Метод за решаване на последователни приближения за решаване на СЛАУ

Дадена е системата Ax = c, където c = (a, b, a+b), съответно a – предпоследната цифра от факултетния номер, b – последната.

1. Да се избере итерационен метод за решаването ѝ.
2. Да се провери условието за сходимост.
3. Да се построи итерационен процес.
4. Да се направят 3 итерации.
5. Покажете достигнатото решение и с каква точност е получено?
6. Какъв е минималния брой итерации, които за нужни за достигане на точност 10^{-4}, работейки по избрания метод при избор на начално приближение x(0) = c?

$$A = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{a+2} & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 1+\frac{1}{b+3} & 0.02 \\ 0.05 & -0.1 & 1+\frac{1}{a+3} \end{pmatrix}, \; b = (a,b,\; a+b)$$

In[1]:=
$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & \frac{13}{12} & 0.02 \\ 0.05 & -0.1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \; b = \{1, 9, 10\};$$

---

1. Да се избере итерационен метод за решаването ѝ. (в случая избираме метода на последователните приближения)

```
In[2]:= n = Length[A];
In[3]:= IM = IdentityMatrix[n];
In[4]:= B = IM - A;
In[5]:= c = b;
In[6]:= Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
         N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

$$\text{Итерационният процес е } x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.0833333 & -0.02 \\ -0.05 & 0.1 & -0.25 \end{pmatrix} . \, x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1. \\ 9. \\ 10. \end{pmatrix}$$

2. Проверка за сходимост ||B|| < 1

първа норма

In[7]:= $\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]$

Out[7]= 0.633333

втора норма

In[8]:= $\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]$

Out[8]= 0.583333

трета норма

In[9]:= $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B[[i, j]]^2}$

Out[9]= 0.532405

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е **трета**.
Нормата на матрицата B е по-малка от 1, следователно процесът ще е сходящ при всеки избор на начално приближение.

3. Да се построи итерационен процес и да се направят 3 итерации

In[23]:=
$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & \frac{13}{12} & 0.02 \\ 0.05 & -0.1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \; b = \{1, 9, 10\};$$

```
n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
B = IM - A;
c = b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
x = {4, -8.3, 25.8}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на сходимост*)
```

$$normB = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B[[i, j]]^2};$$

```
Print["Нормата на B е ", normB];
normx0 = Norm[x];
normc = Norm[c];
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.0833333 & -0.02 \\ -0.05 & 0.1 & -0.25 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1. \\ 9. \\ 10. \end{pmatrix}$

Нормата на B е 0.532405

k = 0 $x^{(k)}$ = {4, -8.3, 25.8} ε_k = 56.2472

k = 1 $x^{(k)}$ = {-1.90667, 9.97567, 2.52} ε_k = 29.9463

k = 2 $x^{(k)}$ = {2.10758, 7.73696, 10.4629} ε_k = 15.9436

k = 3 $x^{(k)}$ = {2.20363, 8.56751, 8.05259} ε_k = 8.48844

За сравнение, точното решение е {2.81346, 8.66868, 8.58096}

4. Какъв е минималния брой итерации, които за нужни за достигане на точност 10^{-4}, работейки по избрания метод при избор на начално приближение

x(0) = c?

In[36]:=
$$\frac{\text{Log}\left[\frac{10^{-4}}{\text{normx0}+\frac{\text{normc}}{1-\text{normB}}}\right]}{\text{Log}[\text{normB}]}$$

Out[36]=

21.0044

Извод: Необходими са 22 на брой итерации.

За сравнение и проверка пускаме итерациите:

In[37]:=
$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -0.2 & 0.1 \\ -0.2 & \frac{13}{12} & 0.02 \\ 0.05 & -0.1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix};\ b = \{1, 9, 10\};$$

```
n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
B = IM - A;
c = b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
x = {5, -9.7, 16.3}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на сходимост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]];
Print["Нормата на B е ", normB]
normx0 = Max[Abs[x]];
normc = Max[Abs[c]];
For[k = 0, k ≤ 23, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.333333 & 0.2 & -0.1 \\ 0.2 & -0.0833333 & -0.02 \\ -0.05 & 0.1 & -0.25 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1. \\ 9. \\ 10. \end{pmatrix}$

Нормата на B е 0.633333

k = 0 $x^{(k)}$ = {5, -9.7, 16.3} ε_k = 43.5727

k = 1 $x^{(k)}$ = {-0.903333, 10.4823, 4.705} ε_k = 27.5961

k = 2 $x^{(k)}$ = {2.32486, 7.85171, 9.91715} ε_k = 17.4775

k = 3 $x^{(k)}$ = {2.35358, 8.61232, 8.18964} ε_k = 11.0691

k = 4 $x^{(k)}$ = {2.68803, 8.58923, 8.69614} ε_k = 7.01042

k = 5 $x^{(k)}$ = {2.74424, 8.64791, 8.55049} ε_k = 4.43993

k = 6 $x^{(k)}$ = {2.78928, 8.65718, 8.58996} ε_k = 2.81196

k = 7 $x^{(k)}$ = {2.8022, 8.66463, 8.57876} ε_k = 1.78091

k = 8 $x^{(k)}$ = {2.80912, 8.66681, 8.58166} ε_k = 1.12791

k = 9 $x^{(k)}$ = {2.81157, 8.66796, 8.58081} ε_k = 0.714341

k = 10 $x^{(k)}$ = {2.8127, 8.66837, 8.58101} ε_k = 0.452416

k = 11 $x^{(k)}$ = {2.81314, 8.66856, 8.58095} ε_k = 0.28653

k = 12 $x^{(k)}$ = {2.81333, 8.66863, 8.58096} ε_k = 0.181469

k = 13 $x^{(k)}$ = {2.81341, 8.66866, 8.58096} ε_k = 0.11493

k = 14 $x^{(k)}$ = {2.81344, 8.66867, 8.58096} ε_k = 0.0727893

k = 15 $x^{(k)}$ = {2.81345, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.0460999

k = 16 $x^{(k)}$ = {2.81346, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.0291966

k = 17 $x^{(k)}$ = {2.81346, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.0184912

k = 18 $x^{(k)}$ = {2.81346, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.0117111

k = 19 $x^{(k)}$ = {2.81346, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.00741702

k = 20 $x^{(k)}$ = {2.81346, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.00469744

k = 21 $x^{(k)}$ = {2.81346, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.00297505

k = 22 $x^{(k)}$ = {2.81346, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.0018842

k = 23 $x^{(k)}$ = {2.81346, 8.66868, 8.58096} ε_k = 0.00119332

За сравнение, точното решение е {2.81346, 8.66868, 8.58096}