

Дискретна математика

доц. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

Въведение

- В теоремите за пълни множества се определят необходимите и достатъчни условия, но не се дава алгоритъм, чрез който да установим дали F е пълно или не.
- Целта ни е да опишем алгоритъм, чрез който да установяваме пълнота на произволно крайно множество от двоични функции.

Затворено множество

Определение: Множеството C е **затворено**, ако $C=[C]$.

Например множеството P_2 е затворено.

Определение: Ще казваме, че функцията $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ **запазва нулата**, ако $f(0, 0, 0 \dots 0) = 0$.

Множеството на всички функции, запазващи нулата означаваме с T_0 .

Определение: Ще казваме, че функцията $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ **запазва единицата**, ако $f(1, 1, 1 \dots 1) = 1$.
Множеството на тези функции означаваме с T_1 .

Множествата T_0 и T_1

- Ще формулираме критерий за затвореност

Теорема: F е затворено, ако:

1. Идентитетът $x_i \in F$;
2. Ако $f, g_1, g_2, \dots, g_n \in F$, то всяка съставна функция $f(g_1, g_2, g_3, \dots, g_n) \in F$

Теорема: Множествата T_0 и T_1 са затворени

Доказателство за T_0 : 1. $x_i \in T_0$, защото $f(0)=0$

2. Нека $f, g_1, g_2, \dots, g_n \in T_0 \Rightarrow$

$$f(g_1(0,0,\dots,0), g_2(0,0,\dots,0) \dots g_n(0,0,\dots,0)) = f(0,0,\dots,0) = 0$$

Множествата T_0 и T_1

Да проверим кои от елементарните двоични функции са в T_0 и T_1 , кои не са в нито едно от тях и кои са едновременно и в двете.

$\{0, 1, x_1, \neg x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, x_1 + x_2, x_1 \downarrow x_2, x_1 | x_2\}$

- $T_0 = \{0, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2, x_1 + x_2\}$
- $T_1 = \{1, x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2\}$
- $T_0 \cap T_1 = \{x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \vee x_2\}$
- $\neg x_1, x_1 \downarrow x_2 \notin T_0 \cup T_1$
- $x_1 | x_2 \in T_0 \cup T_1$

Самодвойнствени функции

Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е двоична функция

- **Определение:** Функцията $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})}$
- се нарича ***двойнствена*** над f .
- Заб. Отрицанието на f бележим с $\neg f$ или \overline{f}
- **Определение:** Ако $f=f^*$, казваме че f е ***самодвойнствена***.
- Множеството на всички самодвойнствени функции бележим с ***S***.

Пример

x1	x2	x3	f1	$\neg f1$	f1*	f2	$\neg f2$	f2*
0	0	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	1	0	1

Очевидно $f1 \notin S$, а $f2 \in S$

Въпрос

Ако $f^*=g$, дали $g^*=f$?

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad /^*$$

$$(f^*(x_1, x_2, \dots, x_n))^* = g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Да!

Монотонни двоични функции

- Нека $\alpha = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ и $\beta = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ са две произволни n -орки от 0 и 1.
- **Определение:** Казваме, че α **предхожда** β ($\alpha \prec \beta$) ако $a_i \leq b_i$ за всяко i .
- **Например:** $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle \prec \langle 0, 0, 1, 1 \rangle$. В общия случай нито $\alpha \prec \beta$ нито $\beta \prec \alpha$.
- **Определение:** Функцията $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е **монотонна**, ако от $\alpha \prec \beta$ следва $f(\alpha) \leq f(\beta)$ за всяко α и β . Множеството на монотонните функции бележим с **M**.

Монотонни двоични функции

- **Теорема:** Множеството на монотонните двоични функции M е затворено.
- **Пример:** Монотонна ли е f_1, f_2, f_3 :

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

f_1 – не
 f_2 – да
 f_3 – не

Линейни двоични функции

- **Дефиниция:** Една функция е **линейна**, ако нейния Полином на Жигалкин е линеен. Т.е.
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$$
- Множеството на всички линейни функции бележим с L .
- **Теорема:** Множеството L е затворено.
- Например: $0, 1, x_1, x_1 + x_2$ са линейни функции.
- **Твърдение:** $f \in L \cap S \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1$

Пример

- Линейна ли е функцията f ?

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Изчисляваме
коэффициентите в ПЖ и
получаваме, че $b_1=1$,
т.е. $f=x_1 \cdot x_3 + \dots$

Следователно f не е
линейна.

Теорема на Post

Теорема: Множеството F е пълно, тогава и само тогава, когато $F \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L$

Пример

- Пълно ли е $F1 = \{f1, f2, f3\}$, където:

x1	x2	x3	f1	f2	f3
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1

Пример

- $f1 \in T0; \quad f2 \notin T0; \quad f3 \in T0 \Rightarrow F1 \notin T0$
- $f1 \in T1; \quad f2 \notin T1; \quad f3 \in T1 \Rightarrow F1 \notin T1$
- $f1 \in S; \quad f2 \in S; \quad f3 \notin S \Rightarrow F1 \notin S$
- $f1 \in M; \quad f2 \notin M; \quad f3 \in M \Rightarrow F1 \notin M$
- $f3 \notin L \dots \Rightarrow F1 \notin L$

Тогава от Теоремата на Post $F1$ е пълно.

ШефEROва функция

- **Определение:** Една функция е ***ШефEROва***, ако сама образува пълно множество, т.е. $\{f\}$ е пълно.
- Например: $\{|\}$ и $\{\downarrow\}$ са ШефEROви
- **Теорема:** Функцията f е ШефEROва тогава и само тогава, когато $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$

Теорема

- Доказателство: Ако f е Шеферова, то $\{f\}$ е пълно и $f \notin T0 \cup T1 \cup S$.
- Обратно, нека $f \notin T0 \cup T1 \cup S$. Тогава $f \notin T0 \Rightarrow f(0,0..0)=1$ и $f \notin T1 \Rightarrow f(1,1..1)=0$. Следователно $f \notin M$. Остава да докажем, че $f \notin L$. Допускаме противното. Тогава $f = a_1.x_1 + a_2.x_2 + \dots + a_n.x_n + a_0$. От $f \notin T0$ получаваме $a_0 = 1$. От $f \notin T1$ получаваме, че $f(1,1..1) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 1 = 0$ или $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 \Rightarrow f \in L \cap S$. Но това противоречи с факта, че $f \notin S$. Следователно $f \notin L$ и теоремата е доказана.

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. *Дискретна математика*. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. *Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика*. Университетско издателство "Паисий Хилендарски", Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, *Машина Поста*, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, *Discrete Mathematics – Elementary and Beyond*, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Исползвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, *A Short Course in Discrete Mathematics*, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, *An Introduction to Formal Languages and Automata*, Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: [9781284077247](#), 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, *Discrete mathematics and its application*, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- <http://www.jflap.org/> - софтуерна среда