Метод на хордите

Задача : Дадено е уравенението :

$x^2 + px - (q + 50)\cos x - 2(p + q) = 0,$

където **p** и **q** са съответно предпоследната и последната цифра от факултетния ни номер (в случая $p = 1$ а $q = 9$)

$x^2 + x - 59\cos x - 20 = 0$

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението.
2. Да се локализира най – големия реален корен в интервала [a, b].
3. Да се проверят условията за приложение на метода на хордите.
   – проверка на сходимост
   – избор на начално приближение и постоянна точка
   – итерациите
4. Да се изчисли корена по метода на хордите с точност 10^{-4}. Представете таблица с изчисленията.
5. Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност.
6. Да се направи сравнение кой метод е по – ефективен за избрания интервал.

In[•]:=
```
f[x_] := x^2 + x - 59 Cos[x] - 20
```

In[•]:=
```
f[x]
```

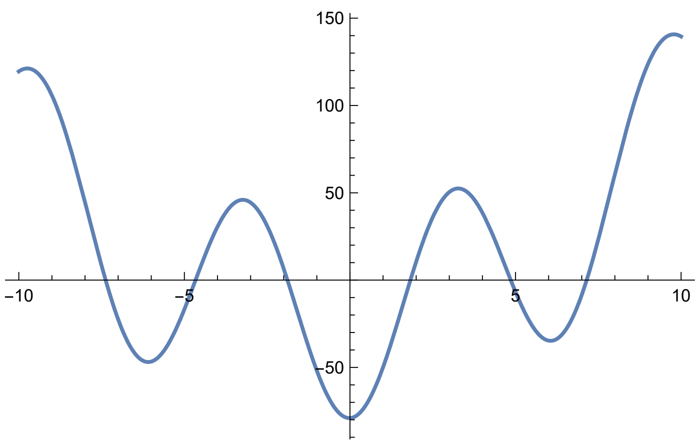
Out[•]=

$-20 + x + x^2 - 59\,\mathrm{Cos}[x]$

1. Да се намери общия брой на корените на уравнението

In[•]:=
```
Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

Out[•]=

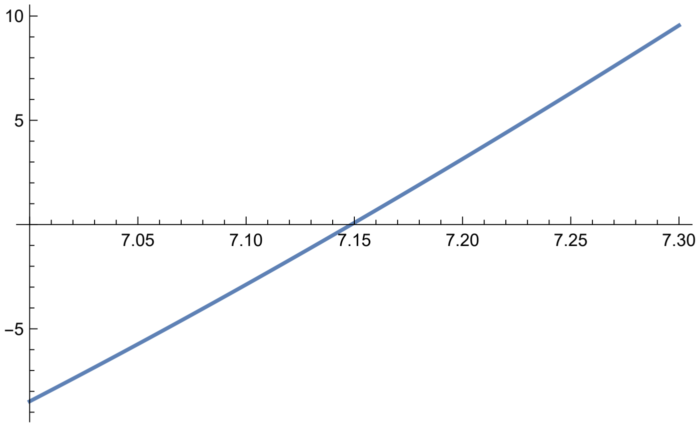


Брой корени: 6

2. Да се локализира най-големия реален корен в интервала [a, b]

In[∘]:=
```
Plot[f[x], {x, 7, 7.3}]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
f[7.]
```

Out[∘]=
```
-8.48023
```

In[∘]:=
```
f[7.3]
```

Out[∘]=
```
9.55143
```

Извод:

(1) Функцията е непрекъсната, защото е сума от непрекъснати функции (полином и синус).

(2) f(5) = -8.460 ... < 0

f(7) = 9.551 ... > 0

=> Функцията има различни знаци в двата края на разглеждания интервал [7; 7.3].

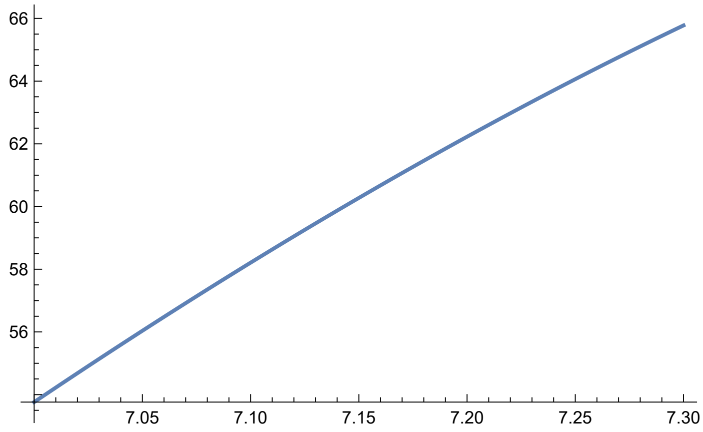
От (1) и (2) следва, че функцията има поне един корен в разглеждания интервал [7; 7.3].

3. Да се проверят условията за приложение на метода на хордите

Проверка на сходимост

Графика на първата производна

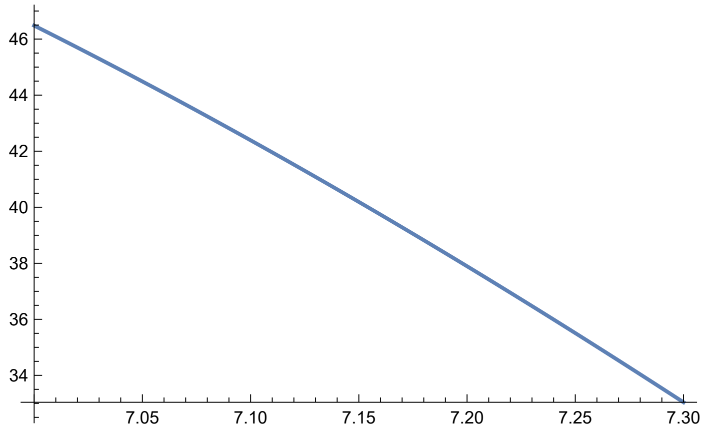
In[∘]:=
```
Plot[f'[x], {x, 7., 7.3}]
```
Out[∘]=



Извод: (1) Стойностите на първата производна в разглеждания интервал [7.,7.3] са между 53 и 66. Следователно първата f'(x) > 0 в целия разглеждан интервал [7.,7.3].

Графика на втората производна

In[∘]:=
```
Plot[f''[x], {x, 7., 7.3}]
```
Out[∘]=



Извод : (2) Стойностите на втората производна в разглеждания интервал [7.,7.3] са между 47 и 33. Следователно втората f'' (x) > 0 в целия разглеждан интервал [] .

Извод: От (1) и (2) следва, че първата и втората производна имат постоянни знаци в разглеждания интервал [7.,7.3]. Следователно условията за сходимост на метода на хордите са изпълнени.

Избор на начално приближение и постоянна точка

Нужно е да е изпълнено условието f(x0).f’’(x) < 0

В нашия случай f’’(x) >0. Следователно е нужно f(x0) <0

In[ ]:=
```
p = 7.
```
Out[ ]=
```
7.
```

In[ ]:=
```
x0 = 7.3
```
Out[ ]=
```
7.3
```

Итериране

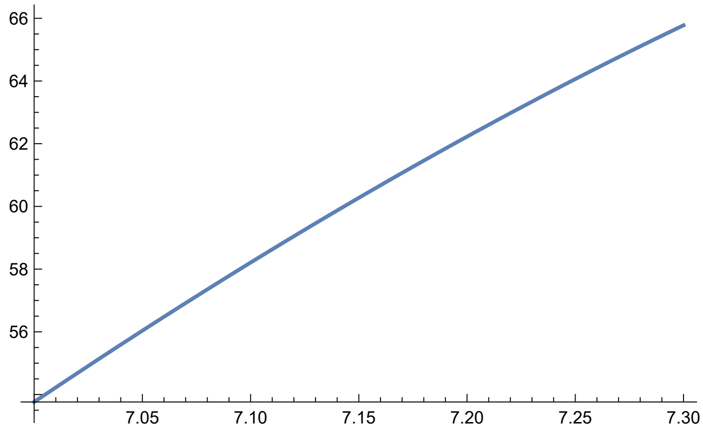
In[ ]:=
```
For[n = 0, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " xn = ", x1];
 x0 = x1
]
```

```
n = 0 xn = 7.14109
n = 1 xn = 7.14902
n = 2 xn = 7.14858
n = 3 xn = 7.1486
n = 4 xn = 7.1486
n = 5 xn = 7.1486
n = 6 xn = 7.1486
n = 7 xn = 7.1486
n = 8 xn = 7.1486
n = 9 xn = 7.1486
n = 10 xn = 7.1486
```

4. Да се изчисли корена по метода на хордите с точност 10^{-4}

Изчисляване на постояннните величини

In[∘]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, 7., 7.3}]
```
Out[∘]=



От геометрично съображение минимума на абсолютната стойност на първата производна се достига в левия край на интервала, а максимума - в десния.

In[∘]:=
```
M1 = Abs[f'[7.]]
```
Out[∘]=

53.7622

In[∘]:=
```
m1 = Abs[f'[7.3]]
```
Out[∘]=

65.7758

In[∘]:= $R = \frac{M1 - m1}{m1}$

Out[∘]=

-0.182644

In[∘]:=
```
f[x_] := x^2 + x - 59 Cos[x] - 20
p = 7.; x0 = 7.3;
M1 = Abs[f'[7.]];
m1 = Abs[f'[7.3]];
R = (M1 - m1)/m1;
For[n = 0, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1,
  " f(x_n) = ", f[x1], " ε_n = ", eps = R * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

n = 0 x_n = 7.14109 f(x_n) = -0.451213 ε_n = -0.0290241

n = 1 x_n = 7.14902 f(x_n) = 0.0251114 ε_n = -0.00144816

n = 2 x_n = 7.14858 f(x_n) = -0.00138575 ε_n = -0.0000803568

n = 3 x_n = 7.1486 f(x_n) = 0.0000765069 ε_n = -4.43514×10^{-6}

n = 4 x_n = 7.1486 f(x_n) = -4.22383×10^{-6} ε_n = -2.44861×10^{-7}

n = 5 x_n = 7.1486 f(x_n) = 2.33191×10^{-7} ε_n = -1.35184×10^{-8}

n = 6 x_n = 7.1486 f(x_n) = -1.28741×10^{-8} ε_n = -7.46332×10^{-10}

n = 7 x_n = 7.1486 f(x_n) = 7.10763×10^{-10} ε_n = -4.12038×10^{-11}

n = 8 x_n = 7.1486 f(x_n) = -3.92433×10^{-11} ε_n = -2.27482×10^{-12}

n = 9 x_n = 7.1486 f(x_n) = 2.14584×10^{-12} ε_n = -1.25559×10^{-13}

n = 10 x_n = 7.1486 f(x_n) = -9.9476×10^{-14} ε_n = -6.81326×10^{-15}

Цикъл със стоп-критерий при определена точност (в случая ε_n = 0.0001)

In[•]:=
```
f[x_] := x^2 + x - 59 Cos[x] - 20
p = 7.; x0 = 7.3;
M1 = Abs[f'[7.]];
m1 = Abs[f'[7.3]];
R = (M1 - m1)/m1;
epszad = 0.0001;
eps = 1;
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " f(xn) = ", f[x0]];
For[n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " xn = ", x1,
  " f(xn) = ", f[x1], " εn = ", eps = R * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

n = 0 x_n = 7.3 f(x_n) = 9.55143

n = 1 x_n = 7.14109 f(x_n) = -0.451213 ε_n = -0.0290241

5. Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [a, b] за същата точност.

In[•]:=
```
Log2[(7.3 - 7)/0.0001] - 1
```

Out[•]=

10.5507

6. Да се направи сравнение кой метод е по-ефективен за избрания интервал

Извод: По метода на разполовяването биха били необходими 11 итерации за достигане на исканата точност. А по метода на хордите беше необходима само 1 итерация. Следователно методът на хордите е по-ефективен за избрания интервал [7, 7.3].