

## ДВОИЧНИ ФУНКЦИИ

- **Дефиниция:** Функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  дефинирана в множеството  $B^n = \{0,1\}^n$  и приемаща стойности в множеството  $B = \{0,1\}$  се нарича **двоична (булева) функция**.

$x_1$	$x_2$	...	$x_{n-1}$	$x_n$	$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1)$
0	0	...	1	0	$f(0, 0, \dots, 1, 0)$
...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1)$

- **Дефиниция:** Множеството на всички двоични функции ще означаваме с  $P_2$ .

Броят на различните  $n$ -торки  $(x_1, \dots, x_n)$  е  $2^n$ . Тогава е в сила  $|P_2| = 2^{2^n}$ .

**Таблица на всички двоични функции на една променлива**

$x_1$	<b>0</b>	$x_1$	$\overline{x_1}$	<b>1</b>
<b>0</b>	0	0	1	1
<b>1</b>	0	1	0	1
	константа		отрицание	константа

**Таблица на всички двоични функции на две променливи**

$x_1$	$x_2$	<b>0</b>	<b>.</b>		$x_1$		$x_2$	<b>+</b>	$\vee$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	$\overline{x_2}$		$\overline{x_1}$	$\rightarrow$	$ $	<b>1</b>
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		константа 0	конюнкция					сума по модул 2	дизюнкция	стрелка на Пирс	еквиваленция	отрицание		отрицание	импликация	черта на Шефер	константа 1

## Задачи:

**Задача 1.** Пресметнете следните изрази

$$x_1 \cdot 0 =$$

$$x_1 \vee 0 =$$

$$x_1 + 0 =$$

$$x_1 \cdot 1 =$$

$$x_1 \vee 1 =$$

$$x_1 + 1 =$$

$$x_1 \cdot x_1 =$$

$$x_1 \vee x_1 =$$

$$x_1 + x_1 =$$

$$\overline{x_1 \cdot x_1} =$$

$$x_1 \vee \overline{x_1} =$$

$$x_1 + \overline{x_1} =$$

**Задача 2.** Докажете законите на ДеМорган

$$1) \quad \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$2) \quad \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$$

**Някои свойства:**

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$$

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$$

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$$

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$$

$$x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = (x_1 \cdot x_2) \vee (x_1 \cdot x_3)$$

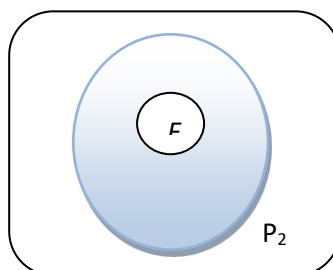
$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3)$$

**Приоритет при изчисляване на изрази с двоични функции**

- Скоби
- Отрицание
- Конюнкция
- Дизюнкция и сума по модул 2
- Останалите двоични функции

➤ **Дефиниция:** На всяка формула по естествен начин се съпоставя една единствена двоична функция и казваме, че формулата реализира тази функция.

➤ **Дефиниция:** Нека  $F$  е множество от двоични функции. Множеството от всички функции, които можем да реализираме чрез формули над  $F$  се нарича **затворена обвивка** и бележим с  $[F]$ .



**Пример:** Определете затворената обвивка на множеството  $F = \{., -\}$ .

## Пълни множества от двоични функции

➤ **Дефиниция:** Множеството от двоични функции  $F$  е **пълно** тогава и само тогава, когато  $[F] = P_2$ , т.е. всяка двоична функция се реализира с формула над  $F$ .

**Теорема на Бул:** Множеството  $F = \{\bullet, \vee, -\}$  е пълно.

Нека  $f(x_1, \dots, x_n)$  е произволна двоична функция, различна от 0. Означаваме

$$x^\alpha = \begin{cases} \bar{x}, & \alpha = 0 \\ x, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Не е трудно да се види, че  $x^\alpha = 1$  тогава и само тогава, когато  $x = \alpha$ . Следователно

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n},$$

където дизюнкция се взема по всички  $n$ -торки  $\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$  за които  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1$ .

## Задачи:

**Задача 1** Постройте формула над множеството  $F = \{\bullet, \vee, -\}$ , която да реализира функцията зададена чрез следната таблица.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

**Задача 2** Постройте формула над множеството  $F = \{\bullet, \vee, -\}$ , която да реализира функциите зададени чрез следната таблица.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1

**Задача 3.** Постройте формула над множеството  $F = \{\cdot, \vee, -\}$ , която да реализира функцията  $f = (x_1 + x_2) \cdot \overline{x_3}$ .

**Теорема:** Нека са дадени две множества от двоични функции  $F = \{f_1, f_2, \dots\}$  и  $G = \{g_1, g_2, \dots\}$  при това  $F$  **пълно множество**. Множеството  $G$  е пълно тогава и само тогава, когато  $\forall f_i \in F \Rightarrow f_i \in [G]$ , т.е. когато може да се представи като формула над  $G$ .

**Задача 4.** Докажете, че следните множества са пълни:

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $G = \{\cdot, -\}$    | 2) $G = \{\vee, -\}$     |
| 3) $G = \{\downarrow\}$  | 4) $G = \{ \}$           |
| 5) $G = \{\cdot, +, 1\}$ | 6) $G = \{\cdot, \vee\}$ |

### Полином на Жегалкин

➤ **Дефиниция:** Израз от вида  $x_1, \dots, x_n$  без повтарящи се множители се нарича **елементарна конюнкция**.

**Забележка:** Понеже  $x_1 \cdot x_1 = x_1$ , то всяка конюнкция можем да я направим елементарна

$$x_1 x_2 x_3 x_2 = x_1 x_2 x_3$$

➤ **Дефиниция:** Сума от вида  $E_1 + E_2 + \dots + E_k$  без повтарящи се събираеми се нарича полином на Жегалкин и

$$E := \begin{cases} \text{елементарна конюнкция} \\ 1 \end{cases}$$

**Забележка:** Понеже  $x_1 + x_1 = 0$ , то всяка сума от елементарни конюнкции и 1 става полином на Жегалкин чрез зачертаване на повтарящите се събираеми

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_2 = E_1 + E_3$$

**Задача 1.** Намерете полинома на Жегалкин за следната функция

$x_1$	$x_2$	$f$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Задача 2.** Намерете полинома на Жегалкин за следните функции

а)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_1$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

б)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_2$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

**Теорема на Жегалкин:** Всяка двоична функция се представя точно с един полином на Жегалкин.

### Затворени множества

- **Дефиниция:** Едно множество  $F$  се нарича **затворено**, ако  $[F] = F$ .
- **Дефиниция:** Казваме, че функцията  $f(x_1, \dots, x_n)$  **запазва нулата**, ако  $f(0, \dots, 0) = 0$ .  
Множеството от всички функции, запазващи нулата означаваме с  $T_0$ .
- **Дефиниция:** Казваме, че функцията  $f(x_1, \dots, x_n)$  **запазва единицата**, ако  $f(1, \dots, 1) = 1$ .  
Множеството от всички функции, запазващи единицата означаваме с  $T_1$ .
- **Дефиниция:** Казваме, че функцията  $f^*(x_1, \dots, x_n)$  е **двойнствена** на функцията  $f(x_1, \dots, x_n)$ , ако

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$$

**Задача 1.** Намерете деойнствените на следните функции

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

**Теорема:**  $(f^*)^* = f$

Някои основни двойки функция и нейната двойственна функция.

<b><math>f</math></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b><math>x</math></b>	<b><math>\bar{x}</math></b>	<b><math>x \cdot y</math></b>	<b><math>x \vee y</math></b>	<b><math>x + y</math></b>	<b><math>x \leftrightarrow y</math></b>	<b><math>x   y</math></b>	<b><math>x \downarrow y</math></b>
<b><math>f^*</math></b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b><math>x</math></b>	<b><math>\bar{x}</math></b>	<b><math>x \vee y</math></b>	<b><math>x \cdot y</math></b>	<b><math>x \leftrightarrow y</math></b>	<b><math>x + y</math></b>	<b><math>x \downarrow y</math></b>	<b><math>x   y</math></b>

➤ **Дефиниция:** Казваме, че функцията  $f(x_1, \dots, x_n)$  е **самодвойствена**, ако  $f = f^*$ .

Множеството от всички самодвойствени функции означаваме с **S**.

**Задача 2.** Проверете дали функцията е самодвойствена

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Нека  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$  и  $\beta = (b_1, \dots, b_n)$  са две произволни  $n$ -торки от 0 и 1.

➤ **Дефиниция:** Казваме, че  $\alpha$  **предхожда**  $\beta$  и означаваме  $\alpha \prec \beta$ , ако са изпълнени следните неравенства

$$a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n.$$

➤ **Дефиниция:** Казваме, че функцията  $f(x_1, \dots, x_n)$  е **монотонна**, ако от  $\alpha \prec \beta$  следва, че функцията  $f(\alpha) \leq f(\beta)$ . Множеството от всички монотонни функции означаваме с **M**.

**Задача 1.** Проверете дали е монотонна следната функция

$x_1$	$x_2$	$f$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

**Задача 2.** Проверете кои от следните функции са монотонни и кои не:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_1 \cdot x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 + x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \leftrightarrow x_2$$

- **Дефиниция:** Казваме, че функцията  $f(x_1, \dots, x_n)$  е **линейна**, ако тя има линейен полином на Жегалкин, т.е.  $f$  може да се представи като

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0,$$

където от  $a_i \in \{0, 1\}$ . Множеството от всички линейни функции означаваме с **L**.

**Теорема:** Множествата **T<sub>0</sub>**, **T<sub>1</sub>**, **S**, **M** и **L** са затворени множества.

**Теорема на Пост-Яблонски**

**Теорема:** Множеството **F** е пълно тогава и само тогава, когато

$$F \not\subseteq T_0, T_1, S, M, L.$$

**Задача 1.** Проверете кои от следните множества са пълни и кои не:

а)  $F_1 = \{f_1, f_2, f_3\}$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0

б)  $F_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

в)  $F_3 = \{0, 1, x_1 x_2 + 1\}$

г)  $F_4 = \{0, 1, x_1 x_2\}$

д)  $F_5 = \{\overline{x_1}, x_1 + x_2 + x_3\}$

е)  $F_6 = \{0, \overline{x_1}\}$

ж)  $F_7 = \{0, \overline{x_1 x_2}\}$  - пълно

➤ **Дефиниция:** Казваме, че функцията  $f(x_1, \dots, x_n)$  е **шеферова**, ако множеството  $\{f\}$  е пълно и  $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$ .

**Задача 2** За кои стойности на  $n$  функцията е шеферова

$$f = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_n x_1 + 1$$

### Допълнителни задачи:

**Задача 1.** Постройте формула над множеството  $F = \{\cdot, \vee, -\}$ , която да реализира функциите:

1)  $f = (\overline{x_1} x_2 + x_3) \cdot (x_1 x_3 \rightarrow x_2)$ ;

2)  $f = (x_1 \vee x_2) \rightarrow x_3$

**Задача 2.** Намерете полинома на Жегалкин за следните функции

а)  $f = x_1 \rightarrow x_2$

б)  $f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$

в)  $f = x_1 (x_1 \vee \overline{x_3})$

г)  $f = (x_1 \downarrow x_2) | (x_2 \downarrow x_3)$

д)

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$f$	$g$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

**Задача 3.** Пълна ли е системата от двоични функции:

1)  $A = \{xy, x \vee y, x + y, xy \vee yz \vee zx\}$ ;

2)  $A = \{xy, x \vee y, x + y + z + 1\}$ ;

3)  $A = \{1, \overline{x}, x(y \leftrightarrow z) + \overline{x}(y + z), x \leftrightarrow y\}$ ;

4)  $A = \{0, \overline{x}, x(y + z) + yz\}$ ;



$$5) A = \{\bar{x}, x(x \leftrightarrow z) \leftrightarrow (y \vee z), x + y + z\};$$

$$6) A = \{\bar{x}, x(y \leftrightarrow z) \leftrightarrow yz, x + y + z\}$$

**Задача 3.** За кои стойности на  $n$  функцията е шеферова

$$1) f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus x_1 x_2 \oplus \dots \oplus x_i x_{i+1} \oplus \dots \oplus x_{n-1} x_n \oplus x_n x_1;$$

$$2) f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus x_1 x_2 \oplus \dots \oplus x_i x_{i+1} \oplus \dots \oplus x_{n-1} x_n;$$

$$3) f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq n} \bar{x}_i \bar{x}_j; \quad 4^*) f(\tilde{x}^n) = 1 \oplus \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j;$$

$$5) f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{1 \leq i_1 < \dots < i_{\lfloor n/2 \rfloor} \leq n} \bar{x}_{i_1} \bar{x}_{i_2} \dots \bar{x}_{i_{\lfloor n/2 \rfloor}};$$