Непрекъснатост на функция

Def 28 f - ф-я т. a е точка на сгъстяване f е непрек. в т. a ако $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Def 30 Казваме, че ф-ята f е непрекъсната в т. a, ако за $\forall$ редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща към a и е изпълнено $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = f(a)$

Ако $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ са непрекъснати в т. $x_0 \in (a, b)$ тогава

$f \pm g$; $f \cdot g$ $\to$ непрекъснати

$\dfrac{f}{g}$, при $g \neq 0$ $\to$ непрекъсната

① Да се изследва за непрекъснатост ф-ята $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

При $x \neq 0$ ф-та f е непрекъсната, защото тя е частно на две непрекъснати функции.
Нека разгледаме случая, когато $x = 0$.
За да бъде ф-та непрекъсната при $x = 0$ е необходимо да бъде изпълнено у-то от Def, а именно

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad f(0) = 1$$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0} f(x)}_{1} = \underbrace{f(0)}_{1} \Rightarrow f(x) \text{ е непрекъсната}$$

Производна на ф-ја

Нека е дадена ф-та $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ и нека x_0 е точка на сгъстяване на X, $x_0 \in X$

Def 33 Производна $y' = f'(x_0)$ на

$y = f(x)$ в т. x_0 се нарича редицата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$, при условие, че

съществува, а функцията в този случай се нарича диференцируема в т. x_0

Основни правила за диф

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ c – const
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ $g \neq 0$
5. $[f(u(x))]' = f'_u \cdot u'(x)$

$$(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \cancel{(x)' = 1}$$

$$(x^{1})' = 1 \cdot x^{\overset{1-1}{=0}} = 1$$

$$\underbrace{x}_{1}$$

$$\Big(\underbrace{(x^2+1)}_{u(x)}^{2}\Big)' = (u^2)' = \underbrace{2 \cdot u^{2-1} \cdot u'}$$

$$2(x^2+1)^{2-1} \cdot \underbrace{(x^2+1)'}_{}\ 0$$

$$2(x^2+1) \cdot 2x =$$

$$= 4x(x^2+1)$$

Производни на функции от вида

$y = u^v$, където $u > 0$, се намират, като се използва формулата $(e^u)' = e^u \cdot u'$ и представяме $y = e^{\ln y}$ т.е.

$$y' = (u^v)' = (e^{v \ln u})'$$

① $y = 6x^2 - 7x + 1 \quad / \quad y' = ?$

$$y' = (\underbrace{6x^2}_{f} - \underbrace{7x}_{g} + \underbrace{1}_{h})' = (6x^2)' - (7x)' + (1)' =$$

$$= 6 \cdot (x^2)' - 7 \cdot (x^1)' + (1)' = 0 =$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1} \cdot \cancel{x'} = 1$$

$$= 6 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 7 \cdot 1 \cdot \underbrace{x^{1-1}}_{1} + 0 =$$

$$= 12x - 7$$

② $y = 5x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad / \quad y' = ?$

$$y' = (5x^3 + 2x^2 - 3x + 1)' = 15x^2 + 4x - 3$$

③ $y = 10 \cdot x^9 - 8x^7 + 4x^6 + 5x - 1 \quad / \quad y'$

$$y' = 90x^8 - 56x^6 + 24x^5 + 5$$

(4) $y=\sqrt{2x\sqrt[3]{x^2}}$ / $y'=?$

$$y=\sqrt{2\cdot x^{1}\cdot x^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{2\cdot x^{\frac{5}{3}}}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^{\frac{5}{3}}}=\sqrt{2}\cdot\left(x^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot x^{\frac{5}{6}}$$

$$(x^{\alpha})'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

$$y'=\sqrt{2}\cdot\frac{5}{6}\,x^{\frac{5}{6}-1}=\frac{5\sqrt{2}}{6}\cdot x^{-\frac{1}{6}}=$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{6\sqrt[6]{x}}$$

(5) $y=x^4-2\sqrt[3]{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{12}{x^4}$ / y'

$$y=x^4-2\cdot x^{\frac{1}{3}}+3\cdot x^{-\frac{1}{3}}-12\cdot x^{-4}$$

$$y'=4x^3-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}-\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}\,x^{-\frac{4}{3}}+48x^{-5}=\dots$$

(6) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$ $\quad / \; y' = ?$

$$y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \qquad \boxed{\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}}$$

$$y = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y = x^{\frac{1}{6}} - 2 \cdot x^{-\frac{1}{6}}$$

$$y' = \frac{1}{6} x^{\frac{1}{6} - 1} + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} x^{-\frac{1}{6} - 1} =$$

$$= \frac{1}{6} x^{-\frac{5}{6}} + \frac{1}{3} x^{-\frac{7}{6}}$$

(7) $y = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ $\quad / \; y' = ?$

(8) $y = x^3 - 2\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{3}{\sqrt[5]{x}} - \dfrac{1}{x^5}$.

(9) $y = \sin x - \operatorname{arctg} x \quad / y' = ?$

$y' = (\sin x)' - (\operatorname{arctg} x)' =$

$= \cos x - \frac{1}{1+x^2} \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$

(10) $y = \underbrace{x^3}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g} \quad / y' = ? \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$y' = (x^3)' \cdot \cos x + x^3 \cdot \underbrace{(\cos x)'}_{= -\sin x} =$

$= 3x^2 \cdot \cos x - x^3 \cdot \sin x$

(11) $y = \underbrace{2x^4}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} \qquad / y'$

$y' = (2x^4)' \cdot \sin x + 2x^4 \cdot (\sin x)' =$

$= 8x^3 \cdot \sin x + 2x^4 \cdot \cos x$

(12) $y = \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{(\sin x - \cos x)}_{g}$

$y' = (e^x)' \cdot (\sin x - \cos x) + e^x \cdot \underbrace{(\sin x - \cos x)'}_{(\sin x)' - (\cos x)'}$

$y' = e^x(\sin x - \cos x) + e^x \cdot (\cos x + \sin x) =$

$= e^x(\sin x - \cancel{\cos x} + \cancel{\cos x} + \sin x) =$

$= 2\sin x \cdot e^x$

(13) $y = \ln x \cdot \arccos x - \sin x \quad / y' = ?$

$y' = (\underbrace{\underbrace{\ln x}_{l} \cdot \underbrace{\arccos x}_{m}}_{l' \cdot m + l \cdot m'})' - (\sin x)'$

$(\ln(5x^2))' = \frac{1}{5x^2} \cdot (5x^2)'$

$=$

$y' = (\ln x)' \cdot \arccos x + \ln x \cdot (\arccos x)' - (\sin x)'$

$y' = \frac{1}{x} \cdot \arccos x + \ln x \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \cos x$

$$y' = \frac{\arccos x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} - \cos x$$

14 $$y = \frac{2x}{1-x^2} \quad \Big/ \; y' = ?$$

$$y = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v + u . v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{(2x)'(1-x^2) - 2x\,(\overset{=0}{1}-x^2)'}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{2\,(1-x^2) - 2x . (-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{2 - 2x^2 + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2 + 2x^2}{(1-x^2)^2}$$

(15) $y = \dfrac{\arcsin x}{1-x^2}$ $\quad / \; y' = ?$

$$y' = \frac{(\arcsin x)'(1-x^2) - \arcsin x \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)^{1} + 2x \arcsin x}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \arcsin x}{(1-x^2)^2}$$

(16) $y = \underbrace{(3x^2-2)^{19}}_{[u(x)]^{19}}$ $\quad / \; y' = ?$

$$y' = 19\,(3x^2-2)^{18} \cdot 6x =$$
$$= 114x\,(3x^2-2)^{18}$$

(17) $y = \underbrace{(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3)}_{[u(x)]^{100}}^{100}$ / $y' = ?$

$y' = 100(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3)^{99} \cdot (6x^2 - 6x + 4)$

(18) $y = \underset{(\sin x)^3}{\underset{\parallel}{\sin^3 x}} + \sin x^3$ / $y' = ?$

$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x + \cos x^3 \cdot 3x^2$

$y' = 3\sin^2 x \cdot \cos x + 3x^2 \cdot \cos x^3$

(19) $y = e^{\arcsin x} - \cos x^2$ / $y' = ?$

$y' = e^{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \sin x^2 \cdot 2x$

$y' = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} + 2x \cdot \sin x^2$

$$\boxed{\begin{aligned} (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (\sqrt{u(x)})' &= \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x) \end{aligned}}$$

(20) $y = tg\sqrt{x} + \sin 2x \quad / \; y' = ?$

$$y' = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\cos 2x$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}} + 2\cos 2x$$

(21) $y = \ln(x^2+4x+10) + \ln(\operatorname{arctg} x) \quad / \; y' = ?$

$$y' = \frac{1}{x^2+4x+10} \cdot (2x+4) + \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = \frac{2x+4}{x^2+4x+10} + \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$$

(22) $y = \cos^3 x + \cos x^3 \quad / y' = ?$

$y' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) + (-\sin x^3) \cdot 3x^2$

$y' = -3\cos^2 x \sin x - 3x^2 \cdot \sin x^3$

(23) $y = \sin^4(2x^2 - 4x + 1) \quad / y' = ?$

$y' = 4\sin^3(2x^2 - 4x + 1) \cdot \cos[(2x^2 - 4x + 1)] \cdot (4x - 4)$

$y' = 16(x-1)\sin^3(2x^2 - 4x + 1) \cdot \cos(2x^2 - 4x + 1)$

(24) $y = tg^5(5x^8 - 7x) \quad / y' = ?$

(25) $y = \ln(\operatorname{arccotg}\sqrt{x}) \quad / y' = ?$

$y' = \frac{1}{\operatorname{arccotg}\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{-1}{1 + (\sqrt{x})^2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$

$= \frac{-1}{2\sqrt{x}(1 + x) \cdot \operatorname{arccotg}\sqrt{x}}$

(26) $y = \arccos(\sqrt[3]{\sin x})$ / $y' = ?$

(27) $y = \sqrt[7]{\cos(\ln x)}$ / $y' = ?$

(28) $y = e^{\arcsin(x^2)}$ / $y' = ?$

(29) $y = tg^2 x + \ln(\cos x)$ / $y' = ?$

$$y = \underbrace{e^{\arcsin x^2}}_{f(x)} - \underbrace{\arccos(\sqrt[3]{\sin x})}_{g(x)} + \underbrace{tg^2 x^3}_{h(x)}$$

$f'(x) = \cdot\ -\ \quad -$

$g'(x) = -\ -\ -\ -$

$h'(x) = -\ -\ -\ -$

$y' = -\ -\ -$

Диференциал на ф-я на една независима променлива

Th 25 Функцията $y = f(x)$ е диференцируема в т. x_0 $\Longleftrightarrow$ Δy в тази точка има представянето $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, където $A = const$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$. При това $A = f'(x_0)$

Def 34 Ако f е диференцируема в т. x_0, линейната функция на Δx: $df = f'(x_0)\Delta x$ се нарича диференциал на ф-та f в т. x_0

① $y = \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}$ / $dy = ?$

$$d\left(\frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}\right) = \left(\frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}\right)' dx$$

$$y' = x^{-1} + x^{\frac{2}{3}} = -x^{-2} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$dy = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right) dx$$

(2) $y = \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g}$ / dy

$$y' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' =$$

$$= e^x + x \cdot e^x = \underline{e^x(1+x)}$$

$$dy = \left[e^x(1+x)\right] dx$$

(3) $y = \sin^2 x$ / $dy = ?$

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$dy = \sin 2x \, dx$$

④ $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ / $dy = ?$

$$y' = \frac{x' (1-x^2)^{\frac{1}{2}} - x \cdot \left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'}{(\sqrt{1-x^2})^2} =$$

$$= \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - x \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x)}{1-x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)^1} =$$

$$= \frac{1-\cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$dy = \left(\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dx$$

Производни от по-висок ред

Def 35 Производните от втори и по-висок ред на ф-ция $y = f(x)$ се определят индуктивно последователно посредством

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]', \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

при положение, че съответните операции имат смисъл

Диференциали от втори и по-висок ред на ф-ция $y = f(x)$ се определят индуктивно посредством

$$d^n y = d(d^{n-1} t), \quad n = 2, 3, \ldots$$

① Намерете y'', ако $y = 3x^2 - 6x + 1$

$$y' = 6x - 6 \qquad y'' = (6x - 6)' = 6$$

(2) $y = e^{-x} \sin x \quad / \; y'' = ?$

$$y' = (e^{-x})' \cdot \sin x + e^{-x} \cdot (\sin x)'$$

$$y' = e^{-x} \cdot (-1) \cdot \sin x + e^{-x} \cdot \cos x$$

$$y' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cdot \cos x$$

$$y'' = \underbrace{(-e^{-x} \cdot \sin x)'}_{f'} + \underbrace{(e^{-x} \cdot \cos x)'}_{g'}$$

$$f' = -e^{-x} \cdot (-1) \cdot \sin x + (-e^{-x}) \cdot (\cos x)$$

$$f' = e^{-x} \cdot \sin x - e^{-x} \cos x$$

$$g' = -e^{-x} \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x) =$$

$$= -e^{-x} \cdot \cos x - e^{-x} \cdot \sin x$$

$$y'' = \cancel{e^{-x} \cdot \sin x} - e^{-x} \cdot \cos x - e^{-x} \cdot \cos x - \cancel{e^{-x} \cdot \sin x}$$

$$y'' = -2e^{-x} \cos x$$

③ $y = \frac{x^2}{1-x}$ / $y'' = ?$

Някои приложения на производни и диференциали на функция

Приложения на диференциала за приближени пресмятания

Ако ф-та f е диф. в т. x_0, то с точност до $o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ $f(x_0+\Delta x)$ е равно на

$$f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + df(x_0) \text{ и}$$

$$\boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x} \text{ ф-ла.}$$

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

1 Нам. приближ. стойност на $\sqrt{\underbrace{2510}_{x}}$

$f(x) = \sqrt{x}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\underbrace{x_0 = 2500}_{x_0}$

$\Delta x = 10$

$$f(x_0+\Delta x)=\sqrt{2500+10}\approx\sqrt{2500}+\frac{1}{2\sqrt{2500}}\cdot 10\approx$$

$$\approx 50+\frac{1}{2\cdot\cancel{50}_{5}}\cdot\cancel{10}\approx 50+\frac{1}{10}\approx 50{,}1$$

(2) Нам. приблизит. стойност на $\sqrt[3]{1{,}02}$

$$f(x)=\sqrt[3]{x}\qquad f'(x)=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}},\quad x_0=1,\quad \Delta x=0{,}02$$

$$\sqrt[3]{1+0{,}02}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}\cdot 0{,}02\approx$$

$$\approx 1+\frac{0{,}02}{3}\approx\boxed{1{,}006}666\ldots 7$$

(3) Нам. приближ. стойност на $\sin 48^0$

Р-е:

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$x_0 = 45^0 \qquad \Delta x = 3^0$

$$\sin(45^0 + 3^0) \approx \underbrace{\sin 45^0}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\cos 45^0}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underset{\shortparallel}{3^0}$$

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \qquad 3^0 = \frac{\cancel{3}\pi}{\cancel{180}\,60}$$

$$\sin(45^0 + 3^0) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\overset{\approx 3,1415}{\pi}}{60}\right) \approx$$

$$\approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{3,1415}{60}\right) \approx \underline{\underline{0,8573}}$$

(4) Нам. приближ. стойност на $\cos 31^0$

$\cos(30^0 + 1^0) \qquad f(x) = \cos x \qquad x_0 = 30^0$

$f'(x) = -\sin x \qquad \Delta x = 1^0$

(5) // — ~ — $\lg(10,21)$

$f(x) = \lg x$ $\quad x_0 = 10$ $\quad \Delta x = 0,21$

$f'(x) =$ — — $\quad \lg 10 = 1$

(6) Нам. прибл. стойност на $\operatorname{arctg}(1,05)$

Осн. теореми за средните стойности