Метод на Якоби (простата итерация) за решаване на СЛАУ

Задача 1:

Задача 1: Дадена е системата линейни алгебрични уравнения (СЛАУ) A.x = b, където векторът от свободни членове b има вида b = (p, q, $p + q)^T$ (в случая p = 1, q = 9) и

$$A = \begin{pmatrix} 10 + p & 1 & 2 \\ 5 & p + q + 11 & 3 \\ p & q & 22 + q \end{pmatrix}$$

По метода на Якоби (проста итерация):

1. Постройте итерационния процес и разпишете покоординатно.
2. Проверете условията на метода.
3. Направете 3 итерации
4. Какъв е минималния брой итерации за достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)} = (-10, 0, 10)^T$?

In[13]:=
```
A = {{10, 1, 2}, {5, 19, 3}, {0, 8, 30}}; b = {0, 8, 8};
```

In[14]:=
```
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

```
За сравнение, точното решение е {-0.0727273, 0.415584, 0.155844}
```

---

1. Конструиране на метода - получаване на матрицата **B** и вектора **c**

In[15]:=
```
n = Length[A];
```

In[16]:=
```
c = Table[0, n];
```

In[17]:=
```
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
```

In[18]:=
```
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = -A[[i]]/A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]]/A[[i, i]]
]
```

In[19]:=
```
Print["Итерационния процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ".x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

Итерационния процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0. & -0.1 & -0.2 \\ -0.263158 & 0. & -0.157895 \\ 0. & -0.266667 & 0. \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0. \\ 0.421053 \\ 0.266667 \end{pmatrix}$

2. Проверка на условията за сходимост

Първа норма

In[20]:=
```
N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]]]
```

Out[20]=

0.421053

Втора норма

In[21]:=
```
N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]]]
```

Out[21]=

0.366667

Трета норма

In[22]:=
```
N[Sqrt[Sum[Sum[B[[i, j]]^2, {j, 1, n}], {i, 1, n}]]]
```

Out[22]=

0.463998

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е втора.

3. Извършваме итерациите

In[23]:=
```
x = {12, 10, -4.8};
```

In[24]:=
```
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
 Print["k = ", k , " x^(k) = ", N[x]];
 x = B.x + c
]
```

k = 0 $x^{(k)}$ = {12., 10., -4.8}

k = 1 $x^{(k)}$ = {-0.04, -1.97895, -2.4}

k = 2 $x^{(k)}$ = {0.677895, 0.810526, 0.794386}

k = 3 $x^{(k)}$ = {-0.23993, 0.11723, 0.0505263}

In[39]:=
```
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

За сравнение, точното решение е {0.0173077, 0.394822, 0.207396}

4. Какъв е минималния брой итерации за достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)}$ = (-10, 0, 10)^{T}?

In[40]:=

```
A = (10  1  2
     5  19  3
     0   8 30); b = {0, 8, 8};

(*инициализация на матрицата B и вектора c*)
n = Length[A];
c = Table[0, n];
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = - A[[i]] / A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]] / A[[i, i]]
]
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]

(*проверка на сходимост
 и избор на норма - отделно*)

x = {-10, 0, 10};
N[10^-5] (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = N[Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]]];
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 17, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", N[x], " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc / (1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{5}{19} & 0 & -\frac{3}{19} \\ 0 & -\frac{4}{15} & 0 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{19} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$

Out[47]=

0.00001

k = 0 $x^{(k)}$ = {-10., 0., 10.} ε_k = 21.0859

k = 1 $x^{(k)}$ = {-2., 1.47368, 0.266667} ε_k = 7.73149

k = 2 $x^{(k)}$ = {-0.200702, 0.905263, -0.126316} ε_k = 2.83488

k = 3 $x^{(k)}$ = {-0.0652632, 0.493813, 0.0252632} ε_k = 1.03946

k = 4 $x^{(k)}$ = {-0.054434, 0.434238, 0.134983} ε_k = 0.381134

k = 5 $x^{(k)}$ = {-0.0704204, 0.414064, 0.15087} ε_k = 0.139749

k = 6 $x^{(k)}$ = {-0.0715804, 0.415763, 0.15625} ε_k = 0.0512413

k = 7 $x^{(k)}$ = {-0.0728262, 0.415219, 0.155797} ε_k = 0.0187885

k = 8 $x^{(k)}$ = {-0.0726812, 0.415618, 0.155942} ε_k = 0.00688911

k = 9 $x^{(k)}$ = {-0.0727501, 0.415557, 0.155835} ε_k = 0.00252601

k = 10 $x^{(k)}$ = {-0.0727227, 0.415592, 0.155851} ε_k = 0.000926202

k = 11 $x^{(k)}$ = {-0.0727295, 0.415582, 0.155842} ε_k = 0.000339608

k = 12 $x^{(k)}$ = {-0.0727266, 0.415585, 0.155845} ε_k = 0.000124523

k = 13 $x^{(k)}$ = {-0.0727275, 0.415584, 0.155844} ε_k = 0.0000456583

k = 14 $x^{(k)}$ = {-0.0727272, 0.415585, 0.155844} ε_k = 0.0000167414

k = 15 $x^{(k)}$ = {-0.0727273, 0.415584, 0.155844} ε_k = 6.13851×10^{-6}

k = 16 $x^{(k)}$ = {-0.0727273, 0.415584, 0.155844} ε_k = 2.25079×10^{-6}

k = 17 $x^{(k)}$ = {-0.0727273, 0.415584, 0.155844} ε_k = 8.25289×10^{-7}

За сравнение, точното решение е {-0.0727273, 0.415584, 0.155844}

Извод: За достигане на точност 10^{-5} при начално приближение $x^{(0)} = (-10, 0, 10)^T$ са необходими 13 итерации.

Задача 2:

Задача 2: Дадена е системата линейни алгебрични уравнения (в случая p = 1, q = 9)
$10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = p$
$-x_1 + 10x_2 - x_3 = q$
$-3x_1 + 18x_3 + x_4 = p + q$
$2x_1 - x_2 + 21x_4 = -10$
а) Запишете итерационния процес за метод на Якоби
б) Сходящ ли е итерационния процес и ако да, защо?
в) Изберете начално приближение за итерационния процес.
г) Изчислете приближеното решение с точност 10^{-3} по метода на Якоби. Представете

резултатите в таблица. Ако сте направили повече от 5 итерации, запишете само първите 2 и последните 2 в таблицата.
д) С колко знака се представя крайния резултат и с колко знака е необходимо да извършваме междинните изчисления?

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 10 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 18 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 21 \end{pmatrix}; \; b = \{0, 8, 8, -10\};$$

In[53]:=
```
Print["За сравнение точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

За сравнение точното решение е {-0.0727273, 0.415584, 0.155844}

1. Конструиране на метода - получаване на матрицата **B** и вектора **c**

In[∘]:=
```
n = Length[A];
```

In[∘]:=
```
c = Table[0, n];
```

In[∘]:=
```
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
```

In[54]:=
```
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = -A[[i]]/A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]]/A[[i, i]]
]
```

2. Проверка за сходимост на итерационния процес

In[55]:=
```
Print["Итерационния процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ".x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

Итерационния процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0. & -0.1 & -0.2 \\ -0.263158 & 0. & -0.157895 \\ 0. & -0.266667 & 0. \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0. \\ 0.421053 \\ 0.266667 \end{pmatrix}$

Извод: Итерационния процес е сходящ, защото елементите от главния диагонал на матрицата A са по-големи от всички останали елементи на матрицата A.

3. Избор на начално приближение

In[56]:=
```
x = {-6, 12.4, 11, -6.5};
```

4. Изчислете приближеното решение с точност 10^{-3} по метода на Якоби

Първа норма

In[57]:= $N\left[Max\left[Table\left[\sum_{j=1}^{n} Abs[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]\right]$

Out[57]=

0.421053

Втора норма

In[58]:= $N\left[Max\left[Table\left[\sum_{i=1}^{n} Abs[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]\right]$

Out[58]=

0.366667

Трета норма

In[59]:= $N\left[\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B[[i, j]]^2}\right]$

Out[59]=

0.463998

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е втора.

Извършваме итерациите

In[ ]:= $N\left[10^{-3}\right]$

Out[ ]=

0.001

In[ ]:= $normB = N\left[Max\left[Table\left[\sum_{i=1}^{n} Abs[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]\right];$

In[ ]:=
```
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
```

```
For[k = 0, k ≤ 20, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", N[x], " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
```

k = 0 $x^{(k)}$ = {-6., 12.4, 11., -6.5} ε_k = 39.0841

k = 1 $x^{(k)}$ = {-2.81, 1.4, -0.0833333, 0.685714} ε_k = 14.1447

k = 2 $x^{(k)}$ = {0.462381, 0.610667, 0.049127, -0.141905} ε_k = 5.11904

k = 3 $x^{(k)}$ = {0.10867, 0.951151, 0.640503, -0.491147} ε_k = 1.8526

k = 4 $x^{(k)}$ = {-0.0803297, 0.974917, 0.600953, -0.441247} ε_k = 0.670466

k = 5 $x^{(k)}$ = {-0.055073, 0.952062, 0.566681, -0.422115} ε_k = 0.242645

k = 6 $x^{(k)}$ = {-0.0447646, 0.951161, 0.569828, -0.425609} ε_k = 0.0878144

k = 7 $x^{(k)}$ = {-0.0465322, 0.952506, 0.57174, -0.426634} ε_k = 0.0317804

k = 8 $x^{(k)}$ = {-0.0470875, 0.952521, 0.571502, -0.426401} ε_k = 0.0115015

k = 9 $x^{(k)}$ = {-0.0469688, 0.952441, 0.571397, -0.426348} ε_k = 0.00416245

k = 10 $x^{(k)}$ = {-0.0469395, 0.952443, 0.571413, -0.426363} ε_k = 0.00150641

k = 11 $x^{(k)}$ = {-0.0469473, 0.952447, 0.571419, -0.426366} ε_k = 0.000545177

k = 12 $x^{(k)}$ = {-0.0469488, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 0.000197302

k = 13 $x^{(k)}$ = {-0.0469483, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 0.0000714045

k = 14 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 0.0000258416

k = 15 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 9.35221×10^{-6}

k = 16 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 3.38461×10^{-6}

k = 17 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 1.22491×10^{-6}

k = 18 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 4.433×10^{-7}

k = 19 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 1.60432×10^{-7}

k = 20 $x^{(k)}$ = {-0.0469482, 0.952447, 0.571418, -0.426365} ε_k = 5.80612×10^{-8}

Извод: За достигане на точност 10^{-3} при начално приближение $x^{(0)} = (-7,\ 11.4,\ 16,\ -8.5)^T$ са необходими 11 итерации.

Краен резултат:

k = 0 $x^{(k)}$ = {-6., 12.4, 11., -6.5} ε_k = 39.0841

k = 1 $x^{(k)}$ = {-2.81, 1.4, -0.0833333, 0.685714} ε_k = 14.1447

k = 10 $x^{(k)}$ = {-0.0469395, 0.952443, 0.571413, -0.426363} ε_k = 0.00150641

k = 11 $x^{(k)}$ = {-0.0469473, 0.952447, 0.571419, -0.426366} ε_k = 0.000545177