     2 -1  3  4
     3  1 -1 10); (*въвеждаме разширената матрица*)
n = Length[A];
detA = 1;
For[c = 1, c ≤ n, c++, (* цикъл по колоните - стъпките *)
 detA = detA * A[[c, c]];
 (*първи етап - достигане единица по главния диагонал*)
 A[[c]] = A[[c]] / A[[c, c]];
 (*втори етап-нули във всички останали елементи от стълба*)
 For[r = 1, r ≤ n, r++,
  If[r ≠ c, A[[r]] = A[[r]] - A[[r, c]] * A[[c]]]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
Print["Детерминантата на матрицата A e ", detA]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Детерминантата на матрицата A e 15

добавяме изчисляване на обратната матрица

In[33]:=
```
A = (1  2  -1  3  1 0 0
     2 -1   3  4  0 1 0
     3  1  -1 10  0 0 1); (*въвеждаме разширената матрица*)
n = Length[A];
detA = 1;
For[c = 1, c ≤ n, c++, (* цикъл по колоните - стъпките *)
 detA = detA * A[[c, c]];
 (*първи етап - достигане единица по главния диагонал*)
 A[[c]] = A[[c]] / A[[c, c]];
 (*втори етап-нули във всички останали елементи от стълба*)
 For[r = 1, r ≤ n, r++,
  If[r ≠ c, A[[r]] = A[[r]] - A[[r, c]] * A[[c]]]
 ];
 Print[A // MatrixForm]
]
Print["Детерминантата на матрицата A e ", detA]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{11}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{5} & -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Детерминантата на матрицата A e 15

Отг. Обратната матрица е $\begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

За проверка:

In[38]:=
```
Inverse[(1  2 -1
         2 -1  3
         3  1 -1)] // MatrixForm
```

Out[38]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{11}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$