Краен изпит на Светослав Добромиров Славов, Фак. №2001261051

Задача 1.

In[∘]:= f[x_] := $\dfrac{50\ (5+2)\ \mathrm{Sin}[x] + x^3 + 33}{(1+2) + x^2}$

In[∘]:= f[x]

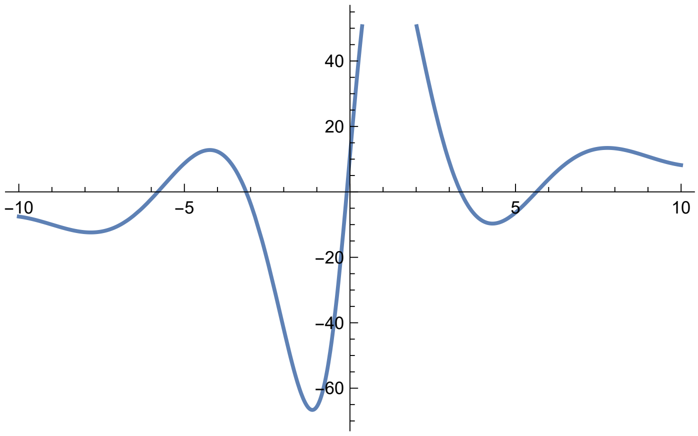
Out[∘]=

$$\frac{33 + x^3 + 350\,\mathrm{Sin}[x]}{3 + x^2}$$

a) Да се намери броят на корените на уравнението

In[∘]:= Plot[f[x], {x, -10, 10}]

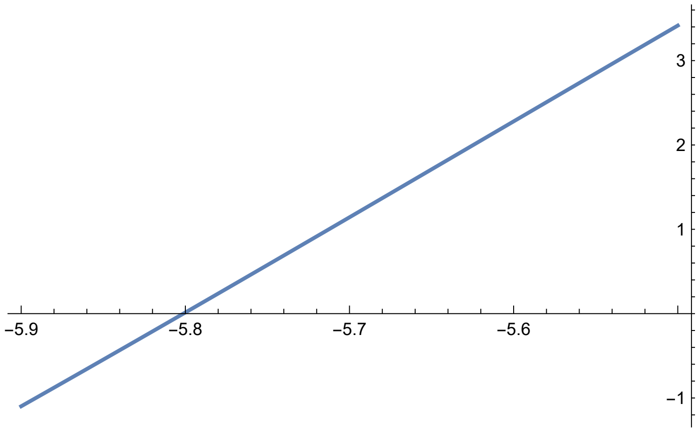
Out[∘]=



Общ брой на корените: 5

б) Да се локализира най-малкият реален корен в интервал [p, q]

In[ ]:=
```
Plot[f[x], {x, -5.9, -5.5}]
```
Out[ ]=



In[ ]:=
```
f[-5.9]
```
Out[ ]=
```
-1.09818
```

In[ ]:=
```
f[-5.5]
```
Out[ ]=
```
3.41546
```

Извод:

(1) Функцията е непрекъсната, защото е сума от непрекъснати функции (полином и синус).

(2) f(-5.9) = -1.09818 > 0 и f(-5.5) = 3.41546 < 0

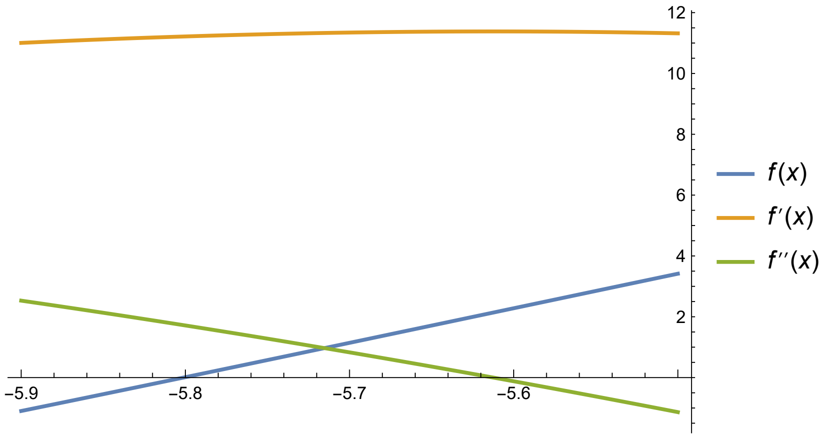
=> Функцията има различни знаци в двата края на разглеждания интервал [-5.9; -5.5].

От (1) и (2) следва, че функцията има поне един корен в разглеждания интервал [-5.9; -5.5].

в) Да се проверят условията за метода на хордите

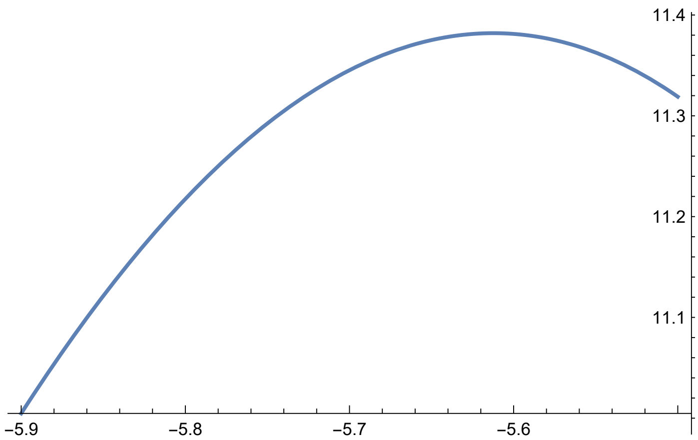
Проверка на сходимост:

In[•]:=
```
Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -5.9, -5.5}, PlotLegends → "Expressions"]
```
Out[•]=



Графика на първата производна

In[•]:=
```
Plot[f'[x], {x, -5.9, -5.5}]
```
Out[•]=

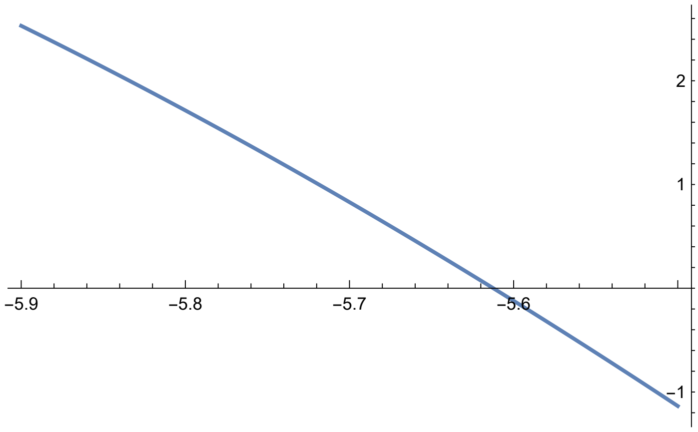


Извод: (1) Стойностите на първата производна в разглеждания интервал [-5.9; -5.5] са между 11 и 11.4. Следователно първата f'(x) > 0 в целия разглеждан интервал [-5.9; -5.5].

Графика на втората производна

In[∘]:= Plot[f''[x], {x, -5.9, -5.5}]

Out[∘]=



Извод : (2) Стойностите на втората производна в разглеждания интервал [-5.9; -5.5] са между 2 и - 1. Следователно втората f'' (x) > 0 в целия разглеждан интервал [-5.9; -5.5].

Извод: От (1) и (2) следва, че първата и втората производна имат постоянни знаци в разглеждания интервал [-5.9; -5.5]. Следователно условията за сходимост на метода на хордите са изпълнени.

г) Да се определи началното приближение и постоянната точка за метода на хордите

Избор на начално приближение и постоянна точка
Нужно е да е изпълнено условието f(x0).f’’(x) < 0
В нашия случай f’’(x) < 0. Следователно е нужно f(x0) > 0

In[∘]:= f[-5.9]

Out[∘]=

-1.09818

In[∘]:= f[-5.5]

Out[∘]=

3.41546

In[∘]:= p = -5.5

Out[∘]=

-5.5

In[∘]:= x0 = -5.9

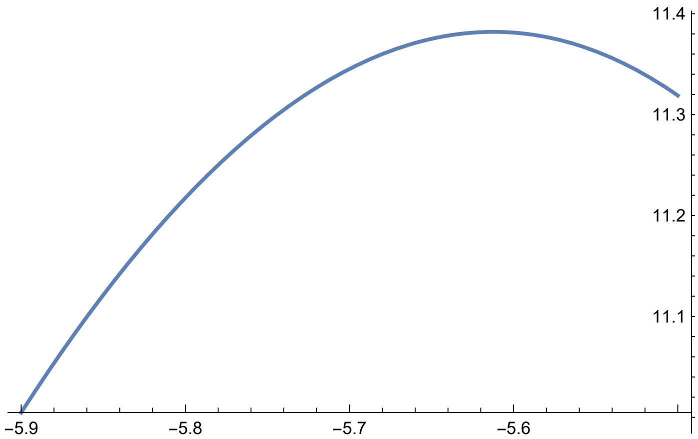
Out[∘]=

-5.9

д) Колко итерации са необходими за достигане на точност 10^{-3}?

Изчисляване на постоянните величини

In[ ]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, -5.9, -5.5}]
```
Out[ ]=



От геометрично съображение минимумът на абсолютната стойност на първата производна се достига в левия край на интервала, а максимумът - в десния.

In[ ]:=
```
M1 = Abs[f'[-5.9]]
```
Out[ ]=
```
11.0047
```

In[ ]:=
```
m1 = Abs[f'[-5.5]]
```
Out[ ]=
```
11.3189
```

In[ ]:=

$$R = \frac{M1 - m1}{m1}$$

Out[ ]=
```
-0.0277588
```

Итериране

In[∘]:=
```
M1 = Abs[f'[-2.5]];
m1 = Abs[f'[-3.5]];
R = (M1 - m1)/m1;
f[x_] := -2 x^3 - 47 Cos[x] - 70
p = -2.5; x0 = -3.5;
epszad = 0.00001;
eps = 1;
Print["n = ", 0, " xn = ", x0, " f(xn) = ", N[f[x0]]];
For[n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/(f[x0] - f[p]) * (x0 - p);
 Print["n = ", n, " xn = ", x1,
  " f(xn) = ", f[x1], " εn = ", eps = R * Abs[x1 - x0]];
 x0 = x1
]
```

$n = 0 \; x_n = -3.5 \; f(x_n) = 59.7635$

$n = 1 \; x_n = -2.51801 \; f(x_n) = 0.0846361 \; \varepsilon_n = 1.4918$

$n = 2 \; x_n = -2.51672 \; f(x_n) = 0.0000845987 \; \varepsilon_n = 0.00196125$

$n = 3 \; x_n = -2.51672 \; f(x_n) = 8.44756\times10^{-8} \; \varepsilon_n = 1.96023\times10^{-6}$

Извод: 2 итерации са ни необходими

е) Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва методът на разполовяването в същия интервал [p, q] за същата точност.

In[∘]:= $\text{Log2}\left[\frac{-5.9 + 5.5}{0.001}\right] - 1$

Out[∘]= 7.64386 + 4.53236 ⅈ

ж) Да се направи сравнение кой метод е по-ефективен за избрания интервал

Извод: По метода на разполовяването биха били необходими имагинерно много итерации за достигане на исканата точност. А по метода на хордите бяха необходими 2 итерации. Следователно методът на хордите е по-ефективен за избрания интервал [-5.9, -5.5].