Метод за решаване на последователни приближения за решаване на СЛАУ

Дадена е системата Ax = c, където c = (a, b, a+b), съответно a – предпоследната цифра от факултетния номер, b – последната.

1. Да се избере итерационен метод за решаването й.
2. Да се провери условието за сходимост.
3. Да се построи итерационен процес.
4. Да се направят 3 итерации.
5. Покажете достигнатото решение и с каква точност е получено?
6. Какъв е минималния брой итерации, които за нужни за достигане на точност 10^{-4}, работейки по избрания метод при избор на начално приближение x(0) = c?

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 16 + a & 0 \\ 1 & 0 & 9 + b \end{pmatrix}, b = (a,b, a+b)$$

In[1]:= $A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 17 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \end{pmatrix}$; b = {1, 9, 10};

1. Да се избере итерационен метод за решаването й. (в случая избираме метода на последователните приближения)

```
In[2]:= n = Length[A];
In[3]:= IM = IdentityMatrix[n];
In[4]:= B = IM - A;
In[5]:= c = b;
In[6]:= Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
         N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} -15. & -2. & 0. \\ -2. & -16. & 0. \\ -1. & 0. & -17. \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1. \\ 9. \\ 10. \end{pmatrix}$

2. Проверка за сходимост ||B|| < 1

първа норма

In[7]:= $\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{j=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{i, n\}\right]\right]$

Out[7]= 18

втора норма

In[8]:= $\text{Max}\left[\text{Table}\left[\sum_{i=1}^{n}\text{Abs}[B[[i, j]]], \{j, n\}\right]\right]$

Out[8]= 18

трета норма

In[10]:= $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B[[i, j]]^2}$

Out[10]=

$\sqrt{779}$

Извод: В случая имаме положително определена матрица и условието за сходимост не е изпълнено. Съответно модифицираме метода

---

3. Модификация на метода при положително определена матрица A

Проверка на приложимостта на модификацията

In[11]:= $A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 17 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \end{pmatrix};$

In[12]:= `PositiveDefiniteMatrixQ[A]`

Out[12]=

True

Определяне стойността на ρ

In[14]:= `N[Norm[A]]`

Out[14]=

18.7072

In[15]:= `ro = 200`

Out[15]=

200

Итерараме

```
In[92]:= A = {{16, 2, 0}, {2, 17, 0}, {1, 0, 18}}; b = {1, 9, 10};

n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
ro = 200;
B = IM - 2/ro A;
c = 2/ro b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
Print[]
x = {10, 4, 0.6}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на сходимост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]];
Print["Нормата на B е ", N[normB]]
normx0 = Max[Abs[x]];
normc = Max[Abs[c]];
For[k = 0, k ≤ 3, k++,
 Print["k = ", N[k], " x^(k) = ", N[x], " ε_k = ", N[eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))]];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.84 & -0.02 & 0. \\ -0.02 & 0.83 & 0. \\ -0.01 & 0. & 0.82 \end{pmatrix} . x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.09 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

Нормата на B е 0.86

k = 0. $x^{(k)}$ = {10., 4., 0.6} ε_k = 10.7143

k = 1. $x^{(k)}$ = {8.33, 3.21, 0.492} ε_k = 9.21429

k = 2. $x^{(k)}$ = {6.943, 2.5877, 0.42014} ε_k = 7.92429

k = 3. $x^{(k)}$ = {5.79037, 2.09893, 0.375085} ε_k = 6.81489

За сравнение, точното решение е {-0.00373134, 0.529851, 0.555763}

4. Какъв е минималния брой итерации, които за нужни за достигане на точност 10^{-4}, работейки по

избрания метод при избор на начално приближение x(0) = c?

In[31]:=
$$N\left[\frac{\mathrm{Log}\left[\frac{10^{-4}}{\mathrm{normx0}+\frac{\mathrm{normc}}{1-\mathrm{normB}}}\right]}{\mathrm{Log}[\mathrm{normB}]}\right]$$

Out[31]=

77.9263

Извод: Необходими са ни 78 итерации за достигане на исканата точност.

Итерираме

In[122]:=

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 0 \\ 2 & 17 & 0 \\ 1 & 0 & 18 \end{pmatrix}; \; b = \{1, 9, 10\};$$

```
n = Length[A];
IM = IdentityMatrix[n];
ro = 200;
B = IM - 2/ro A;
c = 2/ro b;
Print["Итерационният процес е x^(k+1) = ",
 N[B // MatrixForm], ". x^(k) + ", N[c // MatrixForm]]
Print[]
x = {10, 4, 0.6}; (*изборът на начално приближение е произволен*)
(*изчисляваме нормите според избора на норма,
който сме направили по време на проверка на условието на сходимост*)
normB = Max[Table[Sum[Abs[B[[i, j]]], {j, 1, n}], {i, n}]];
Print["Нормата на B e ", N[normB]]
normx0 = Max[Abs[x]];
normc = Max[Abs[c]];
For[k = 0, k ≤ 79, k++,
 Print["k = ", N[k], " x^(k) = ", N[x], " ε_k = ", N[eps = normB^k (normx0 + normc/(1 - normB))]];
 x = B.x + c
]
Print["За сравнение, точното решение е ", N[LinearSolve[A, b]]]
```

Итерационният процес е $x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0.84 & -0.02 & 0. \\ -0.02 & 0.83 & 0. \\ -0.01 & 0. & 0.82 \end{pmatrix} . \, x^{(k)} + \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.09 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

Нормата на B e 0.86

k = 0. $x^{(k)}$ = {10., 4., 0.6} ε_k = 10.7143

k = 1. $x^{(k)}$ = {8.33, 3.21, 0.492} ε_k = 9.21429

k = 2. $x^{(k)}$ = {6.943, 2.5877, 0.42014} ε_k = 7.92429

k = 3. $x^{(k)}$ = {5.79037, 2.09893, 0.375085} ε_k = 6.81489

k = 4. $x^{(k)}$ = {4.83193, 1.71631, 0.349666} ε_k = 5.8608

k = 5. $x^{(k)}$ = {4.03449, 1.41789, 0.338407} ε_k = 5.04029

k = 6. $x^{(k)}$ = {3.37062, 1.18616, 0.337149} ε_k = 4.33465

k = 7. $x^{(k)}$ = {2.8176, 1.0071, 0.342756} ε_k = 3.7278

k = 8. $x^{(k)}$ = {2.35664, 0.869543, 0.352884} ε_k = 3.20591

k = 9. $x^{(k)}$ = {1.97218, 0.764588, 0.365798} ε_k = 2.75708

k = 10. $x^{(k)}$ = {1.65134, 0.685165, 0.380233} ε_k = 2.37109

k = 11. $x^{(k)}$ = {1.38343, 0.62566, 0.395277} ε_k = 2.03914

k = 12. $x^{(k)}$ = {1.15956, 0.581629, 0.410293} ε_k = 1.75366

k = 13. $x^{(k)}$ = {0.972401, 0.549561, 0.424845} ε_k = 1.50814

k = 14. $x^{(k)}$ = {0.815826, 0.526687, 0.438649} ε_k = 1.297

k = 15. $x^{(k)}$ = {0.68476, 0.510834, 0.451534} ε_k = 1.11542

k = 16. $x^{(k)}$ = {0.574982, 0.500297, 0.46341} ε_k = 0.959265

k = 17. $x^{(k)}$ = {0.482979, 0.493747, 0.474246} ε_k = 0.824968

k = 18. $x^{(k)}$ = {0.405827, 0.49015, 0.484052} ε_k = 0.709472

k = 19. $x^{(k)}$ = {0.341092, 0.488708, 0.492865} ε_k = 0.610146

k = 20. $x^{(k)}$ = {0.286743, 0.488806, 0.500738} ε_k = 0.524726

k = 21. $x^{(k)}$ = {0.241088, 0.489974, 0.507738} ε_k = 0.451264

k = 22. $x^{(k)}$ = {0.202714, 0.491857, 0.513934} ε_k = 0.388087

k = 23. $x^{(k)}$ = {0.170443, 0.494187, 0.519399} ε_k = 0.333755

k = 24. $x^{(k)}$ = {0.143288, 0.496766, 0.524203} ε_k = 0.287029

k = 25. $x^{(k)}$ = {0.120427, 0.49945, 0.528413} ε_k = 0.246845

k = 26. $x^{(k)}$ = {0.10117, 0.502135, 0.532095} ε_k = 0.212287

k = 27. $x^{(k)}$ = {0.0849397, 0.504749, 0.535306} ε_k = 0.182567

k = 28. $x^{(k)}$ = {0.0712544, 0.507243, 0.538101} ε_k = 0.157007

k = 29. $x^{(k)}$ = {0.0597088, 0.509586, 0.540531} ε_k = 0.135026

k = 30. $x^{(k)}$ = {0.0499637, 0.511762, 0.542638} ε_k = 0.116123

k = 31. $x^{(k)}$ = {0.0417343, 0.513764, 0.544464} ε_k = 0.0998654

k = 32. $x^{(k)}$ = {0.0347815, 0.515589, 0.546043} ε_k = 0.0858843

k = 33. $x^{(k)}$ = {0.0289047, 0.517243, 0.547407} ε_k = 0.0738605

k = 34. $x^{(k)}$ = {0.0239351, 0.518734, 0.548585} ε_k = 0.06352

k = 35. $x^{(k)}$ = {0.0197308, 0.52007, 0.5496} ε_k = 0.0546272

k = 36. $x^{(k)}$ = {0.0161724, 0.521264, 0.550475} ε_k = 0.0469794

k = 37. $x^{(k)}$ = {0.0131596, 0.522326, 0.551228} ε_k = 0.0404023

k = 38. $x^{(k)}$ = {0.0106075, 0.523267, 0.551875} ε_k = 0.034746

k = 39. $x^{(k)}$ = {0.00844499, 0.524099, 0.552432} ε_k = 0.0298815

k = 40. $x^{(k)}$ = {0.0066118, 0.524834, 0.552909} ε_k = 0.0256981

k = 41. $x^{(k)}$ = {0.00505724, 0.52548, 0.55332} ε_k = 0.0221004

k = 42. $x^{(k)}$ = {0.00373849, 0.526047, 0.553671} ε_k = 0.0190063

k = 43. $x^{(k)}$ = {0.00261939, 0.526544, 0.553973} ε_k = 0.0163454

k = 44. $x^{(k)}$ = {0.0016694, 0.526979, 0.554232} ε_k = 0.0140571

k = 45. $x^{(k)}$ = {0.000862713, 0.527359, 0.554453} ε_k = 0.0120891

k = 46. $x^{(k)}$ = {0.00017749, 0.527691, 0.554643} ε_k = 0.0103966

k = 47. $x^{(k)}$ = {-0.000404731, 0.52798, 0.554806} ε_k = 0.00894109

k = 48. $x^{(k)}$ = {-0.000899575, 0.528232, 0.554945} ε_k = 0.00768934

k = 49. $x^{(k)}$ = {-0.00132027, 0.52845, 0.555064} ε_k = 0.00661283

k = 50. $x^{(k)}$ = {-0.00167803, 0.52864, 0.555165} ε_k = 0.00568703

k = 51. $x^{(k)}$ = {-0.00198235, 0.528805, 0.555252} ε_k = 0.00489085

k = 52. $x^{(k)}$ = {-0.00224127, 0.528948, 0.555327} ε_k = 0.00420613

k = 53. $x^{(k)}$ = {-0.00246162, 0.529071, 0.55539} ε_k = 0.00361727

k = 54. $x^{(k)}$ = {-0.00264919, 0.529178, 0.555445} ε_k = 0.00311085

k = 55. $x^{(k)}$ = {-0.00280889, 0.529271, 0.555491} ε_k = 0.00267533

k = 56. $x^{(k)}$ = {-0.00294489, 0.529351, 0.555531} ε_k = 0.00230079

k = 57. $x^{(k)}$ = {-0.00306073, 0.52942, 0.555565} ε_k = 0.00197868

k = 58. $x^{(k)}$ = {-0.00315942, 0.52948, 0.555594} ε_k = 0.00170166

k = 59. $x^{(k)}$ = {-0.00324352, 0.529532, 0.555618} ε_k = 0.00146343

k = 60. $x^{(k)}$ = {-0.00331519, 0.529576, 0.55564} ε_k = 0.00125855

k = 61. $x^{(k)}$ = {-0.00337628, 0.529615, 0.555658} ε_k = 0.00108235

k = 62. $x^{(k)}$ = {-0.00342837, 0.529648, 0.555673} ε_k = 0.000930823

k = 63. $x^{(k)}$ = {-0.00347278, 0.529676, 0.555686} ε_k = 0.000800508

k = 64. $x^{(k)}$ = {-0.00351066, 0.529701, 0.555697} ε_k = 0.000688437

k = 65. $x^{(k)}$ = {-0.00354296, 0.529722, 0.555707} ε_k = 0.000592056

k = 66. $x^{(k)}$ = {-0.00357052, 0.52974, 0.555715} ε_k = 0.000509168

k = 67. $x^{(k)}$ = {-0.00359404, 0.529756, 0.555722} ε_k = 0.000437884

k = 68. $x^{(k)}$ = {-0.0036141, 0.529769, 0.555728} ε_k = 0.000376581

k = 69. $x^{(k)}$ = {-0.00363122, 0.529781, 0.555733} ε_k = 0.000323859

k = 70. $x^{(k)}$ = {-0.00364584, 0.52979, 0.555737} ε_k = 0.000278519

k = 71. $x^{(k)}$ = {-0.00365831, 0.529799, 0.555741} ε_k = 0.000239526

k = 72. $x^{(k)}$ = {-0.00366896, 0.529806, 0.555744} ε_k = 0.000205993

k = 73. $x^{(k)}$ = {-0.00367806, 0.529813, 0.555747} ε_k = 0.000177154

k = 74. $x^{(k)}$ = {-0.00368582, 0.529818, 0.555749} ε_k = 0.000152352

k = 75. $x^{(k)}$ = {-0.00369245, 0.529823, 0.555751} ε_k = 0.000131023

k = 76. $x^{(k)}$ = {-0.00369811, 0.529827, 0.555753} ε_k = 0.00011268

k = 77. $x^{(k)}$ = {-0.00370295, 0.52983, 0.555754} ε_k = 0.0000969045

k = 78. $x^{(k)} = \{-0.00370708, 0.529833, 0.555756\}$ $\varepsilon_k = 0.0000833379$

k = 79. $x^{(k)} = \{-0.00371061, 0.529836, 0.555757\}$ $\varepsilon_k = 0.0000716706$

За сравнение, точното решение е $\{-0.00373134, 0.529851, 0.555763\}$