Триедър на Френе, кривина и торзия

Върху крива да разгледаме фиксирана точка $C(u)$ и две движещи се точки P и Q. Тези три точки еднозначно определят равнина, ако образуват триъгълник.

Когато P и $Q \to C(u)$, тази равнината $(C(u), P, Q) \to$ гранично положение, т. нар. ***оскулачна равнина*** в точка $C(u)$ на кривата.

$\Rightarrow$ оскулачната равнина в т. $C(u)$ съдържа допирателната в $C(u)$

$\Rightarrow$ оскулачната равнина: z$C(u)$, $||C'(u)$, $||C''(u)$, $\quad C(u) + p\, C'(u) + q\, C''(u)$, $p, q \in \mathbb{R}$

Бинормалният вектор $b(u) = (C'(u) \times C''(u)) \,/\, |\,(C'(u) \times C''(u))\,|$.

$\Rightarrow b(u) \perp C'(u), \perp C''(u)$ и $\therefore \perp$ оскул. равн.

Правата $\boldsymbol{C}(u) + \lambda\boldsymbol{b}(u)$ е ***бинормалата*** в т. $\boldsymbol{C}(u)$ на кривата.

Главният нормален вектор е $\boldsymbol{n}(u) = (\boldsymbol{b}(u) \times \boldsymbol{C}'(u)) \,/\, |\boldsymbol{b}(u) \times \boldsymbol{C}'(u)|$

$\Rightarrow \boldsymbol{n}(u) \perp \boldsymbol{t}(u), \perp \boldsymbol{b}(u), \boldsymbol{tnb} > 0$

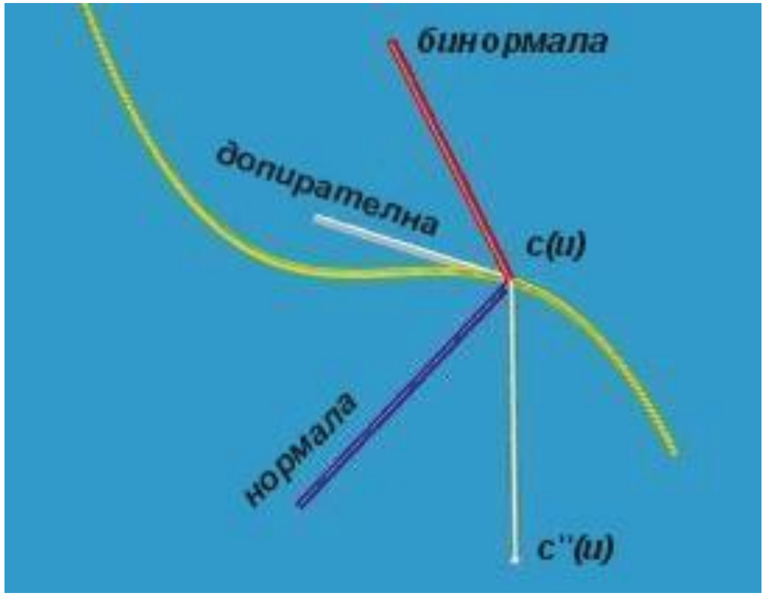
Правата $\boldsymbol{C}(u) + \lambda\boldsymbol{n}(u)$ е ***главната нормала*** в т. $\boldsymbol{C}(u)$ към кривата.

$\Rightarrow$ ортонормирана координатна система с начало т. $\boldsymbol{C}(u)$ и единични вектори

$\boldsymbol{t}(u), \boldsymbol{n}(u), \boldsymbol{b}(u)$ – ***подвижен триедър (репер) на Френе*** в точка $\boldsymbol{C}(u)$.

Допирателната, бинормалата и главната нормала – координатните оси с положи-телни посоки, определени от съответните вектори.

Да отбележим, че векторите $\boldsymbol{t}(u)$, $\boldsymbol{n}(u)$ и $\boldsymbol{C}''(u)$ са в оскулачната равнина.



Пример

Да се определят $\boldsymbol{t}(u)$, $\boldsymbol{n}(u)$, $\boldsymbol{b}(u)$ на винтова линия с постоянни параметри a и b:

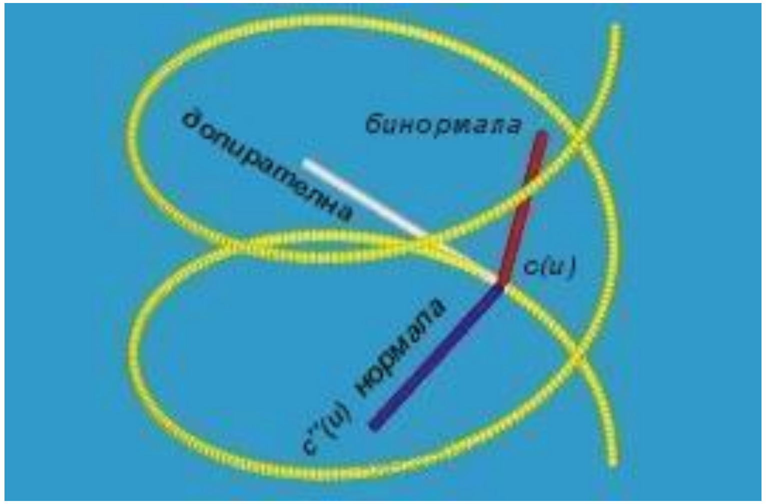
$$\boldsymbol{C}(u) = (a\cos(u), a\sin(u), bu).$$

$$\mathbf{C}'(u) = (-a\sin(u),\ a\cos(u),\ b\ )$$

$$\mathbf{C}''(u) = (-a\cos(u),\ -a\sin(u),\ 0\ )$$

$$\mathbf{b}(u)\ ||\ (\mathbf{C}'(u) \times \mathbf{C}''(u)) = (ab\sin(u),\ -ab\cos(u),\ a^2)$$

$$\mathbf{n}(u)\ ||\ (\mathbf{b}(u) \times \mathbf{C}'(u)) = (-a\,(a^2 + b^2)\cos(u),\ -a\,(a^2 + b^2)\sin(u),\ 0\ ).$$

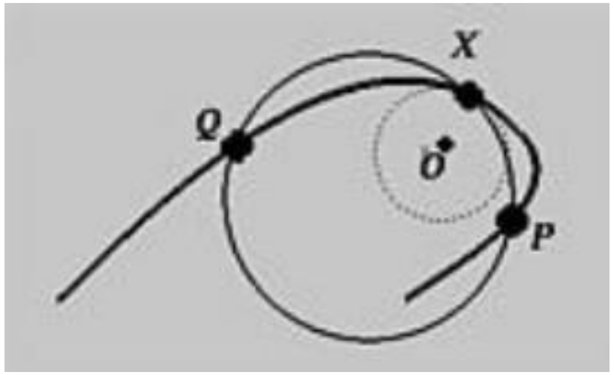


Кривина и торзия

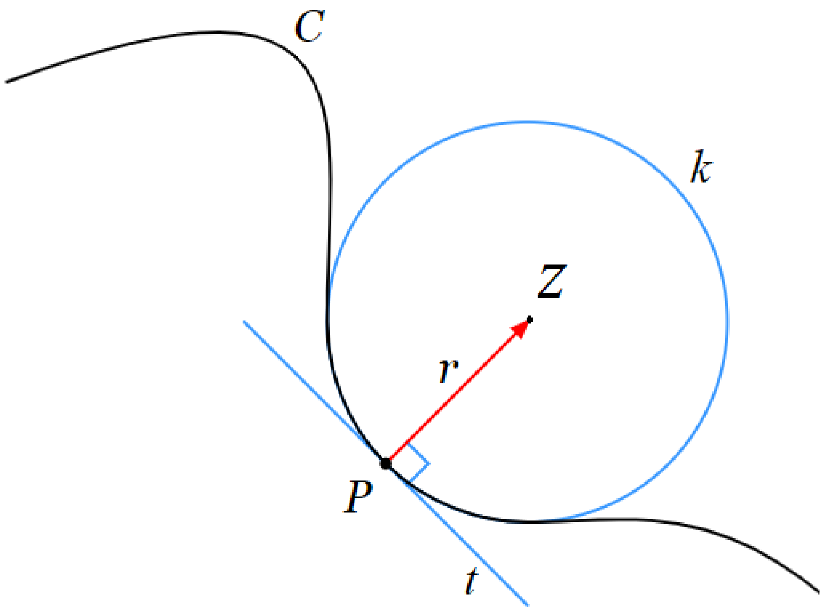
Ако $C(u)$ е траекторията на движеща се точка, то $C'(u)$ е скоростта ѝ, а $C''(u)$ е ускорението ѝ.

Нека X е фиксирана точка, а P и Q са движещи се точки. Ако не са колинеарни, те еднозначно определят окръжност k.

Ако P и $Q \to X$, то $k \to$ граничното положение (точковата окръжност на фигурата).



Граничната окръжност се нарича ***оскулачна окръжност*** в P и нейният център Z и радиус r са съответно ***център*** и ***радиус на кривината.***



Числото $1/r$ се нарича ***кривината*** на $C(u)$ в т. X. Означава се чрез $\varkappa$ (капа).

$\therefore$ колкото е по-голяма оскулачната окръжност, толкова е по-малка $\varkappa$ и обратно.

$\Rightarrow$ оскулачната окръжност лежи в оскулачната равнина.

Той като k се допира до C, центърът на кривината Z лежи върху главната нормала.

Стойността на кривината $\varkappa(u)$ може да се изчисли както следва:

$$\varkappa(u) = |\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| \,/\, |\boldsymbol{C}'(u)|^3$$

За винтова линия $\Rightarrow$

$$\boldsymbol{C}'(u) = (-a\sin(u), a\cos(u), b),$$

$$\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u) = (ab\sin(u), -ab\cos(u), a^2),$$

$$|\boldsymbol{C}'(u)| = (a^2 + b^2)^{1/2},$$

$$|\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| = a\,(a^2 + b^2)^{1/2},$$

$$\varkappa(u) = a \,/\, (a^2 + b^2) = \text{const}.$$

$$r = 1/\varkappa \quad \Rightarrow \quad Z = \boldsymbol{C}(u) + ((a^2 + b^2)/a)\, \boldsymbol{n}(u).$$

Други примери

- Права $\boldsymbol{C}(u) = (a + up,\, b + uq,\, c + ur)$. Тогава

$$\boldsymbol{C}'(u) = (p, q, r) \Rightarrow |\boldsymbol{C}'(u)| = (p^2 + q^2 + r^2)^{1/2}$$

$\boldsymbol{C}''(u) = (0, 0, 0) \Rightarrow$ няма $\boldsymbol{n}(u)$ и $\boldsymbol{b}(u)$

$$\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u) = (0, 0, 0) \Rightarrow \varkappa(u) = 0, \forall u$$

- Окръжност в равнината Oxy:

$$\boldsymbol{C}(u) = (r\cos(u) + p,\, r\sin(u) + q,\, 0) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C}'(u) = (-r\sin(u),\, r\cos(u),\, 0) \Rightarrow |\boldsymbol{C}'(u)| = r,$$

$$\boldsymbol{C}''(u) = (-r\cos(u),\, -r\sin(u),\, 0),$$

$$\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u) = (0, 0, r^2) \Rightarrow |\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| = r^2,$$

$$\boldsymbol{b}(u) = (\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)) \,/\, |\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u)| = (0, 0, 1),$$

$\boldsymbol{n}(u) = (\boldsymbol{b}(u) \times \boldsymbol{C}'(u)) \,/\, |\boldsymbol{b}(u) \times \boldsymbol{C}'(u)| = (-\cos(u), -\sin(u), 0)$,

$\varkappa(u) = 1/r = \mathrm{const}$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{t}(u) = (-\sin(u), \cos(u), 0), \qquad \boldsymbol{b}(u) = (0, 0, 1), \qquad \boldsymbol{n}(u) = (-\cos(u), \sin(u), 0).$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{b}(u) \perp Oxy, \qquad \boldsymbol{t}(u) \,||\, Oxy, \quad \boldsymbol{n}(u) \,||\, Oxy$

Оскулачната окръжност съвпада с дадената окръжност.

- Нека пространствената кубична крива:

$$C(u) = (u,\ u^2,\ u^3).$$

$$C'(u) = (1,\ 2u,\ 3u^2) \quad \Rightarrow \quad |C'(u)| = (1 + 4u + 9u^4)^{1/2}$$

$$C''(u) = (0,\ 2,\ 6u)$$

$$C'(u) \times C''(u) = (6u^2,\ -6u,\ 2) \quad \Rightarrow \quad |C'(u) \times C''(u)| = 2(1 + 9u^2 + 9u^4)^{1/2}$$

$$\varkappa(u) = 2(1 + 9u^2 + 9u^4)^{1/2} / (1 + 4u^2 + 9u^4)^{3/2}$$

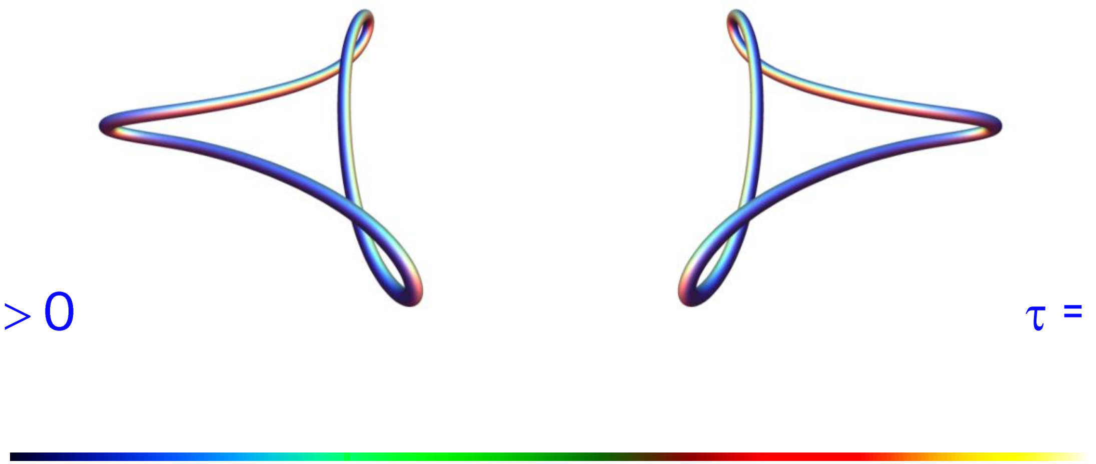
Степента на усукване на една пространствена крива се изчислява чрез нейната ***торзия***. Бележи се с τ (тау) и се изчислява чрез смесеното произведение $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}''\boldsymbol{C}'''$ така

$$\tau(u) = \boldsymbol{C}'(u)\boldsymbol{C}''(u)\boldsymbol{C}'''(u) \,/\, (\boldsymbol{C}'(u) \times \boldsymbol{C}''(u))^2.$$

Една равнинна крива не се усуква и $\therefore$ нейната торзия е нула. Обратното твърдение също е вярно.

Докато $\varkappa(u) \geq 0$, $\forall u$, то $\tau(u)$ може да бъде >0, $=0$, <0.

Знакът на $\tau(u)$ показва в каква посока е усукана кривата.



τ = const > 0 $\qquad\qquad$ τ = const < 0