$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Подобни задачи с $k = m = 2$ : 804, 805, 807,

808

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$$

$k = 2$

$m = 1$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = 1}$$

$\lambda_3 = 2$

1) $\lambda_3 = 2$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_3 E) h_3 = \theta$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{l} -\alpha-\beta+\gamma=0 \\ \alpha-\beta-\gamma=0 \\ -\beta=0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \alpha=\gamma \\ \Rightarrow \beta=0 \end{array}$$

$$h_3=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\\ \alpha\end{pmatrix} \qquad \text{изб. } \alpha=1 \Rightarrow h_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$X_3=h_3e^{\lambda_3 t}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}e^{2t}$$

2) $\lambda_1=\lambda_2=1$

$(A-E)h_1=\Theta$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{lll} -\beta+\gamma=0 & \Rightarrow & \gamma=\beta \\ \alpha-\gamma=0 & \Rightarrow & \alpha=\gamma \\ -\beta+\gamma=0 & \Rightarrow & \beta=\gamma \end{array} \right.$$

$$h_1=\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma\\ \gamma\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} m=1 \\ n=2 \end{array}, \quad m<k$$

---

Търсим $h_2$: $h_1$ и $h_2$ образуват серия

$$\left| (A-1.E)h_1=\Theta \right.$$

$$\left.(A-1.E)\cdot\right| \quad (A - 1.E)\, h_2 = h_1 \qquad (*)$$

$$\underbrace{(A-E)^2}\, . \, h_2 = (A-E)^2 \, . \, h_1 = \Theta$$

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A-E)^2 h_2 = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\alpha - \beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$$

изб. $\alpha = 2$, $\beta = 0$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = h_2$$

(да не от вида на $h_1$ и $h_3$)

От $(*)$ $\Rightarrow$

$$h_1 = (A-E)\,h_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_1(t) = h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2(t) = t h_1 + h_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_i = \omega_i(t)\, e^{1.t}$$

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \left[ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{t} +$$

$$+ c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

---

HOMEWORK

II частн. - с метод на неопредел. коефициенти

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} e^{t}$$

зам. в системата:

$$\begin{cases} \left[(at+b)e^t\right]' = (at+b)e^t - (ct+d)e^t + (et+f)e^t \\ \left[(ct+d)e^t\right]' = (at+b)e^t + (ct+d)e^t - (et+f)e^t \\ \left[(et+f)e^t\right]' = 2(et+f)e^t - (ct+d)e^t \end{cases}$$

. . . производни и приравняване на съответните коефициенти

$$X = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

811

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 2x - y - 2z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

$\lambda_{1,2,3} = 1$

$(k = 3)$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda_{1,2,3} = 1$

$$A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - E)\,h = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l} \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{array}\right. \iff \begin{array}{c} \alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = \beta + \gamma \end{array}$$

$$h = \begin{pmatrix} \beta + \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$k = 3$
$m = 2$

Можем да определим $h_1$ и $h_2$ - ще го направим накрая.
Търсим $h_3$! $h_2$ и $h_3$ да образуват серия, тоест

$$(A - E)\,h_2 = \Theta$$

$$(A - E)\cdot \Big| \quad (A - E)\,h_3 = h_2 \qquad (*)$$

$$(A-E)^2 h_3 = (A-E) h_2 = \Theta$$

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $h_3$ може да изберем произв., но да не е от вида на $h_1$ и $h_2$

изб. $h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

От $(*)$ $\Rightarrow$ $h_2 = (A-E) h_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$w_1 = h_2 \quad \rightarrow X_2 = w_1 e^t$

$w_2 = t h_2 + h_3 \quad \rightarrow X_3 = w_2 e^t$

изб. $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($h_1$ е собствен вектор, но линейно незав. с $h_2$)

$$X_1 = h_1 e^t = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\Rightarrow X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \left[ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^t$$

812

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 3x + y - z \\ \dot{z} = x + z \end{cases} \qquad \lambda_{1,2,3} = 2 \qquad (k=3)$$

$$A - \lambda E = A - 2E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda E) h = \theta$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2\alpha - \beta = 0 \qquad \Rightarrow \beta = 2\alpha \\ 3\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \qquad \Rightarrow \gamma = \alpha \end{array}\right.$$

$$h = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$m = 1$

$k = 3$

можем да определим един линейно незав. в-р $h_1$

Търсим $h_2$ и $h_3$ : $h_1$, $h_2$ и $h_3$ образуват серия

$$(A - 2E)h_1 = \Theta$$

$$(A-2E)\cdot \,|\; (A - 2E)h_2 = h_1 \rightarrow (A-2E)^2 h_2 = \Theta$$

$$(A-2E)^2\cdot \,|\; (A - 2E)h_3 = h_2 \rightarrow (A-2E)^3 h_3 = \Theta$$

$$(A-2E)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A-2E)^2 h_2 = \Theta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha - \beta + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$(A-2E)^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A-2E)^3 h_3 = \Theta \quad \Rightarrow h_3$ произволно, но да не е от вида на $h_1$ и $h_2$

напр. $h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$h_2 = (A - 2E)\,h_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = (A - 2E)\,h_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = h_1$$

$$w_2 = t h_1 + h_2$$

$$w_3 = \frac{t^2}{2} h_1 + t h_2 + h_3$$

$$X_i = w_i(t)\, e^{2t}$$

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t} +$$

$$+ c_3 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t}$$

!!

851 – 866 от сб.

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

HOMEWORK

II начин. – с метод на неопределените коефициенти

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1t^2 + b_1t + c_1 \\ a_2t^2 + b_2t + c_2 \\ a_3t^2 + b_3t + c_3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$k=3$

Три от променливите трябва да се използват за изразяване на останалите шест