Векторни и матрични норми

Вектори

In[5]:=
```
a = {3, 7, -69, 17}
```
Out[5]= {3, 7, -69, 17}

In[3]:=
```
n = Length[a]
```
Out[3]= 4

първа норма

In[2]:=
```
Max[Abs[a]]
```
Out[2]= 69

In[11]:=
```
Norm[a, ∞]
```
Out[11]= 69

втора норма

In[6]:= $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Abs}[a[[i]]]$

Out[6]= 96

In[10]:=
```
Norm[a, 1]
```
Out[10]= 96

трета норма

In[7]:= $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a[[i]]^2}$

Out[7]= $2\sqrt{1277}$

In[8]:=
```
% // N
```
Out[8]= 71.4703

In[9]:=
```
Norm[a]
```
Out[9]= $2\sqrt{1277}$

Матрици

In[12]:=
$$A = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 11 \\ 9 & 2 & 22 \\ 0.5 & 0.6 & -20.5 \end{pmatrix}$$

Out[12]=
```
{{12, 7, 11}, {9, 2, 22}, {0.5, 0.6, -20.5}}
```

In[13]:=
```
Norm[A]
```

Out[13]=
```
33.975
```

In[15]:=
```
n = Length[A]
```

Out[15]=
```
3
```

първа норма

In[16]:=
$$\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Abs}[A[[i, j]]], \{i, n\}\right]$$

Out[16]=
```
{30, 33, 21.6}
```

In[17]:=
$$\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n} \text{Abs}[A[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]$$

Out[17]=
```
33
```

втора норма

In[18]:=
$$\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[A[[i, j]]], \{j, n\}\right]$$

Out[18]=
```
{21.5, 9.6, 53.5}
```

In[19]:=
$$\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n} \text{Abs}[A[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]$$

Out[19]=
```
53.5
```

трета норма

In[20]:=
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A[[i, j]]^2}$$

Out[20]=
```
36.109
```

Метод на Якоби (простата

итерация) за решаване на СЛАУ

```
In[21]:= A = {{20, 0.63, 3.22}, {4.20, -30, 1.11}, {2.7, 8.7, 45.7}}; b = {44, 308, 32.8};
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

За сравнение, точното решение е {2.11294, -9.87933, 2.47364}

Конструиране на метода - получаваме матрицата *B* и вектора *c*

```
In[25]:= (*инициализация на матрицата B и вектора c*)
n = Length[A];
c = Table[0, n];
B = Table[0, {i, n}, {j, n}]
```

Out[27]=

{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

```
In[28]:= B // MatrixForm
```

Out[28]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[38]:= For[i = 1, i ≤ n, i++,
  B[[i]] = - A[[i]] / A[[i, i]];
  B[[i, i]] = 0;
  c[[i]] = b[[i]] / A[[i, i]]
 ]
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.0315 & -0.161 \\ 0.14 & 0 & 0.037 \\ -0.059081 & -0.190372 & 0 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{154}{15} \\ 0.717724 \end{pmatrix}$

Проверка условието на сходимост ||B|| <1

първа норма

In[40]:=
```
Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]]
```
$$\mathrm{Max}\left[\mathrm{Table}\left[\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Abs}[B[[i,j]]],\{i,n\}\right]\right]$$

Out[40]=

0.249453

втора норма

In[41]:=
$$\mathrm{Max}\left[\mathrm{Table}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Abs}[B[[i,j]]],\{j,n\}\right]\right]$$

Out[41]=

0.221872

трета норма

In[42]:=
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B[[i,j]]^2}$$

Out[42]=

0.295997

Избираме най-малката възможна норма, която в случая е втора.

Извършваме итерациите

$$x = \left\{9, 12, \frac{1}{2}\right\};$$ (*изборът на начално приближение е произволен*)

```
For[k = 0, k ≤ 5, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x];
 x = B.x + c
]
```

k = 0 $x^{(k)}$ = $\left\{9, 12, \frac{1}{2}\right\}$

k = 1 $x^{(k)}$ = {1.7415, -8.98817, -2.09847}

k = 2 $x^{(k)}$ = {2.82098, -10.1005, 2.32593}

k = 3 $x^{(k)}$ = {2.14369, -9.78567, 2.47391}

k = 4 $x^{(k)}$ = {2.10995, -9.87502, 2.45399}

k = 5 $x^{(k)}$ = {2.11597, -9.88048, 2.47299}

За сравнение, точното решение е {2.11294, -9.87933, 2.47364}

много далечно начално приближение:

In[51]:=
```
x = {10^12, 12^13, -234561877659827538409683};
(*изборът на начално приближение е произволен*)
For[k = 0, k ≤ 40, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x];
 x = B.x + c
]
```

добавяме оценка на грешката

In[53]:=
```
x = {9, 12, 1/2}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]];
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 5, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))];
 x = B.x + c
]
```

k = 0 $x^{(k)}$ = $\left\{9, 12, \frac{1}{2}\right\}$ ε_k = 38.4437

k = 1 $x^{(k)}$ = {1.7415, -8.98817, -2.09847} ε_k = 8.52959

k = 2 $x^{(k)}$ = {2.82098, -10.1005, 2.32593} ε_k = 1.89248

k = 3 $x^{(k)}$ = {2.14369, -9.78567, 2.47391} ε_k = 0.419888

k = 4 $x^{(k)}$ = {2.10995, -9.87502, 2.45399} ε_k = 0.0931613

k = 5 $x^{(k)}$ = {2.11597, -9.88048, 2.47299} ε_k = 0.0206699

Окончателен код в една клетка

```
In[82]:= A = (20    0.63  3.22
              4.20  -30   1.11
              2.7   8.7   45.7); b = {44, 308, 32.8};

(*инициализация на матрицата B и вектора c*)
n = Length[A];
c = Table[0, n];
B = Table[0, {i, n}, {j, n}];
For[i = 1, i ≤ n, i++,
 B[[i]] = - A[[i]] / A[[i, i]];
 B[[i, i]] = 0;
 c[[i]] = b[[i]] / A[[i, i]]
]
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ", B // MatrixForm, ". x^(k) + ", c // MatrixForm]

(*проверка на сходимост
 и избор на норма - отделно*)

x = {9, 12, 1/2}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на устойчивост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {i, 1, n}], {j, n}]];
normx0 = Norm[x, 1];
normc = Norm[c, 1];
For[k = 0, k ≤ 5, k++,
 Print["k = ", k, " x^(k) = ", x, " ε_k = ", eps = normB^k (normx0 + normc / (1 - normB))];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", LinearSolve[A, b]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.0315 & -0.161 \\ 0.14 & 0 & 0.037 \\ -0.059081 & -0.190372 & 0 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{154}{15} \\ 0.717724 \end{pmatrix}$

k = 0 $x^{(k)} = \left\{9, 12, \frac{1}{2}\right\}$ $\varepsilon_k = 38.4437$

k = 1 $x^{(k)} = \{1.7415, -8.98817, -2.09847\}$ $\varepsilon_k = 8.52959$

k = 2 $x^{(k)} = \{2.82098, -10.1005, 2.32593\}$ $\varepsilon_k = 1.89248$

k = 3 $x^{(k)} = \{2.14369, -9.78567, 2.47391\}$ $\varepsilon_k = 0.419888$

k = 4 $x^{(k)} = \{2.10995, -9.87502, 2.45399\}$ $\varepsilon_k = 0.0931613$

k = 5 $x^{(k)} = \{2.11597, -9.88048, 2.47299\}$ $\varepsilon_k = 0.0206699$

За сравнение, точното решение е $\{2.11294, -9.87933, 2.47364\}$