# Непрекъснати случайни величини

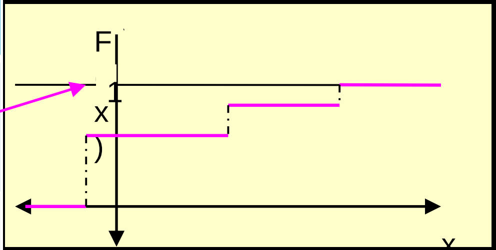
# Някои изводи

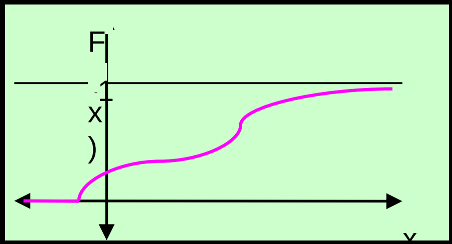
Непрекъсната случайна величина: стойностите й са всички числа от даден интервал (или интервали), крайни или безкрайни.

Функцията на разпределение на непрекъсната случайна величина, е непрекъсната функция.

## дискретни ⇔ непрекъснати разпределения

| | дискретни | непрекъснати |
|---|---|---|
| стойности | Краен или изброимо много | Неизброимо много |
| Функция на разпределение | Стълбичка нагоре между 0 и 1 | Непрекъсната между 0 и 1 |
| | Ред на разпределение | плътност |
| Вероятност да приема своя стойност | $\neq 0$ | =0 |



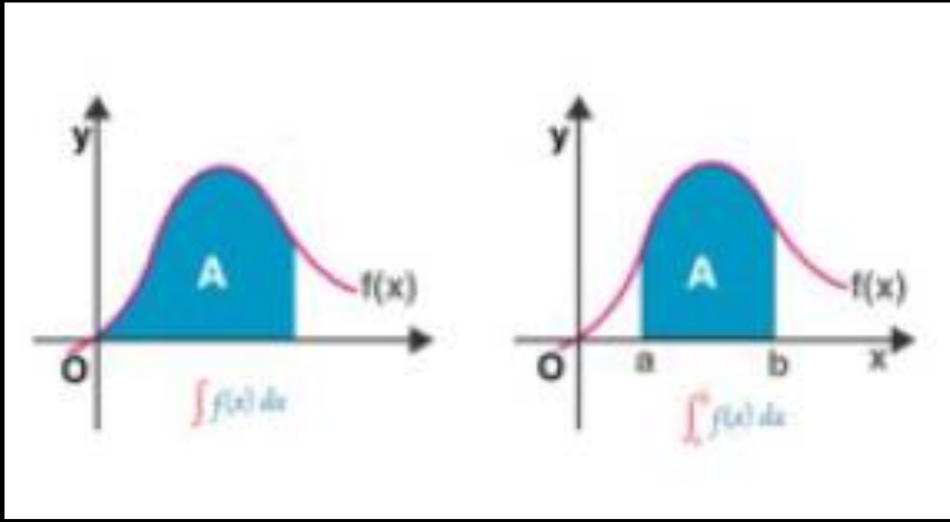



# Основни свойства на плътността

**Свойство 1. Това е функция, която не приема отрицателни стойности, т.е. Графиката й е винаги над абсцисната ос.**

**Свойство 2. Стойностите на сл.в. Са в този интервал, където плътността е ПОЛОЖИТЕЛНА, т.е. Графиката й е над абсцисната ос.**

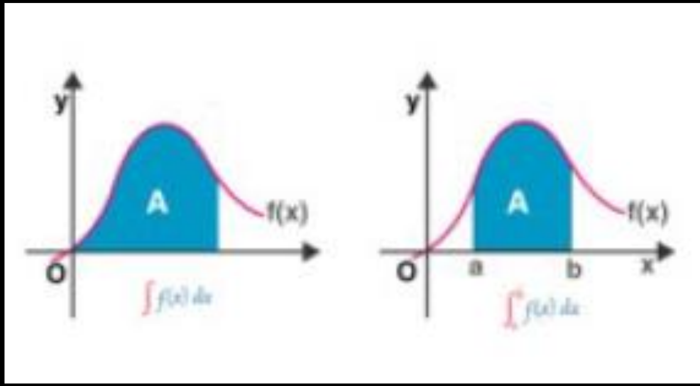
**Свойство 3. Вероятността сл.в. да приема стойности в даден интервал (a,b) = ЛИЦЕТО под графиката на плътността върху този интервал**




Свойство 4. Ако плътността е =0 в интервал (а,в), то сл. в. няма стойности в (а,в)

# Основни свойства на плътността продължение

**Свойство 5. ЛИЦЕТО на ЦЯЛАТА фигура под графиката на плътността и абсцисната ос е = 1**




Щом цялото лице под графиката е 1, то има точка върху абсцисната ос, която ще разделя лицето на две равни части, т.е. Точка наляво от която лицето е 0.5= т.е. 50% от стойностите на сл. Величина са наляво от тази точка и 50% са надясно.

**Свойство 6. Нека графиката на плътността има връх в т. С (т.е. това е точката, за която плътността приема най-голяма стойност). Разгледаме интервал (а,в) и го местим върху абсцисната ос, тогава лицето над този интервал ще е най голямо, когато средата му е в т. С, т.е. Сл.в. Ще има най-много стойности в интервал, на който средата е т.С=върха на графиката**

# Нормално Разпределение

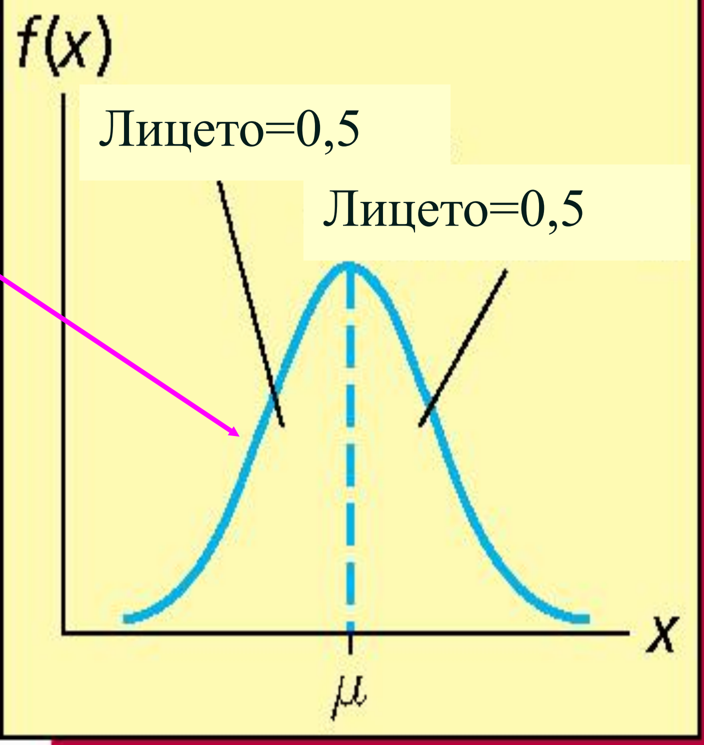
Нормално разпределена случайна величина има плътност **камбанка**

$N(\mu, \sigma^2)$

$\mu$ и $\sigma$ са параметри

Графиката на плътността е камбанка.

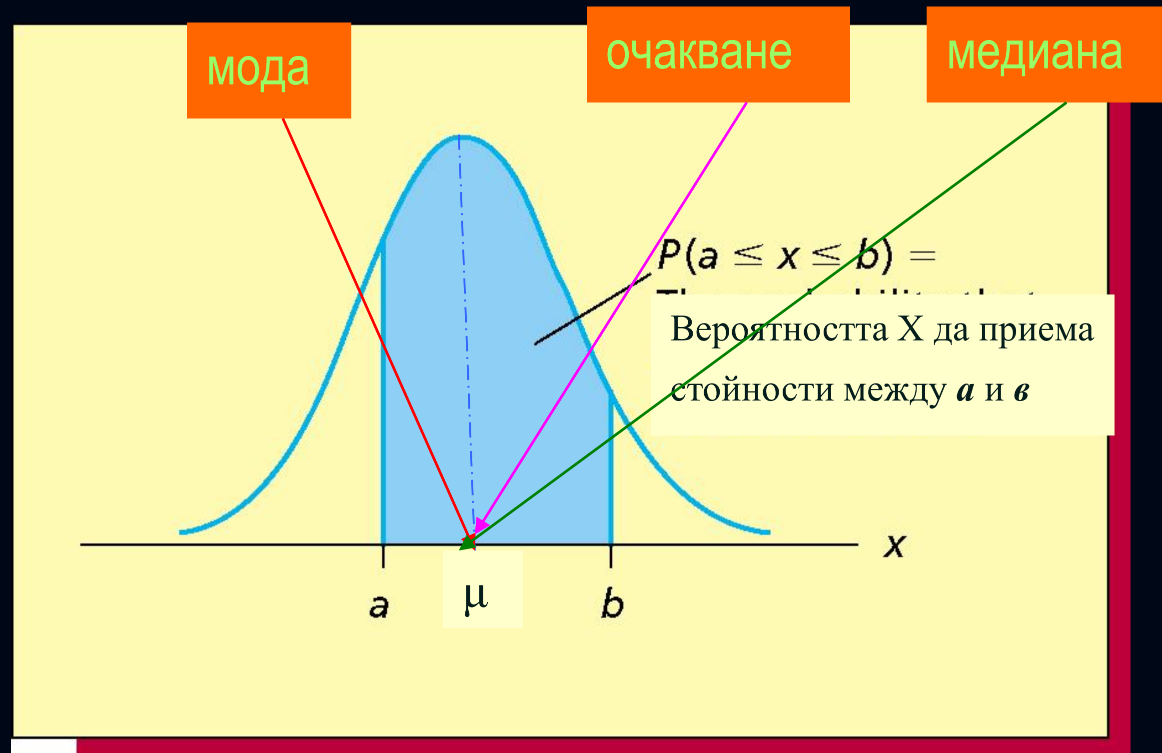
Нормалната крива е симетрична относно $\mu$ и общата й площ под кривата над Ох е 1



# *Характеристики на нормалното разпределение*

Стойности- цялата реална ос

- Модата, медианата, средната стойност са равни и са точно в средата на основата на камбанката




**Височината на камбанката – зависи от стандартното отклонение σ**

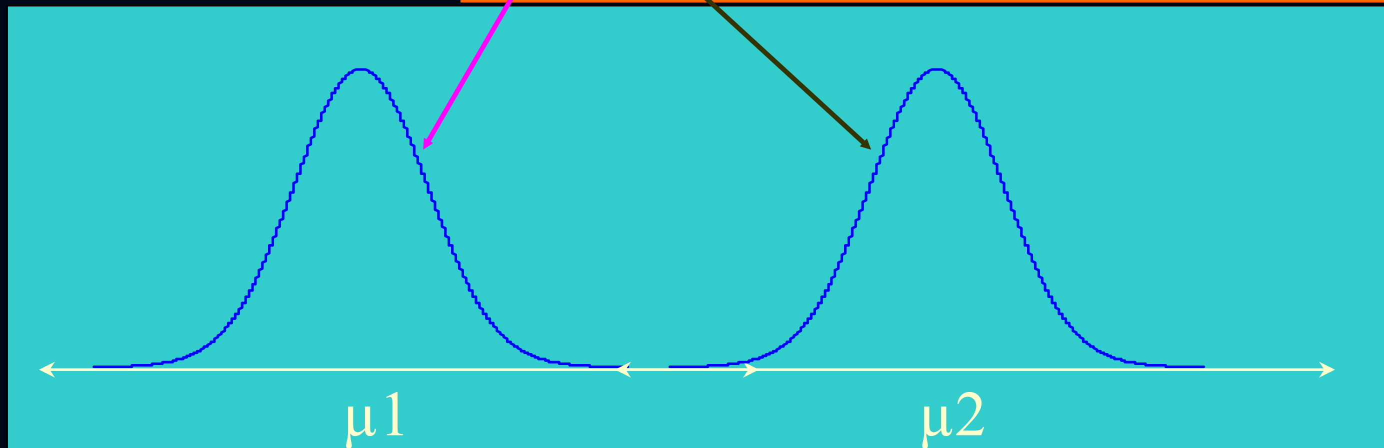
$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

-по-голямо σ, по-ниска камбанка, но по-широка основа

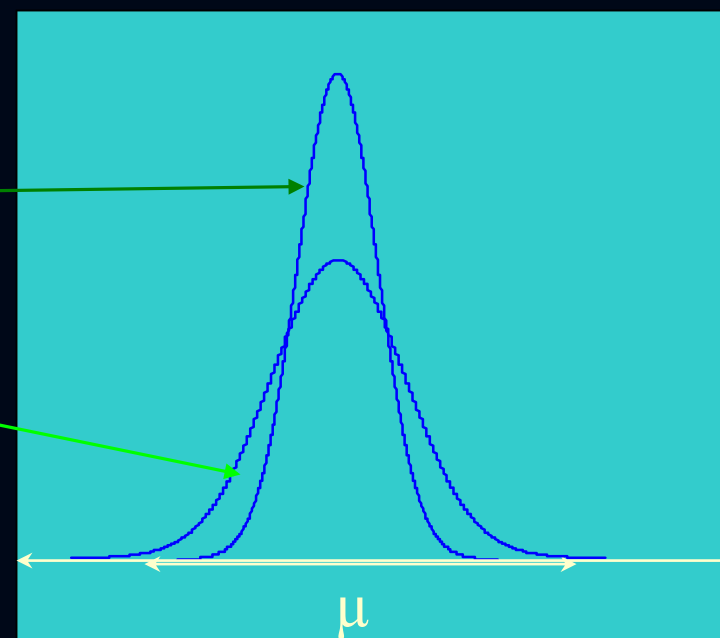
- по-малко σ, по-висока камбанка, но по-тясна основа

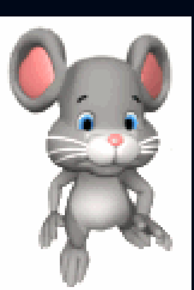
# Разположение на камбанката

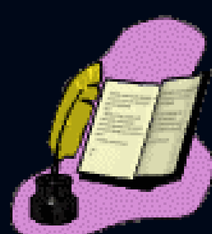
Разглеждаме две нормални разпределения:
$\mu 1 < \mu 2$ но имат равни станд. отклонения




Разглеждаме две нормални разпределния:
имат едни и същи средни стойности,
но $\sigma 1 > \sigma 2$



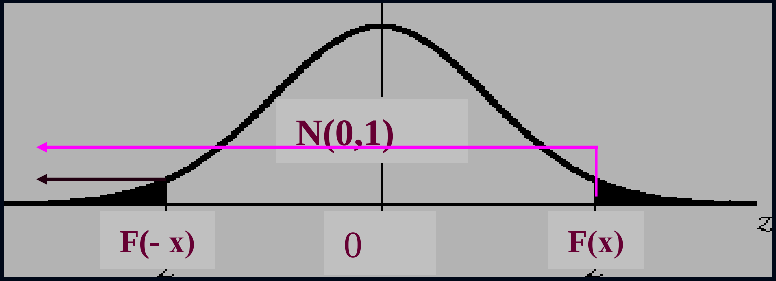


# Стандартно нормално разпределение

Това е специална нормално разпределена сл.в. на която средната стойност е 0, т.е. графиката на плътността е камбанка с център 0.

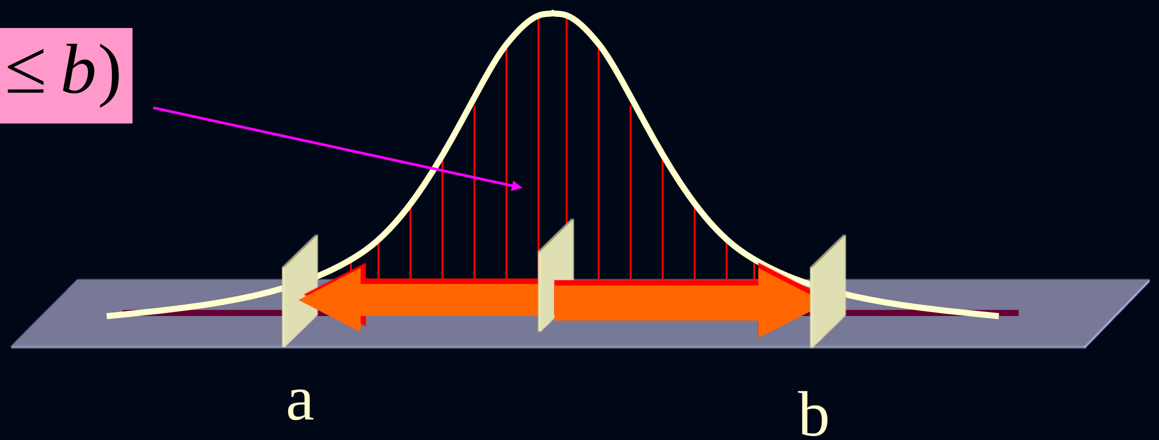
т.е лицето наляво и лицето надясно от т.0 на камбанката е=0.5

лицето наляво  от точката (–a) е равно на лицето надясно от точката a, a>0




В таблица са дадени само стойностите на лицето под кривата наляво от положителни x

$P(a \le Z \le b)$




Лицето под кривата между a и b:

$$P\left[a \le Z \le b\right] = P\left[Z \le b\right] - P\left[Z \le a\right]$$

Ключова формула!

**Намиране на вероятност**
**(лице под нормалната крива)**

# Важно !!!

Нека

$$X \in N(\mu, \sigma^2)$$

Разглеждаме

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

**Стандартно нормално разпределение**

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \in N(0,1)$$

**Пример:Нека X е нормално разпределение със средна стойност $\mu$=50 и стандартно отклонение $\sigma$= 4**

Намерете вероятността X да приема стойнсти по-малки от 45

P(X<45)= $P(Z = \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{45-50}{4})$ =P(Z<-1,25)= 1-P(Z<1,25)=1-0,8944= 0,1056

Намерете вероятността X да приема стойнсти по-големи от 47

P(X>47)= $P(Z = \frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{47-50}{4})$ =P(Z>-0,75)=P(Z<0,75)= 0,7734

**Пример:Нека X е нормално разпределение със средна стойност $\mu=50$ и стандартно отклонение $\sigma= 4$**

Намерете точката, на дясно от която се намират 80% от стойностите на X

P(X>a)=0,80 → a<50 P(X<a)=1-0,8=0,2

$$P(Z = \frac{X-50}{4} < \frac{a-50}{4}) = 0{,}2$$

В z-таблицата няма вероятност <0,5 => търсим точка с лице =0.2 надясно от нея или с лице наляво от нея =1-0.2=0,8 =>това е точката 0,84. Тогава търсента точка е симетрична относно 0, т.е. е – 0.84

(a-50)/4= - 0,84

или

a=(-0,84)4+50=46,64

# Централна гранична теорема

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими еднакво разпределени сл.в. със средни стойности **μ** и станд. откл. **σ**

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} N(0,1)$$

# Приложение

Застрахователна компания има 10 000 застраховани, като очаква средно на полица да бъдат изплатени през следващата година по 25 лв. със стандартно отклонение 80 лв. Намерете вероятността следващата година сумата за изплатени злополуки да надвишава 270 000 лв.

X**1**= сумата, която ще се изплати за злополука на първия клиент

Случайна величина

X**2**= сумата, която ще се изплати за злополука на втори клиент

Случайна величина, която е разпределена както X1 и е независима с X1

Дефинираме 10 000 сл.в., които са независими и еднакво разпределени с n=10 000, μ=25 и σ=80 и съгласно ЦГТ

сл.. величина $\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ е стандартно нормално разпределена

# Приложение- продължение

Какво представлява X1+X2+...+X10000?

Това е общата сума, която ще изплати, т.е. = е сумата от всички тези 10 000 сл. в-ни

и търсим

$$P\left(\sum_{i=1}^{10000} X_i > 270\,000\right) = ?$$

Трябва да сведем до тази сл.в.

при n=10 000, μ=25   и σ=80

която е стандартно нормално разпределена

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{10000} X_i - 10000(25)}{80\sqrt{10000}} \in N(0,1)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{10000} X_i > 270\,000\right) \approx P\left(Z > \frac{270000 - 10000(25)}{80\sqrt{10000}}\right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z < 2{,}5) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$$

Край