

Линейна алгебра и аналитична геометрия

за специалност "Информатика", I курс

лектор: гл. ас. д-р Ива Докузова

Матрици. Действия с матрици

1) Определение за матрица. Всяка таблица от реални числа

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

подредени в m реда и n стълба се нарича **реална матрица от тип $(m \times n)$** .

Числата a_{ij} , ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) се наричат **елементи на матрицата**.

Множеството на всички реални матрици от тип $(m \times n)$ се означава $M_{m \times n}(R)$.

В частност, ако $m = 1$, получаваме **матрица–ред**

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$

а при $n = 1$, получаваме **матрица–стълб**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Матрица, с равен брой редове и стълбове, се нарича **квадратна матрица**.

Множеството на квадратните матрици от тип $(n \times n)$ се означава с $M_n(R)$.

Матрица, която се получава от A чрез смяна местата на редовете със съответните стълбове, се нарича **транспонирана** и се означава $A^t = (a_{ji})$ или $A' = (a_{ji})$.

Някои специални матрици

Главен диагонал на квадратната матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

се нарича съвкупността от елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Квадратна матрица, на която всички елементи под и над главния диагонал са нули се нарича **диагонална матрица**.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратната матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

се нарича **единична матрица**.

Матрицата $O \in M_{m \times n}(R)$, на която всички елементи са нули се нарича **нулева матрица**. Тя има вида

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейни действия с матрици

Две матрици $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$ и $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$ се наричат **равни**, ако съответните им елементи са равни. Означаваме $A = B$.

а) **Сума** на $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$ и $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$ е матрицата

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m \times n}(R).$$

Действието се нарича събиране на матрици.

б) **Произведение на матрицата** $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$ с реално число λ е матрицата

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in M_{m \times n}(R).$$

Действието се нарича умножение на матрица с число.

Събирането на две матрици и умножението на матрица с число се наричат **линейни действия с матрици**.

Свойства на линейните действия

За произволни матрици $A, B, C \in M_{m \times n}(R)$ и произволни числа $\lambda, \mu \in R$ са в сила следните свойства:

- 1) $A + B = B + A$;
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- 3) Съществува матрица O , наречена нулева, такава че за всяка матрица A е изпълнено $A + O = A$;
- 4) За всяка матрица A съществува матрица $-A = (-a_{ij})$, наречена противоположна на A , за която $A + (-A) = O$;
- 5) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- 6) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- 7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
- 8) $1A = A$.

Произведение на матрици

Произведение на матриците

$A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(R)$ и $B = (b_{js}) \in M_{n \times k}(R)$

е матрицата

$$AB = (c_{is}) \in M_{m \times k}(R),$$

където

$$c_{is} = a_{i1}b_{1s} + a_{i2}b_{2s} + a_{i3}b_{3s} + \cdots + a_{in}b_{ns}.$$

Действието, което извършваме с A и B , за да получим $C = AB$ се нарича **умножение на матрици**.

Броят на стълбовете на матрицата A е равен на броя на редовете на матрицата B . Такива матрици се наричат **съгласувани**.

За да е възможно умножението на две матрици, то те трябва да са съгласувани.

Умножението на квадратни матрици от един и същи ред е винаги възможно.

Свойства на произведението

В общият случай за две матрици A и B **не е изпълнено** $AB = BA$.

За произволни съгласувани матрици A , B и C са в сила свойствата:

1) $A(B + C) = AB + AC$;

2) $(A + B)C = AC + BC$;

3) $A(BC) = (AB)C$;

4) $AO = O$, $OB = O$, където O е нулевата матрица;

5) $AE = A$, $EB = B$, където E е единичната матрица и двойките матрици A , E и E , B са съответно съгласувани.

Задачи. (5. Тема)

1. Дадени са матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ 0 & 15 & 3 \\ 9 & -12 & 15 \end{pmatrix}.$$

Намерете:

а) $A + B$; б) $A - B$; в) $3A - 2B$; г) $-2A$; д) $\frac{1}{3}B$

2. Дадени са матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -2 \\ 10 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Намерете:

а) $B + A$; б) $B - A$; в) $2A - 3B$; г) $4A$; д) $-\frac{1}{2}B$.

3. Пресметнете произведението на матриците, ако това е възможно:

а) $(5 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} (0 \quad 7 \quad -2)$;

в) $(5 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 10 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Да се намери матрица $M = A^2 - BA + 3B$, ако

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

5. Да се намери матрицата $AB - BA$, ако:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

б) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Детерминанта от втори ред

На всяка реална квадратна матрица от втори ред A се съпоставя едно реално число $\det A$, наречено нейна **детерминанта**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Стойността ѝ се пресмята по формулата

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Заб. Стойността на детерминанта от първи ред е равна на числото, което е неин елемент, т.е. $\det A = a_{11}$.

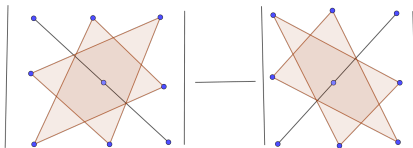
Детерминанти от трети ред

На всяка реална квадратна матрица от трети ред $A = (a_{ij})$ се съпоставя едно реално число $\det A$, наречено нейна детерминанта

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Стойността ѝ се пресмята (**по правило на триъгълниците**).

$$\begin{aligned} \det A = & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$



Адюнгирани количества

Адюнгиран минор Δ_{ij} на елемента a_{ij} на $\det A$ от втори ред се нарича числото, което се получава след премахване на i -ти ред и j -ти стълб от $\det A$.

Адюнгирано количество на елемента a_{ij} наричаме числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Например, адюнгиран минор на елемента a_{12} от детерминантата

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

е елементът $\Delta_{12} = a_{21}$.

А адюнгираното количество на елемента a_{12} е $A_{12} = (-1)^{1+2}a_{21}$, което е $A_{12} = (-1)a_{21}$.

Адюнгиран минор Δ_{ij} на елемента a_{ij} на $\det A$ от трети ред се нарича детерминантата от втори ред, която се получава след премахване на i -ти ред и j -ти стълб от $\det A$.

Адюнгирано количество на елемента a_{ij} наричаме числото

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Например, адюнгиран минор на елемента a_{13} от детерминантата

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

е детерминантата $\Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

А адюнгираното количество на елемента a_{13} е $A_{13} = (-1)^{1+3} \Delta_{13}$.

Задачи. (4. Тема)

1. Да се пресметнат детерминантите от *II* ред:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Да се решат уравненията:

а) $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4$; б) $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ 8 & 8-x \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & x^2 - 5x \end{vmatrix} = 0$.

3. Да се решат неравенствата:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2(x-3) \\ 2 & x \end{vmatrix} > 0$; б) $\begin{vmatrix} 2x & 4x \\ 3 & x \end{vmatrix} < -10$; в) $\begin{vmatrix} x^2 & 3x-10 \\ -x & x \end{vmatrix} > 0$.

4. Да се пресметнат детерминантите от *III* ред:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

5. Да се решат уравненията:

$$\begin{vmatrix} x & -4 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & x+3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 2-x & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 3 & -2 & -x \\ x+2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Да се решат неравенствата:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & x & -2 \\ 3 & 2 & -x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 6; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & x-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & x \end{vmatrix} > 1.$$

7. Дадени са детерминантите:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & 10 & 0 \\ -12 & 20 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 25 & 5 & -4 \\ 13 & 12 & -9 \\ 10 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Да се намерят поддетерминантите и адюнгираните количества на елементите: a_{13} , a_{21} , a_{32} и a_{12} .

Детерминанти от ред, по-висок от три

Ако $A = (a_{ij})$ е квадратна матрица от четвърти ред, то нейната детерминанта се записва

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

и се нарича детерминанта от IV ред.

Аналогично се записват детерминанти от пети и по-висок ред.

Правило на Лаплас. Всяка детерминанта е равна на сумата от произведенията на елементите от произволен ред със съответните им адюнгирани количества.

За детерминанта от IV ред по правилото на Лаплас имаме

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14},$$

което е развитие на детерминантата по елементите ѝ от първи ред.

Други развития например са:

$\det A = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}$ – по елементите от втори стълб и

$\det A = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44}$ – по елементите от четвърти ред.

Друг метод за пресмятане на детерминанти от по-висок ред е чрез опростяване на вида им — привеждане на **детерминантата в триъгълен вид** (детерминанта, в която всички елементи под или над главния диагонал са нули):

$$|\Lambda_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad |\Lambda_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Стойностите на двете детерминанти са $|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$.

Свойства на детерминантите

Тъй като $\det A = \det A^t$, то следните свойства са в сила както за редовете така и за стълбовете на детерминантата.

1. Ако разменим местата на два реда в една детерминанта, получаваме детерминанта с противоположна стойност.
2. Детерминанта с два равни реда е равна на нула.
3. Ако умножим всички елементи от даден ред на една детерминанта с някакво число, то цялата детерминанта се умножава с това число.
4. Детерминанта с ред, съставен само от нули, е равна на нула.
5. Стойността на детерминантата не се променя, ако към един неин ред прибавим друг неин ред, умножен с някакво число.
6. Детерминанта с два пропорционални реда е равна на нула.
7. Ако редовете на една детерминанта са линейно зависими, то тя е равна на нула.
8. Сумата от произведенията на елементите от даден ред на една детерминанта със съответните адюнгирани количества на елементите от друг неин ред е равна на нула.

Например за детерминанта от IV ред имаме

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} + a_{14}A_{24} = 0.$$

Задачи. (4. Тема)

8. Да се пресметнат детерминантите от трети ред, като се приложат свойствата:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 4 & -6 & -15 \\ -2 & 3 & 8 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & 10 & 4 \\ -12 & 0 & -12 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

9. Да се пресметнат детерминантите от четвърти ред:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & -1 \\ -8 & -1 & 7 & 6 \\ 7 & 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 5 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & -1 & 2 \\ 10 & -12 & 4 & 15 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Обратни матрици

Нека A е квадратна матрица.

Матрицата A се нарича **особена (изродена)**, ако $\det A = 0$. Матрицата A се нарича неособена, ако $\det A \neq 0$.

Матрицата A^{-1} се нарича **обратна на A** , а A се нарича **обратима**, ако е изпълнено $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Особените матрици не притежават обратна матрица.

Всяка неособена матрица притежава точно една обратна матрица.

1) Произволна неособена квадратна матрица от II ред

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

има обратна матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

2) Произволна неособена квадратна матрица от III ред

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ има обратна матрица}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Тук A_{ij} е адюнгираното количество на елемента a_{ij} , където $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$.

3) Обратната матрица на неособена квадратна матрица от n -ти ред $A = (a_{ij})$ се получава от

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A_{ij})^t.$$

Означили сме с $(A_{ij})^t$ транспонираната матрица (съответните редове и стълбове са разменили местата си) на матрицата (A_{ij}) .

Метод на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица

Елементарни преобразувания върху редовете на матрицата се наричат:

- 1) смяната местата на два реда;
- 2) прибавяне на даден ред от матрицата, умножен с число към друг неин ред;
- 3) умножение на ред с число, различно от нула.

Заб. В сила е аналогично определение за елементарни преобразувания върху стълбове на матрица.

Ако матрицата B е получена от матрицата A чрез елементарни преобразувания върху редовете и стълбовете ѝ, то A се нарича **еквивалентна на B** и означаваме $A \sim B$.

Нека е дадена неособена квадратна матрица $A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, n$.
Образуваме матрицата (A/E) , където E е единичната матрица от същия тип.

Чрез елементарни преобразувания само върху редовете я привеждаме във вида (E/A^{-1}) .

Тогава обратната матрица на A е

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Методът, който използваме за да я намерим се нарича **метод на Гаус-Жордан** за намиране на обратна матрица.

Матрични уравнения

Матричното уравнение

$$AX = B, \quad \det A \neq 0, \quad (1)$$

има единствено решение $X = A^{-1}B$.

То се получава, като умножим отляво двете страни на (1) с обратната матрица A^{-1} на A .

Матричното уравнение $XA = B$, където A е неособена квадратна матрица, има единствено решение $X = BA^{-1}$.

За уравнението

$$AX = B, \quad \det A = 0, \quad (2)$$

имаме следните случаи:

1) Ако B не е квадратна или B е особена, то (2) има безброй решения или няма решение.

За да се реши докрай уравнението (2), трябва да се умножат матриците A и X и да се разпише системата уравнения.

2) Ако B е неособена, то (2) няма решение.

Аналогично, за уравнението

$$XA = B, \quad \det A = 0, \quad (3)$$

имаме следните случаи:

1) Ако B не е квадратна или B е особена, то (3) има безброй решения или няма решение.

2) Ако B е неособена, то (3) няма решение.

Задачи. (5. Тема)

6. Да се намери обратната матрица A^{-1} .

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

7. Да се намери обратната матрица A^{-1} чрез метода на Гаус-Жордан, ако:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Да се докаже, че следните матрици нямат обратни:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

9. Да се решат матричните уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Линейно преобразуване на векторни пространства

Нека V и W са две реални векторни пространства.

Изображението $f : V \rightarrow W$ се нарича **линейно преобразуване** на V в W , ако f удовлетворява свойствата:

$$1) f(x + y) = f(x) + f(y);$$

$$2) f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

за всеки два вектора x и y от V и всяко реално число λ .

Множеството на всички линейни преобразувания на V в W се означава с $\mathfrak{L}(V, W)$.

За произволно линейно преобразуване $f \in \mathfrak{L}(V, W)$ са в сила:

$$f(o_v) = o_w, \quad f(-x) = -f(x).$$

Тук o_v и o_w са съответно нулевите вектори на V и W , а x е произволен вектор от V .

Ако $V = W$, то $f : V \rightarrow V$ се нарича линейно преобразуване на V и множеството им се означава с $\mathfrak{L}(V)$.

Ако линейното преобразуване f е взаимно еднозначно, то се нарича **изоморфизъм**.

Множеството от векторите на W , които са образи на вектори от V чрез f се нарича **област от стойности на f** и се означава $\operatorname{im} f$.

$$\operatorname{im} f = \{y \in W \mid \exists x \in V, f(x) = y\}.$$

Множеството от векторите на V , които са първообрази на нулевия вектор чрез f се нарича **ядро на f** и се означава $\ker f$.

$$\ker f = \{x \in V \mid f(x) = 0\}.$$

Множеството $\ker f$ е векторно подпространство на V , а множеството $\operatorname{im} f$ е векторно подпространство на W .

Числата $\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{im} f)$ и $\operatorname{def}(f) = \dim(\ker f)$ се наричат съответно **ранг и дефект на линейното преобразуване f** .

Ако $f \in \mathcal{L}(V)$, то

$$\operatorname{def}(f) + \operatorname{rg}(f) = \dim V.$$

Матрица на линейно преобразуване. Образ на вектор при линейно преобразуване

Нека е дадено линейно преобразуване на n -мерно в m -мерно векторно пространство $f : V^n \rightarrow W^m$. Нека $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ са бази съответно на векторните пространства V^n и W^m . Тогава $f(v_i)$ са вектори на W и се изразяват линейно чрез базата $\{w_j\}$ на W , както следва:

$$f(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m,$$

$$f(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m,$$

$$f(v_3) = a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + \cdots + a_{m3}w_m,$$

.....

$$f(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m.$$

Тук коефициентите a_{ij} са реални числа и образуват матрицата:

$$M_{v,w}(f) = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Тя е от тип $(m \times n)$. Матрицата $M_{v,w}(f) = (a_{ij})$ нарича **матрица на линейното преобразуване f относно базите $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$** .

Ако вектор $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и образът му $f(x) = y(y_1, y_2, \dots, y_m)$ са зададени съответно относно базите $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$, то връзката между техните координати се дава с матричното равенство:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

При фиксирани бази v и w , на всяко $f \in \mathfrak{L}(V, W)$ съответства еднозначно определена матрица $M_{v,w}(f) = (a_{ij})$, т.е. с (4) се определя изображение

$$M_{v,w} : \mathfrak{L}(V, W) \rightarrow M_{m \times n}(R).$$

Това изображение е взаимно еднозначно.

Примери на линейни преобразувания.

1) Нулево преобразуване на $\mathfrak{L}(V, W)$ се нарича изображението $o : V \rightarrow W$, при което $o(x) = o$ за всеки вектор $x \in V$.

На него съответства нулевата матрица $M_{v,w}(o) = O$ от тип $m \times n$.

2) Тъждественото преобразуване (идентитет) на $\mathfrak{L}(V)$ се нарича изображението $\text{id} : V \rightarrow V$, при което $\text{id}(x) = x$ за всеки вектор $x \in V$.

На него съответства единичната матрица $M_v(\text{id}) = E$ от n -ти ред.

3) Транспонирането на матриците в $M_{m \times n}(R)$ е линейно преобразуване.

Задачи (5. Тема)

10. Нека е дадено изображението $f : R^3 \rightarrow R^2$. Да се провери дали f е линейно, ако образът на произволен вектор $x(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ е:

а) $f(x) = (x_1 + x_2 - x_3, 3x_3)$,

б) $f(x) = (x_1 + x_3, 1 - x_2)$.

Да се намери матрицата на линейното преобразуване относно каноничните бази на R^3 и R^2 .

11. Нека f е линейно преобразуване на V . Ако $\{e_1, e_2, e_3\}$ е база на V и $f(e_1) = e_1 + e_2 - e_3$, $f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$, $f(e_3) = e_2 - 2e_3$, то да се намери

а) матрицата на линейното преобразуване $M_e(f)$;

б) аналитичното представяне на f ;

в) образът на вектор $x_0(1, 0, -3)$ чрез f .

се нарича **матрица на прехода от базата e към базата e'** .

В матричен вид (5) се записва:

$$e' = eT. \quad (6)$$

Всяка матрица на прехода T е неособена. Следователно съществува T^{-1} . Нещо повече, T^{-1} е матрица на прехода от базата e' към базата e .

Нека вектор $a \in V$ има следните представяния съответно относно e и e' :

$$\begin{aligned} a &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \cdots + x_n e_n, \\ a &= x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3 + \cdots + x'_n e'_n. \end{aligned} \quad (7)$$

Ще означим с x и x' матриците-стълбове от координатите на вектор a относно $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$. Тогава равенствата (7) матрично се записват

$$a = ex, \quad a = e'x'.$$

От горните равенства, като използваме (6), намираме

$$ex = e'x' = (eT)x' = e(Tx'),$$

откъдето следва

$$x = Tx'. \quad (8)$$

Равенство (8) ни дава **връзка между координатите на произволен вектор спрямо две различни бази.**

Тъй като T е обратима, то получаваме обратната връзка с формулата

$$x' = T^{-1}x.$$

Задачи (5. Тема)

12. Нека $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ е база на тримерно векторно пространство V .

Ако $e'_1 = e_3$, $e'_2 = e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$ са вектори от V , то

- а) Докажете, че образуват база на V ;
- б) Намерете матрицата на прехода от e' към e ;
- в) Намерете координатите на вектор $a = e_1 - e_2 + 2e_3$ относно e' .

Изменение на матрицата на линейно преобразуване на векторно пространство при смяна на базата

Нека f е линейно преобразуване на n -мерно векторно пространство V , а A е матрицата му в дадена база e . Матричен запис на това условие е

$$f(e) = eA.$$

Ако e' е друга база на V и B матрицата на f в базата e' , то имаме

$$f(e') = e'B.$$

Матрицата на прехода от e към e' е T , т.е. $e' = eT$.

И така, получаваме $f(e') = (eT)B = e(TB)$, както и $f(e') = f(eT) = f(e)T = (eA)T = e(AT)$.

Следователно $TB = AT$, откъдето намираме връзка между матриците на едно линейно преобразуване спрямо различни бази:

$$B = T^{-1}AT.$$

Матрицата B се нарича **подобна на A чрез неособената матрица T** .

Смяна на координатна система

Нека $K = Oe_1e_2e_3 = Ox_1x_2x_3$ и $K' = O'e'_1e'_2e'_3 = O'x'_1x'_2x'_3$ са две координатни системи в пространството. Нека T е матрицата на прехода от базата e към базата e' . Ако $\det T > 0$, то двете координатни системи K и K' са еднакво ориентирани. Ако $\det T < 0$, то K и K' са противоположно ориентирани.

Нека координатите на O' са $O'(a_1, a_2, a_3)$ относно K .

Ако M е произволна точка с координати $M(x_1, x_2, x_3)$ относно K и $M(x'_1, x'_2, x'_3)$ относно K' , то

$$\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \quad \overrightarrow{O'M} = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + x'_3e'_3.$$

Ако означим матриците-стълбове от координатите на M , M' и O с

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

то имаме матричните равенства

$$\overrightarrow{OM} = ex, \quad \overrightarrow{O'M} = e'x', \quad \overrightarrow{OO'} = ea.$$

Тогава от равенствата $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ и (6) намираме

$$x = Tx' + a.$$

Последното равенство ни дава **връзка между координатите на произволна точка относно две различни координатни системи.**

Транслация на координатната система K до K' имаме, точно когато $T = E$, т.е. $e = e'$. Тогава

$$x = x' + a. \quad (9)$$

Заб. Транслацията не е линейно преобразуване.

Ортогонална трансформация на координатната система K до K' имаме, точно когато координатните системи K и K' са ортонормирани и за координатните начала е изпълнено $O' = O$. Тогава

$$x = Tx'. \quad (10)$$

По-нататък, получаваме координатен запис на (9) и (10).

В пространството **транслацията на координатната система** K до K' се задава с равенствата

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_1 + a_1, \\x_2 &= x'_2 + a_2, \\x_3 &= x'_3 + a_3.\end{aligned}$$

Ортогонална смяна на ортонормирана координатна система K до ортонормирана координатна система K' се задава с

$$\begin{aligned}x_1 &= t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2 + t_{13}x'_3, \\x_2 &= t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2 + t_{23}x'_3, \\x_3 &= t_{31}x'_1 + t_{32}x'_2 + t_{33}x'_3,\end{aligned}$$

където $T = (t_{ij})$ е **ортогонална матрица**, т.е. транспонираната и обратната на T са равни: $T' = T^{-1}$.

Транслация и ротация в равнината

В равнината **транслацията** на координатната система K до K' се задава с равенствата

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_1 + a_1, \\x_2 &= x'_2 + a_2.\end{aligned}$$

Ортогонална смяна на ортонормирана координатна система K до ортонормирана координатна система K' се задава с

$$\begin{aligned}x_1 &= t_{11}x'_1 + t_{12}x'_2, \\x_2 &= t_{21}x'_1 + t_{22}x'_2,\end{aligned}\tag{11}$$

където $T = (t_{ij})$ е ортогонална матрица ($T' = T^{-1}$).

В случай, че K и K' са еднакво ориентирани, то смяната (11) е **ротация на координатната система K до K'** .

Ъгълът на ротация $\alpha = \angle(Ox_1, O'x'_1)$ е определен с функциите $\cos \alpha = t_{11}$, $\sin \alpha = t_{21}$.

Ранг на матрица

Линейна обвивка на система от вектори $\alpha = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$ се нарича множеството от всички техни линейни комбинации и се означава $L(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$.

Очевидно $L(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ е векторно пространство, породено от системата вектори α . Размерността му се нарича **ранг на системата вектори** α и се означава $\text{rg}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) = \dim L(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$.

И така, рангът на система вектори е броят на векторите във всяка максимална линейно независима нейна подсистема.

Рангът на системата вектори, която се състои само от нулевия вектор е числото нула.

Намирането на ранга на система вектори се свежда до намирането на ранга на матрицата образувана от техните координати.

Нека е дадена матрицата $A \in M_{m \times n}(R)$, както следва

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Редовете на A като наредени n -ки числа са m на брой вектори

$$u_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}).$$

Столбовете на A като наредени m -ки числа са n на брой вектори

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{mj}).$$

Разместването на редовете на A не променя ранга на системата вектори $\{u_i\}$, както и разместването на столбовете ѝ не променя ранга на системата вектори $\{v_j\}$.

Нещо повече:

Разместването на редовете на A не променя ранга на системата от стълбовете \mathbf{y} , както и разместването на стълбовете на A не променя ранга системата от редовете \mathbf{y} .

Рангът на системата от редовете на една матрица е равен на ранга на системата от стълбовете \mathbf{y} . Той се нарича **ранг на матрицата**. Означаваме $\text{rg}A$.

Елементарни преобразувания върху редовете (стълбовете) на матрицата не променят нейния ранг.

Елементарни преобразувания върху редове:

- 1) смяната местата на два реда;
- 2) прибавяне на даден ред от матрицата, умножен с число, към друг неин ред;
- 3) умножение на ред с число, различно от нула.

Матрици с един и същи ранг се наричат еквивалентни, т.е. ако $\text{rg}A = \text{rg}B$, то $A \sim B$.

Всяка матрица от вида

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3r} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

се нарича **трапецовидна**, ако $c_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, r$.

Рангът на трапецовидната матрица е равен на r .

За да намерим ранга на произволна матрица A я привеждаме в трапецовиден вид (12). Прилагаме елементарни преобразувания върху редовете и върху стълбовете ѝ. В този случай двете матрици A и C са еквивалентни.

Задачи (6. Тема)

1. Намерете ранга на матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Намерете ранга на системата вектори:

а) $a_1 = (1, -1, 0)$, $a_2 = (1, -3, 0)$, $a_3 = (2, -4, 0)$;

б) $a_1 = (3, -1, 3, 2, 5)$, $a_2 = (5, -3, 2, 3, 4)$, $a_3 = (1, -3, -5, 0, -7)$.

Системи линейни уравнения

Общият вид на **система линейни уравнения** от II ред е

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (13)$$

където a_{ij} са коефициенти на системата, а x_1, x_2 са неизвестни.

Решение на системата (13) е всяка двойка числа (x_1, x_2) , която удовлетворява и двете уравнения тъждествено.

Системата (13) е еквивалентна на уравнението $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

е матрицата от коефициентите, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ е матрицата-стълб от неизвестните, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ е матрицата от свободните коефициенти.

Ако $\det A \neq 0$, то матричното уравнение $AX = B$ има единствено решение $X = A^{-1}B$, т.е.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Така получаваме, че единственото решение на системата (13) се задава с

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (14)$$

където

$$\Delta = \det A, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Формулите (14) се наричат **формули на Крамер**.

Общ вид на **система линейни уравнения от III ред.**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (15)$$

където a_{ij} са коефициенти на системата, а x_1, x_2, x_3 са неизвестни.

Решение на системата (15) е всяка тройка числа (x_1, x_2, x_3) , която удовлетворява и трите уравнения тъждествено.

Системата (15) е еквивалентна на уравнението $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

е матрицата от коефициентите, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ е матрицата от неизвест-

ните, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ е матрицата от свободните коефициенти.

Ако $\det A \neq 0$, то системата (15) има единствено решение, което се получава по формулите на Крамер:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

където $\Delta = \det A$ и

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Формулите на Крамер са

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

където $\Delta = \det A$,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Системата (17) се нарича **хомогенна** само, когато коефициентите b_i са равни на нула.

Системата (17) се нарича **несъвместима**, ако няма решение, и **съвместима**, ако има поне едно решение.

Съвместимите системи биват **определени**, когато имат точно едно решение и **неопределени**, когато имат повече от едно решение.

Всяка хомогенна система е съвместима. Нулевото решение $(0, 0, \dots, 0)$ винаги я удовлетворява.

Матрицата от коефициентите на системата (17) е $A = (a_{ij})$ и се нарича **основна**. Матрицата

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

се нарича **разширена матрица на системата**.

Системата (17) е съвместима, точно когато $\text{rg}A = \text{rg}\bar{A}$.

Нека системата (17) е съвместима. Рангът на матрицата A се нарича ранг на системата. Системата е определена, точно когато $\text{rg}A = n$. Системата е неопределена, точно когато $\text{rg}A < n$.

Метод на Гаус. Универсален и най-удобен е методът на Гаус за решаване на системата (17). С този метод определяме вида ѝ и намираме нейни решения, ако такива съществуват.

Чрез елементарни преобразувания върху редовете на \bar{A} я привеждаме в следния вид:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3r} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & d_m \end{pmatrix},$$

Системата (17) е несъвместима, ако има поне един коефициент d_s , ($s > r + 1$) различен от нула.

Ако $d_{r+1} = d_{r+2} = \dots = d_m = 0$, то системата (17) е съвместима.

В този случай, ако $n > r$, то тя е неопределена. Ако $n = r$, то (17) е определена.

Забележка. При решаването на системи с метода на Гаус ще имаме предвид:

1. Ред, състоящ се само от нули се пропуска; единият от два пропорционални (или равни) реда се пропуска.
2. Самото намиране на решението (x_1, x_2, \dots, x_n) ще бъде изяснено чрез примери.

Обикновено задачите от линейни системи, идващи от практиката са такива, че броят на уравненията им е по-малък от броя на неизвестните и системите са съвместими. Такива системи имат безброй много решения, зависещи от $n - r$ параметри, и точно те са интересни за линейното оптимиране.

Задачи (6. Тема)

3. Да се решат следните системи линейни уравнения, като се използват формулите на Крамер:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = -2 \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = -2 \end{cases} ; \quad \text{в) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases} ;$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} ; \quad \text{д) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} .$$

4. Като се приложи методът на Гаус, да се решат системите:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 = 3 ; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 7x_1 - 15x_2 + 11x_3 - 4x_4 = 4 ; \end{array} \right. \\ \\ \text{в)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ -x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 ; \end{array} \right. & \text{г)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 . \end{array} \right. \end{array}$$

Литература.

- [1] Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, "Линейна алгебра и аналитична геометрия", Пловдивско университетско издателство, Пловдив, 2008.
- [2] Д. Мекеров, М. Манев. "Учебно помагало за дисциплината Линейна алгебра и аналитична геометрия", IV изд., Макрос, Пловдив, 2010.
- [3] Д. Мекеров, П. Рангелова, Б. Царева, Е. Павлов. "Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия", IV изд., УИ "Паисий Хилендарски", Пловдив, 2008.