Най-голяма и най-малка стойност на функция на една независима променлива (абсолютен екстремум)

<u>Опр</u> Нека $f: X \to \mathbb{R}$ и с $\{f(x)\}$ е означено множеството от функционалните ѝ стойности. Ако $\{f(x)\}$, $x \in X$, притежава максимален (минимален) елемент, той се нарича най-голяма (най-малка) стойност на ф-та f в X и се означава

$$\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\, f(x) \quad \left(\underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\, f(x) \right)$$

Нека $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ и е непрекъсната. Тогава най-голямата и най-малката стойност на f се намира по следният начин

1) Определят се критичните точки на ф-та f и се пресмятат стойностите ѝ в тях

2) Пресмятат се стойностите на ф-та f в точките a и b

3) Сравняват се получените стойности

които са съответно $\underset{x \in [a,b]}{Max} f(x)$ и $\underset{x \in [a,b]}{Min} f(x)$

Нека $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната (а и в могат да бъдат съответно $-\infty$ и $+\infty$). Тогава намирането на най-голямата и най-малката стойност на f (ако съществуват) се основава на следните съображения

1) Определят се критичните точки на ф-та f и се пресмятат стойностите ѝ в тях

2) Намират се границите $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $B = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$ (ако съществуват)

3) Сравняват се A B и стойностите на f в критичните точки

<u>Забележка</u>: Ф-та не притежава $\underset{x \in (a,b)}{Max} f(x)$ $\left(\underset{x \in (a,b)}{Min} f(x)\right)$ в следните случаи

$A = +\infty$ или $B = +\infty$ $(A = -\infty$ или $B = -\infty)$

или A, B - крайни, но $\max\{A, B\}$ ($\min\{A,B\}$) е по-голямо (по-малко) от всички стойности в критичните точки.

① НМС и НГС за ф-та $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$
$x \in [-1; 2]$

<u>Р-е:</u>

$f'(x) = 3x^2 - 12x$ $\qquad f'(x) = 0$

$3x^2 - 12x = 0$

$3x(x-4) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4 \notin [-1; 2]$

$\in [-1; 2]$

$f(0) = 9$

$f(-1) = (-1)^3 - 6.(-1)^2 + 9 = -1 - 6 + 9 = 2$

$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 = 8 - 24 + 9 = 17 - 24 = -7$

$\underset{x \in [-1; 2]}{\mathrm{Max}} f(x) = f(0) = 9 \qquad \underset{x \in [-1; 2]}{\mathrm{Min}} f(x) = f(2) = -7$

② Намерете НМС и НГС на f-та
$f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad , x \in [1; e]$

$f'(x) = 2x \cdot \ln x + \cancel{x^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} =$

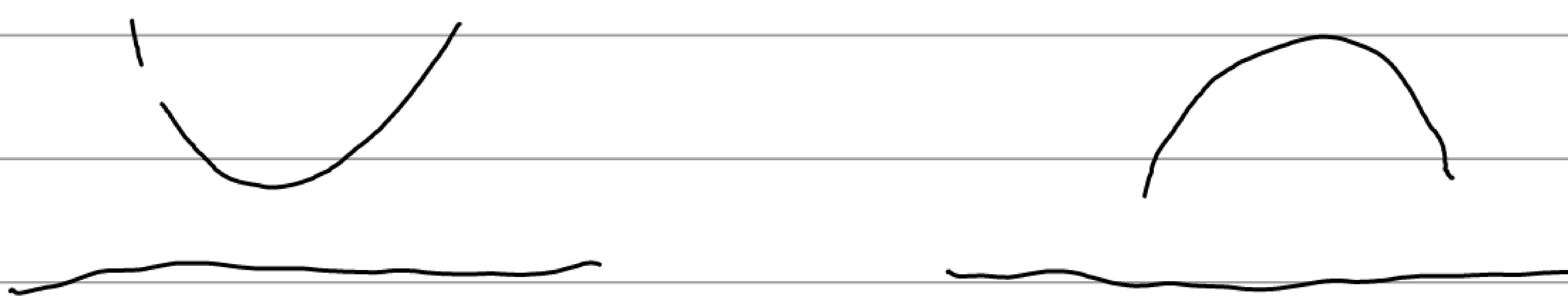
$= 2x \cdot \ln x + x = x(2\ln x + 1)$
$f'(x) = 0$

$x(2\ln x + 1) = 0$
$x_1 = 0 \notin [1; e]$
$2\ln x + 1 = 0 \qquad 2 \ln x = -1 = -\ln e$

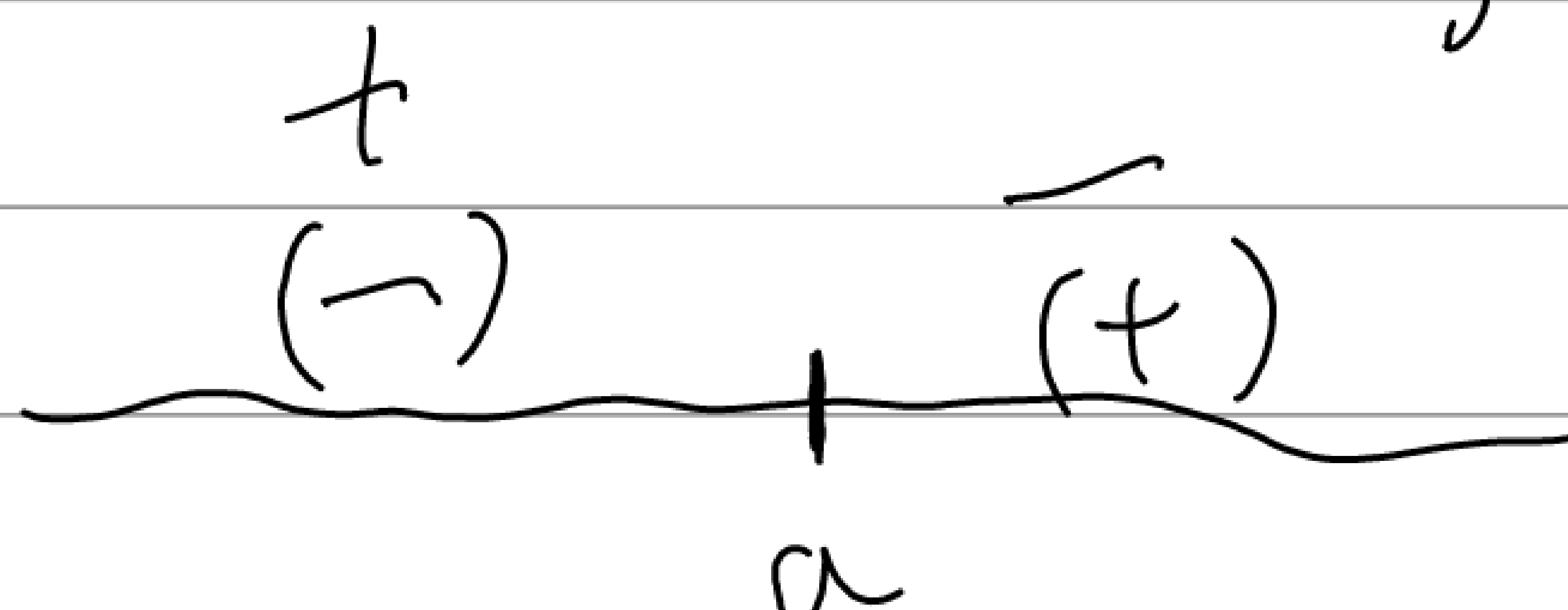
$\ln x^2 = -1 \cdot \ln e$
$\ln x^2 = \ln e^{-1}$
$x^2 = \frac{1}{e} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{e}} = \pm\frac{1}{\sqrt{e}} \notin$
$[1; e]$

$f(1) = 1^2 \cdot \ln 1 = 0$
$f(e) = e^2 \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = e^2$
$\max_{x \in [1; e]} f(x) = f(e) = e^2 \quad \min_{x \in [1; e]} f(x) = f(1) = 0$

Изпъкналост и вдлъбнатост на ф-я



изпъкнала   вдлъбната



$f''(a) = 0$ $(a, f(a)) \to$ инфлексна точка

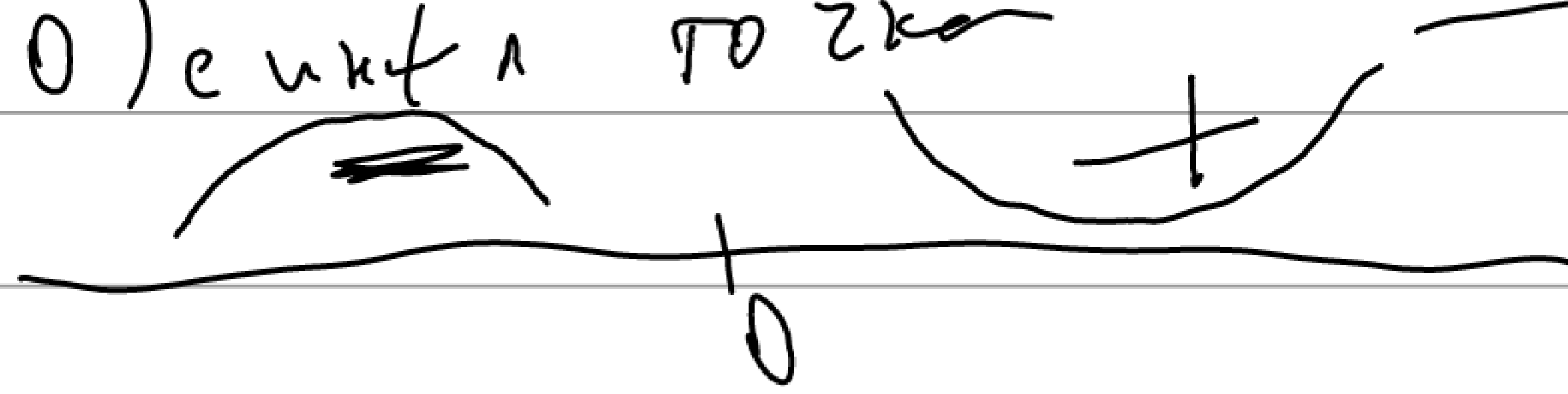
① Изследвайте за изпъкналост, вдлъбнатост и инфл. точки ф-та

а) $y = x^3 - 12x$

$y' = 3x^2 - 12$ $y'' = 6x$

$y'' = 0$ $6x = 0$ $x = 0$

$\Rightarrow$ т. $(0, 0)$ е инфл. точка



$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty; 0)$ и изпъкнала в $(0; +\infty)$

б) $y = 3 - 2\sqrt[3]{x^2}$ $\qquad y' \neq 0$

$y' = -\frac{4}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

$y'' = \frac{4}{9} x^{-\frac{4}{3}} \qquad x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$y'' > 0$ за $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

$\rightarrow$ ф-ци е изпъкнала

в) $y = \frac{x^3}{1-x^2} \qquad y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$

$y'' = \left(\frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} \right)' =$

$= \frac{(6x - 4x^3)(1-x^2)^2 + 4x(3x^2 - x^4)(1-x^2)}{(1-x^2)^4} =$

$= \frac{\cancel{(1-x^2)}\left[(6x-4x^3)(1-x^2) + 4x(3x^2-x^4)\right]}{(1-x^2)^{\cancel{4}\,3}} =$

$$= \frac{6x - 6x^3 - 4x^3 + \cancel{4x^5} + 12x^3 - \cancel{4x^5}}{(1-x^2)^3} = \frac{6x + 2x^3}{(1-x^2)^3} =$$

$$= \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} \qquad y'' = 0$$

$2x(3+x^2) = 0 \qquad x = 0$

$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} \qquad f(0) = \frac{0^3}{1-0^2} = 0$

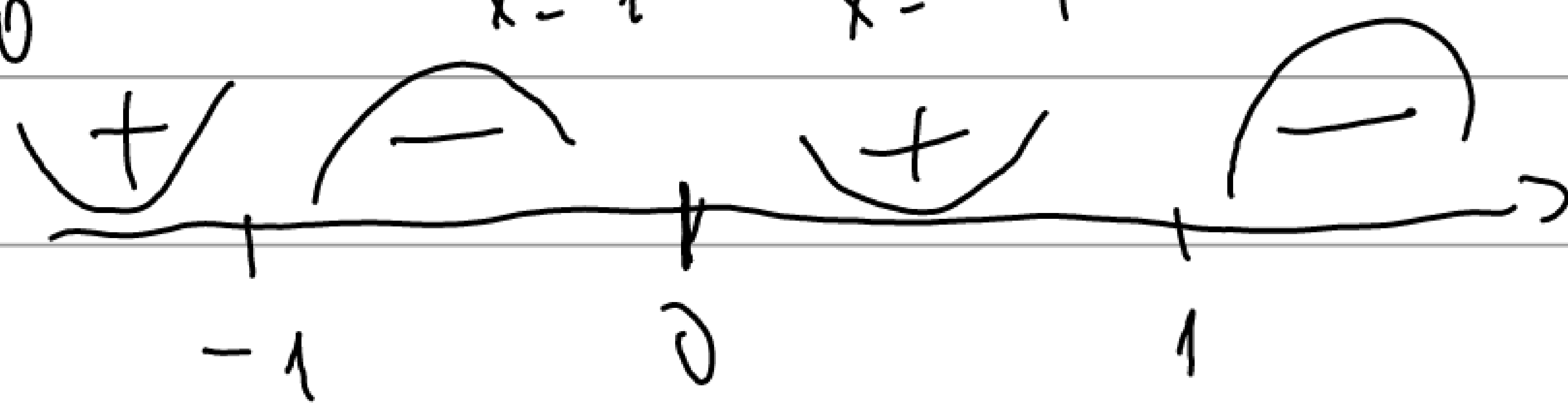
инфл. точка $(0,0)$

$y'' > 0$

$$\frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3} > 0$$

$$2x(\cancel{3+x^2})^{>0}(1-x)^3(1+x)^3 > 0$$

$x = 0 \qquad x = 1 \qquad x = -1$



инфл. точка

Построяване графики на функции

1. Определяне на Д.О D на ф-та
2. Изследване за четност, нечетност, периодичност и определяне на областта $D_0 \subset D$, в която ще се изследва ф-та
3. Поведение на ф-та в границата на D_0 и изследване за асимптоти
5. Изследване за изп. вдлъбнатост и инфлексни точки
4. Изследване за растене, намаляване и екстремуми
6. Определяне на пресечните точки с координатните оси (ако има такива).
7. Нанасяне на получените данни в таблица
8. Построяване графиката на ф-та

Опр. 1 Правата $x = a$ се нарича вертикална асимптота на графиката на ф-та f, ако поне една от границите $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ е равна на $+\infty$ или $-\infty$

Опр. 2 Правата $y = b$ се нарича хоризонтална асимптота на графиката на ф-та f, при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, ако $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b\right)$

Опр. 3 Правата $y = kx + b$ се нарича наклонена асимптота на графиката на ф-та f при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, ако $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k\right)$ и

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b\right)$

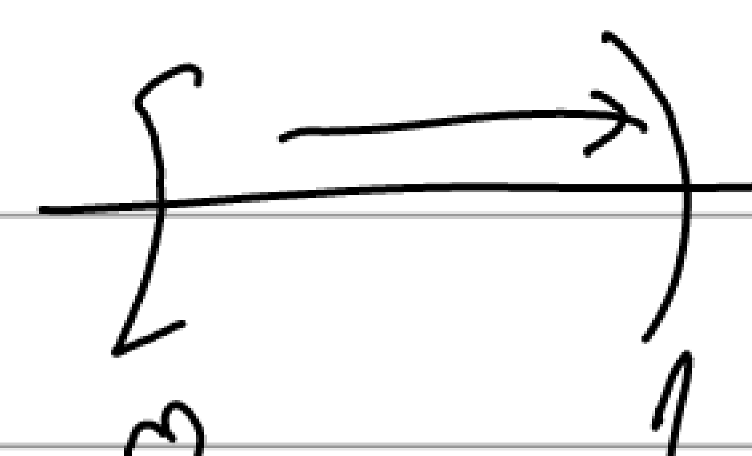
① $y = \frac{x^3}{1-x^2}$ 1) Д.О. $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

2) $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = \frac{-x^3}{1-x^2} = -\frac{x^3}{1-x^2}$ $f(x)$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ f-та е нечетна $\Rightarrow$

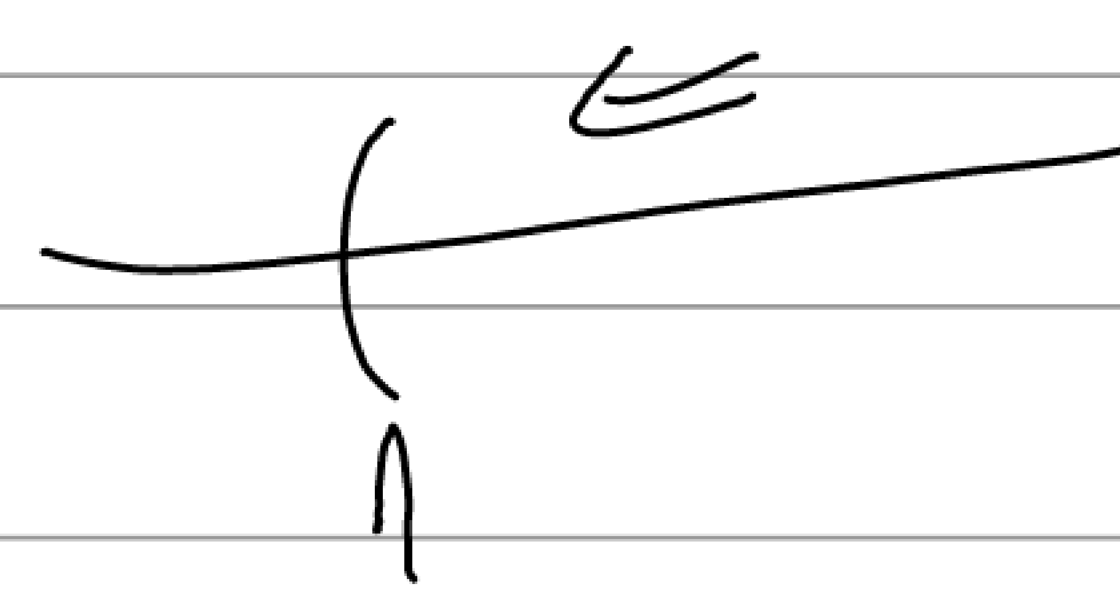
граф. на $f(x)$ е симетрична спрямо ординатата

$D_0 = [0; 1) \cup (1; +\infty)$



$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^3}{1-x^2} = +\infty$



$\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^3}{1-x^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{1-x^2} = -\infty$

От $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = +\infty$ и

$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 1$ е вертикална

асимптота, а от $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1 = k$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$

$\Rightarrow y = -x$ е наклонена асимптота

4) $y' = \left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)'$

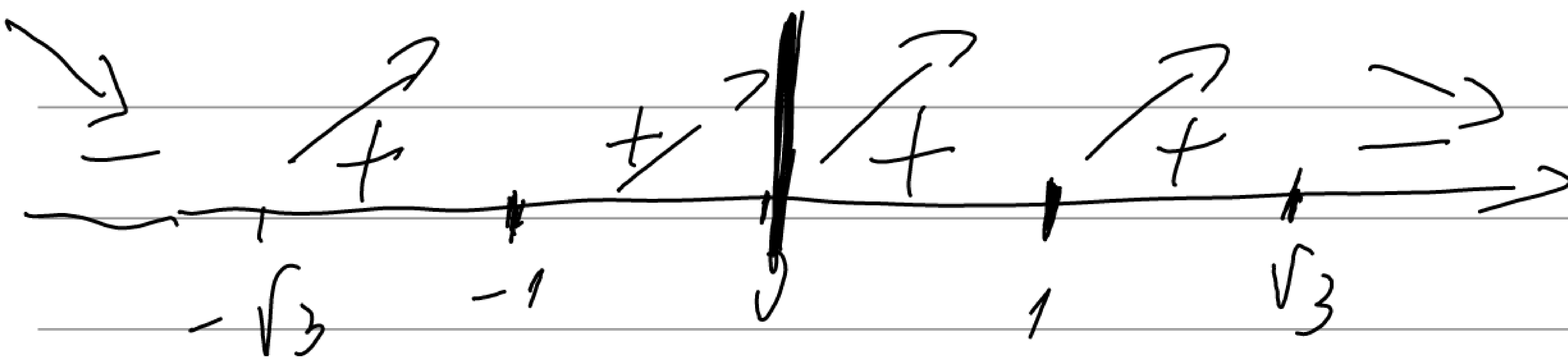
$y' = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ $\quad y' = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{3} \quad x_3 = -\sqrt{3}$

4)

$y' > 0$

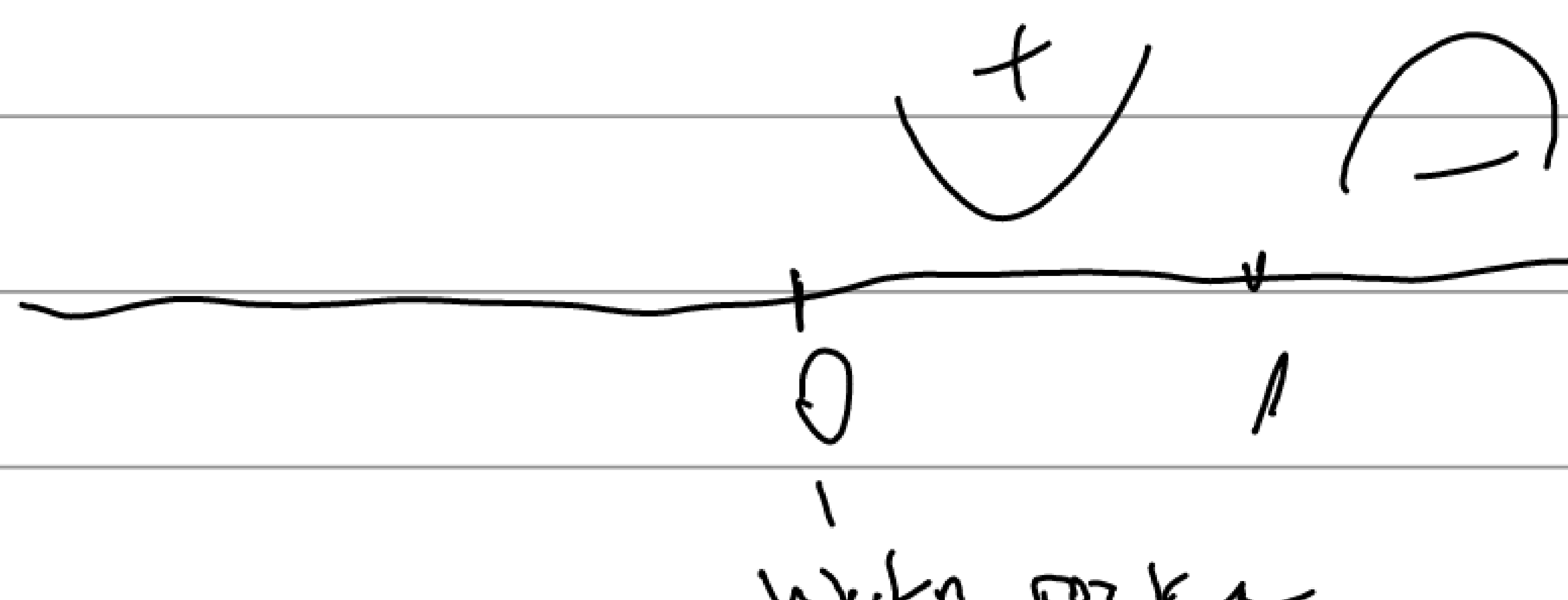
$x^2(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)(1-x)^2(1+x)^2 > 0$



$f_{min}(-\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

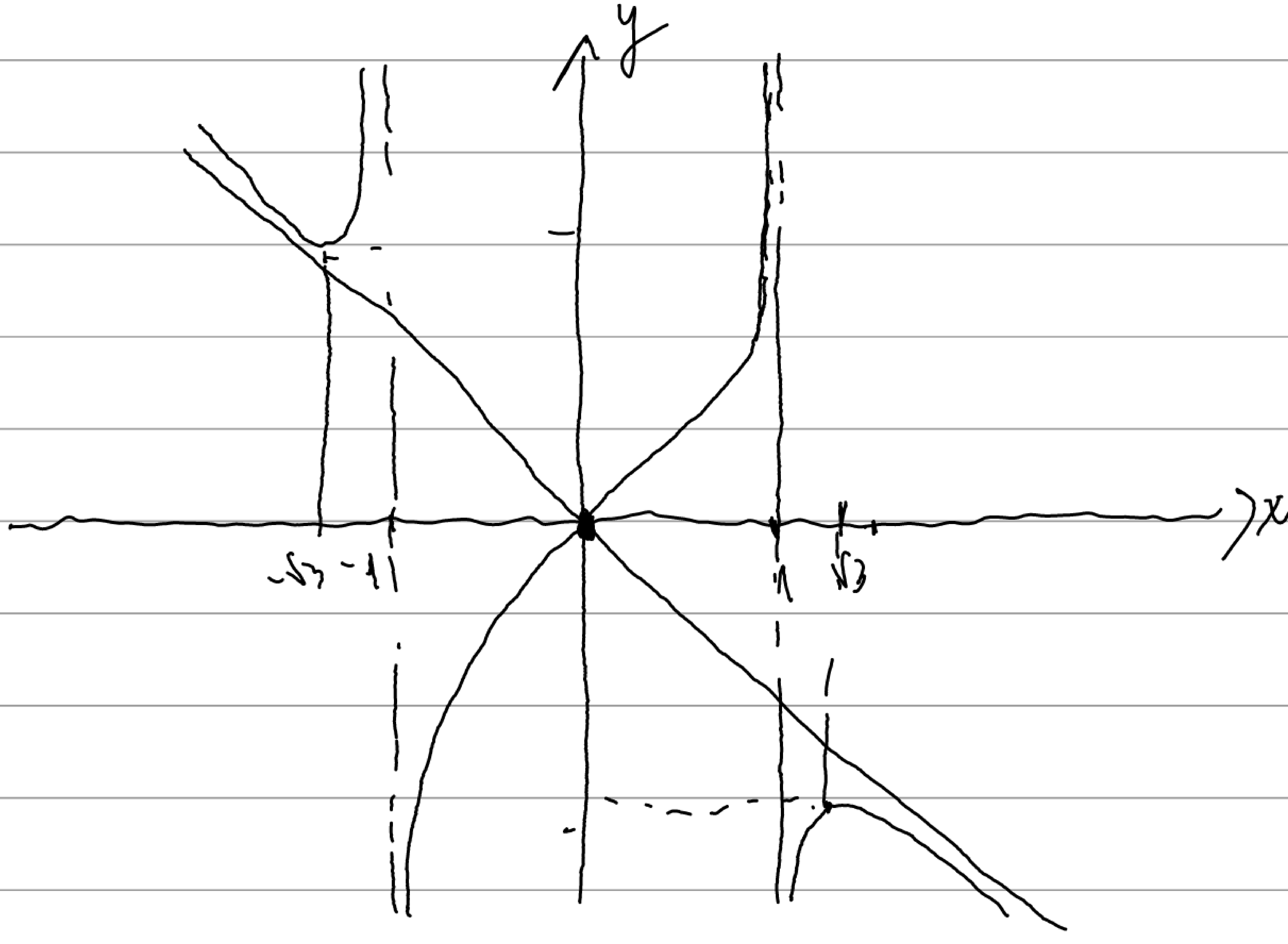
$f_{max}(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

5)



$f(x) = 0$ $\qquad \frac{x^3}{1-x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0, \; y = 0$

x	0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ max	$\searrow$	$-\infty$
y'		$+$	|	$+$	0	$-$	
y''		$+$	|		$-$		



Неопределен интеграл

Опр. Нека $f: \Delta \to \mathbb{R}$. Функцията $F: \Delta \to \mathbb{R}$ се нарича примитивна на ф-та f в интервала Δ, ако тя е диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x)$, $x \in \Delta$

Тм 1 Ако F е примитивна на f в Δ, то множеството от всички примитивни на f е $\{F + C\}$, където $C \in \mathbb{R}$

Опр. Множеството от всички примитивни на ф-та f в Δ се нарича неопределен интеграл от ф-та f и се означава със символа $\int f(x)\,dx$.

Действието, с помощта на което се намира неопределения интеграл на ф-та f, се нарича интегриране

$$\int (x^2+2x-3)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}} - 3x + C$$

$F(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x^2 + \cancel{2} \cdot \frac{2x}{\cancel{2}} - 3 = x^2+2x-3$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1\right)' = x^2+2x-3$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x - 5\right)' = x^2+2x-3$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 10000\right)' = x^2+2x-3$$

Основни с-ва на неопределения интеграл

1) $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

2) $\int dF(x) = F(x) + C$

3) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

4) $\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$

$\cancel{\int f(x) \cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx}$

1 Да се пресм. интеграли

а) $\int (3x^2 + 2x + 1)\,dx =$

$= \int 3x^2\,dx + \int 2x\,dx + \int 1\,dx =$

$= 3\int x^2\,dx + 2\int x\,dx + 1\int dx =$

$\boxed{\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}$

$= \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + x + C = x^3 + x^2 + x + C$

б) $\int \left(\cos x + 2\sqrt[5]{x^3}\right) dx =$

$= \int \cos x \, dx + 2 \int x^{\frac{3}{5}} dx =$

$= \sin x + 2 \cdot \dfrac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + C =$

$= \sin x + \frac{5}{4} x^{\frac{8}{5}} + C$

в) $\int \left(2^x + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) dx =$

$= \int 2^x \, dx + \int \sqrt{\frac{1}{x}} \, dx =$

$$\boxed{\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$$

$= \int 2^x dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + C$

f) $\int \left(\sqrt{x\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} \right) dx =$

$= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} - 4x^{+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-2} + C =$

$= \frac{4x^{7/4}}{7} - 4\sqrt{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

g) $\int \frac{5}{\sqrt{4-4x^2}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}}$$

$= \frac{5}{2} \arcsin x + C$

e) $\int \left(4\cos x - \frac{5}{\sqrt{9x^2-9}} \right) dx$

$$= 4\underbrace{\int \cos x\,dx}_{\text{табл.}} - \frac{5}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}}_{\text{табл.}} =$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C}$$

$$= 4\sin x - \frac{5}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

ж) $\int 2^x \cdot 3^x \cdot 5^x\,dx = \int 30^x\,dx = \frac{30^x}{\ln 30} + C$

з) $\int (5^x - 2^x)^2\,dx = \int (25^x - 2\cdot 10^x + 4^x)\,dx =$

$$= \int 25^x\,dx - 2\int 10^x\,dx + \int 4^x\,dx =$$

$$= \frac{25^x}{\ln 25} - 2\cdot\frac{10^x}{\ln 10} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$$

h) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx =$

$= 2\int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx =$

$= 2 \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln \frac{1}{5}} - \frac{1}{5} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C$

i) $\int 2^{2x} \cdot e^x dx$

k) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$

n) $\int tg^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$

$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} dx = tg x - x + C$

м) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}\, dx = \sin x - \cos x + C$

н) $\int \underbrace{\frac{1}{x^2(1+x^2)}} dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx =$

$= \int \frac{\cancel{x^2+1}}{x^2\cancel{(x^2+1)}} dx - \int \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+x^2)}\, dx =$

$= \int x^{-2}\, dx - \underbrace{\int \frac{dx}{1+x^2}} =$

$= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C$

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C}$$

б) $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx = -\int \frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{1-x^2}}dx + \int \frac{dx}{1-x^2} =$

$= -x +$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} - \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

Интегриране чрез внасяне под знака
на диференциала

$(2x^2)'$ $d(2x^2)$ $y = 2x^2$ dy

изнасяне извън знака на ф-я

$4x\,dx$ $\int x^2 dx$

$x^2 dx = d\frac{x^3}{3}$ $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

$d(x^2+1)$ dx

$\shortparallel$

dx^2

$d(x^2-5)$

$$\int \frac{1}{2} d2x = \frac{1}{2}\int d2x$$

$$\int x^{\alpha} dx \Rightarrow \int u^{\alpha}(x)\, d(u(x)) = \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$$

1) $$\int (x+7)^{17} dx = \int (x+7)^{17} d(x+7) =$$

$$= \frac{(x+7)^{18}}{18} + C$$

2) $$\int \frac{dx}{\sin^2(x+4)} = \rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$= \int \frac{d(x+4)}{\sin^2(x+4)} = -\cot(x+4) + C$$

$-\frac{1}{3}+1$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+5}} = \int (x+5)^{-\frac{1}{3}} d(x+5) =$$

$$= \frac{3}{2}(x+5)^{\frac{2}{3}} + C$$

④ $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}} =$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x-3})^2} = \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}{x+2-(x-3)} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}{\cancel{x}+2-\cancel{x}+3} = \frac{1}{5}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\int (x+2)^{\frac{1}{2}}\, d(x+2) + \frac{1}{5}\int (x-3)^{\frac{1}{2}}\, d(x-3) =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}(x-3)^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{15}(x+2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{15}(x-3)^{\frac{3}{2}} + C$$

⑤ $\int \frac{2x}{x+7}\,dx = 2\int \frac{x}{x+7}\,dx =$ $\qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$= 2\int \frac{x+7-7}{x+7}\,dx = 2\int \frac{\cancel{x+7}}{\cancel{x+7}}\,dx - 14\int \frac{d(x+7)}{x+7} =$

$= 2x - 14 \cdot \ln|x+7| + C$

⑥ $\int \sin 2x\,dx =$ $\qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$= \frac{1}{2}\int \sin 2x\,d\,2x = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

⑦ $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \rightarrow$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}x)^2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + C$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+4)} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+4)}{\cos^2(3x+4)} =$

$= \frac{1}{3} \cdot tg(3x+4) + C$

9) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x \, dx$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$

$\sin 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}\left[\sin 8x + \sin(-2x)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 2x\right)$

$\frac{1}{2}\int \sin 8x \, dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx =$

$= \frac{1}{16}\int \sin 8x \, d(8x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x \, d(2x) =$

$= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

(10) $$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos^4 x} =$$

$$= -\int \cos^{-4} x \, d\cos x = -\frac{\cos^{-3} x}{-3} + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} + C$$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

(11) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{4+\ln x}} = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4+\ln x}}\,dx =$$

$$= \int (4+\ln x)^{-\frac{1}{3}}\, d(\ln x + 4) =$$

$$= \frac{3}{2}(4+\ln x)^{\frac{2}{3}} + C$$

(12) $$\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\int 2^{\sqrt{x}}\, d\sqrt{x} = \qquad 2\int a^{u}\, du = 2\,\frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2}$$

$$= 2\,\frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} + C$$

(13) $$\int \frac{x^3}{e^{3x^4-5}}\, dx = \frac{1}{12}\int e^{-3x^4+5}\, d\,{-3x^4+5} =$$

$$= -\frac{1}{12}\, e^{-3x^4+5} + C$$

(14) $$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\, dx = \int \sqrt{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C}$$

$$= \int \arcsin^{\frac{1}{2}} x\; d(\arcsin x) = \ldots$$

(15) $\int x \sin(4-x^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int \sin(4-x^2)\,d(-x^2+4)$

$= \frac{1}{2}\cos(4-x^2)+C$

(1) $\int \frac{2x}{x^2+7}\,dx$ (2) $\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx$

(3) $\int \frac{\cos x}{\sin x+2}\,dx$ (4) $\int \frac{e^{2x}}{\sin^2(e^{2x})}\,dx$

(5) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}$ (6) $\int x \cdot \sqrt[5]{2-x^2}\,dx$

(7) $\int \frac{e^{2x}}{\sin^2(4e^{2x}+3)}\,dx$

(8) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln^2 x+4}}$ (9) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}\,dx$

Док. тер.:

$$(2x^2+1)\arcsin x + 3x\sqrt{1-x^2} \geq \frac{\pi}{2}x^2, \quad x \in [0,1]$$

$$f(x) = (2x^2+1)\cdot \arcsin x + 3x\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}x^2 \geq 0$$

за $x \in [0,1]$

$$f'(x) = 4x \cdot \arcsin x + (2x^2+1)\cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$3\cdot\sqrt{1-x^2} + 3x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) - \pi x =$$

$$= 4x \arcsin x + \frac{(2x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}} + 3\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \pi x =$$

$$= 4x \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(2x^2+1-3x^2\right) + 3\sqrt{1-x^2} - \pi x =$$

$$= 4x \arcsin x + \frac{1}{\cancel{\sqrt{1-x^2}}}\overset{\sqrt{1-x^2}}{\cancel{(1-x^2)}} + 3\sqrt{1-x^2} - \pi x =$$

$= 4_x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{1-x^2} - \pi x =$
$= 4_x \arcsin x + 4\sqrt{1-x^2} - \pi x$

$f''(x) = \left(4_x \arcsin x + 4\sqrt{1-x^2} - \pi x\right)' =$

$= 4 \cdot \arcsin x + 4x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) - \pi =$

$= 4 \arcsin x + \cancel{\frac{4x}{\sqrt{1-x^2}}} - \cancel{\frac{\overset{4}{\cancel{8}}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}} - \pi$

$f''(x) = 4 \arcsin x - \pi$
$f''(x) \geq 0$
$4 \arcsin x - \pi \geq 0$
$\arcsin x \geq \frac{\pi}{4} \qquad x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$

$f''(x) \leq 0, \quad x \in \left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\Rightarrow f'$ е растяща в $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ и
намаляваща $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 1 > x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f'(x) \geq f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} > 0$

при $\quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad f'(x) \geq f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} > 0$

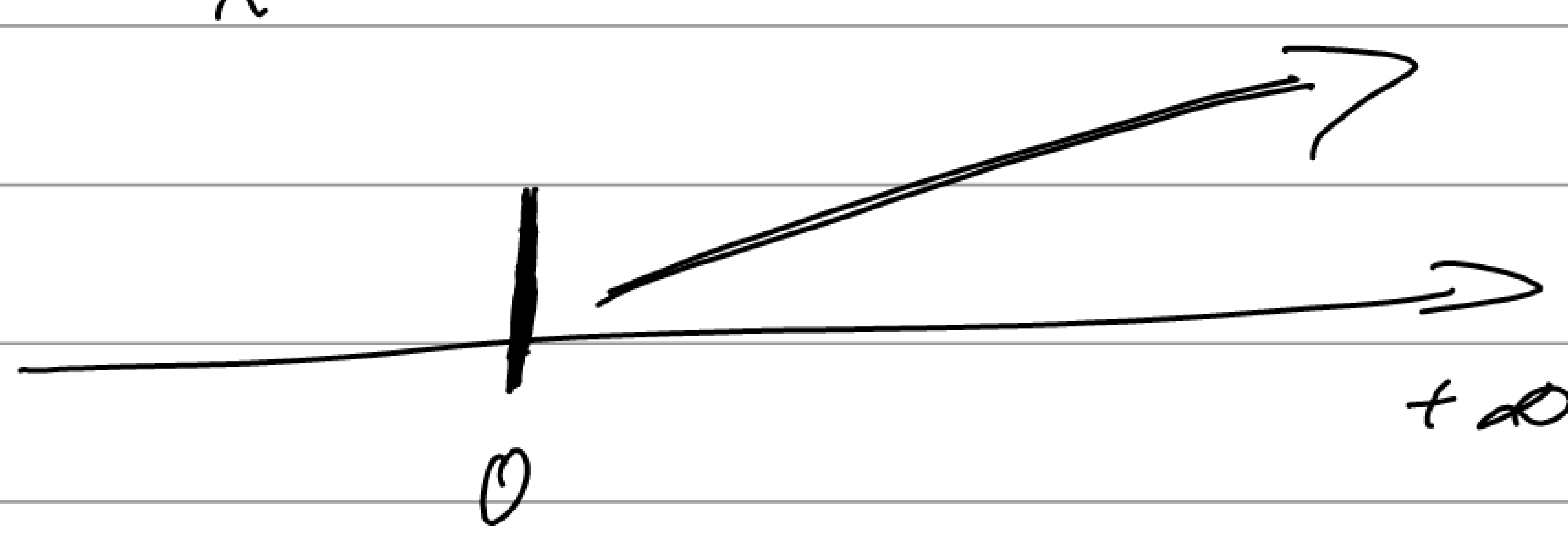
$\Rightarrow f \uparrow$ в $[0, 1]$

за $x = 1$ проверяване непосредствено.

$1 + 2\ln x \leq x^2 \qquad x > 0 \qquad\qquad x > 0$

$x^2 - 2\ln x + 1 \geq 0$

$f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$



$f'(x) = 2x - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$

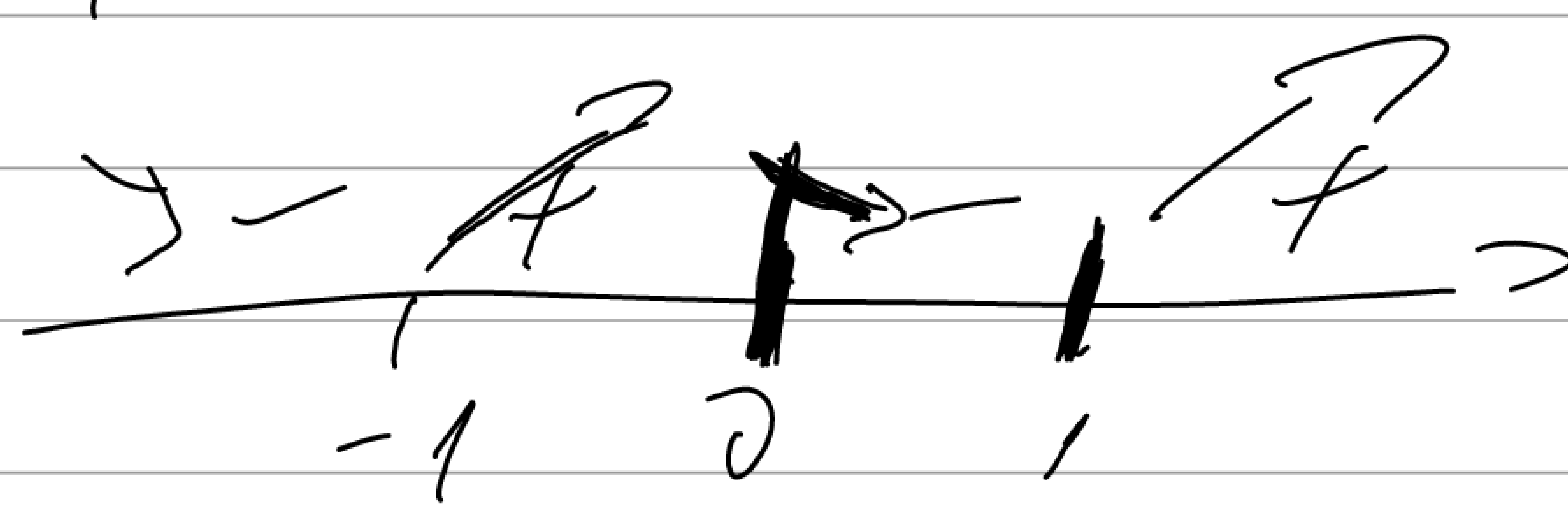
$f'(x) = 0$

$\frac{2x^2-2}{x} = 0$ $\quad x \neq 0 \quad x = 0$ е крит
точка

$2x^2 - 2 = 0 \quad x_{1,2} = \pm 1$

$f'(x) > 0$

$2x(x-1)(x+1) > 0$



$f(0) =$

Нека ф-та $f: X \to \mathbb{R}$ е $(n-1)$ пъти диференцируема в околност на вътрешна точка $x_0 \in X$ и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Тогава, ако $f^{(n)}(x_0)$ съществува и $f^{n}(x_0) \neq 0$, то

1) при нечетно n ф-та не притежава екстремум в т. x_0

2) При четно n ф-та f притежава локален екстремум в т. x_0, който е максимум при $f^{n}(x_0) < 0$ и минимум $f^{(n)}(x_0) > 0$

$y = x^3 - 12x$ $\qquad$ $y' = 3x^2 - 12$

$y' = 0$

$3x^2 - 12 = 0$ $\qquad$ $x_{1,2} = \pm 2$

$f''(x) = 6x$

$f''(2) = 12 > 0 \to \min$

$f''(-2) = -12 < 0 \to \max$