(1) $\int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \, dx =$

$= \int \cos^{n-1} x \, d(\sin x) = \sin x \cdot \cos^{n-1} x - \int \sin x \, d \cos^{n-1} x =$

(2) $\int (3x^2 + x - 2) \sin^2 (3x+1) dx$

$\int P(x) \cdot \begin{matrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \\ e^{\alpha x} \end{matrix} \; dx$

# Интегриране на рационални функции

**Th** Всеки полином $Q_m(x)$ може, и то по единствен начин, да се представи във вида

(1) $Q_m(x) = (x-\alpha)^k \ldots (x-\beta)^l (x^2+px+q)^r \ldots (x^2+bx+c)^s$

Тук двучлените и тричлените са различни и $p^2-4q<0 \ldots$ $b^2-4ac<0$

Множителите $(x-\alpha)^k, \ldots$ и $(x^2+px+q)^r \ldots$ се наричат елементарни множители

**Th** Всяка рационална функция $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n<m$, знаменателят $Q_m(x)$ на която записан във вида (1) може еднозначно да се представи като сума от дроби от вида $\frac{A}{(x-\delta)^k}$ и $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r}$, които се наричат елементарни, при това

всяка $\nu$-кратна реална нула $\delta$ на $Q_m(x)$ съответства на сума от вида $\sum_{k=1}^{\nu} \frac{A_k}{(x-\delta)^k}$,

където $A_1, \dots A_\nu$ са подходящи реални числа, а на всяка $\nu$-кратна комплексна нула $\alpha \pm \beta i$ на $Q_m(x)$ съответства сума от вида $\sum_{k=1}^{\nu} \frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k}$ $p = -2\alpha$

$q = \alpha^2 + \beta^2$, където $M_1, \dots M_\nu$ и $N_1 \dots N_\nu$ са подходящи реални числа т.е.

$$(2) \quad \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(x-\alpha)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{B_i}{(x-\beta)^i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} \frac{M_i x + N_i}{(x^2+px+q)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{s} \frac{P_i x + Q_i}{(x^2+bx+c)^i}$$

1. Привеждане в дясната част в (2) към общ знаменател

(3) $P_n(x) = \Gamma_i(x)$

2 Сравняваме коефициентите пред съответно еднаквите степени на $x$ в полиномите $P_n(x)$ и $\Gamma_s(x)$. Получаваме система от толкова на брой линейни уравнения относно търсените константи, колкото са те.

3 Система уравнения относно коефициентите можем да получим, замествайки в (3) $x$ с подходящо подбрани числа

Th Всяка рационална функция $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $n \geq m$, може еднозначно да се представи във вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = H_s(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k < m)$, където $H_s(x)$, $s = n - m$ е полином

Ако $A(x)$ и $B(x)$ $\exists$

$Q(x)$ и $R(x)$ със следните с-во

частно остатък

1. $A = B \cdot Q + R$ 2. $\deg(R) < \deg(B)$

1) Делим старшите едночлени на $A$ и $B$ получаваме едночлен $q$

Намираме разликата $A - B.q$ и тя заема мястото на $A$ и с нея процедираме по аналогичен начин докато степента на тази разлика стане по-малка от степента на $B$

(1) $$\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}\,dx$$

$$\underbrace{2x^5+6x^3+1} : x^4+3x^2$$

$$q = \frac{2x^5}{x^4} = 2x$$

$$2x(x^4+3x^2) = \underbrace{2x^5+6x^3}$$

$$2x^5+6x^3+1-(2x^5+6x^3)=$$

$$=1$$

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4+3x^2}$$

$$\int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx =$$

$$=\int 2x\,dx + \int \frac{1}{x^4+3x^2}\,dx =$$

$$=\int 2x\,dx + \int \frac{1}{x^2(x^2+3)}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)} = \underbrace{\frac{\overset{x(x^2+3)}{A}}{x} + \frac{\overset{(x^2+3)}{B}}{x^2} + \frac{\overset{x^2}{Mx+N}}{x^2+3}}_{x^2(x^2+3)}$$

$$1 = Ax(x^2+3) + B(x^2+3) + (Mx+N)x^2$$

$$1 = Ax^3 + 3Ax + Bx^2 + 3B + Mx^3 + Nx^2$$

$$1 = (A+M)x^3 + (B+N)x^2 + 3Ax + 3B$$

$0x^3+0x^2+0.x+1=(A+M)x^3+(B+N)x^2+3Ax+3B$

$$\begin{cases} A+M=0 \\ B+N=0 \\ 3A=0 \\ 3B=1 \end{cases} \qquad A=0 \quad B=\frac{1}{3} \quad N=-\frac{1}{3},\ M=0$$

$$\frac{1}{x^4+3x^2}=\frac{0}{x}+\frac{1}{3x^2}-\frac{0.x\ \ 1}{3(x^2+3)}$$

$$\frac{1}{x^4+3x^2}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}$$

$$\int 2x\,dx+\int\left(\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right)dx=$$

$$=2\int x\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2}\,dx-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+\underbrace{3}_{=(\sqrt{3})^2}}=$$

$$=\cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$$

$$=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$$

② $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}\,dx =$

$= \int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x^3+1)}\,dx =$

$= \int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}\,dx$

$(x+1)(x^2-x+1) \qquad x(x^2-x+1) \qquad x(x+1)$

$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)} = \underbrace{\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}}_{x(x+1)(x^2-x+1)}$

$A(x+1)(x^2-x+1) + Bx(x^2-x+1) + x(x+1)(Mx+N)$

$A(x^3+1) + Bx^3 - Bx^2 + Bx + (x^2+x)(Mx+N)$

$Ax^3 + A + Bx^3 - Bx^2 + Bx + Mx^3 + Nx^2 + Mx^2 + Nx$

$\underbrace{(A+B+M)}x^3 + \underbrace{(N+M-B)}x^2 + \underbrace{(B+N)}x + \underbrace{A} =$

$= 1x^3 + 4x^2 - 2x + 1$

$$\begin{cases} A+B+M=1 \\ N+M-B=4 \\ B+N=-2 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B+M=0 \\ N+M-B=4 \\ B+N=-2 \end{cases} \qquad B=-M$$

$$\begin{cases} B=-M \\ N+M+M=4 \\ -M+N=-2 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=-M \\ N+2M=4 \\ N-M=-2 \cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} B=-M \\ N+2M=4 \\ 2N-2M=-4 \\ 3N=0 \end{cases} \qquad N=0 \quad M=2 \quad B=-2$$

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}$$

$$\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}\right)dx$$

Табл. Табл. хорнер.

## Пресмятане на интеграли от рационални функции на $\sin x$ и $\cos x$

$$\left( \int R(\sin x, \cos x)\, dx \right)$$

Интегралът от вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ посредством универсалната субституция $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ се свежда винаги до интеграл от рационална функция на $t$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2dt}{1+t^2}$$

Понякога е удобно да се използват и т. нар. частни субституции

1. Ако $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$
$\cos x = t$

2. Ако $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \sin x = t$

3. Ако $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow \operatorname{tg} x = t$

1) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}\,dx$

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}$$

т.к. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$

$$\frac{(-\sin x)^3}{\cos x - 3} = -\underbrace{\frac{\sin^3 x}{\cos x - 3}}_{R(\sin x, \cos x)}$$

Пол. $\cos x = t \Rightarrow \sin x = \sqrt{1-t^2}$

$x = \arccos t$

$dx = d(\arccos t) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} \xrightarrow{\cos x = t} -\int \frac{\cancel{\sqrt{1-t^2}} \cdot (1-t^2)}{t-3} \cdot \frac{dt}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t-3}\, dt = \int \frac{t^2-1}{t-3}\, dt =$$

$$= \int \frac{t^2}{t-3}\, dt$$

$$\underbrace{t^2}_{A} : \underbrace{t-3}_{B} \qquad \frac{t^2}{t} = t = q_1$$

$$t^2 - t(t-3) = \cancel{t^2} - \cancel{t^2} + 3t$$

$$t^2 - t(t-3) = 3t$$

4

$$3t : t-3 \qquad q_2 = 3 \qquad t^2 : (t-3) =$$

$$= t + 3 + \frac{9}{t-3}$$

$$3t - 3(t-3) = \cancel{3t} - \cancel{3t} + 9$$

$$\int (t+3)\, dt + \int \frac{9}{t-3}\, dt$$

③ $\int \frac{2\,tg\,x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx$

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

$\Rightarrow$ подст. $tg\,x = t$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1}{ctg^2 x + 1} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{tg^2 x + 1}}$$

$$ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad ctg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$ctg^2 x + 1 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1 = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

$$ctg^2 x + 1 = \frac{\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^{=1}}{\sin^2 x}$$

$$\frac{ctg^2 x + 1}{1} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin^2 x\,(ctg^2 x + 1) = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{ctg^2 x + 1}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\frac{2\operatorname{tg} x + 3}{1+\cos^2 x} = \frac{2t+3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{t^2+1}} = \frac{(t^2+1)(2t+3)}{t^2+2}$$

$$\operatorname{tg} x = t \qquad x = \operatorname{arctg} t$$

$$dx = d(\operatorname{arctg} t) = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{(2t+3)\cancel{(t^2+1)}}{t^2+2} \cdot \frac{dt}{\cancel{1+t^2}} = \int \frac{2t+3}{t^2+2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t}{t^2+2}\,dt + 3\int \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= \int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2} + 3\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \ln|t^2+2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C \quad \underline{\operatorname{tg} x = t}$$

$$= \ln(tg^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{tg x}{\sqrt{2}} + C$$

Частни случаи на $\int R(\sin x, \cos x)dx$ са и интеграли от вида $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

$m, n \in \mathbb{Z}$ тези интеграли може да бъдат пресметнати с частните субституции

(3) $$\int \frac{\overset{= \cos x(1-\sin^2 x)}{\cos^3 x}}{4\sin^2 x - 1} dx$$

$$R(\sin x, -\cos x) = -\underbrace{\frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x - 1}}_{-R(\sin x, \cos x)}$$

$\sin x = t \qquad \cos x = \sqrt{1-t^2}$

$\sin x = t \Rightarrow x = \arcsin t$

$$dx = d \arcsin t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$\underline{\underline{x=\sin t}}$ $\displaystyle\int \frac{(\cancel{\sqrt{1-t^2}})(1-t^2)}{4t^2-1}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}\,dt =$

$$= \int \frac{1-t^2}{4t^2-1}\,dt$$

$\dfrac{1-t^2}{4t^2-1}$ → неправилна

делим $-t^2+1 : 4t^2-1$

$$q = \frac{-\cancel{t^2}}{4\cancel{t^2}} = -\frac{1}{4}$$

$$1-t^2+\frac{1}{4}(4t^2-1) =$$

$$= \overset{4}{1} - \cancel{t^2} + \cancel{t^2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}t^0$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{4t^2-1} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4(4t^2-1)}$$

$=$

Задачи за дом. раб

(1) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx$

(2) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}\,dx$

(3) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$

(1) $\int \sin^{13}x \cos^3 x\,dx$

(2) $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

(3) $\int \frac{1+tg^2x}{(4+tg^2x)\,tg^3x}\,dx$