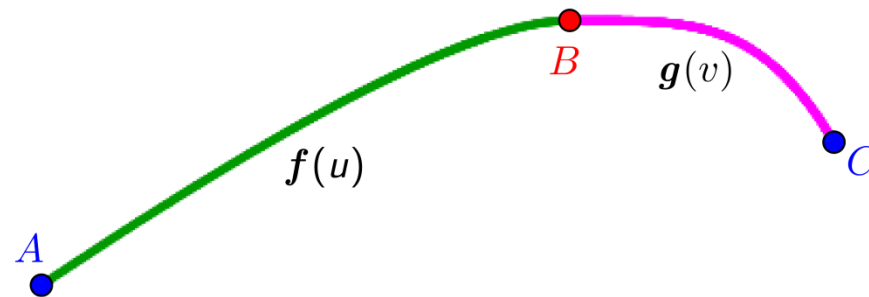
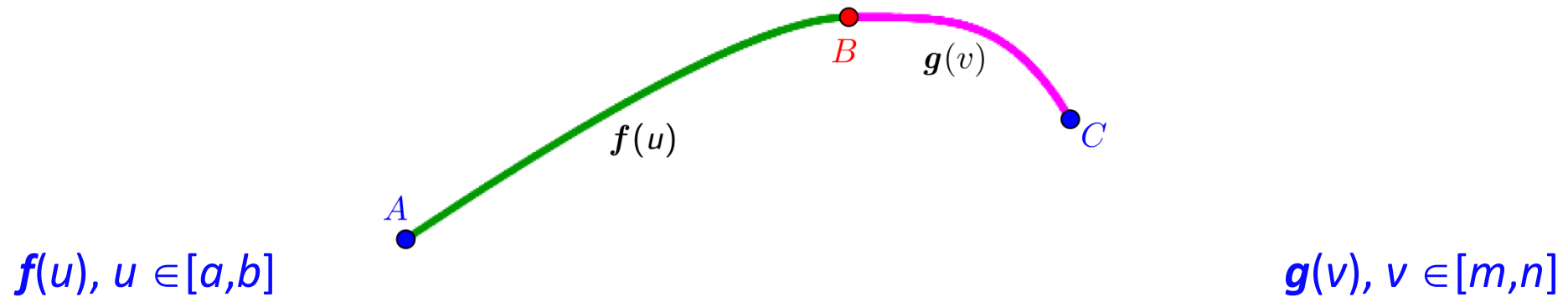


Непрекъснатост на съставна крива

Нека $f(u)$, $u \in [a, b]$ и $g(v)$, $v \in [m, n]$ – криволинейни дъги с точка на съединяване B , т.е. $B = f(u) \cap g(v)$, $B = f(b) = g(m)$.

Дали тези криви f и g се съединяват гладко в съставна крива $h = f \cup g$?





Разглеждаме:

„десния край“ $f(b)$ на лявата крива $f(u)$ и „левия край“ $g(m)$ на дясната крива $g(v)$.

Ако $f(b) = g(m)$, то h е C^0 -непрекъсната в т. на съединяване $f(b) = g(m)$, ozn. $h \in C^0$.

Ако $f^{(i)}(b) = g^{(i)}(m), \forall i \leq k \in \{1, 2, \dots\}$ в B , то h е C^k -непрекъсната в т. на съединяване

$B = f(b) = g(m)$, ozn. $h \in C^k, k \in \{1, 2, \dots\}$.

C^k -непрекъснатост $\Rightarrow C^i$ -непрекъснатост, $\forall i \leq k$.

Ако $f^{(k)}(b) \neq g^{(k)}(m) \Rightarrow$ няма C^i -непрекъснатост за никое $i \geq k$.

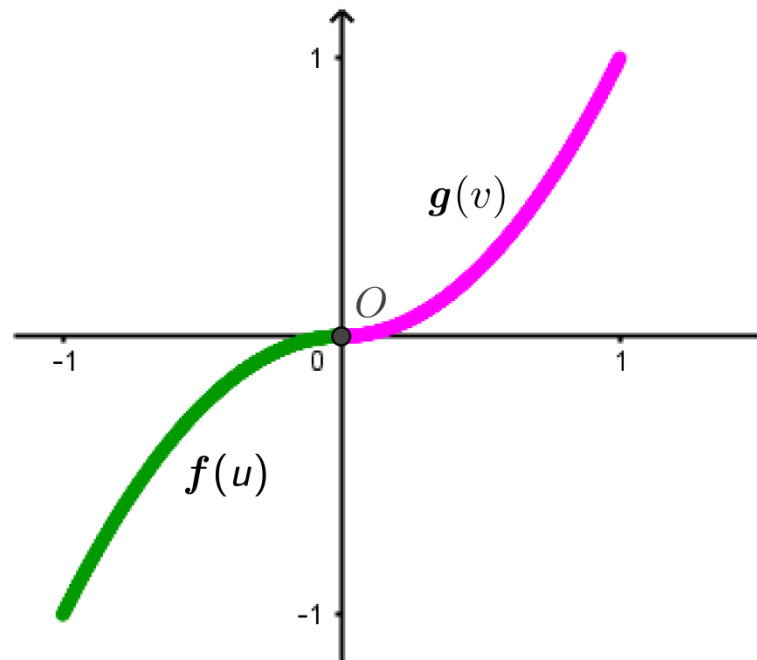
Пример. Нека една крива h се състои от дъги на две параболи:

$$f(u) = (u, -u^2, 0), \quad u \in [-1; 0];$$

$$g(v) = (v, v^2, 0), \quad v \in [0; 1].$$

$\Rightarrow f(0) = g(0) = O$ – т. на съед.

Дали кривата е C^2 -непрекъснатата в т. O ?



$$f(u) = (u, -u^2, 0)$$

$$g(v) = (v, v^2, 0)$$

$$f'(u) = (1, -2u, 0)$$

$$g'(u) = (1, 2v, 0)$$

$$f''(u) = (0, -2, 0)$$

$$g''(v) = (0, 2, 0)$$

$$f'(0) = g'(0) = (1, 0, 0) \Rightarrow \underline{h = f \cup g} \text{ е } C^1\text{-непрекъсната в т. на съед. } O.$$

$$f''(0) = (0, -2, 0) \neq g''(0) = (0, 2, 0) \Rightarrow \underline{h \notin C^2} \text{ в } O.$$

$$\kappa(f(u)) = 2/(1 + 4u^2)^{3/2}$$

$$\kappa(g(v)) = 2/(1 + 4v^2)^{3/2}$$

$$\kappa(f(0)) = \kappa(g(0)) = 2 \Rightarrow \underline{h \text{ е } \kappa\text{-непрекъсната}} \text{ в т. на съед. } O = f(0) = g(0).$$

$\therefore h \in C^1$ и h е κ -непрекъсната, обаче не е C^2 -непрекъсната.

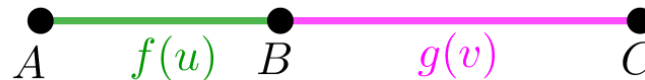


Проблеми с параметричното представяне

Чрез C^k -непрекъснатостта се установява гладко съединяване на крива.

Да разгледаме следните две отсечки определени от колинеарни точки A, B, C :

$$f(u) = A + u(B - A), u \in [0;1] \quad \text{и} \quad g(v) = B + v(C - B), v \in [0;1].$$



т. $f(u) \in$ отс. AB , т. $g(v) \in$ отс. BC

$AB, BC \in C^0$ в т. на съед. B .

Дали отс. $AC \in C^1$ в т. B ?

$$f'(u) = B - A$$

$$g'(v) = C - B$$

$\Rightarrow f'(u) \neq g'(v) \therefore AC = AB \cup BC \notin C^1$ в т. B ?! \therefore Проблем на параметризацията

Нормираме колинеарните вектори $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ и $\mathbf{C} - \mathbf{B}$ и променяме дефин. интервали на u и v .

$$F(u) = \mathbf{A} + u (\mathbf{B} - \mathbf{A}) / |\mathbf{B} - \mathbf{A}|$$

$$u \in [0; |\mathbf{B} - \mathbf{A}|]$$

$$F'(u) = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) / |\mathbf{B} - \mathbf{A}|$$

$$G(v) = \mathbf{B} + v (\mathbf{C} - \mathbf{B}) / |\mathbf{C} - \mathbf{B}|$$

$$v \in [0; |\mathbf{C} - \mathbf{B}|]$$

$$G'(v) = (\mathbf{C} - \mathbf{B}) / |\mathbf{C} - \mathbf{B}|$$

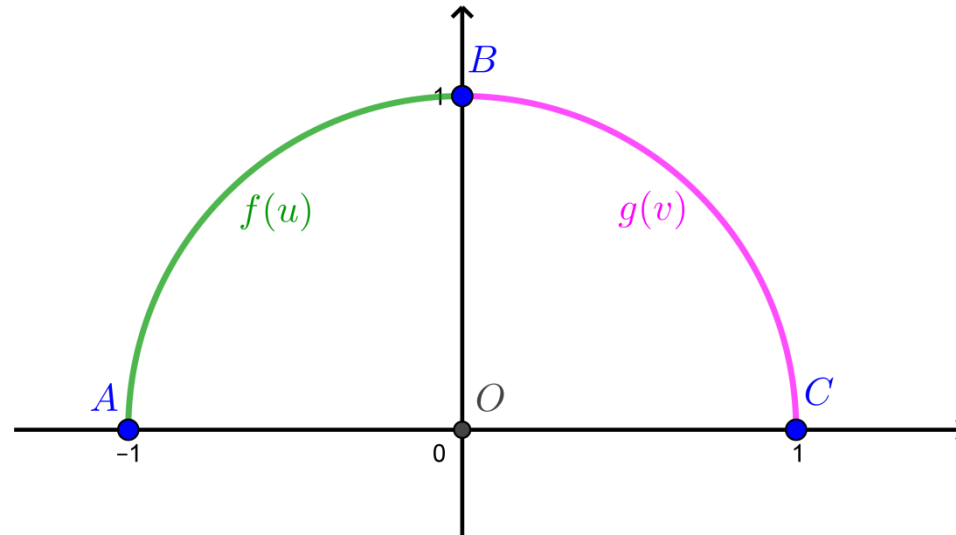
$$\Rightarrow F'(u) = G'(v) = \text{един. вектор по } \overrightarrow{\mathbf{AC}} \Rightarrow \mathbf{AC} \in C^1 \text{ в т. } \mathbf{B}$$

\therefore смяната на параметризацията на дъгите може да преодолее проблема.

Пример. Нека $h = f(u) \cup g(v)$, $u, v \in [0;1]$

$$f(u) = (-\cos(u^2\pi/2), \sin(u^2\pi/2), 0)$$

$$g(v) = (\sin(v^2\pi/2), \cos(v^2\pi/2), 0)$$



$$B = f(u) \cap g(v), \quad B(0,1,0) = f(1) = g(0)$$

$$\mathbf{f}(u) = (-\cos(u^2\pi/2), \sin(u^2\pi/2), 0)$$

$$\mathbf{f}'(u) = (\pi u \cdot \sin(u^2\pi/2), \pi u \cdot \cos(u^2\pi/2), 0) \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{f}'(u)| = \pi u$$

$$\mathbf{f}''(u) = (\pi^2 u^2 \cdot \cos(u^2\pi/2), -\pi^2 u^2 \cdot \sin(u^2\pi/2), 0)$$

$$\mathbf{f}'(u) \times \mathbf{f}''(u) = (0, 0, -\pi^3 u^3) \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{f}'(u) \times \mathbf{f}''(u)| = \pi^3 u^3$$

$$\kappa(u) = \pi^3 u^3 / (\pi u)^3 = 1$$

$$\mathbf{g}(v) = (\sin(v^2\pi/2), \cos(v^2\pi/2), 0)$$

$$\mathbf{g}'(v) = (\pi v \cdot \cos(v^2\pi/2), -\pi v \cdot \sin(v^2\pi/2), 0) \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{g}'(v)| = \pi v$$

$$\mathbf{g}''(v) = (-\pi^2 v^2 \cdot \sin(v^2\pi/2), -\pi^2 v^2 \cdot \cos(v^2\pi/2), 0)$$

$$\mathbf{g}'(v) \times \mathbf{g}''(v) = (0, 0, -\pi^3 v^3) \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{g}'(v) \times \mathbf{g}''(v)| = \pi^3 v^3$$

$$\kappa(v) = \pi^3 v^3 / (\pi v)^3 = 1$$

$\Rightarrow \mathbf{g}'(0) = \mathbf{g}''(0) = (0,0,0) \Rightarrow \mathbf{g}(v)$ не е добре дефинирана в т. **B**.

Като резултат не можем да говорим за непрекъснатост в т. на съед. изобщо.

Обаче от фигурата изглежда сякаш **h** има някаква непрекъснатост, понеже най-малкото **f** и **g** имат обща допирателна в т. **B**.

Нека да репараметризираме тези криви.

Нека $u^2 = p$ в **f(u)** и нека $v^2 = q$ в **g(v)**. Новите уравнения са:

$$\mathbf{f}(p) = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}p\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}p\right), 0\right) \quad \mathbf{g}(q) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}q\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}q\right), 0\right)$$

$$\mathbf{f}'(p) = \left(\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}p\right), \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}p\right), 0\right) \quad \mathbf{g}'(q) = \left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}q\right), -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}q\right), 0\right)$$

$$\mathbf{f}''(p) = \left(\frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}p\right), -\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}p\right), 0\right) \quad \mathbf{g}''(q) = \left(-\frac{\pi^2}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}q\right), -\frac{\pi^2}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}q\right), 0\right)$$

$$\mathbf{f}'(p) \times \mathbf{f}''(p) = \mathbf{g}'(q) \times \mathbf{g}''(q) = (0, 0, -(\pi/2)^3)$$


$$|f'(p) \times f''(p)| = |g'(q) \times g''(q)| = (\pi/2)^3$$

$$|f'(p)| = |g'(q)| = \pi/2$$

$$\kappa(p) = \kappa(q) = 1$$

$$\therefore f'(1) = g'(0) = (\pi/2, 0, 0) \Rightarrow \underline{h \text{ е } C^1\text{-непрекъсната в } B = f(1) = g(0)}$$

$$f''(1) = g''(0) = (0, -(\pi/2)^2, 0) \Rightarrow \underline{h \text{ е } C^2\text{-непрекъсната в } B = f(1) = g(0)}$$

$$\kappa(p) = \kappa(q) = 1 \Rightarrow \kappa(1) = \kappa(0) \Rightarrow \underline{h \text{ е } \kappa\text{-непрекъсната}}$$


Естествен параметър

Има ли параметризация, която да е надеждна при изследване на непрекъснатостта?

Отговорът е „да“, като се използва **дължината на дъгата** като параметър.

Нека $f(u)$, $u \in [a, b]$ има дължина s_0 . Сменяме u с параметър s , който е дължината на дъгата от началото ѝ. $\therefore s = 0 \Leftrightarrow u = a, s = s_0 \Leftrightarrow u = b$.

$$\Rightarrow f(s), s \in [0, s_0] \Rightarrow f'(s) = df(s) / ds = 1$$

Поради това $f(s)$ се нарича естествена параметризация на кривата.

Формулата за смяна на параметъра е

$$s = \int_a^u |\mathbf{f}'(u)| \, du = F(u) - F(a), \quad u \in [a, b]$$

ако $\exists F^{-1} \Rightarrow u = F^{-1}(s + F(a)), F(a) = \text{const} \quad \Rightarrow$

$\mathbf{f}(u), u \in [a, b] \quad \rightarrow \quad \mathbf{f}(F^{-1}(s + F(a))), s \in [0, s_0] - \text{естеств. параметризация}$



Геометрична непрекъснатост

\exists C^1 -непрек. и κ -непрек. криви, но не са C^2 -непрек. или дори не са двукратно диференцируеми.

Тези криви изглеждат гладки в т. на съед.

След смяна на параметъра някои от тях могат да станат C^2 -непрек., но смяната може трудно да се намери.

Съставна естествено-параметризирана крива $\mathbf{h} = \mathbf{f}(s_1) \cup \mathbf{g}(s_2)$, $s_1 \in [0, s_{01}]$, $s_2 \in [0, s_{02}]$

се нарича **геометрично-непрекъсната от степен k** (т.е. G^k -непрекъсната)

в т. на съед. $\mathbf{B} = \mathbf{f}(s_{01}) = \mathbf{g}(0) \iff \mathbf{f}^{(i)}(s_{01}) = \mathbf{g}^{(i)}(0), \forall i \leq k \in \{1, 2, \dots\}.$

Естественият параметър не е задължителен:

Съставна крива $h = f(u) \cup g(v)$, $u \in [a, b]$, $v \in [m, n]$ се нарича **геометрично-непрекъсната от степен k** (т.е. G^k -непрекъсната) в $B = f(b) = g(m)$

$$\Leftrightarrow \exists f = f(u), g = g(v): f^{(i)}(b) = g^{(i)}(m), \forall i \leq k \in \{1, 2, \dots\}.$$

Как да намерим такива параметризации?

Случаите $k = 1$ и $k = 2$ са доста прости.

Случай $k = 1$.

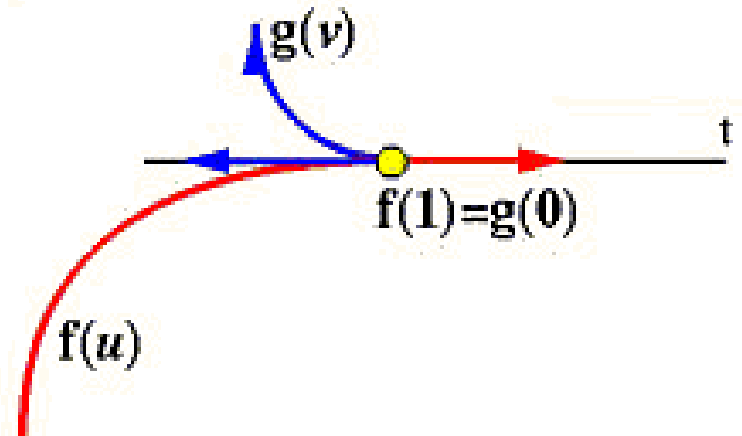
Съставна крива $h = f(u) \cup g(v)$, $u \in [a, b]$, $v \in [m, n]$, като $f(u), g(v) \in C^0$, се нарича G^1 -непрекъсната в т. на съед. $B = f(b) = g(m) \Leftrightarrow f'(b) \uparrow\uparrow g'(m)$ в B , т.е. $f'(b) = a \cdot g'(m)$, $a > 0$.

Ако $a = 1$, то $f'(b) = g'(m) \Leftrightarrow f(u), g(v) \in C^1$ в B .

\therefore от C^1 -непрекъснатост $\Rightarrow G^1$ -непрекъснатост, но не и обратното.

От G^1 -непрек., т.е. $f'(b) \uparrow\uparrow g'(m) \Rightarrow$ допирателните им съвпадат в B .

Обратното не е вярно, т.е. ако допирателните на f и g съвпадат в B , не следва, че $f, g \in G^1$ в B . Например:



Случай $k = 2$.

Критерий на Нийлсон за G^2 -непрекъснатост:

Съставна крива $h = f(u) \cup g(v)$, $u \in [a, b]$, $v \in [m, n]$, като $f(u), g(v) \in C^1$, се нарича

G^2 -непрекъснатата в $B = f(b) = g(m) \iff f''(b) - g''(m) \parallel f'(b) = g'(m)$, т.е.

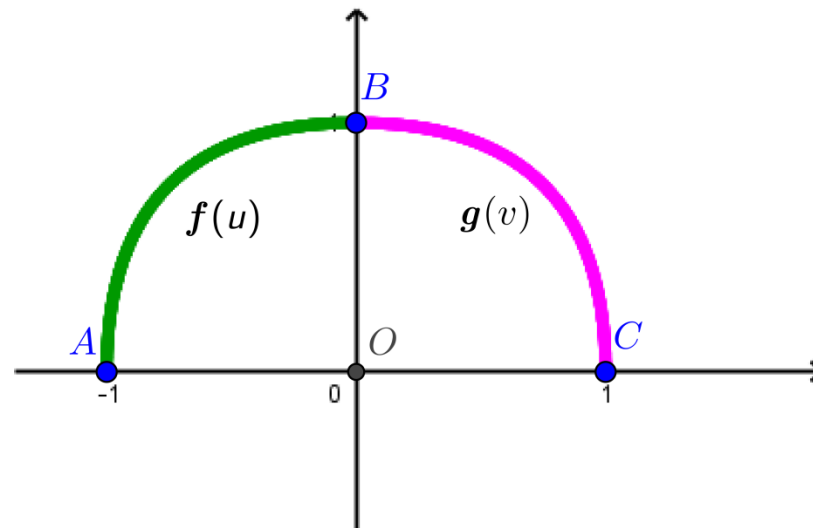
$f''(b) - g''(m) = a \cdot f'(b) = a \cdot g'(m)$, $a = \text{const}$.

Ако $a = 0$ в критерия на Нийлсон, то $f''(b) = g''(m) \therefore f(u), g(v) \in C^2$ в B .

\Rightarrow от C^2 -непрекъснатост $\Rightarrow G^2$ -непрекъснатост, но не и обратното.

Пример. Нека $h = f(u) \cup g(v)$ от параболични дъги с т. на съед. $B(0, 1, 0)$:

$$f(u) = (-1 + u^2, 2u - u^2, 0), \quad u \in [0, 1]; \quad g(v) = (2v - v^2, 1 - v^2, 0), \quad v \in [0, 1]$$



Т. на съед. е $B = f(1) = g(0) = (0, 1, 0)$.

$$f'(u) = (2u, 2 - 2u, 0) \quad \Rightarrow \quad |f'(u)| = 2(1 - 2u + 2u^2)^{1/2}$$

$$f''(u) = (2, -2, 0)$$

$$f'(u) \times f''(u) = (0, 0, -4) \quad \Rightarrow \quad |f'(u) \times f''(u)| = 4 \quad \Rightarrow \quad \kappa(u) = 1/[2(1 - 2u + 2u^2)^{3/2}]$$

$$\mathbf{g}'(v) = (2 - 2v, -2v, 0) \Rightarrow |\mathbf{g}'(v)| = 2(1 - 2v + 2v^2)^{1/2}$$

$$\mathbf{g}''(v) = (-2, -2, 0)$$

$$\mathbf{g}'(v) \times \mathbf{g}''(v) = (0, 0, -4) \Rightarrow |\mathbf{g}'(v) \times \mathbf{g}''(v)| = 4 \Rightarrow \kappa(v) = 1/[2(1 - 2v + 2v^2)^{3/2}]$$

$$\mathbf{f}'(1) = \mathbf{g}'(0) = (2, 0, 0) \Rightarrow \underline{\mathbf{h} \in C^1} \text{ в т. на съед. } \mathbf{B}) \Rightarrow \underline{\mathbf{h} \in G^1} \text{ в } \mathbf{B}$$

$$\mathbf{f}''(1) = (2, -2, 0) \neq \mathbf{g}''(0) = (-2, -2, 0) \Rightarrow \underline{\mathbf{h} \text{ не е } C^2\text{-непрекъсната в } \mathbf{B}}$$

$$\text{За } \mathbf{f} \text{ и } \mathbf{g} \text{ имаме } \kappa = 1/2 \text{ в т. на съед. } \mathbf{B} = \mathbf{f}(1) = \mathbf{g}(0) \Rightarrow \underline{\mathbf{h} \text{ е } \kappa\text{-непрекъсната в } \mathbf{B}}$$

Понеже $\mathbf{h} \in C^1$ в т. \mathbf{B} и $\mathbf{f}''(1) - \mathbf{g}''(0) = (4, 0, 0) = 2(2, 0, 0) = 2\mathbf{f}'(1) = 2\mathbf{g}'(0) \Rightarrow$ (съгл. крит. Нийлсон) $\underline{\mathbf{h} \text{ е } G^2\text{-непрекъсната в т. на съед. } \mathbf{B}(0, 1, 0)}$.

