Линейна алгебра и аналитична геометрия

за специалност ”Информатика”, I курс

лектор: гл. ас. д-р Ива Докузова

Насочена отсечка

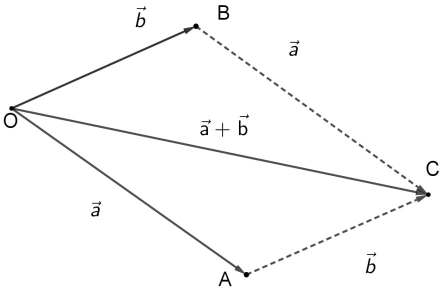
Точката, отсечката, правата и равнината са аксиоматични понятия.
Всяка отсечка AB, на която точката A е избрана за начало, а точката B за край се нарича **насочена отсечка и означаваме $\overrightarrow{AB}$.**
Казваме, че **посоката** на $\overrightarrow{AB}$ е от A към B.
Под **дължина** на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ разбираме дължината на отсечката AB и означаваме с $|\overrightarrow{AB}|$.
Отсечката $\overrightarrow{AA}$ се нарича **нулева насочена отсечка**.
Отсечката $\overrightarrow{BA}$ се нарича **противоположна на $\overrightarrow{AB}$.**
Отсечките $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат **колинеарни**, ако правите AB и CD са успоредни или съвпадат. Означаваме $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, когато са еднопосочно колинеарни и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$, когато са разнопосочно колинеарни.
Точките A, B и C се наричат колинеарни, ако лежат на една права.
Отсечките $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ се наричат **компланарни**, ако правите AB, CD и EF са успоредни на фиксирана равнина или лежат в тази равнина.
Точките A, B, C и D се наричат комланарни, ако лежат в една равнина.

Свободен вектор

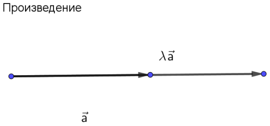
Две ненулеви насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат **равни**, ако имат равни дължини и еднакви посоки. Тогава записваме $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
Свободен вектор наричаме множеството от всички насочени отсечки, които са равни помежду си. Означаваме свободните вектори с малки латински букви: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\dots$.
Ако $\vec{a}$ е свободен вектор, то насочените отсечки, от които се състои се наричат негови **представители**.
Ако $\overrightarrow{AB}$ е представител на вектора $\vec{a}$, записваме $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.
Нека A е произволна точка, а $\vec{a}$ е произволен вектор. Тогава съществува единствена точка B, така че $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.
Действието се нарича **пренасяне на $\vec{a}$ в точката** A.
Нулевият вектор се означава с $\vec{o}$ и негов представител е насочената отсечка $\overrightarrow{AA}$.
Противоположният вектор на вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ се означава с $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$.
Вектор с дължина единица се нарича **единичен**.

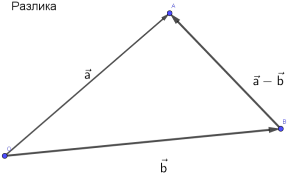
Линейни действия със свободни вектори

Сума на векторите $\vec{a}{=}\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}{=}\overrightarrow{BC}$ е вектор $\vec{c}{=}\overrightarrow{AC}$.
Сума на свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можем да получим и чрез следното правилото на успоредника.
Избираме една точка O и построяваме насочени отсечки $\overrightarrow{OA}{=}\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}{=}\vec{b}$. Допълваме до успоредник $OACB$. Тогава $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$.



Произведение на реалното число λ с вектора $\vec{a}$ е вектор $\lambda\vec{a}$. Ако $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{o}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{o}$. В противен случай $\lambda\vec{a}$ е с дължина $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ и е еднопосочно колинеарен или разнопосочно колинеарен на $\vec{a}$ в зависимост от това дали $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$.
Разлика на векторите $\vec{a}$=$\overrightarrow{OA}$ и $\vec{b}$=$\overrightarrow{OB}$ е вектор $\vec{a} - \vec{b}$=$\overrightarrow{BA}$.





Свойства на линейните действия

Събирането на вектори и умножението на вектор с число се наричат **линейни действия с вектори**.
Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са произволни свободни вектори, λ, μ са произволни реални числа. Тогава са в сила следните свойства:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3. Съществува вектор $\vec{o}$, наречен нулев, такъв че за всеки вектор $\vec{a}$ е изпълнено $\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}$;
4. За всеки вектор $\vec{a}$ съществува вектор $-\vec{a}$, наречен противоположен на $\vec{a}$, такъв че $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o}$;
5. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
6. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
7. $(\lambda\mu)\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;
8. $1\vec{a} = \vec{a}$.

Векторно пространство

Едно непразно множество V се нарича **реално векторно пространство**, ако е снабдено с две действия – събиране, което на всеки два елемента $a, b \in V$ съпоставя елемент $a + b \in V$, наречен **сума** на a и b, и умножение с реално число, което на всеки елемент $a \in V$ и всяко число $\lambda \in R$ съпоставя елемент $\lambda a \in V$, наречен тяхно **произведение**, като са изпълнени следните аксиоми:

1. $a + b = b + a$;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3. Съществува елемент o наречен нулев, такъв че за всеки елемент a е изпълнено $a + o = a$;
4. За всеки елемент a съществува елемент $-a$, наречен противоположен на a, така че $a + (-a) = o$;
5. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
6. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
7. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;
8. $1a = a$.

Елементите на V се наричат вектори.

Някои следствия от аксиомите за векторно пространство

Нека V е реално векторно пространство.

1. Ако a и b са произволни вектори от V, то уравнението $a + x = b$ има единствено решение за x.
   Това решение е $x = b - a$ и се нарича **разлика на векторите** a **и** b.
2. Нулевият вектор на V единствен.
3. Противоположният вектор на даден вектор от V е единствен.
4. Равенството $0a = o$ е изпълнено за всеки вектор a от V.
5. Равенството $(-1)a = -a$ е изпълнено за всеки вектор a от V.
6. Равенството $\lambda o = o$ е изпълнено за всяко число λ.
7. Ако $\lambda a = o$, то или $\lambda = 0$, или $a = o$.

Векторно подпространство

Непразното подмножество V_1 на векторното пространство V се нарича **векторно подпространство на** V (озн. $V_1 \leq V$), ако за всеки два елемента $a,\ b \in V_1$ и всяко $\lambda \in R$ е изпълнено:
1) $a + b \in V_1$;
2) $\lambda a \in V_1$.

Сечението на векторни подпространства V_1 и V_2 на V е векторно подпространство.

Сечението на векторните подпространства се означава $V_1 \cap V_2$.

Сума на векторни подпространства V_1 и V_2 на V се нарича множеството от векторите на V, които се представят като сума на вектор от V_1 и вектор от V_2.

Сумата на векторните подространства се означава $V_1 + V_2$.

Сумата $V_1 + V_2$ на векторните подпространства V_1 и V_2 на V се нарича **директна** и се означава $V_1 \oplus V_2$, ако $V_1 \cap V_2 = \{o\}$.

Примери на векторно пространство

Множеството, състоящо се от нулевия вектор е векторно пространство $V_0 = \{o\}$.
Множеството от свободните вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots\}$ е реално векторно пространство относно двете линейни действия. Нарича се **геометрично векторно пространство.**
Множеството от свободните вектори $V(\alpha)$, компланарни с една равнина α е векторно подпространство на геометричното векторно пространство.
Множеството от свободните вектори $V(p)$, колинеарни с една права p е векторно подпространство на геометричното векторно пространство.
Множеството $M_{m\times n}(R)$ на матриците от тип $(m \times n)$ е реално векторно пространство относно операциите събиране на матрици и умножение на матрица с число.
Множеството $R_n[x]$ на полиномите на променливата x от степен $\leq n$;

В частност, матриците от тип (2×2) образуват векторно пространство. Всяка матрица A от $M_{2\times 2}(R)$ има вида:

$$A = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right), \qquad a_{ij} \in R.$$

Сумата на две матрици A и B от $M_{2\times 2}(R)$ е матрицата

$$A + B = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{array} \right).$$

Произведението на реално число λ с матрица A от $M_{2\times 2}(R)$ е матрицата

$$\lambda A = \lambda \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{array} \right).$$

Множеството R^n на наредените n-ки числа $(x_1, x_2, \ \ldots, \ x_n)$ е реално векторно пространство.

Задачи. (1. Тема)

1. Дадени са точките A, B и C, нележащи на една права. Ако O е произволна точка, да се докаже, че:

а) точката M е среда на отсечката AB, точно когато

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

б) точката G е медицентър на $\triangle ABC$, точно когато

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

2. Установете кое от следните множества е векторно пространство:

а) множеството $R_2[x]$ на полиномите от степен ≤ 2;

б) множеството $M = \{ax^2 + (a-b)x + b; \quad a,\ b \in R\}$;

в) множеството $N = \{(x, y, z) \in R^3; \quad x - y + z = 0,\ 2x - y = 0\}$;

г) множеството на матриците от вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & 0 \end{pmatrix}$, $(a, b \in R)$;

д) множеството на матриците от вида $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -b \end{pmatrix}$, $(a, b \in R)$.

Линейна зависимост и независимост на вектори

Нека V е векторно пространство и $\alpha = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}$ е система от вектори на V. Нека

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \cdots + \lambda_n a_n = o, \tag{1}$$

където λ_i са реални числа, а o е нулевият вектор.
Системата α е **линейно зависима**, ако в (1) поне едно от числата λ_i е различно от нула.
Системата α е **линейно независима**, ако (1) е изпълнено само при $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Ако един вектор $b \in V$ може да се представи във вида

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

то той се нарича **линейна комбинация на системата** α.

От определението следват **твърденията**:

1. Система от един вектор е линейно зависима тогава и само тогава, когато този вектор е нулевият.
2. Система от поне два вектора е линейно зависима тогава и само тогава, когато поне един от тези вектори е линейна комбинация от останалите.
3. Ако $\alpha = \{a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}$ е линейно независима система вектори, а $\alpha' = \{b, a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n\}$ е линейно зависима, то векторът b еднозначно се представя като линейна комбинация на векторите $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$.
4. Всяка система от вектори, съдържаща линейно зависима подсистема, е линейно зависима. Всяка линейно независима система от вектори съдържа само линейно независими подсистеми.

База и размерност на векторно пространство

Ако всеки вектор на векторно пространство V може да се представи като линейна комбинация на система вектори α, то тя се нарича **пораждаща система за** V.

Ако една наредена система вектори $\alpha = \{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$ е линейно независима и пораждаща за векторно пространство V, то тя е **база на** V.

Броят на базисните вектори определя **размерността на пространството.** Ако те са краен брой n, то V има размерност $\dim V = n$. В противен случай V е безкрайномерно.

Векторното пространство $V_0 = \{o\}$ не притежава база, тъй като единственият му вектор o е линейно зависим. Приема се, че $\dim V_0 = 0$.

Векторното пространство $M_{m \times n}(R)$ на матриците от тип $m \times n$ има размерност $m.n$.

Векторното пространство R^n на наредените n-ки числа $(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n)$ има размерност n.

Векторното пространство $R_n[x]$ на полиномите от степен $\leq n$ има размерност $n + 1$.

Линейна зависимост в геометричното векторно пространство

Един свободен вектор е линейно зависим, точно когато той е нулевият.
Свободните вектори $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ са линейно зависими, точно когато те са колинеарни, т.е. $\vec{a}_2 = \lambda\vec{a}_1$.
Векторното пространство на свободните вектори $V(p)$, колинеарни с една права p, има размерност 1.
Свободните вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ са линейно зависими, точно когато те са компланарни, т.е. $\vec{a}_3 = \lambda\vec{a}_1 + \mu\vec{a}_2$, $(\lambda, \mu \in R)$.
Векторното пространство на свободните вектори $V(\alpha)$, компланарни с една равнина α, има размерност 2.
Всеки четири свободни вектора са линейно зависими. Геометричното векторно пространство има размерност 3.

За **крайномерно** векторно пространство са в сила **твърденията**:

1. Всички бази на крайномерно векторно пространство V имат равен брой вектори.

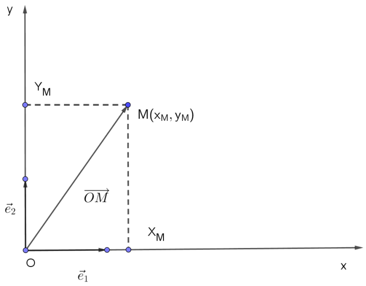
Нека $\dim V = n$.

2. Всяка пораждаща система от n вектора е база на V.
3. Всяка линейно независима система от n вектора е база на V.
4. Всяка пораждаща система вектори има най-малко n вектора.
5. Всяка линейно независима система вектори има най-много n вектора.
6. Ако $x \in V$ е произволен вектор и $\alpha = \{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n\}$ е база на V, то представянето $x = x_1e_1 + x_2\ e_2 + \cdots + x_ne_n$ е еднозначно. Числата $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ се наричат координати x относно базата α.

Координатна система в равнината

Две наредени взаимно перпендикулярни оси с общо начало образуват **декартова координатна система в равнината**. Мерната единица е една и съща по двете оси.

Ако означим началото с т. O, първата ос Ox – абсциса и втората ос Oy – ордината, то координатната система се означава Oxy. Тя разделя равнината на четири квадранта. Равнината на Oxy се нарича координатна равнина.



Координати на точка и вектор

Единичните вектори по абсцисата и ординатата се означават съответно $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Те се наричат базисни вектори (т.е. те са линейно независими и всеки вектор от равнината Oxy може да се представи, като линейна комбинация на $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.)

Ако M е точка от координатната равнина, то $\overrightarrow{OM}$ се нарича **радиус-вектор на** т. M. Абсцисата x ни дава първата координата на M, а ординатата y ни дава втората координата на M. Тогава записваме $M(x_M, y_M)$, а също и $\overrightarrow{OM}(x_M, y_M)$.

Векторът $\overrightarrow{OM}$ се представя като линейна комбинация на базисните вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, т.е. $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2$.

Ако са дадени точките $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ относно координатната система Oxy, то от $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, следва

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Координатна система в пространството

Три наредени оси, които са две по две взаимно перпендикулярни помежду си и имат общо начало, образуват **декартова координатна система в пространството**.

Ако O е началото на координатната система, то Ox, Oy, Oz са съответно абсциса, ордината и апликата, а базисните вектори по осите са съответно $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Тогава получаваме координатите на произволна точка $M(x_M, y_M, z_M)$, а също и на нейния радиус-вектор $\overrightarrow{OM}(x_M, y_M, z_M)$.

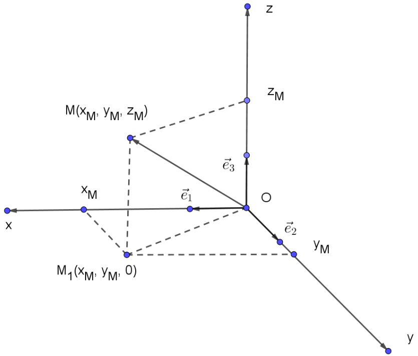
Векторът се представя, като линейна комбинация на базисните вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, т.е. $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2 + z_M\vec{e}_3$.

Ако са дадени точките $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ относно координатната система $Oxyz$, то от $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, следва

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Декартова (ортонормирана) координатна система $Oxyz$.

Ако $M(x_M, y_M, z_M)$ е произволна точка, точка $M_1(x_M, y_M, 0)$ е ортогоналната проекция на M върху координатната равнина Oxy.



Задачи. (2. Тема)

1. Установете за всяка от следните системи вектори дали е линейно зависима или независима:

а) $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (1, -1, 1)$, $a_3 = (-1, 1, 1)$;

б) $a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (3, -2, 1)$, $a_3 = (4, 0, 4)$;

в) $a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (-1, 2, 1)$, $a_3 = (3, 0, -2)$.

г) $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DD_1}$, ако $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$ са успоредници в пространството.

2. Определете размерността на векторните пространства от Задача 2. (1. Тема).

3. Да се намерят координатите на средата на отсечка с краища

а)$A(-1, 0)$, $B(3, -2)$;

б) $A(2, 6)$, $B(-4, 8)$;

в)$A(3, -3, 5)$, $B(-1, 1, 3)$.

4. Дадени са точките $A(4, -2)$ и $M(1, 0)$. Да се намери точка B така, че M да бъде среда на отсечката AB.

5. Да се намерят координатите на медицентъра G на триъгълник, чиито върхове са $A(0,1)$, $B(-2,4)$ и $C(-4,1)$.
6. Да се провери дали точките $A(1,8)$, $B(2,5)$, $C(3,2)$ лежат на една права.
7. Съществува ли триъгълник с върхове
а) $A(1,1,1)$, $B(2,0,5)$, $C(0,3,-7)$;
б) $A(1,-4,1)$, $B(0,2,8)$, $C(-2,14,22)$?
8. Да се намери четвъртият връх C на успоредника $ABCD$, ако $A(-3,0)$, $B(2,1)$, $D(-3,6)$.
9. Да се намери точка D така, че правите AB и CD да са успоредни, ако $A(2,11)$, $B(7,6)$, $C(12,-3)$.

Скаларно произведение на свободни вектори

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ненулеви свободни вектори и $\vec{a}{=}\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}{=}\overrightarrow{AC}$. Ъгълът $\varphi \in [0, \pi]$ между лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $AC^{\rightarrow}$ се нарича **ъгъл между векторите** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и го означаваме $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Скаларно произведение на ненулевите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е числото

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi. \qquad (2)$$

Действието се нарича скаларно умножение на вектори.

Скаларно произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ако $\vec{a} = \vec{o}$ или $\vec{b} = \vec{o}$, е числото $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Числото $\vec{a}^2$ се нарича **скаларен квадрат на вектора** $\vec{a}$. Тъй като ъгълът φ между $\vec{a}$ и $\vec{a}$ е 0, то от (2) получаваме $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, откъдето намираме за **дължината на** $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Ненулевите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се наричат **ортогонални** (перпендикулярни), ако $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Ненулевите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортогонални, точно когато $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Скаларното произведение притежава свойствата:

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$;
3. $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;
4. $\vec{a}^2 > 0$, за всеки вектор $\vec{a} \neq \vec{o}$.

Нека относно декартова координатна система Oxy са дадени векторите $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$. Скаларното им произведение е

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

За дължината на вектор $\vec{a}$ получаваме $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.
Нека относно декартова координатна $Oxyz$ са дадени векторите $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$. Скаларното им произведение е

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

За дължината на вектор $\vec{a}$ получаваме $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

Задачи. (3. Тема)

1. Ако $\vec{a}(1,-2)$, $\vec{b}(1,1)$, да се пресметнат $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$, $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$.

2. Да се пресметне $(2\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$, ако $\vec{a}(1,2)$, $\vec{b}(-2,3)$. Да се намери косинусът на ъгъла между векторите $\vec{p}=(2\vec{a}+\vec{b})$ и $\vec{q}=(\vec{a}-2\vec{b})$.

3. Ако $\vec{a}(3,2,-3)$, $\vec{b}(2,-3,0)$, да се пресметнат $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a}^2$, $\vec{b}^2$, $(\vec{a}-\vec{b})^2$, $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-3\vec{b})$.

4. Да се определи y, така че $\vec{a}(2,y)$ да бъде ортогонален на $\vec{b}(2,-1)$.

5. Даден е триъгълник ABC с върхове $A(3,5)$, $B(3,0)$, $C(-3,0)$.

а) Да се изобрази триъгълникът спрямо декартова координатна система.

б) Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

в) Да се намерят ъглите на триъгълника.

Евклидово векторно пространство

Скаларното произведение на свободни вектори може да се обобщи за векторите на произволно векторно пространство.

Реалното векторно пространство V се нарича **реално евклидово пространство**, ако е зададено действие наречено **скаларно умножение**, по силата на което на всеки два вектора a и b от V се съпоставя реално число ab, така че за произволни $a, b, c \in V$, $\lambda \in R$ са изпълнени свойствата:

1. $ab = ba$ (комутативност),
2. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивност),
3. $(\lambda a)b = \lambda(ab)$ (хомогенност),
4. $a^2 > 0$, за всеки вектор $a \neq o$ (позитивност).

Въвежда се дължина на вектор $|a| = \sqrt{a^2}$.

В сила е **неравенството на Коши-Буняковски-Шварц**: $|ab| \leq |a||b|$.

Еднозначно е определен ъгъл $\varphi \in [0, \pi]$ между a и b с равенството

$$\cos\varphi = \frac{ab}{|a||b|}.$$

Векторно произведение

Нека векторите $\{e_1, e_2, e_3\}$ образуват дясна ортонормирана база на тримерно евклидово векторно пространство.
Нека a и b са вектори от това пространство и имат координати $a(a_1, a_2, a_3)$ и $b(b_1, b_2, b_3)$ относно $\{e_1, e_2, e_3\}$.
Векторно произведение на a и b е вектор $c = a \times b$ определен, както следва:

$$c = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

За базата $\{e_1, e_2, e_3\}$ са в сила равенствата $e_1 = e_2 \times e_3$, $e_2 = e_3 \times e_1$, $e_3 = e_1 \times e_2$.
Ако $a(a_1, a_2)$ и $b(b_1, b_2)$ са вектори от двумерно евклидово пространство, то векторното им произведение се пресмята по формулата

$$a \times b = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Векторното произведение $c = a \times b$ на векторите a и b има следните свойства:

- Ако $a = o$ или $b = o$, или a и b са линейно зависисми, то
$$c = a \times b = o;$$
- Ако a и b са линейно независими, то
  1) c е ортогонален на a и на b;
  2) $|a \times b| = |a||b| \sin \varphi$, където $\varphi = \measuredangle(a, b)$;
  3) векторите (a, b, c) образуват дясна база.

Други свойства на векторното произведение:

- Ако $a \times b = o$, то a и b са линейно зависисми.
- $a \times b = -b \times a$ (антикомутативност)
- $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (дистрибутивност)
- $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$, $\lambda \in R$.

Двойни векторни произведения пресмятаме с формулите

$$(a \times b) \times c = ac.b - bc.a, \quad a \times (b \times c) = ac.b - ab.c.$$

Очевидно е

$$(a \times b) \times c \neq a \times (b \times c)$$

Геометричен смисъл на векторното произведение

Нека $ABCD$ е успоредник. Лицето му се пресмята с формулата

$$S_{ABCD} = AB.AD.\sin\measuredangle(BAD).$$

Тогава лицето на $ABCD$ може да се получи и с равенството

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|.$$

Лицето на триъгълника ABC е

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Смесено произведение

Числото $abc = (a{\times}b)c$ се нарича **смесено произведение** на векторите a, b и c.

Смесеното произведение на $a(a_1, a_2, a_3)$, $b(b_1, b_2, b_3)$ и $c(c_1, c_2, c_3)$, зададени относно декартова координатна система, се получава по формулата

$$abc = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Смесеното произведение на три вектора е равно на нула, точно когато те са компланарни.

Смесеното произведение притежава свойствата

- $abc = a(b \times c)$,
- $abc = bca = cab = -bac = -cba = -acb$,
- $(a_1 + a_2)bc = a_1bc + a_2bc$, $a(b_1 + b_2)c = ab_1c + ab_2c$, $ab(c_1 + c_2) = abc_1 + bca_2$,
- $(\lambda a)bc = a(\lambda b)c = ab(\lambda c) = \lambda(abc)$.

Геометричен смисъл на смесеното произведение

Нека $ABCD$ е тетраедър. Обемът му се пресмята с формулата

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \mid \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD} \mid .$$

Задачи. (7. Тема)

1\. Дадени са векторите $\vec{a}(0,2,3)$, $\vec{b}(1,0,4)$, $\vec{c}(2,-2,2)$. Да се намерят двойните векторни произведения $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ и смесените произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $(4\vec{a})(3\vec{b})\vec{c}$.

2\. Да се намери лицето на триъгълник ABC, където $A(1,-2)$, $B(0,1)$, $C(-3,1)$.

3\. Да се докаже, че точките $A(1,-2,0)$, $B(1,1,-1)$, $C(2,7,-3)$ образуват триъгълник. Да се намери дължината на височината към страната AB.

4\. Даден е тетраедър с върхове $A(1,-5,4)$, $B(0,-3,1)$, $C(-2,-4,3)$, $D(4,4,-2)$. Да се намери дължината на височината през върха A.

Общо уравнение на права в равнината

Ако в равнината са дадени права и точка, то през точката минава единствена права перпендикулярна на дадената права.
Нека Oxy е декартова координатна система в равнината. Ако $\vec{n}(A, B)$ е ненулев вектор от дадена права n, а $M_0(x_0, y_0)$ е дадена точка от равнината, то търсим уравнението на правата p, която минава през точка $M_0(x_0, y_0)$ и е перпендикулярна на $\vec{n}$.
Нека $M(x, y)$ е произволна точка от правата p. Тогава $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}\vec{n} = 0$, откъдето следва $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Полагаме $C = -Ax_0 - By_0$.
И получаваме уравнението на правата:

$$p: \quad Ax + By + C = 0, \qquad |A| + |B| \neq 0. \tag{3}$$

Наричаме го **общо уравнение на права в равнината**.
Вектор $\vec{n}(A, B)$ се нарича **нормален вектор на правата** p.
Вектор $\vec{p}(-B, A)$ е **колинеарен с правата** p.

Уравнение на права през две точки

През две различни точки минава единствена права.
Нека $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ са две различни дадени точки от правата p, а $M(x, y)$ е произволна точка от p. Тогава векторите $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ са колинеарни.
Уравнението на правата е

$$p: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{4}$$

То се нарича **канонично уравнение на права, определена с две точки**.
Уравнението (4) може да се запише и във вида

$$p: \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

В (4) и (5) векторът колинеарен с правата е $\vec{p}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Частни положения на права в равнината

Нека е дадена права $p: \; Ax + By + C = 0, \; |A| + |B| \neq 0$.
а) $p \parallel Ox$, точно когато $A = 0$, т.е. p има уравнение

$$p: \; By + C = 0, \quad B \neq 0;$$

б) $p \parallel Oy$, точно когато $B = 0$, т.е. p има уравнение

$$p: \; Ax + C = 0, \quad A \neq 0;$$

в) правата p минава през центъра O на координатната система Oxy, точно когато $C = 0$. Тогава

$$p: \; Ax + By = 0, \quad |A| + |B| \neq 0;$$

г) абсцисната ос има уравнение $Ox: \; y = 0$;
д) ординатната ос има уравнение $Oy: \; x = 0$.

Декартово уравнение на права

Нека относно декартова координатна система Oxy е дадена права, която не е успоредна на ординатата Oy, т.е.

$$p: \quad Ax + By + C = 0, \quad B \neq 0.$$

Ако p сключва ъгъл α с положителната посока на оста Ox и p пресича оста Oy в точка $M_0(0, b)$, то p има уравнение

$$p: \quad y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \alpha. \tag{6}$$

Уравнението (6) се нарича **декартово уравнение на права**, а $k = \operatorname{tg} \alpha$ се нарича **ъглов коефициент на правата**.
Връзката между коефициентите на двете уравнения на правата p е:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Взаимни положения на две прави в равнината

Нека са дадени правите

$$
\begin{aligned}
p_1 : \quad & A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| \neq 0, \\
p_2 : \quad & A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| \neq 0.
\end{aligned}
$$

Тогава

1. Правите **съвпадат** $(p_1 \equiv p_2)$, точно когато $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;
2. Правите са **успоредни** $(p_1 \parallel p_2)$, точно когато $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$;
3. Правите се **пресичат** $(p_1 \cap p_2)$, точно когато $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$.

Нека правите p_1 и p_2 са зададени с декартови си уравнения

$$p_1 : \; y = k_1 x + b_1, \; k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1,$$

$$p_2 : \; y = k_2 x + b_2, \; k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Острият ъгъл θ между p_1 и p_2, намираме по формулата

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

За така зададените p_1 и p_2 са в сила условията:
а) $p_1 \parallel p_2$, точно когато $k_1 = k_2$;
б) $p_1 \perp p_2$, точно когато $1 + k_1 k_2 = 0$.

Сноп прави. Разстояние от точка до права

Множество от всички прави в равнината, минаващи през една дадена точка в същата равнина се нарича **сноп прави**. Точката се нарича **център на снопа**.

Нека са дадени пресичащите се прави p_1 и p_2:

$$p_1 : \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \ |A_1| + |B_1| \neq 0,$$

$$p_2 : \ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \ |A_2| + |B_2| \neq 0.$$

Те определят сноп с уравнение:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad |\lambda| + |\mu| \neq 0.$$

Разстояние от точка $M_1(x_1, y_1)$ до правата p, където

$$p : \ Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| \neq 0,$$

наричаме числото

$$d(M_1, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Задачи. (8. Тема)

1. Да се намери уравнението на права p:
а) през точка $P(-2, 2)$ с ъглов коефициент $k = -2$;
б) през точка $Q(0, 1)$, сключваща ъгъл 120° с Ox;
в) през точка $L(-3, 1)$, успоредна на Oy;
г) през точка $L(-3, 1)$, перпендикулярна на Ox.

2. Да се намери тангенсът на острия ъгъл θ между правите:
а) $p: \ y = -x + 1$, $q: \ y = 2x + 3$;
б) $p: \ x - 2y + 2 = 0$, $q: \ 3x + 2y - 1 = 0$.

3. Относно декартова координатна система са дадени точките $A(1, 1)$, $B(3, 1)$ и $M(2, -1)$. Да се намерят:
а) правата p минаваща през точките A и B;
б) ортогонално симетричната точка C на M спрямо правата p;
в) ъглите и лицето на триъгълник ABC.

4. Дадени са точките $A(4,6)$, $B(-4,0)$, $C(-1,-4)$. Да се намерят уравненията на страните на триъгълника ABC и уравнението на височината през т. B.
5. Дадена е точката $A(1,5)$ и правата $g : x - 3y - 6 = 0$. Да се намери разстоянието от точка A до правата g и ортогонално симетричната точка A_1 на точката A относно правата g.
6. Страните на триъгълника ABC са с уравнения $AB :\ 4x - y - 7 = 0$; $BC :\ x + 3y - 31 = 0$; $CA :\ x + 5y - 7 = 0$. Намерете координатите на върховете A, B и C и уравнението на медианата през върха B.

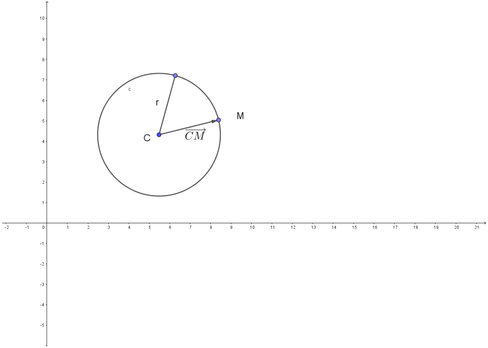
Уравнение на окръжност

Нека е дадена декартова координатна система Oxy.
Уравнение от вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{7}$$

където поне един от коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} е различен от нула, се нарича **уравнение от втора степен с две неизвестни** x, y.
Ако (7) има безброй много реални решения, но не се разпада на линейни уравнения, то е уравнение на крива линия от втора степен в равнината Oxy.
Множество от точки в равнината, които са равноотдалечени от една дадена точка в същата равнина се нарича **окръжност**.
Дадената точка се нарича **център** на окръжността, а разстоянието от центъра до произволна точка от окръжността се нарича **радиус**.

Нека Oxy е декартова координатна система и k е окръжност, лежаща в равнината Oxy, с център $C(x_0, y_0)$ и радиус r.



Ако $M(x, y)$ е произволна точка от k, то **уравнението на окръжността** е

$$k : \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{8}$$

което е уравнение от втора степен.

Уравнението от втора степен

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \tag{9}$$

където m, n, p са реални коефициенти и удовлетворяват

$$m^2 + n^2 - 4p > 0,$$

е уравнение на окръжност.
Центърът на окръжност с уравнение (9) е $C(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2})$, а радиусът й е

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2 - 4p}.$$

Окръжност с център т. O и радиус r има уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2$$

и се нарича **централна окръжност**.

Взаимно положение на точка и окръжност, на права и окръжност

Нека са дадени точка $M_1(x_1, y_1)$ и окръжност k с уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Точката M_1 лежи **вътре в** $k \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 < r^2$,
Точката M_1 лежи **върху** $k \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = r^2$,
Точката M_1 лежи **вън от** $k \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 > r^2$.
Правата p и окръжността k с център C и радиус r:

а) се пресичат $\Leftrightarrow d(C, p) < r$;

б) се допират $\Leftrightarrow d(C, p) = r$;

в) нямат обща точка $\Leftrightarrow d(C, p) > r$.

По-горе с $d(C, p)$ е означено разстоянието от точка C до права p.

Задачи. (8. Тема)

7. Да се определи кои от следните линии са окръжности и на тези окръжности да се намерят центровете и радиусите:
а) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$; б) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6 = 0$;
в) $x^2 - 2y^2 + x + 2y + 5 = 0$; г) $x^2 + y^2 + 5x + y + 7 = 0$.

8. Да се намери окръжност през точките $A(1, 4)$ и $B(-1, 2)$, ако центърът ѝ лежи върху правата $l: \ y = 0$.

9. Да се намерят онези допирателни към окръжността $x^2 + y^2 = 9$, които са успоредни на правата $p: \ x - y + 2 = 0$.

10. Относно ортонормирана координатна система е даден триъгълник ABC с върхове $A(4, 0)$, $B(0, 3)$ и $C(0, 0)$. Да се намерят:
а) уравненията на страната AB и на височината h_c към нея;
б) уравнението на описаната около триъгълника окръжност.

Уравнение на равнина в пространството

Ако в пространството са дадени точка и права (ненулев вектор), то през точката минава единствена равнина, перпендикулярна на дадената права (дадения вектор).
Нека $Oxyz$ е декартова координатна система в пространството. Ако $\vec{N}(A, B, C)$ е даден ненулев вектор, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е дадена точка от пространството, то уравнението на равнината α, която минава през M_0 и е перпендикулярна на $\vec{N}$ се получава по следния начин.
За произволна точка $M(x, y, z)$ от α, от условието $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$, следва $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$. Полагаме $D = -Ax_0-By_0-Cz_0$. Тогава уравнението на равнината е:

$$\alpha : \quad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad |A| + |B| + |C| \neq 0.$$

Нарича се **общо уравнение на равнина в пространството**.
Вектор $\vec{N}$ се нарича **нормален вектор на равнината** α.

Уравнение на права през две точки

Нека $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ са две различни дадени точки от правата p, а $M(x, y, z)$ е произволна точка от p. Тогава векторите $\overrightarrow{M_1M}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z - z_1)$ са колинеарни. Уравнението на правата е

$$p: \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{10}$$

То се нарича **канонично уравнение на права в пространството, определена с две точки**.
В (10) векторът колинеарен с правата p е $\vec{p}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Ако означим координатите му с $p_1 = x_2 - x_1$, $p_2 = y_2 - y_1$, $p_3 = z_2 - z_1$, то уравнението (10) може да се запише и във вида

$$p: \ x = x_1 - \lambda p_1, \quad y = y_1 - \lambda p_2, \quad z = z_1 - \lambda p_3, \quad \lambda \in R. \tag{11}$$

Наричат се **скаларни параметрични уравнения на права в пространството**.

Уравнение на равнина през три точки

Ако $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ са три дадени неколинеарни точки от равнината α, а $M(x, y, z)$ е произволна нейна точка, то уравнението на α е следствие от условието за компланарност на векторите $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$. То е

$$\alpha : \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Нарича се **уравнение на равнина през три точки**.

Всяка права p в пространството може да се представи като пресечница на две равнини $p = \alpha_1 \cap \alpha_2$:

$$\alpha_1 : \; A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \alpha_2 : \; A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

където $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2(A_2, B_2, C_2)$ са ненулеви и неколинеарни вектори.

Взаимни положения на две равнини

Нека са дадени равнините

$$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| \neq 0,$$

$$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| \neq 0.$$

Тогава

1. Равнините съвпадат $(\alpha_1 \equiv \alpha_2)$, точно когато
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$
2. Равнините са успоредни $(\alpha_1 \parallel \alpha_2)$, точно когато
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$
3. Равнините се пресичат $(\alpha_1 \cap \alpha_2)$, точно когато тройките (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) не са пропорционални.

Частни положения на равнина в пространството

Нека е дадена равнината $\alpha:\ Ax+By+Cz+D=0,\ |A|+|B|+|C|\neq 0.$
а) $\alpha \parallel Ox$, точно когато $A=0$.
б) $\alpha \parallel Oy$, точно когато $B=0$.
в) $\alpha \parallel Oz$, точно когато $C=0$.
г) $\alpha \parallel Oxy$, точно когато $A=B=0$.
д) $\alpha \parallel Oxz$, точно когато $A=C=0$.
е) $\alpha \parallel Oyz$, точно когато $B=C=0$.
ж) α минава през началото O, точно когато $D=0$.
з) Координатните равнини имат следните уравнения:

$$Oxy:\ \ z=0;\quad Oyz:\ \ x=0;\quad Oxz:\ \ y=0.$$

и) Координатните оси имат следните уравнения:

$$Ox:\ \ y=0,\ \ z=0;\quad Oy:\ \ x=0,\ \ z=0;\quad Oz:\ \ x=0,\ \ y=0.$$

Сноп равнини. Разстояние от точка до равнина

Множество от всички равнини в пространството, минаващи през една дадена права се нарича **сноп равнини**. Правата се нарича **носител на снопа**.

Нека са дадени пресичащите се равнини:

$$\alpha_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| \neq 0,$$

$$\alpha_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| \neq 0.$$

Те определят сноп с уравнение:

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2) = 0, \quad |\lambda|+|\mu| \neq 0.$$

Разстояние от точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до равнината α, където

$$\alpha : \; Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0,$$

наричаме числото

$$d(M_1, \alpha) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Задачи. (9. Тема)

1. Относно декартова координатна система е дадена точка $A(2, 1, -1)$. Намерете уравненията на равнините през т. A и

а) перпендикулярни съответно на Ox, Oy, Oz;

б) успоредни съответно на Oxy, Oyz, Oxz;

в) минаващи съответно през Ox, Oy, Oz.

2. Относно декартова координатна система са дадени точки $A(1, 2, -2)$, $B(2, -3, 1)$ и $C(0, 1, 3)$. Намерете:

а) уравнението на равнината през т. A и перпендикулярна на правата BC.

б) уравнението на равнината през точките A, B и C.

3. Относно декартова координатна система са дадени точки $A(1, 2, 0)$, $B(-3, 1, 2)$ и равнината $\alpha :\ 2x + y - 3z + 4 = 0$. Намерете:

а) уравнението на равнината през т. A успоредна на α;

б) равнината през точките A и B, перпендикулярна на α.

4. Нека $Oxyz$ е декартова координатна система. Да се намери равнина през правата $p: \; 3x - 2y + 1 = 0, \; x - y + z - 3 = 0$, перпендикулярна на равнината $\alpha : \; x + 2y - z = 0$.

5. Относно декартова координатна система са дадени точки $A(1, 0, -2)$, $B(2, -3, 2)$. Да се намери третият връх C и равнината на равнобедрения триъгълник ABC, ако C лежи върху правата $p : x + 2y - 2z = 0, \quad 2x + y + z + 2 = 0$.

6. Да се намери прободът на правата $p : x+y-5z+1 = 0, \; x-y-z+2 = 0$ с равнината $\alpha : \; x + y - z + 9 = 0$.

Уравнение на сфера

Нека е дадена декартова координатна система $Oxyz$. Уравнение от вида

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

където поне един от коефициентите a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} е различен от нула, се нарича **уравнение от втора степен с три неизвестни** x, y и z.

Ако (12) има безброй много реални решения, но не се разпада на линейни уравнения, то е **уравнение на повърхнина от втора степен** в пространството $Oxyz$.

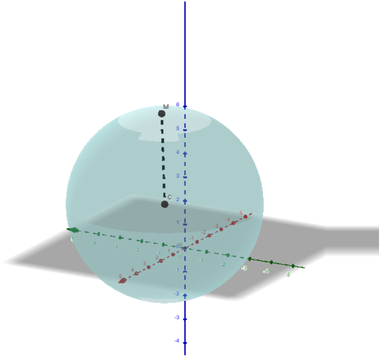
Множество от точки в пространството, които са равноотдалечени от една дадена точка се нарича **сфера**.

Дадената точка се нарича **център** на сферата, а разстоянието от центъра до произволна точка от сферата се нарича **радиус**.

Нека $Oxyz$ е декартова координатна система и S е сфера, с център $C(x_0, y_0, z_0)$ и радиус r. Ако $M(x, y, z)$ е произволна точка от S, то уравнението на сферата е

$$S: \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \tag{13}$$

което е уравнение от втора степен.



Уравнението от втора степен

$$x^2 + y^2 + z^2 + lx + my + nz + p = 0, \tag{14}$$

където l, m, n, p са реални коефициенти и удовлетворяват

$$l^2 + m^2 + n^2 - 4p > 0,$$

е уравнение на сфера.
Центърът на сфера с уравнение (14) е $C(-\frac{l}{2}, -\frac{m}{2}, -\frac{n}{2})$, а радиусът й е

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2 - 4p}.$$

Сфера с център т. O и радиус r има уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

и се нарича **централна сфера.**

Взаимно положение на точка и сфера, на равнина и сфера

Нека са дадени точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и сфера S с уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Точката M_1 лежи вътре в $S \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 < r^2$.
Точката M_1 лежи върху $S \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 = r^2$.
Точката M_1 лежи вън от $S \Leftrightarrow (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 > r^2$.
Равнината α и сферата S с център C и радиус r:

а) се пресичат $\Leftrightarrow d(C, \alpha) < r$;

б) се допират $\Leftrightarrow d(C, \alpha) = r$;

в) нямат обща точка $\Leftrightarrow d(C, \alpha) > r$.

Пресечницата на сфера с равнина е окръжност, определена от уравненията на сферата и равнината.

Елипса

Множество от точки в равнината, за които сумата от разстоянията до две дадени точки F_1 и F_2 в същата равнина е константа, по-голяма от разстоянието между F_1 и F_2, се нарича **елипса**.

Елипсата е конично сечение.

Точките F_1 и F_2 се наричат **фокуси на елипсата**.

Нека Oxy е декартова координатна система в равнината, $M(x, y)$ е произволна точка от елипса с фокуси $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, и нека

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a, \quad (a > c > 0).$$

Ако означим $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, тогава елипсата има уравнение

$$\varepsilon: \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{15}$$

Върховете на елипсата са $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$.

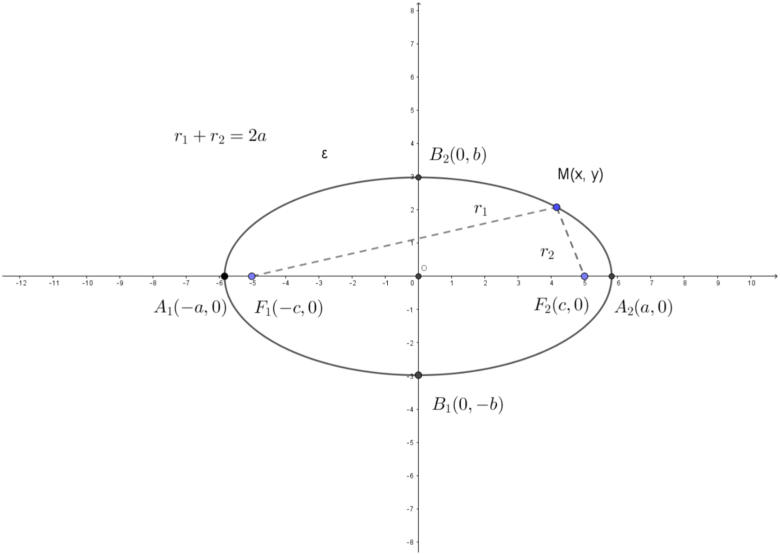
Правите A_1A_2 и B_1B_2 са **оси на елипсата.**
Изпълнено е $a > b$. Числото $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ се нарича **линеен ексцентритет**.
При $a = b$ уравнението (15) е на окръжност.
Ако (15) не е уравнение на окръжност, то правите

$$d_1 : \; x = -\frac{a^2}{c}, \quad d_2 : \; x = \frac{a^2}{c}$$

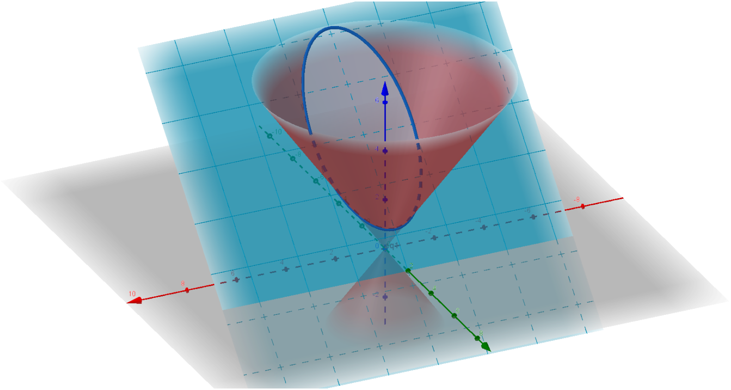
се наричат **директриси на елипсата.**
Ако елипсата има фокуси $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ относно Oxy, то уравнението й отново е (15). Тогава $b > a$ и нейният линеен ексцентритет е $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Директрисите имат уравнения

$$d_1 : \; y = -\frac{b^2}{c}, \quad d_2 : \; y = \frac{b^2}{c}.$$

Графика на елипса



Графика на елипса като конично сечение



Хипербола

Множество от точки в равнината, за които абсолютната стойност на разликата от разстоянията до две дадени точки F_1 и F_2 в същата равнина е константа, по-малка от разстоянието между F_1 и F_2, се нарича **хипербола**.

Хиперболата е конично сечение.

Точките F_1 и F_2 се наричат **фокуси на хиперболата**.

Нека Oxy е декартова координатна система, а $M(x, y)$ е произволна точка от хипербола с фокуси $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Нека

$$\left|\,|\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}|\,\right| = 2a, \qquad (c > a > 0).$$

Ако означим $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, тогава хиперболата има уравнение

$$\chi : \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{16}$$

Точките $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ се наричат **реални върхове** на хиперболата, а $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$ се наричат **имагинерни върхове**.

Права A_1A_2 е **реална ос** на хиперболата, а правата B_1B_2 е **имагинерна ос**.
Числото $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ се нарича **линеен ексцентритет**.
При $a = b$ хиперболата е равнораменна.
Правите

$$d_1 : \ x = -\frac{a^2}{c}, \quad d_2 : \ x = \frac{a^2}{c}$$

са **директриси на хиперболата.**
Правите

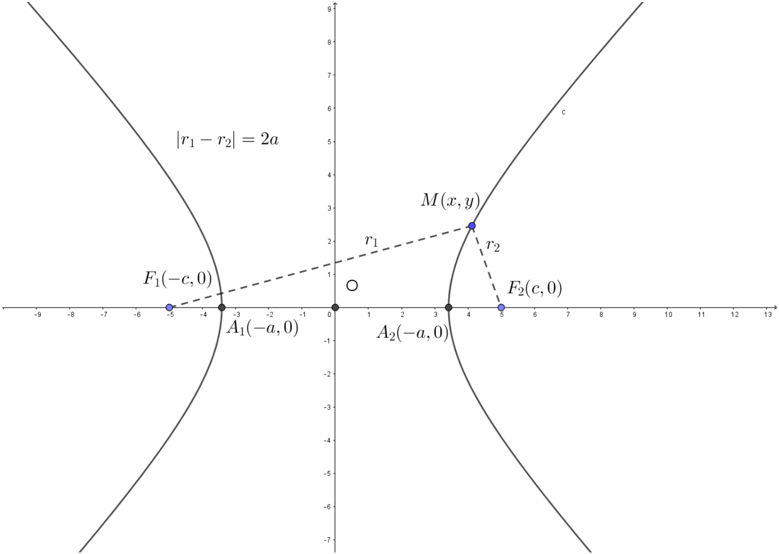
$$a_1 : \ y = -\frac{b}{a}x, \quad a_2 : \ y = \frac{b}{a}x$$

са **асимптоти на хиперболата.**
Хипербола с фокуси $F_1(0, -c)$ и $F_2(0, c)$ има уравнение

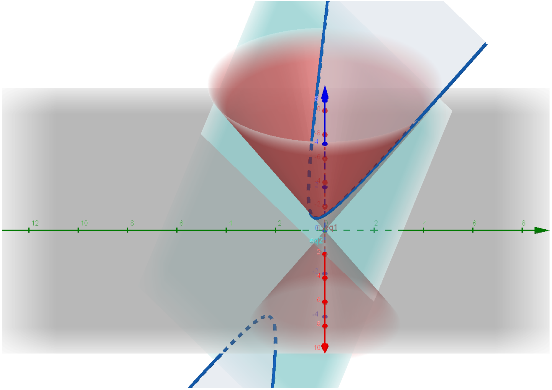
$$\chi : \ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Точките $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ са реалните върхове на хиперболата. Права B_1B_2 е реалната ос.

Графика на хипербола



Графика на хипербола като конично сечение



Парабола

Множество от точки в равнината, които са на равни разстояния до дадена точка F и дадена права d $(F \notin d)$ в същата равнина, се нарича **парабола**.

Параболата е конично сечение.

Точката F се нарича **фокус на параболата**, а правата d е **директриса**. Разстоянието p от F до d се нарича **параметър на параболата**.

Нека Oxy е декартова координатна система в равнината. Избираме я така, че фокусът и директрисата на параболата π да са съответно с координати $F(\frac{p}{2}, 0)$ и $d: \; x = -\frac{p}{2}$.

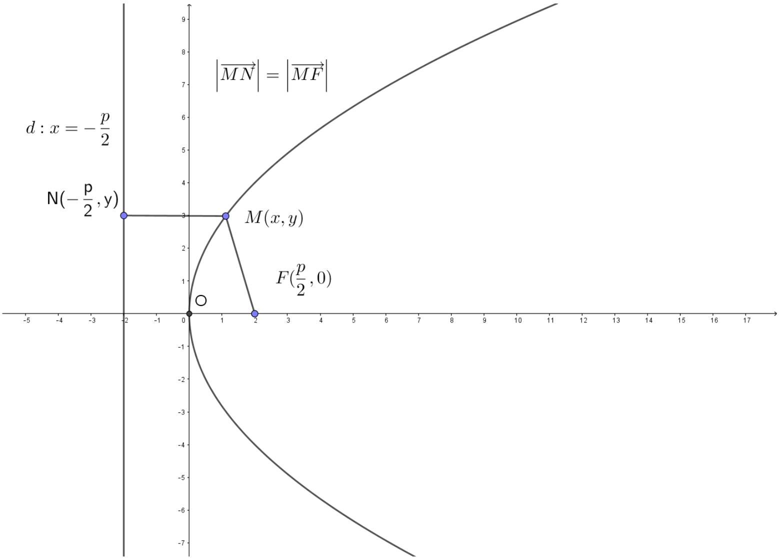
Ако $M(x, y)$ е произволна точка от параболата, то уравнението ѝ е:

$$\pi: \quad y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{17}$$

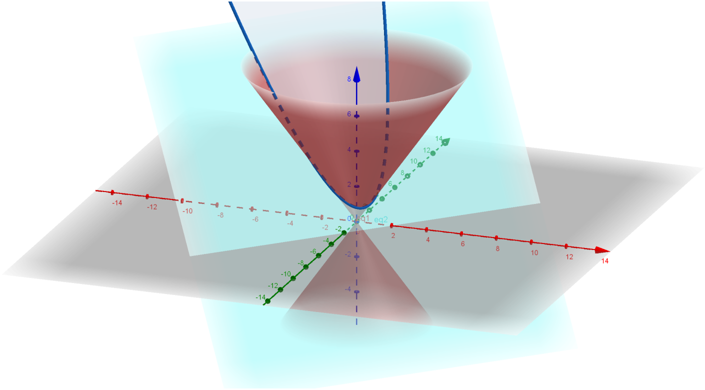
Нарича се **каноничното уравнение на парабола**.

Връх на параболата е точката O. **Ос на параболата** е права Ox.

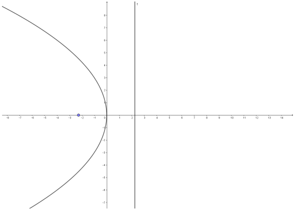
Графика на парабола

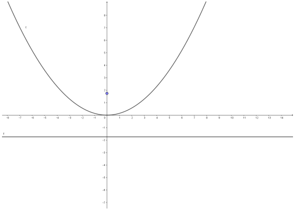


Графика на парабола като конично сечение

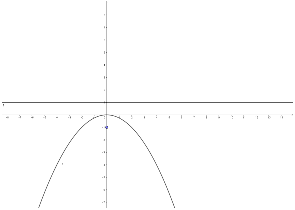


Уравненията $\pi_1 : \; y^2 = -2px, \; p > 0, \quad \pi_2 : \; x^2 = 2py, \; p > 0,$





$\pi_3 : \; x^2 = -2py, \; p > 0$ също са уравнения на параболи.



Ще отбележим, че елипсата, хиперболата и параболата са криви от втора степен.

Крива от втора степен и привеждане на уравнението й в каноничен вид. Класификация на кривите от втора степен

Множеството от точките в реална равнина, чиито координати относно координатна система удовлетворяваща уравнение от вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (18)$$

където поне един от коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} е различен от нула, се нарича крива от втора степен, а уравнението (18) е уравнение на кривта.

Предполагаме, че $K = Oxy$ е ортонормирана дясна координатна система. От K може да се получи коя да е еднакво ориентирана с нея ортонормирана координатна система чрез ротация и транслация на K.

Ротация на ортонормираната координатна система $K = Oxy = Oe_1e_2$ до ортонормираната координатна система $K' = Ox'y' = Oe_1'e_2'$ се задава с

$$\begin{aligned} x &= t_{11}x' + t_{12}y', \\ y &= t_{21}x' + t_{22}y', \end{aligned} \tag{19}$$

където $T = (t_{ij})$ е матрицата на прехода от (e_1, e_2) към (e_1', e_2'). Целта ни е уравнението (18) да получи най-прост вид. Тогава квадратичната форма

$$f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$$

трябва да получи каноничен вид. Тя ще получи каноничен вид, ако $e_1'(t_{11}, t_{21})$, $e_2'(t_{12}, t_{22})$ са собствени вектори, съответни на характеристичните корени на матрицата на $f(x,y)$.
От характеристичното уравнение на матрицата на $f(x,y)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

намираме характеристичните корени λ_1, λ_2.

След това намираме и съответни на тях собствени вектори $e'_1(t_{11}, t_{21})$, $e'_2(t_{12}, t_{22})$, така че да образуват дясна ортонормирана база.
Заб. Собствен вектор $p(p_1, p_2)$ съответстващ на λ_i се намира от системата

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda_i)p_1 + a_{12}p_2 = 0,\\ a_{21}p_1 + (a_{22} - \lambda_i)p_2 = 0.\end{aligned}$$

С това ротацията (19) е определена, а след заместване в (18) получаваме следното уравнение на кривата относно K':

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33} = 0. \tag{20}$$

Ъгълът на ротация $\alpha = \measuredangle(Oe_1, O'e'_1)$ е определен с функциите $\cos\alpha = t_{11}$, $\sin\alpha = t_{21}$.
В равнината **транслацията на координатната система** $K' = Ox'y'$ до $K'' = O'XY$ се задава с равенствата

$$\begin{aligned}x' = X + \alpha,\\ y' = Y + \beta.\end{aligned} \tag{21}$$

Заместваме (21) в (20) и уравнението на кривата относно K'' добива вида:

$$\begin{aligned}\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2(\lambda_1 \alpha + a'_{13})X + 2(\lambda_2 \beta + a'_{23})Y + \\ \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + 2a'_{13}\alpha + 2a'_{23}\beta + a_{33} = 0.\end{aligned} \tag{22}$$

Трябва да определим коефициентите α, β, така че (22) да получи възможно най-прост вид. От определението на кривата (18) следва, че поне един от корените λ_1, λ_2 е различен от нула.
Имаме следните случаи:
1. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$. Коефициентите α и β определяме така, че да се анулират коефициентите пред X и Y, т.е. избираме

$$\alpha = -\frac{a'_{13}}{\lambda_1}, \quad \beta = -\frac{a'_{23}}{\lambda_2}. \tag{23}$$

Тогава уравнението (22) добива вида

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_{33} = 0. \tag{24}$$

2. Нека единият характеристичен корен е нула, например $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$. Сега уравнението (22) добива вида

$$\begin{aligned} \lambda_2 Y^2 + 2a'_{13}X + 2(\lambda_2\beta + a'_{23})Y + \lambda_2\beta^2 \\ +2a'_{13}\alpha + 2a'_{23}\beta + a_{33} = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

и коефициента β ще определим пак от (23). Ще разгледаме два подслучая.
а) Нека $a'_{13} \neq 0$. Коефициента α определяме така, че да се анулира свободният член в (25). Така уравнението (25) се преобразува в

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{13}X = 0. \tag{26}$$

б) Нека $a'_{13} = 0$. Тогава уравнението (25) се преобразува в

$$\lambda_2 Y^2 + a'_{33} = 0. \tag{27}$$

То не зависи от α и може да изберем $\alpha = 0$.

С подходяща ротация и транслация на ортонормираната координатна система може да се намери нова координатна система, относно която уравнението на всяка крива от втора степен да е един от следните три вида* (24), (26), (27)*.
Уравненията (24), (26), (27) се наричат канонични. Ще ги разгледаме едно по едно, за да получим видовете криви от втора степен в равнината.
I) Ако в (24) имаме $a'_{33} \neq 0$, то уравнението може да се запише във вида

$$\frac{X^2}{-\frac{a'_{33}}{\lambda_1}} + \frac{Y^2}{-\frac{a'_{33}}{\lambda_2}} = 1. \tag{28}$$

Числата $-\frac{a'_{33}}{\lambda_1}$, $-\frac{a'_{33}}{\lambda_2}$ и могат да бъдат едновременно положителни, отрицателни или с различни знаци.

Съответно на тези случаи уравнението (28) задава:

1. **Елипса**

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0;$$

2. **Имагинерна елипса**

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1, \quad a > 0, b > 0;$$

3. **Хипербола**

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \quad (\frac{Y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1), \quad a > 0, b > 0.$$

Ако в (24) имаме $a'_{33} = 0$, то уравнението (28) може да се запише във вида

$$Y^2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} X^2.$$

В зависимост от знака на $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ имаме следните криви:
4. **Две пресичащи се прави** (при $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0$)

$$Y^2 = a^2 X^2, \quad a \neq 0;$$

5. **Две комплексно спрегнати пресичащи се прави** (при $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$)

$$Y^2 = -a^2 X^2, \quad a \neq 0.$$

II) Уравнението (26) задава
6. **Парабола**

$$Y^2 = 2pX, \quad p \neq 0.$$

III) Сега записваме уравнението (27) във вида

$$Y^2 = -\frac{a'_{33}}{\lambda_2} \quad p \neq 0.$$

В зависимост от коефициента $-\frac{a'_{33}}{\lambda_2}$ имаме следните случаи:

7. **Две успоредни прави** (при $-\frac{a'_{33}}{\lambda_2} > 0$)

$$Y^2 = a^2, \quad a \neq 0;$$

8. **Две комплексно спрегнати успоредни прави** (при $-\frac{a'_{33}}{\lambda_2} < 0$)

$$Y^2 = -a^2, \quad a \neq 0;$$

9. **Двойна права** (при $-\frac{a'_{33}}{\lambda_2} = 0$)

$$Y^2 = 0.$$

Така получихме всичките девет типа криви от втора степен в реалната евклидова равнина – 5 типа изродени криви (разпадащи се на две прави) и 4 типа неизродени криви (елипси, хиперболи, параболи).

Задачи. (10. Тема)

1. Дадена е елипсата $\varepsilon : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Да се намерят върховете, фокусите и директрисите й.

2. Дадена е хиперболата $\chi : \ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Да се намерят върховете, асимптотите, фокусите и директрисите й.

3. Дадена е хиперболата $\chi : \ \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$. Да се намерят върховете, асимптотите, фокусите и директрисите й.

4. Дадена е параболата $\pi : \ x^2 = 8y$. Да се намерят фокусът и директрисата й.

5. Да се построи окръжност с радиус $r = 3$ и център – пресечната точка на правата $g : \ y + 2 = 0$ с елипсата $\varepsilon : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

6. Да се намери уравнението на парабола с връх в точката O и директриса $d : \ x + 4 = 0$.

7. Да се намери каноничното уравнение и да се определи видът на кривата от втора степен:

а) $k : \ 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$; б) $k : \ 6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$; в) $k : \ 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 10x - 70y + 125 = 0$.

Литература

[1] Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, ''Линейна алгебра и аналитична геометрия'', Пловдивско университетско издателство, Пловдив, 2008.
[2] Д. Мекеров, М. Манев. ''Учебно помагало за дисциплината Линейна алгебра и аналитична геометрия'', IV изд., Макрос, Пловдив, 2010.
[3] Д. Мекеров, П. Рангелова, Б. Царева, Е. Павлов. ''Ръководство за решаване на задачи по аналитична геометрия'', IV изд., УИ ''Паисий Хилендарски'', Пловдив, 2008.