Метод на допирателните (Нютон) за решаване на уравнения
f(x) = 0

Задача3 Дадено е уравнението **= 0**.

а) Да се намери броят на всички корени и да се локализира (1) най-големия, (2) най-малкия от тях (в случай на повече от един корени).

б) Направете 2 итерации по метода на Нютон (допирателните).

в) Каква е точността на последно полученото в б) приближение?

г) Да се намери локализирания от подточка а) корен с точност 10^{-14}.

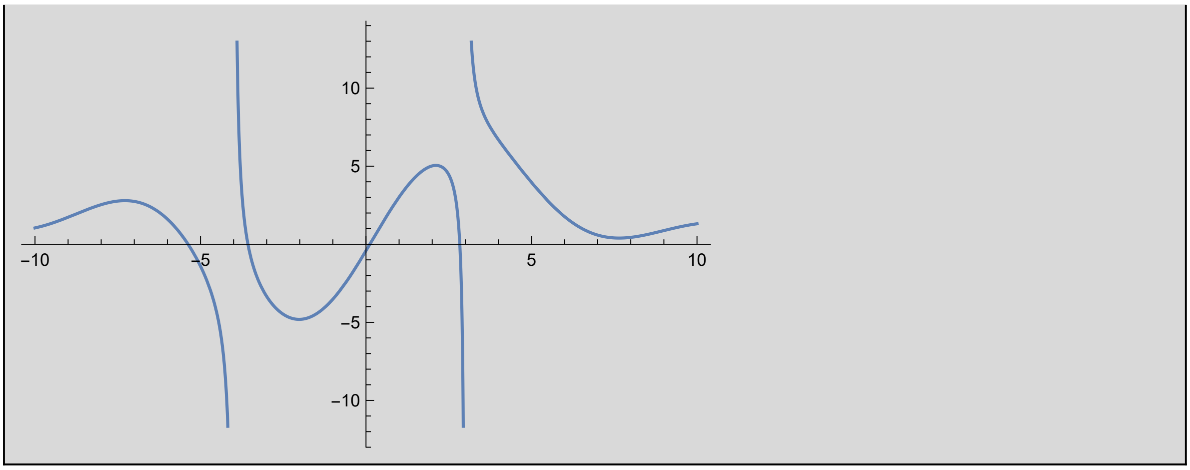
I. Локализация на корен:
a = ?, b = ? , такива че $x^* \in [a, b]$

In[∘]:=

$$f[x\_] := \frac{x^2 - 43\,\mathrm{Sin}[x] + 5}{(x-3)\,(x+4)}$$

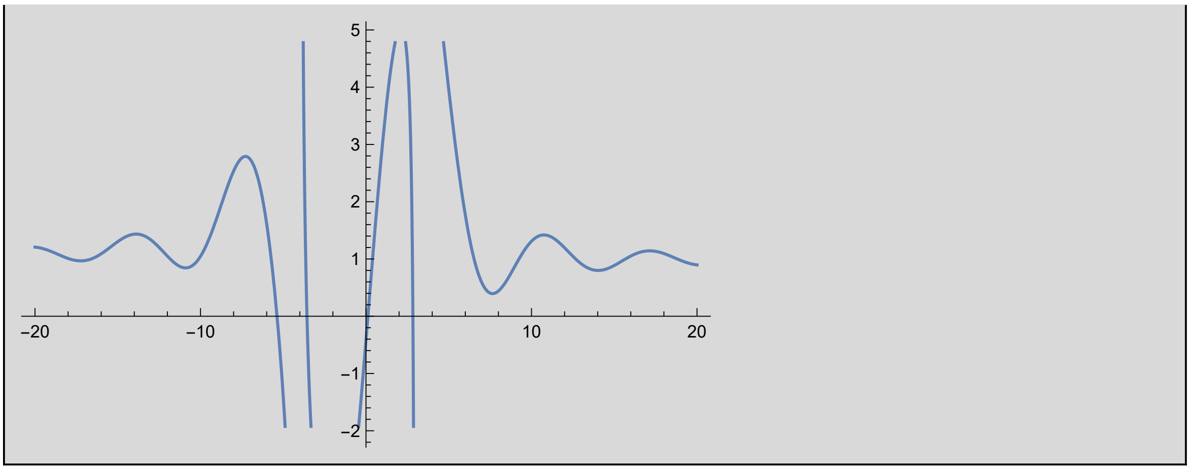
```
Plot[f[x], {x, -10, 10}]
```

Out[∘]=

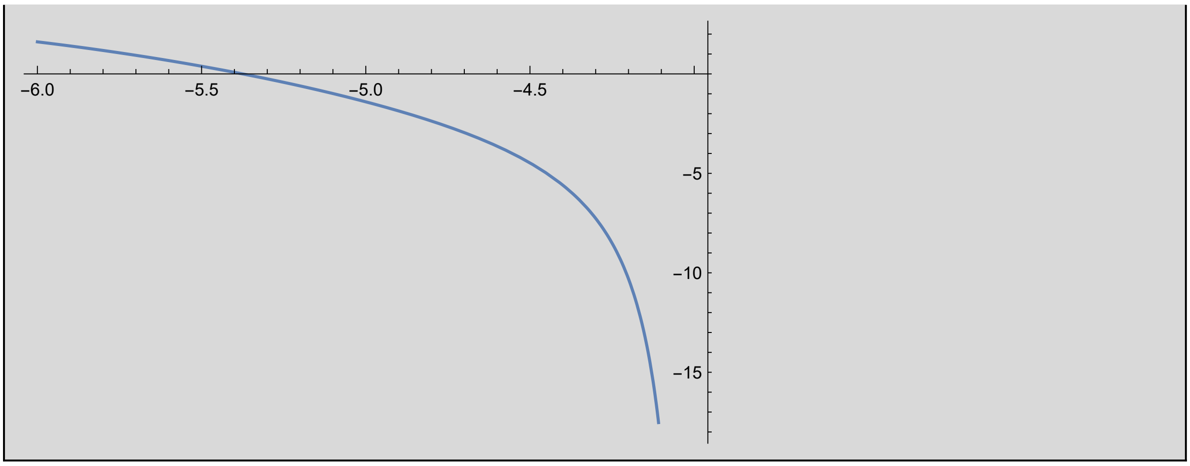


ДС: (x-3)(x+4) ≠ 0 => x ≠ 3, x ≠ -4

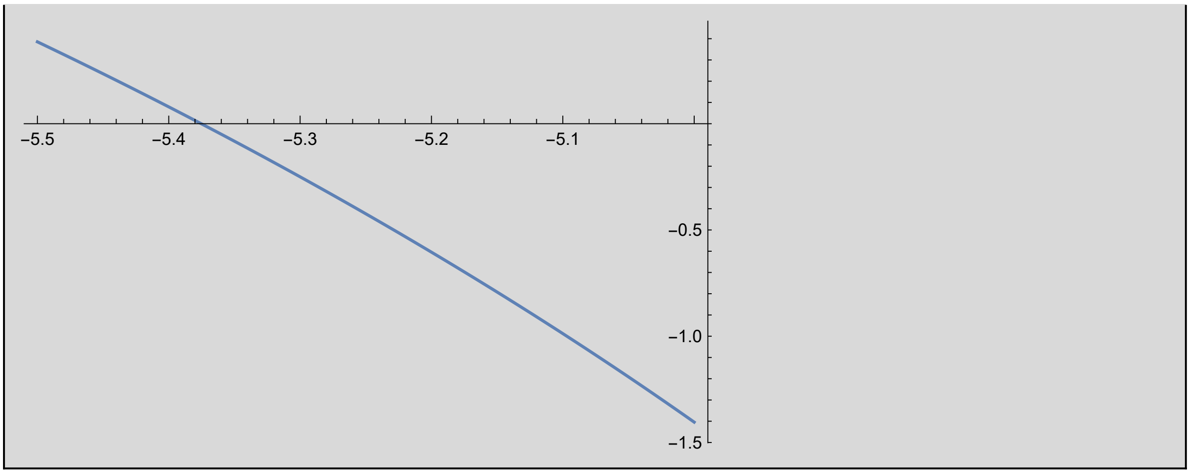
In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, -20, 20}]
```
Out[ ]=



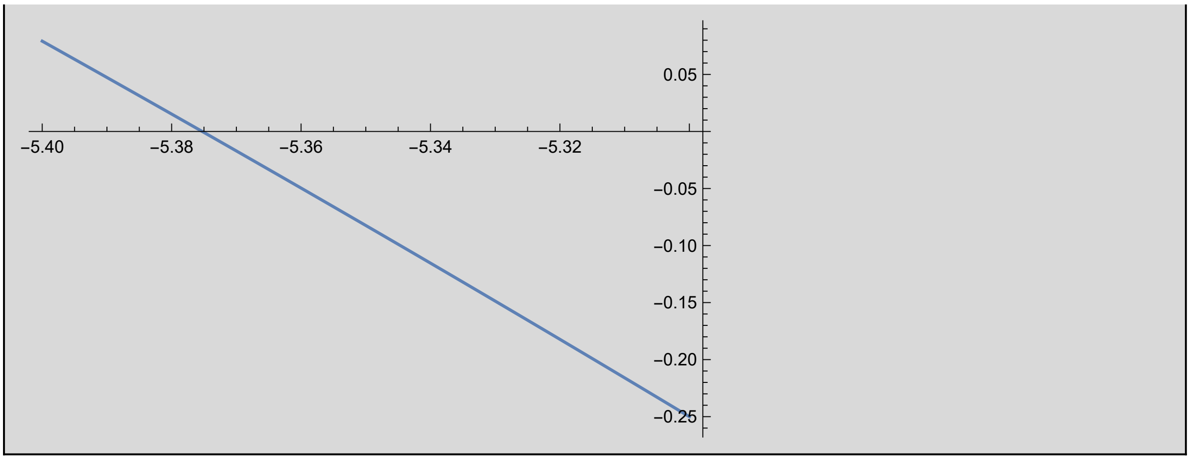
In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, -6, -4}]
```
Out[ ]=



In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, -5.5, -5}]
```
Out[ ]=



In[]:=
```
Plot[f[x], {x, -5.4, -5.3}]
```
Out[]=



In[]:=
```
f[-5.4]
```
Out[]=
```
0.0791775
```

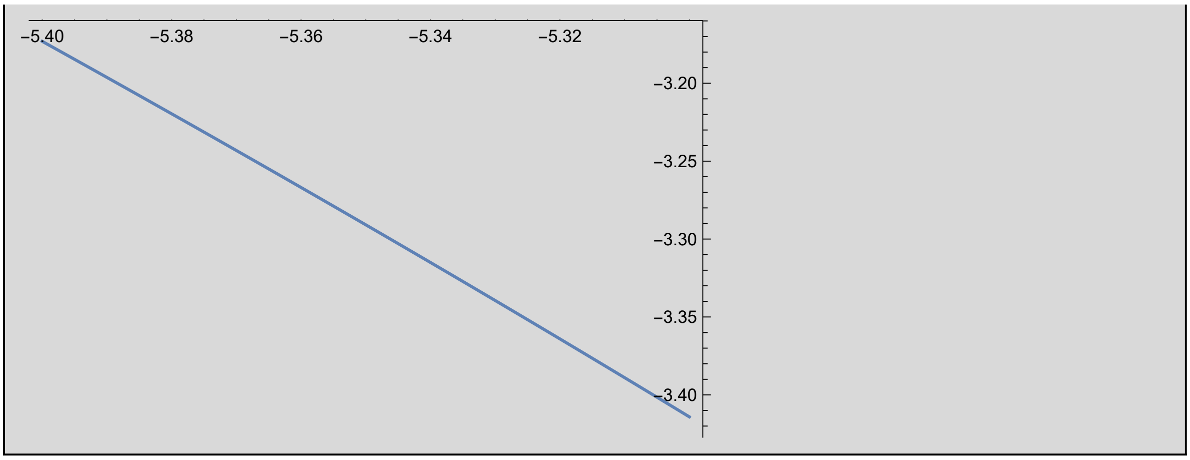
In[]:=
```
f[-5.3]
```
Out[]=
```
-0.25
```

Извод.....

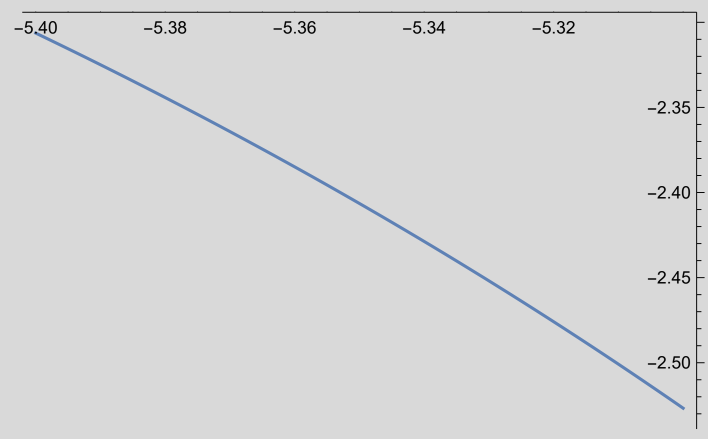
II. Проверка на условията за сходимост на метода:

f’(x), f’’(x) да са с постоянни знаци в интервала [a, b]

In[]:=
```
Plot[f'[x], {x, -5.4, -5.3}]
```
Out[]=



In[∘]:=
```
Plot[f''[x], {x, -5.4, -5.3}]
```
Out[∘]=



Извод....

III. Определяне на начално приближение: x_0 = ?, такова че $f(x_0).f''(x) > 0$

f'' <0 за текущата задача. Следователно избираме x_0 , така че $f(x_0) < 0$.

In[∘]:=
```
x0 = -5.3
```
Out[∘]=
```
-5.3
```

IV. Уточняване на корена:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0,1,2,\ldots$$

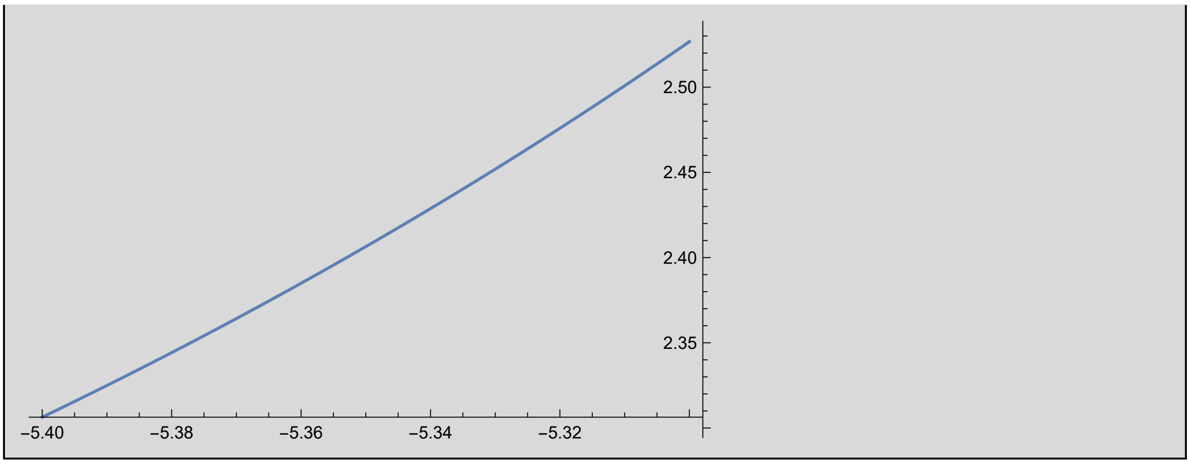
с оценка на грешката $\epsilon_n = |x^* - x_n|$:

$$\epsilon_n \leqslant \frac{M_2}{2\, m_1}\ |\, x_n - x_{n-1}\, |^2,$$

където $M_2 = \max_{[a,b]}|f''(x)|$, $m_1 = \min_{[a,b]}|f'(x)|$

Определяне на постоянните величини
$M_2 = ?,\ \ m_1 = ?$

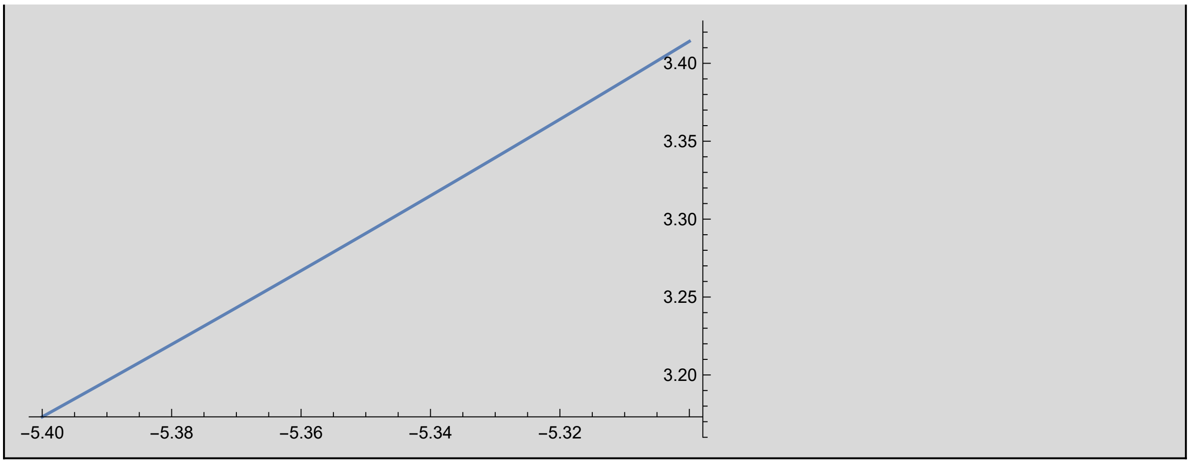
In[∘]:=
```
Plot[Abs[f''[x]], {x, -5.4, -5.3}]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
M2 = Abs[f''[-5.3]]
```
Out[∘]=

```
2.5267
```

In[∘]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, -5.4, -5.3}]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
m1 = Abs[f'[-5.4]]
```
Out[∘]=
```
3.17312
```
In[∘]:=

$$P = \frac{M2}{2\,m1}$$

Out[∘]=
```
0.398142
```

Извършване на итерациите

Извършваме итерациите последователно като използваме *Mathematica* за калкулатор - виж на лекции

Съставяме програмен код на *Mathematica*, който извършва итерациите и печата необходимите ни величини:

In[∘]:=
```
f[x_] := (x^2 - 43 Sin[x] + 5)/((x - 3) (x + 4))
x0 = -5.3;
M2 = Abs[f''[-5.3]];
m1 = Abs[f'[-5.4]];
P = M2/(2 m1);
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " f(xn) = ", f[x0], " f'(xn) = ", f'[x0]]
For[n = 1, n ≤ 2, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/f'[x0];
 eps = P * Abs[x1 - x0]^2;
 x0 = x1;
 Print["n = ", n, " xn = ", x0,
  " f(xn) = ", f[x0], " f'(xn) = ", f'[x0], " εn = ", eps]
]
```

$n = 0$ $x_n = -5.3$ $f(x_n) = -0.25$ $f'(x_n) = -3.4141$

$n = 1$ $x_n = -5.37323$ $f(x_n) = -0.00661276$ $f'(x_n) = -3.23554$ $\varepsilon_n = 0.00213485$

$n = 2$ $x_n = -5.37527$ $f(x_n) = -4.92122\times10^{-6}$ $f'(x_n) = -3.23073$ $\varepsilon_n = 1.66307\times10^{-6}$

пускаме повече итерации

In[∘]:=
```
f[x_] := (x^2 - 43 Sin[x] + 5)/((x - 3) (x + 4))
x0 = -5.3;
M2 = Abs[f''[-5.3]];
m1 = Abs[f'[-5.4]];
P = M2/(2 m1);
Print["n = ", 0, " x_n = ", x0, " f(x_n) = ", f[x0], " f'(x_n) = ", f'[x0]]
For[n = 1, n ≤ 10, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/f'[x0];
 eps = P * Abs[x1 - x0]^2;
 x0 = x1;
 Print["n = ", n, " x_n = ", x0,
  " f(x_n) = ", f[x0], " f'(x_n) = ", f'[x0], " ε_n = ", eps]
]
```

n = 0 x_n = -5.3 $f(x_n)$ = -0.25 $f'(x_n)$ = -3.4141

n = 1 x_n = -5.37323 $f(x_n)$ = -0.00661276 $f'(x_n)$ = -3.23554 ε_n = 0.00213485

n = 2 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = -4.92122×10^{-6} $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 1.66307×10^{-6}

n = 3 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = -2.73156×10^{-12} $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 9.23811×10^{-13}

n = 4 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 0. $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 2.84651×10^{-25}

n = 5 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 0. $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 0.

n = 6 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 0. $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 0.

n = 7 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 0. $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 0.

n = 8 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 0. $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 0.

n = 9 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 0. $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 0.

n = 10 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 0. $f'(x_n)$ = -3.23073 ε_n = 0.

In[∘]:=
```
MachinePrecision // N
```

Out[∘]=
```
15.9546
```

цикъл със стоп критерий при достигане на точността

In[∘]:=

```
f[x_] := (x^2 - 43 Sin[x] + 5)/((x - 3) (x + 4))
x0 = -5.3;
M2 = Abs[f''[-5.3]];
m1 = Abs[f'[-5.4]];
P = M2/(2 m1);
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " f(xn) = ", f[x0], " f'(xn) = ", f'[x0]]
epszad = 10^-14;
eps = 1;
For[n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/f'[x0];
 eps = P * Abs[x1 - x0]^2;
 x0 = x1;
 Print["n = ", n, " xn = ", x0,
  " f(xn) = ", f[x0], " f'(xn) = ", f'[x0], " εn = ", eps]
]
```

n = 0 x_n = -5.3 f(x_n) = -0.25 f'(x_n) = -3.4141

n = 1 x_n = -5.37323 f(x_n) = -0.00661276 f'(x_n) = -3.23554 ε_n = 0.00213485

n = 2 x_n = -5.37527 f(x_n) = -4.92122×10^{-6} f'(x_n) = -3.23073 ε_n = 1.66307×10^{-6}

n = 3 x_n = -5.37527 f(x_n) = -2.73156×10^{-12} f'(x_n) = -3.23073 ε_n = 9.23811×10^{-13}

n = 4 x_n = -5.37527 f(x_n) = 0. f'(x_n) = -3.23073 ε_n = 2.84651×10^{-25}

Сравнение с другите методи

метод на разполовяването

In[∘]:=

```
Log2[(-5.3 - (-5.4))/10^-14] - 1
```

Out[∘]=

```
42.1851
```

метод на хордите

In[∘]:=

```
epszad = 10^-14;
f[x_] := (x^2 - 43 Sin[x] + 5)/((x - 3) (x + 4))
a = -5.4; b = -5.3;
x0 = a; p = b;
M1 = Abs[f'[-5.3]];
m1 = Abs[f'[-5.4]];
P = (M1 - m1)/m1;
Print["n = ", 0, " x_n = ", x0, " f(x_n) = ", f[x0]];
eps = Infinity;
For[
 n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " x_n = ", x1,
  " f(x_n) = ", f[x1], " ε_n = ", eps = P * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

n = 0 x_n = -5.4 $f(x_n)$ = 0.0791775

n = 1 x_n = -5.37595 $f(x_n)$ = 0.00218259 ε_n = 0.00182669

n = 2 x_n = -5.37529 $f(x_n)$ = 0.0000595548 ε_n = 0.0000499184

n = 3 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 1.62458×10^{-6} ε_n = 1.36176×10^{-6}

n = 4 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 4.43162×10^{-8} ε_n = 3.7147×10^{-8}

n = 5 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 1.20888×10^{-9} ε_n = 1.01331×10^{-9}

n = 6 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 3.29764×10^{-11} ε_n = 2.76418×10^{-11}

n = 7 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 8.98799×10^{-13} ε_n = 7.54044×10^{-13}

n = 8 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 2.34416×10^{-14} ε_n = 2.05728×10^{-14}

n = 9 x_n = -5.37527 $f(x_n)$ = 0. ε_n = 5.39615×10^{-16}

Тайни козове

Solve

In[∘]:=
```
Solve[f[x] == 0, x]
```

Solve: This system cannot be solved with the methods available to Solve.

Out[∘]=

$$\text{Solve}\left[\frac{5 + x^2 - 43\,\text{Sin}[x]}{(-3 + x)\,(4 + x)} == 0,\ x\right]$$

FindRoot

In[∘]:=
```
FindRoot[f[x] == 0, {x, -5.4}]
```

Out[∘]=
```
{x → -5.37527}
```

In[∘]:=
```
FindRoot[f[x] == 0, {x, 10}]
```

FindRoot: The line search decreased the step size to within tolerance specified by AccuracyGoal and PrecisionGoal but was unable to find a sufficient decrease in the merit function. You may need more than MachinePrecision digits of working precision to meet these tolerances.

Out[∘]=
```
{x → 7.64662}
```

In[∘]:=
```
FindRoot[f[x] == 0, {x, -3}]
```

Out[∘]=
```
{x → -3.56631}
```