

Непрекъснати случайни величини

А сега:

Непрекъснати разпределения

ПРИМЕРИ:

- Продължителна безотказна работа на оборудване (напр. компютър)
- Време на чакане на гише в банка
- Температурата на Мусала след един ден в 7 часа сутринта

Дискретни ⇔ непрекъснати

дискретни	непрекъснати
Функция на разпределение	Функция на разпределение
Ред на разпределение	плътност

Що е плътност на непрекъснатата сл.в. X

Плътност = функция, която е

- дефинирана за всяко реално число
- неотрицателна, т.е. приема само ≥ 0 стойности
- притежава следното свойство:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds$$

където $F(x)$ е функцията на разпределение на сл.в. X

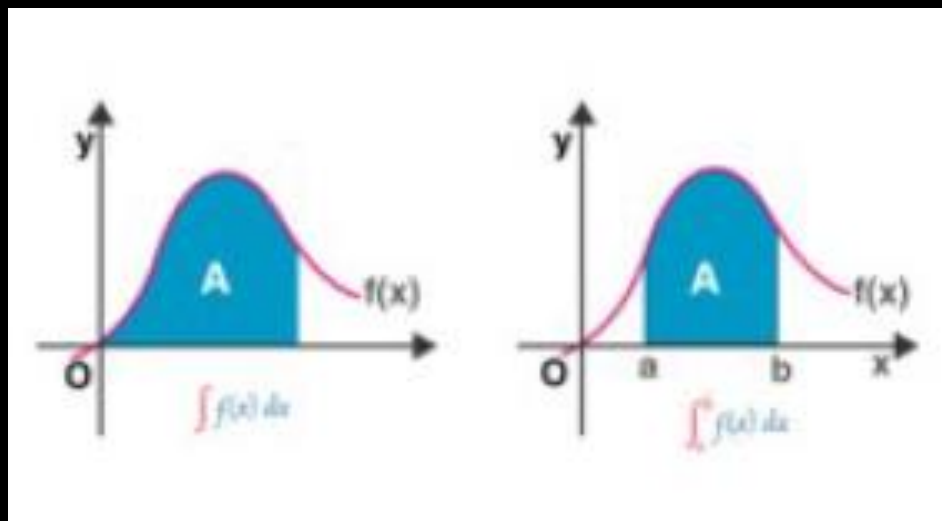
А сега преди да продължим , нека да припомним за определен интеграл =>

ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА ПЛЪТНОСТТА

Свойство 1. Това е функция, която не приема отрицателни стойности, т.е. Графиката ѝ е винаги над абсцисната ос.

Свойство 2. Стойностите на сл.в. Са в този интервал, където плътността е ПОЛОЖИТЕЛНА, т.е. Графиката ѝ е над абсцисната ос.

Свойство 3. Вероятността сл.в. да приема стойности в даден интервал (a,b) = ЛИЦЕТО под графиката на плътността върху този интервал

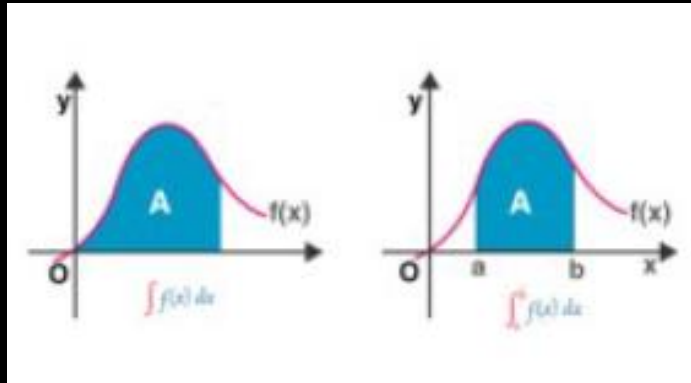


Свойство 4. Ако плътността е $=0$ в интервал (a,b) , то сл. в. няма стойности в (a,b)

ОСНОВНИ СВОЙСТВА НА ПЛЪТНОСТТА

продължение

Свойство 5. ЛИЦЕТО на ЦЯЛАТА фигура под графиката на плътността и абсцисната ос е 1



Щом цялото лице под графиката е 1, то има точка върху абсцисната ос, която ще разделя лицето на две равни части, т.е. Точка наляво от която лицето е $0.5 =$ т.е. 50% от стойностите на сл. Величина са наляво от тази точка и 50% са надясно.

Свойство 6. Нека графиката на плътността има връх в т. С (т.е. това е точката, за която плътността приема най-голяма стойност). Разгледаме интервал (а,в) и го местим върху абсцисната ос, тогава лицето над този интервал ще е най голямо, когато средата му е в т. С, т.е. Сл.в. Ще има най-много стойности в интервал, на който средата е т.С=върха на графиката

Някои изводи

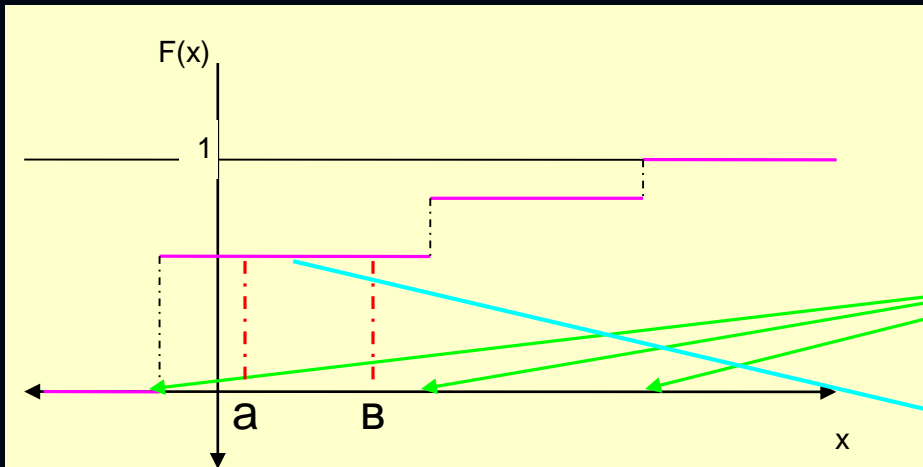
Непрекъснатата случайна величина: стойностите ѝ са всички числа от даден интервал (или интервали), крайни или безкрайни.

Функцията на разпределение на непрекъснатата случайна величина, е непрекъснатата функция.

дискретни \Leftrightarrow непрекъснати разпределения

	дискретни	непрекъснати
стойности	Краен или изброимо много	Неизброимо много
Функция на разпределение	Стълбичка нагоре между 0 и 1	Непрекъснатата между 0 и 1
	Ред на разпределение	плътност
Вероятност да приема своя стойност	$\neq 0$	$=0$

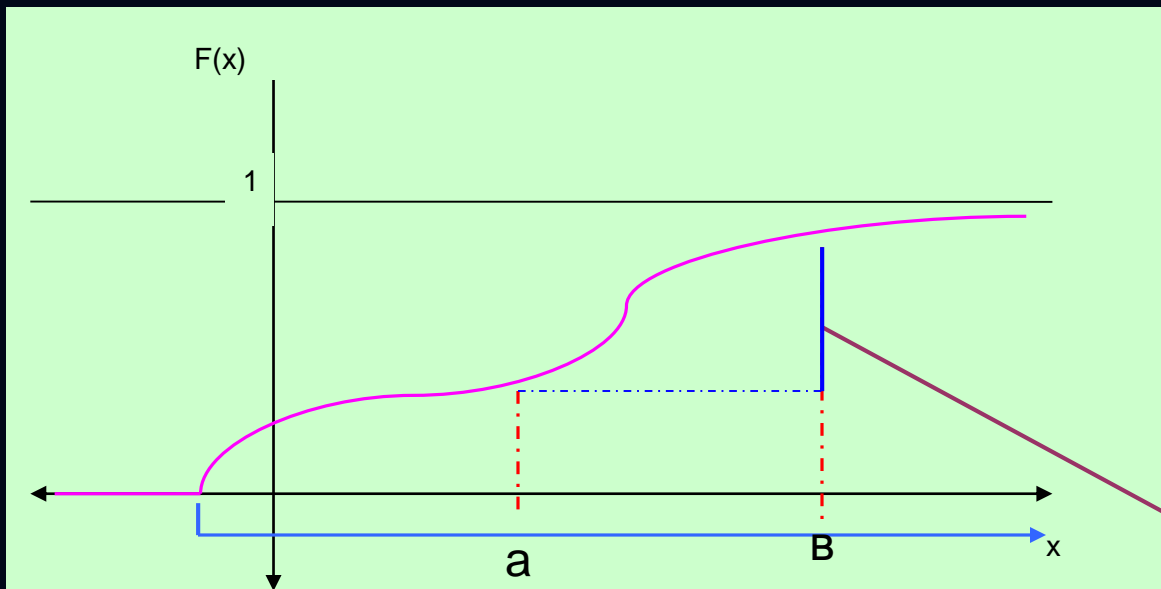
Графика на ф.р.



Дискретна сл.в.

Стойности на сл.в.

► $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = 0$



непрекъсната сл.в.

Стойности на сл.в.

▲ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Числови характеристики

Мода=най-вероятна стойност- точка на локален максимум на плътността

Медиана=точка, за която 50% от стойностите на случайната величина са по-големи и 50% са по-малки от нея – точка, която разполовява лицето под графиката на плътността

Средна стойност (математическо очакване)- ще го разглеждаме само при специални видове непрекъснати сл.в.

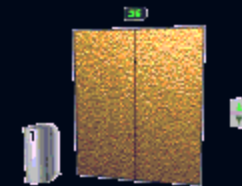
Дисперсия и стандартно отклонение- ще го разглеждаме само при специални видове непрекъснати сл.в.

Връзка между функция на разпределение $F(x)$ и плътност $f(x)$ на непрекъснатата сл. величина X

Нека A е реално число:

1. $F(A)$ = стойност на функцията на разпределение
= $P(X \leq A)$
= вероятността сл.в. X да приема стойности $\leq A$
= лицето между абсцисната ос и кривата на плътността НАЛЯВО от точката A .
2. $P(X > A)$
= вероятността сл.в. X да приема стойности $> A$
= лицето между абсцисната ос и кривата на плътността НАДЯСНО от точката A
3. $P(A < X < B)$
= вероятността X да приема стойности между A и B
= лицето между абсцисната ос и кривата на плътността МЕЖДУ точките A и B

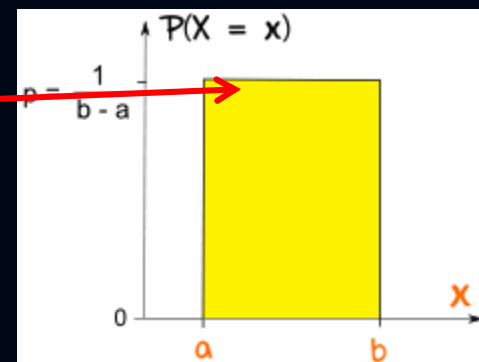
Равномерно разпределение



Определение

Случайна величина X е **равномерно разпределена** върху интервала $[a, b]$, ако плътността ѝ е константа върху този интервал и нула извън него.

Следователно, графиката на плътността е хоризонтална отсечка над интервала $[a, b]$, т.е. Получава се правоъгълник на който основата е интервала, т.е.



Дължината му е $(b-a)$, а лицето му е 1.

Следователно, височината му е $= 1/(b-a)$,

Интерпретация: Тъй като вероятността X да приема стойност в интервал=лицето под кривата на плътността над този интервал=> Равномерното разпределение има равна вероятност за всички подинтервали с една и съща дължина между a и b :

Основни характеристики

Средна стойност

$$EX = \frac{a+b}{2} \quad \text{средата на интервала}$$

$$\text{Дисперсия} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

мода  НЯМА

медиана  Среда на интервала

Експоненциално разпределение

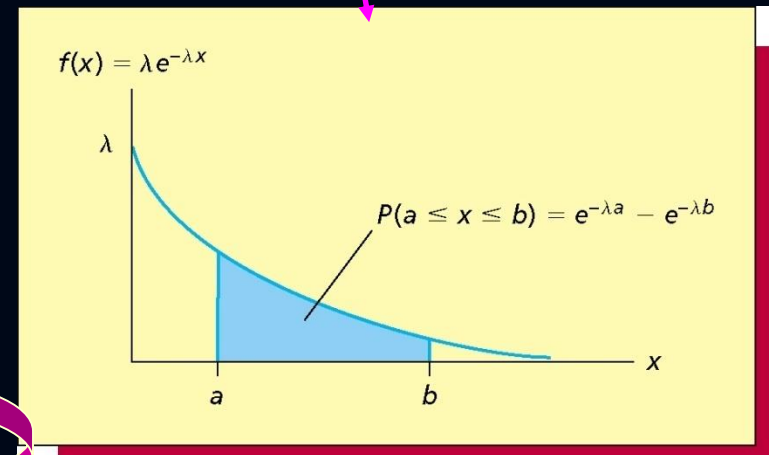
Случайна величина X , чиято плътност е $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ и е $=0$ при $x < 0$, се нарича **експоненциално разпределена**.

Свойства

Стойности на случайната величина $= (0, \infty)$

Графиката на плътността е крива, която стръмно се спуска към абсцисната ос, като никога не я пресича.

Лицето намалява, когато интервала (a, b) се премества надясно от 0, т.е. Вероятността X да приема стойности в интервала намалява, когато този интервал се мести надясно. Ако по абсцисната ос се нанася времето, то с течение на времето вероятността намалява



Приложение

Експоненциалното разпределение е адекватно да опише

Време на безотказна работа на апаратура

Време до настъпването на определено събитие

Средна стойност

$$EX = 1/\lambda$$

Дисперсия

$$\text{Дисперсия } X = 1/\lambda^2$$

Стандартно отклонение

$$\text{Стандартно отклонение } X = 1/\lambda$$

Функция на разпределение

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda * x} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$