Дискретна математика

доц. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

8

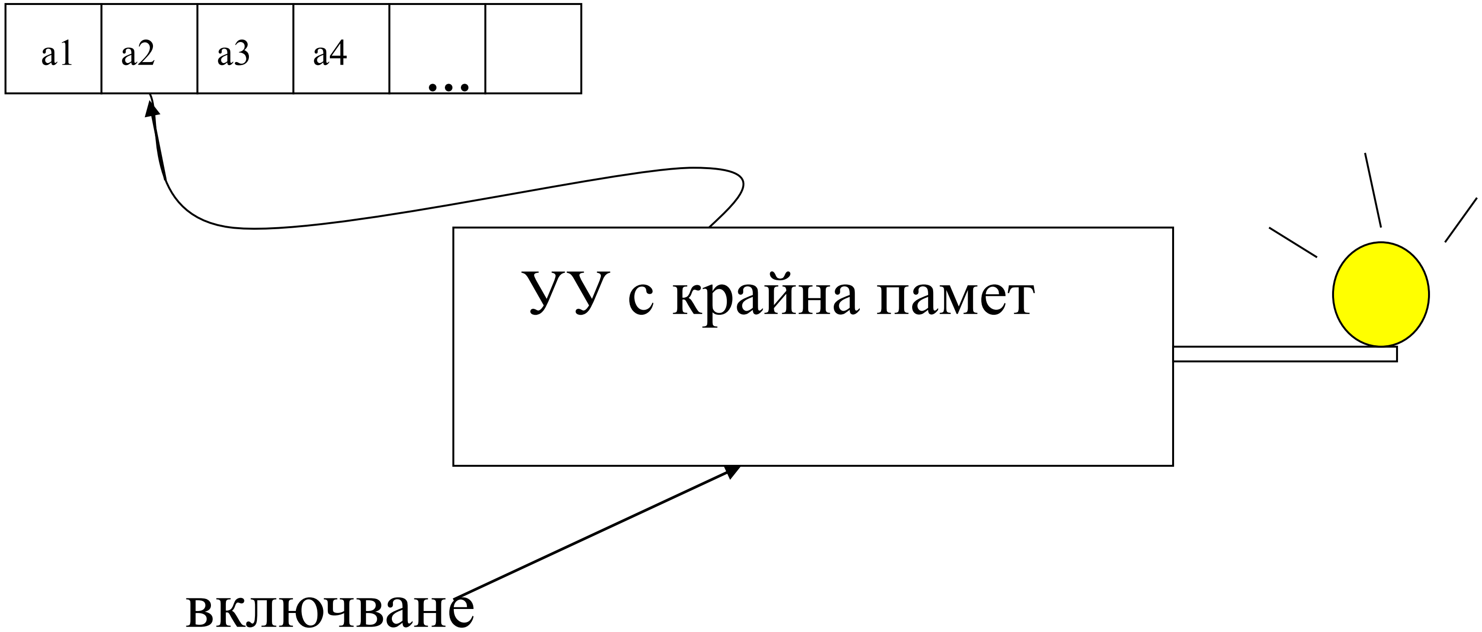
КРАЙНИ АВТОМАТИ

Съдържание

- Детерминиран краен автомат
- Недетерминиран краен автомат
- Автоматите като преобразуватели
- Автомат на Мили
- Автомат на Мур
- Примери

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

Принципна схема:



Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- Ще разгледаме един сравнително прост, но важен вид разпознаватели на формални езици - т.нар. ***детерминирани крайни автомати(ДКА)***.
- Крайните автомати не разпознават всички езици с крайни описания, а само автоматните езици.
- ДКА се състои от входна лента, на която е написана дума от допустимите входни символи, която се чете от крайния автомат отляво надясно и от УУ, което може да се намира в краен брой вътрешни състояния.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- ДКА работи последователно в дискретни моменти от време- тактове.
- На всеки такт УУ се намира в едно вътрешно състояние и прочита един символ.
- След като ДКА изчете цялата дума, ако завърши работата в едно от фиксираните му заключителни състояния, казваме че той е разпознал входната дума (лампата светва).
- Във всички останали случаи той не е разпознал входната дума.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- Дефиниция: Входните думи, които се разпознават от ДКА, образуват ***езика***, разпознаван от автомата.
- Дефиниция: ДКА над азбуката V наричаме наредената петорка: $A=\langle K,V,\delta,q_0,F\rangle$, където:
  - $K\neq\emptyset$ е множество от вътрешни състояния;
  - V - множество от входни символи (входна азбука)
  - δ - функция на преходите с дефиниционна област $D(\delta)\subseteq KxV$ и област на стойностите $R(\delta)\subseteq K$.
  - $q_0\in K$ - начално състояние;
  - $F\subseteq K$ - множество от заключителни състояния.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- ДКА е напълно определен, когато функцията на преходите δ е дефинирана за всяка наредена двойка от KxV, т.е. $D(\delta) = KxV$.
- Автоматът А работи така:

  Нека на А е зададена входна дума $a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{ik+1} \in V^*$. По текущото състояние и първия входен символ a_{i1} чрез функцията δ се определя следващото вътрешно състояние $p_1 = \delta(p_0, a_{i1})$.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- По състоянието p_1 и следващия входящ символ a_{i2} чрез δ се определя p_2 и т.н. Накрая по състоянието $p_к$ и входящия символ a_{ik+1} се определя последното вътрешно състояние $p_{к+1} = \delta(p_к, a_{ik+1})$.

- Ако $p_{к+1} \in F \Rightarrow$ A е разпознал думата, в противен случай автомата не разпознава думата.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- Дефиниция: Множеството T(A) от всички думи на входната азбука V, които ДКА -A разпознава, се нарича ***език, разпознаван от А.***

- Дефиниция: Два ДКА - A1 и A2 са ***еквивалентни*** $\Leftrightarrow$ T(A1)=T(A2), т.е. когато разпознават един и същи език.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- *Пример1: Да разгледаме ДКА:*

$A1=<\{q_0,q_1,q_2\},\{0,1\}, \delta, q_0,\{q_2\}>$, *като*

$\delta(q_0,0)=q_0$ $\delta(q_1,1)=q_2$

$\delta(q_0,1)=q_1$ $\delta(q_2,0)=q_0$

$\delta(q_1,0)=q_0$ $\delta(q_2,1)=q_2$

- Забележка: Функцията δ е дефинирана за всяка наредена двойка от KxV. Следователно A е напълно определен.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- За входната дума 011011 получаваме следната поредица от състояния на А1:

  0 1 1 0 1 1

q_0 q_0 q_1 q_2 q_0 q_1 q_2 -изх. състояние $\Rightarrow$ думата е разпозната.

- За думата 1 1 0 1

  q_0 q_1 q_2 q_0 q_1 - не е от F $\Rightarrow$ думата не е разпозната.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

Пример2: $A2=<\{q0,q1,q2\},\{a,b\}, \delta, q0, \{q0,q1\}>$, като

$\delta(q0,a)=q1$ $\delta(q2,a)=q1$

$\delta(q1,b)=q2$ $\delta(q2,b)=q2$

$\delta(q1,a)=q1$

A2 не е напълно определен, защото $\delta(q0,b)$не е дефинирана. Следователно A2 не разпознава думи, започващи с b.

За думата: a a b a

q0 q1 q1 q2 q1 - разпознава.

За думата b a b a - не я разпознава.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- За нагледност функцията за преходите може да се задава таблично:

	a	b
q0	q1	
q1	q1	q2
q2	q1	q2

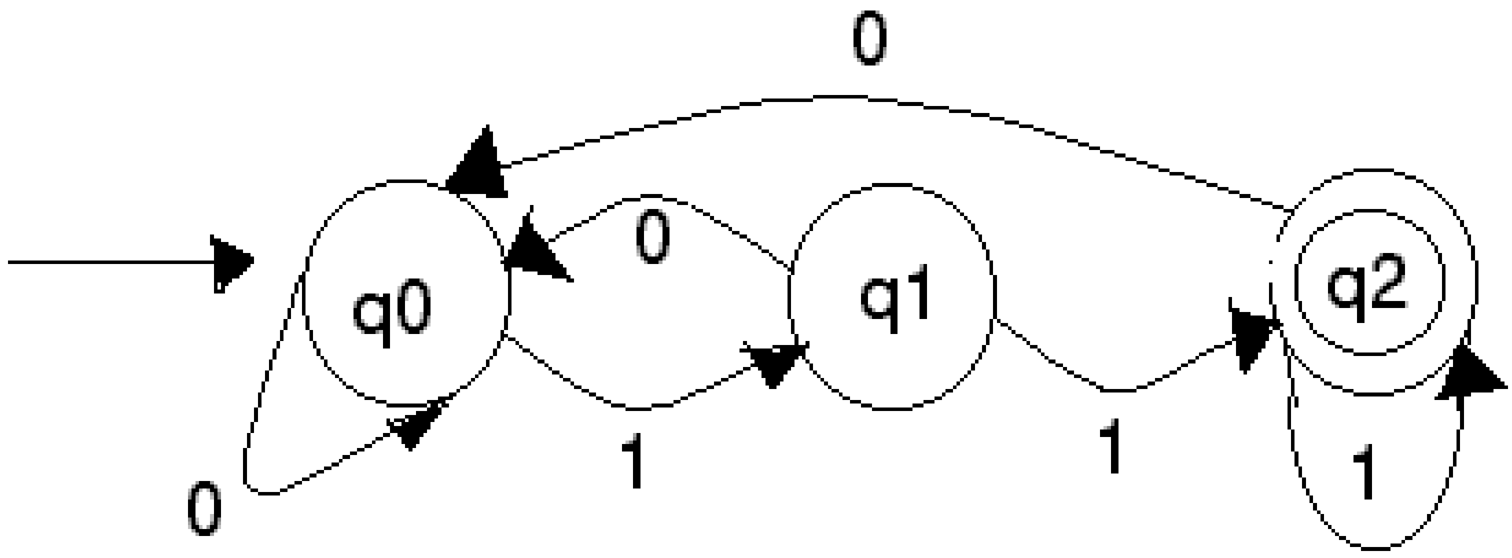
Детерминирани крайни автомати (ДКА)

Графично представяне

- Всеки ДКА може да се представи с диаграма на преходите.
- Дефиниция: Диаграма на преходите на ДКА **A** се нарича ориентирания граф с отбелязани ребра, който се получава като за всяко вътрешно състояние на A поставим по един връх, а два върха **p** и **q** свързваме с ориентирано ребро от **p** към **q**, само когато $\boldsymbol{\delta(p, a) = q}$ за някое **a** от автомата **A.**
- Началният връх се отбелязва със стрелка.

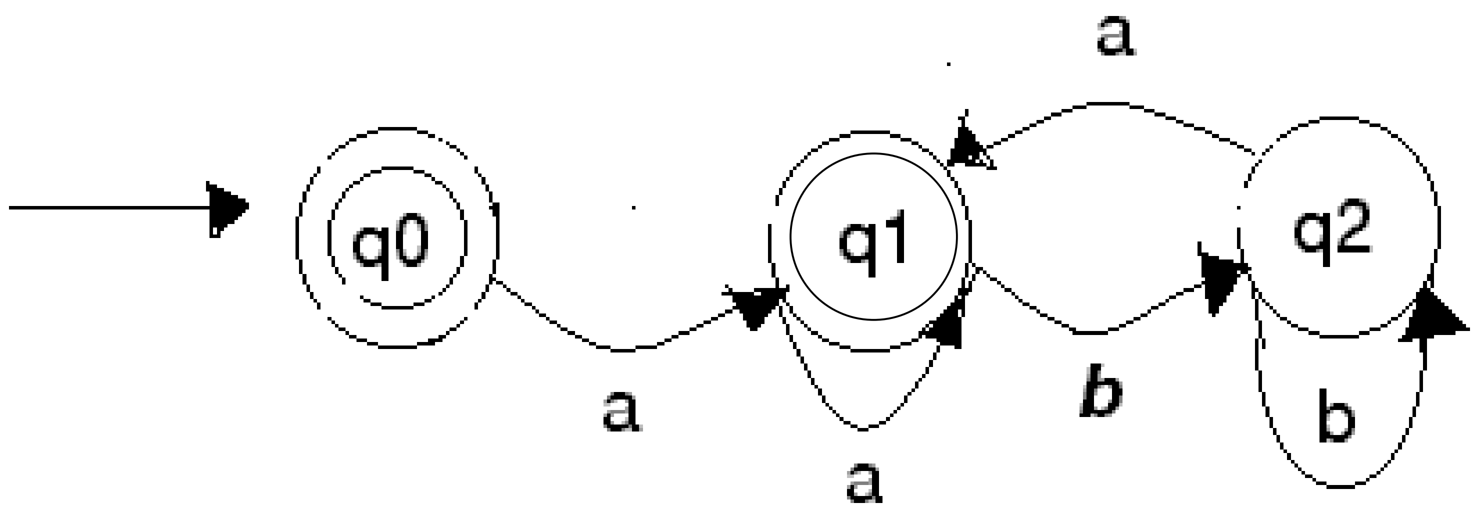
Примери

- За пример 1:



Примери

За пример 2:



Детерминирани крайни автомати (ДКА)

Пример 3: *За А2, който не е напълно определен получаваме следния еквивалентен на него напълно определен краен автомат:*

- $B2=<\{q0,q1,q2,s\},\{a, b\},\delta, q0, \{q0,q1\}>$, *в който*
- $\delta(q0,a)=q1$ $\qquad\qquad$ $\delta(q2,a)=q1$
- $\delta(q0,b)=s$ $\qquad\qquad$ $\delta(q2,b)=q2$
- $\delta(q1,a)=q1$ $\qquad\qquad$ $\delta(s, a)=s$
- $\delta(q1,b)=q2$ $\qquad\qquad$ $\delta(s, b)=s$

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- **<u>Лема:</u>** Нека $A = \langle K, V, \delta, q_0, F \rangle$ е произволен ненапълно определен ДКА. Тогава съществува еквивалентен ва него, който е напълно определен.
- **<u>Теорема:</u>** **<u>(uvw-теорема)</u>** Нека L е формален език, разпознаван от ДКА. Тогава съществува константа n, така че ако α е дума от L с дължина $\geq$ n, то α може да се представи като конкатенация на три думи u,v,w така: α= uvw, като d(uv)$\leq$ n, d(v) $\geq$1 и за всяко i =1,2… думите uv^iw също са от езика L.

Детерминирани крайни автомати (ДКА)

- **Следствие:** Нека L е език, разпознаван от ДКА А с n-състояния. L не е празен език ⇔А разпознава думи с дължина <n.
- **Следствие:** Съществува алгоритъм, който определя дали един език, разпознаван от ДКА, е празен или не.
- **Следствие:** Съществува безконтекстен език, който не се разпознава от ДКА.

Недетерминирани крайни автомати

- За разлика от ДКА от всеки връх може да се премине в 0,1,2 или повече нови ребра, означени с един и същ входен символ, като всяко от тях представлява възможен преход.
- Както при ДКА една входна дума се разпознава, ако в диаграмата на преходите има поне един път от насочени ребра, водещи от началното към заключителното състояние.

Недетерминирани крайни автомати

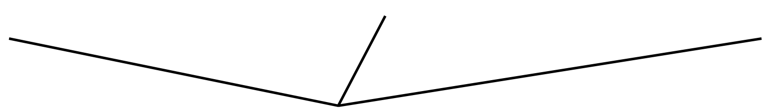
- <u>Дефиниция:</u> **НДКА A над азбука V** наричаме петорката $A=\langle K,V,\delta,q_0,F\rangle$, където:
  - $K\neq\emptyset$ е множество от вътрешни състояния;
  - V - крайно множество от входни символи (входна азбука)
  - δ - функция на преходите с дефиниционна област $D(\delta)$: $D(\delta)\subseteq K\mathrm{x}V$ и област на стойностите $R(\delta)$:$R(\delta)\subseteq P(K)$, където $P(K)$ е множеството от всички подмножества на K.
  - $q_0\in K$ - начално състояние;
  - $F\subseteq K$ - множество от заключителни състояния.

Недетерминирани крайни автомати

- Да отбележим, че докато при ДКА $\delta(q, a)=p$ е вътрешно състояние, при НДКА $\delta(q, a)=\{p_1,\ldots p_e\}$ е крайно множество от вътрешни състояния.
- Графично НДКА се представя като ДКА
- *<u>Пример 4:</u> Нека* $\alpha = a_1a_2\ldots a_k \in V^*$.

$$\delta(q_0, a_1)=\{p'_1,\ldots p'_e\}$$

$$\delta(p'_1, a_2),\ \delta(p'_2, a_2), \ldots\ \delta(p'_e, a_2)$$



a1

Недетерминирани крайни автомати

- <u>Работа на НДКА: </u> Нека $\omega = a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ik+1}$ е входна дума. По текущото състояние q на първия символ a_{i1} чрез $\delta(q, a_{i1})=\{p_1\ldots p_i\}$ определяме множеството от възможни следващи състояния. По всяко от тях и по следващия входен символ a_{i2} чрез δ се определят множествата от възможни следващи състояния и т.н. до последната буква. Ако в множеството от състоянията след нея има някое заключително състояние, казваме, че думата е разпозната.

Недетерминирани крайни автомати

- С други думи, казваме, че думата е прочетена, ако се е получило множество от вътрешни състояния, които имат с F непразно сечение.
- <u>Дефиниция:</u> ***T(A) е езика*** на автомата A, т.е. $T(A)=\{\alpha\in V^*: \delta(q_0,\alpha)\cap F\neq\emptyset\}$
- <u>Дефиниция:</u> Два НДКА автомата са ***еквивалентни***, ако T(A1)=T(A2).

Пример 4: Нека $A=<\{q_0,q_1,q_2\},\{0,1\}, \delta, q_0,\{q_2\}>$, като

$\delta(q_0,0)=\{q_1,q_2\}$

$\delta(q_0,1)=\{q_0\}$

$\delta(q_1,0)=\{q_0,q_1\}$

$\delta(q_1,1)=\varnothing$

$\delta(q_2,0)=\{q_0,q_2\}$

$\delta(q_2,1)=\{q_1\}$

- А)Нека пуснем думата $\alpha = 01000$ през НДКА:
- $\delta(q_0,0)=\{q_1,q_2\}$
- $\delta(q_0,01)= \delta(q_1,1) \cup \delta(q_2,1)= \varnothing \cup\{q_1\}= \{q_1\}$
- $\delta(q_0,010)= \delta(q_1,0) = \{q_0 ,q_1\}$
- $\delta(q_0,0100)= \delta(q_0,0) \cup \delta(q_1,0)= \{q_1,q_2,q_0\}$
- $\delta(q_0,01000)= \delta(q_0,0) \cup \delta(q_1,0)\cup \delta(q_2,0) = \{q_1,q_2,q_0\} \cap \{q_2\} \neq \varnothing$, следователно думата е разпозната от НДКА.

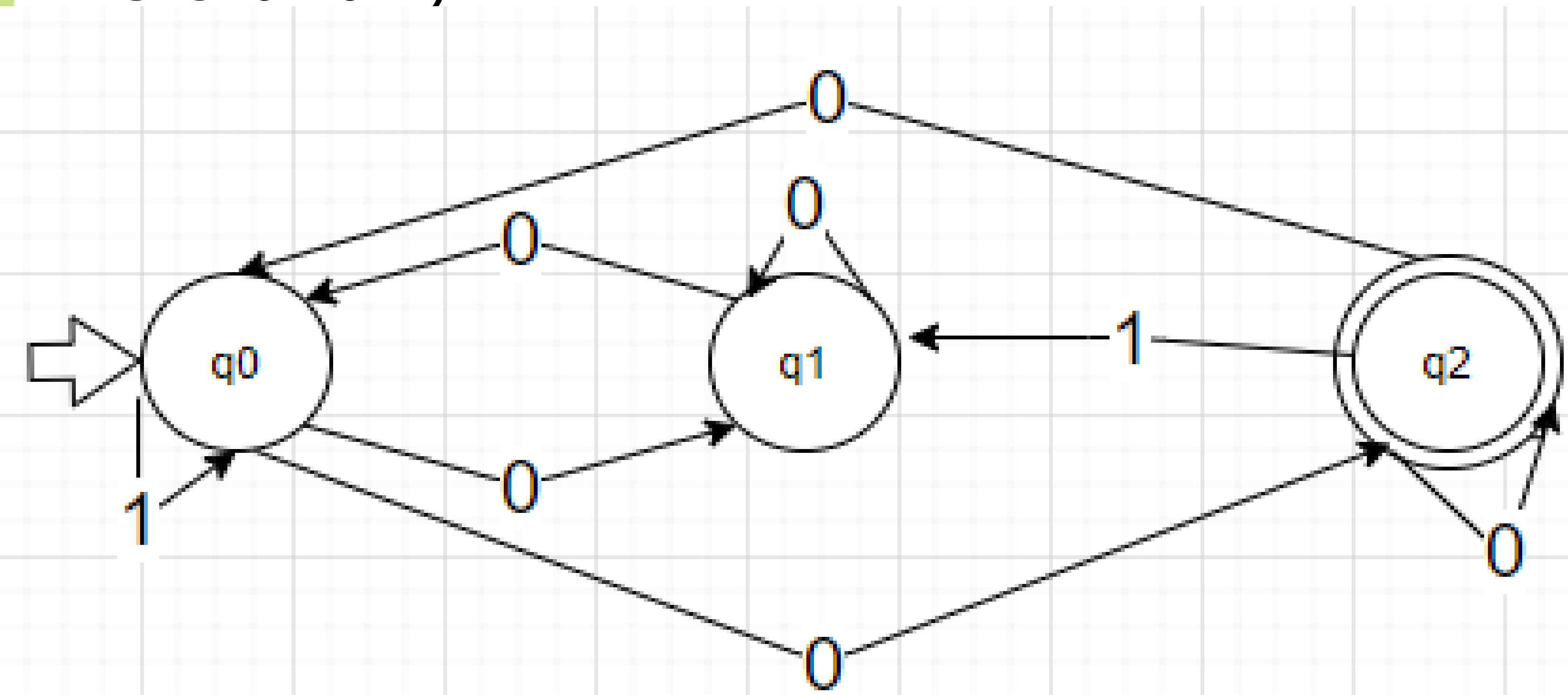
Примери

Б) Нека пуснем думата α = 101 през НДКА:

- $\delta(q_0,1)=\{q_0\}$
- $\delta(q_0,10)= \delta(q_0,0) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta(q_0,101)= \delta(q_1,1) \cup \delta(q_2,1) = \varnothing \cup \{q_1\} = \{q_1\} \cap \{q_2\}= \varnothing$, *следователно думата не е разпозната от НДКА.*

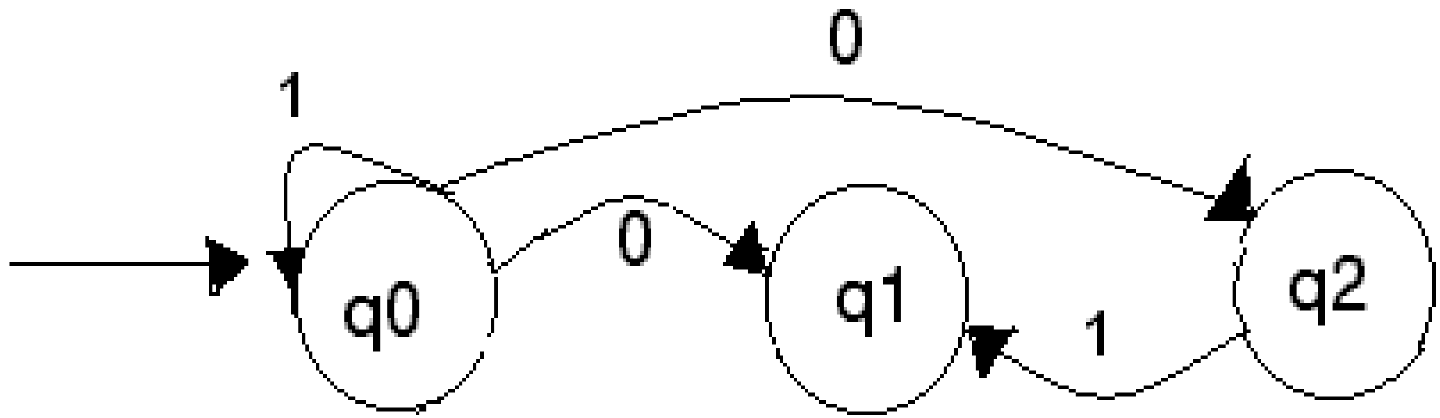
Примери

- Схема на А)



Примери

- Схема на Б)



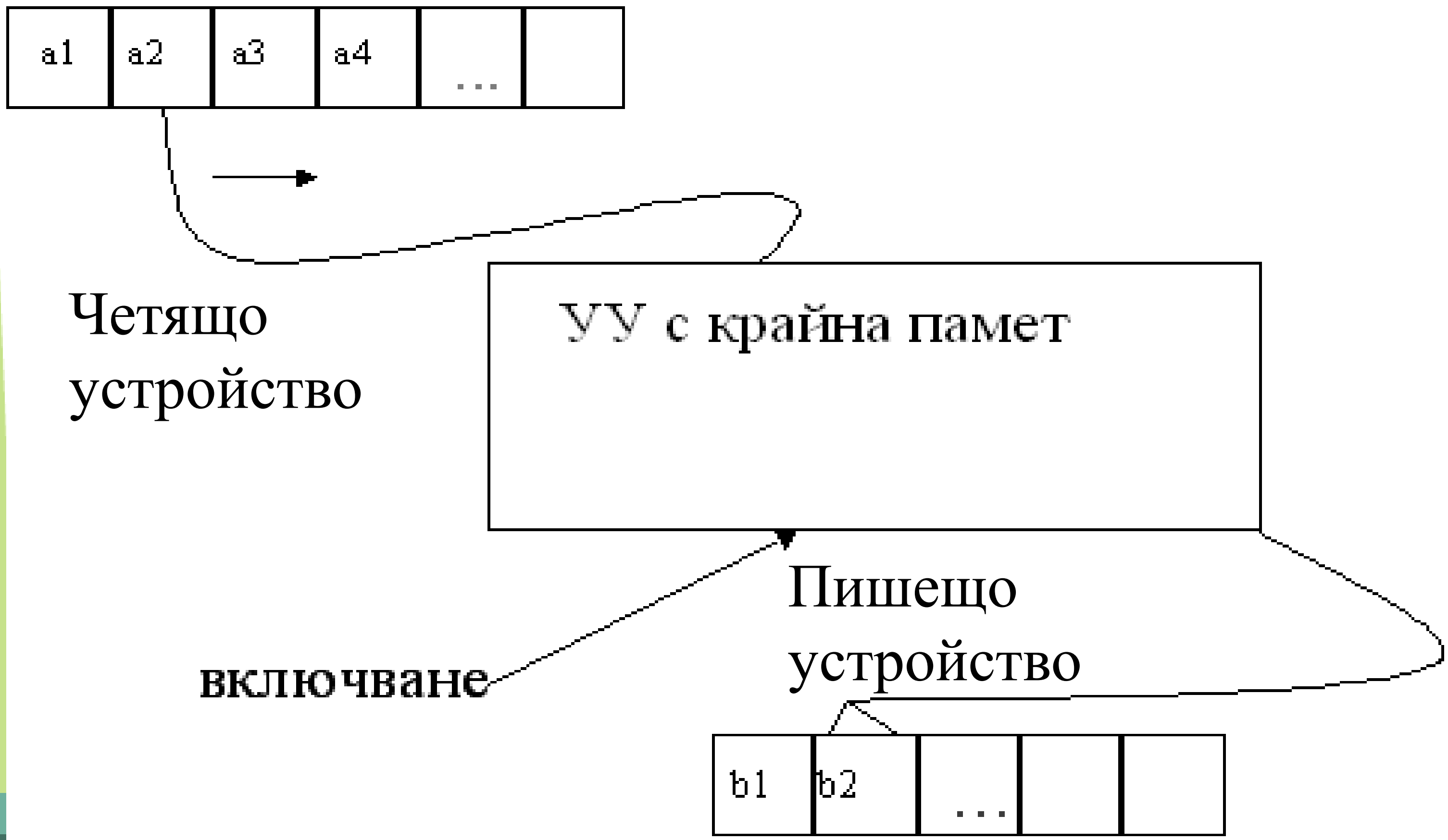
Недетерминирани крайни автомати

- **Теорема:** За всяко НДКА съществува еквивалентен на него ДКА
- Така ДКА и НДКА са взаимозаменяеми.
- ДКА са по-лесни за употреба, макар че понякога от технически съображения се предпочитат НДКА.

Крайните автомати като преобразуватели

- Крайните автомати можем да определим и като преобразуватели на формални езици.
- Ще разгледаме два вида крайни автомати-преобразуватели: автоматът на Мили и автоматът на Мур.

Принципна схема:



Крайните автомати като преобразуватели

- Включваме устройството и автоматът попада във фиксирано вътрешно състояние, прочита най-левия символ от входната лента, преминава в ново състояние и записва изходящия символ върху изходната лента и т.н.
- Той спира да работи когато е неопределен или когато изчерпи символите на думата.

Крайните автомати като преобразуватели

- Резултатът от работата му е думата, изписана на изходната лента. Казваме, че автоматът преобразува входната дума в изходна.
- Ако входните думи са от някакъв формален език, автоматът преобразува този език в езика, съставен от изходните думи.

Автомат на Мили

- Дефиниция: Автомат на Мили с входна азбука V и изходна азбука W наричаме наредената шесторка:M=<K,V,W, δ, λ,q_0 >, където:
- K$\neq \varnothing$ е множество от вътрешни състояния
- V-крайно множество (входна азбука)
- W-крайно множество от изходни символи (изходна азбука)
- δ - функция на преходите.
- λ - изходна функция с дефиниционна област (D(λ):D(λ)) $\subseteq$ KxV и област на стойностите R(λ):R(λ) $\subseteq$W

Автомат на Мили

- Как работи?

- Нека е дадена стартова дума $\alpha = a_1a_2\ldots a_n \in V^*$. Включваме напрежението и УУ застава на първа позиция.

  $\delta(q_0,a_1) = p_1;$

  $\delta(p_1,a_2) = p_2;\ldots$

  $\delta(p_{k-1},a_k) = p_k.$

  $\lambda(q_0,a_1)=b_{1;}$

  $\lambda(p_1,a_2)=b_2\ldots\ \lambda(p_{k-1},a_k)=b_k$

Автомат на Мили

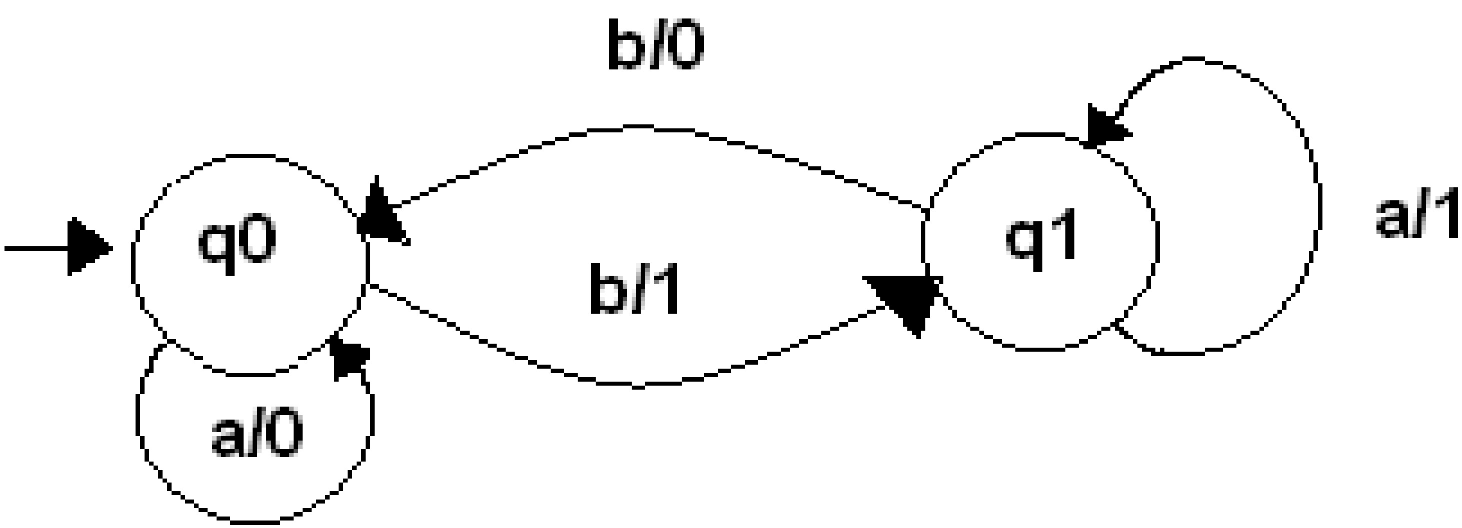
- Думата $\beta = b_1 b_2 \ldots b_k \in W^*$ е резултат от действието на автомата M върху α, т.е. $\beta = M(\alpha)$.
- ***Пример 5**: За автомата*

_$M = \langle \{q0, q1\}, \{a, b\}, \{0,1\}, \delta, \lambda, q_0 \rangle$

- $\delta(q_0, a) = \{q_0\}$ $\lambda(q_0, a) = 0$
- $\delta(q_0, b) = \{q_1\}$ $\lambda(q_0, b) = 1$
- $\delta(q_1, a) = \{q_1\}$ $\lambda(q_1, a) = 1$
- $\delta(q_1, b) = \{q_0\}$ $\lambda(q_1, b) = 0$

Автомат на Мили

- Графично:



Автомат на Мур

- Дефиниция: Наредена шесторка от вида: $N=\langle K,V,W, \delta, \lambda,q_0 \rangle$, където:
- $K\neq \emptyset$ е множество от вътр. състояния
- V-крайно множество (входна азбука)
- W-крайно множество от изходни символи (изходна азбука)
- δ - функция на преходите.
- λ - изходна функция $\lambda: K \to W$, т.е. при всяко включване на напрежението в лявата долна клетка се изписва една и съща буква от W.

Автомат на Мур

- Следователно изходната дума е с един символ повече от входната.
- Как работи?
- Нека $\alpha = a_1a_2\ldots a_к \in V^*$ е входна дума. $\lambda(q0)=b0$; $\delta(q0,a1)=p1$; $\lambda(p1)=b1$; $\delta(p1,a2)=p2$; $\lambda(p2)=b2$; $\delta(pk-1,ak)=pk$; $\lambda(pk)=bk$.
- Изходната дума е $\beta=b_0b_1b_2\ldots b_k$, т.е. $\beta=N(\alpha)$.

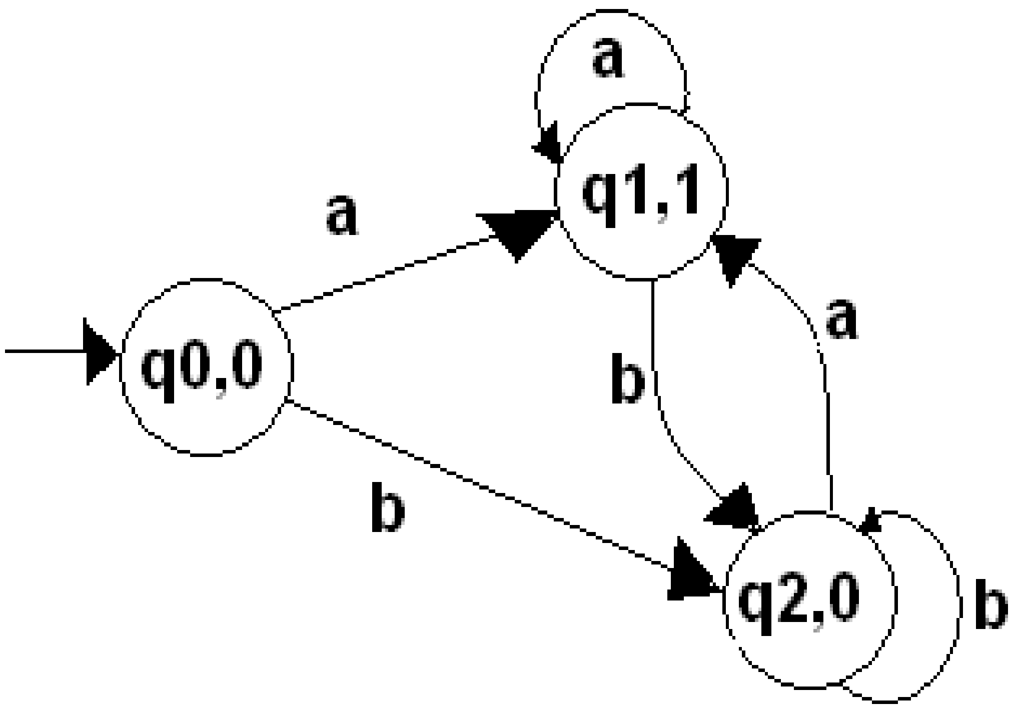
Автомат на Мур

Пример 6: *За автомата*

$N = <\{q_0,q_1,q_2\},\{a,b\},\{0,1\}, \delta, \lambda,q_0 >$

- $\delta(q_0,a)=\{q_1\}$ $\quad$ $\lambda(q_0)=0$
- $\delta(q_0,b)=\{q_2\}$ $\quad$ $\lambda(q_1)=1$
- $\delta(q_1,a)=\{q_1\}$ $\quad$ $\lambda(q_2)=0$
- $\delta(q_1,b)=\{q_2\}$
- $\delta(q_2,a)=\{q_1\}$
- $\delta(q_2,b)=\{q_2\}$

Автомат на Мур



Пускаме през автомата думата

α = aaaba.

N(α)= 011101.

Автомати на Мили и Мур

- **<u>Дефиниция:</u>** Казваме, че автоматът на Мили и автоматът на Мур са еквивалентни, ако $M(\alpha)= N(\alpha)$ за всяко α от V^*.
- **<u>Теорема:</u>** За всеки автомат на Мили съществува еквивалентен автомат на Мур и обратно.
- **<u>Теорема:</u>** Нека M е автомат на Мили, а L е автоматен език над V. Тогава $M(L)$ е също автоматен език.

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. *Дискретна математика*. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. *Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика.* Университетско издателство “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, *Машина Поста*, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, *Discrete Mathematics – Elementary and Beyond*, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, *A Short Course in Discrete Mathematics*, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An *Introduction to Formal Languages and Automata,* Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- http://www.jflap.org/ - софтуерна среда