Числено интегриране. Квадратурни формули на Нютон-Коутс

Използване на вградените възможности на Wolfram

In[1]:= $f[x\_] := \sqrt[3]{e^{x^2}}$

$\int_3^4 f[x]\, dx$

Out[2]= $\frac{1}{2}\sqrt{3\pi}\left(\text{Erfi}\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\right] - \text{Erfi}\left[\sqrt{3}\right]\right)$

In[3]:= `% // N`

Out[3]= 76.1938

In[4]:= $f[x\_] := \frac{\sqrt[3]{e^{x^2}}}{\text{Sin}[x]}$

$\int_3^4 f[x]\, dx$

Integrate: Integral of $e^{\frac{x^2}{3}}$ Csc[x] does not converge on {3, 4}.

Out[5]= $\int_3^4 \left(e^{x^2}\right)^{1/3} \text{Csc}[x]\, dx$

In[6]:= $\int_3^4 f[x]\, dx$ // N

Integrate: Integral of $e^{\frac{x^2}{3}}$ Csc[x] does not converge on {3, 4}.

NIntegrate: Numerical integration converging too slowly; suspect one of the following: singularity, value of the integration is 0, highly oscillatory integrand, or WorkingPrecision too small.

NIntegrate: NIntegrate failed to converge to prescribed accuracy after 9 recursive bisections in x near {x} = {3.14256}. NIntegrate obtained −988.095 and 843.2827962055359` for the integral and error estimates.

Out[6]= −988.095

Съставяне на мрежата

In[11]:=
```
f[x_] := ∛(e^(x^2))
Itochno = ∫_3^4 f[x] ⅆx // N;(*за сравнение с нашите резултати*)
a = 3; b = 4;
h = 0.1;
n = (b - a)/h;
xt = Table[a + i * h, {i, 0, n}]
```

$$f[x\_] := \sqrt[3]{e^{x^2}}$$

$$Itochno = \int_3^4 f[x]\,dx \,//\, N$$

Out[16]=

{3., 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 4.}

In[17]:=
```
yt = f[xt]
```

Out[17]=

{20.0855, 24.6144, 30.3663, 37.7128, 47.15,
59.343, 75.1886, 95.9026, 123.141, 159.174, 207.127}

Леви правоъгълници

In[18]:=
```
I1 = h * Sum[f[a + i * h], {i, 0, n-1}]
```

$$I1 = h * \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h]$$

Out[18]=

67.2679

за сравнение:

In[19]:=
```
Itochno
```

Out[19]=

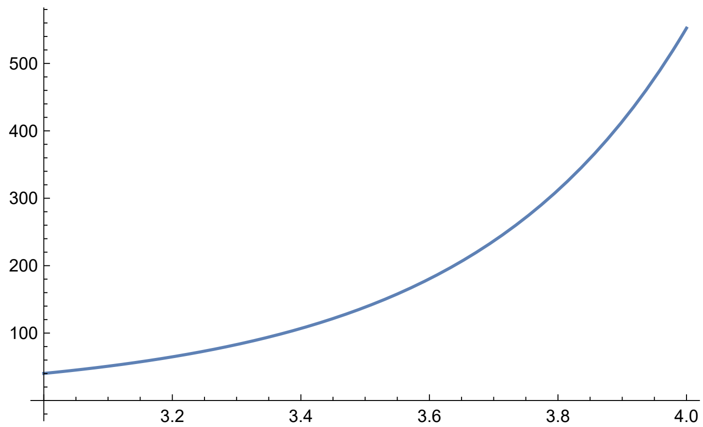
76.1938

Оценка на грешката

намиране на M1

In[20]:=
```
Plot[Abs[f'[x]], {x, a, b}]
```

Out[20]=



In[21]:=
```
M1 = Abs[f'[b]]
```
Out[21]=

$$\frac{8\, e^{16/3}}{3}$$

In[22]:=
```
% // N
```
Out[22]=
```
552.339
```

In[23]:=

$$R1 = \frac{(b-a)^2}{2n} * M1$$

Out[23]=
```
27.617
```

Истинска грешка

In[24]:=
```
Abs[I1 - Itochno]
```
Out[24]=
```
8.92594
```

Всичко на едно място

In[25]:=

$$f[x\_] := \sqrt[3]{e^{x^2}}$$

$$Itochno = \int_3^4 f[x]\, dx \; // \; N; \text{(*за сравнение с нашите резултати*)}$$

```
a = 3; b = 4;
h = 0.1;
```

$$n = \frac{b-a}{h};$$

$$I1 = h * \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h];$$

```
M1 = Abs[f'[b]];
```

$$R1 = \frac{(b-a)^2}{2n} * M1;$$

```
Print["Мрежата е със стъпка h = ", h, " и брой подинтервали n = ", n]
Print["Приблежената стойност по метода на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е                                          ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по метода на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка е                                        ", Abs[I1 - Itochno]]
```

```
Мрежата е със стъпка h = 0.1 и брой подинтервали n = 10.

Приблежената стойност по метода на левите правоъгълници е 67.2679

Точната стойност е                                        76.1938

Теоретичната грешка по метода на левите правоъгълници е 27.617

Истинската грешка е                                     8.92594
```

Десни правоъгълници

In[38]:=
```
f[x_] := ∛(e^(x^2))
Itochno = ∫_3^4 f[x] ⅆx // N ;(*за сравнение с нашите резултати*)
a = 3; b = 4;
h = 0.1;
n = (b - a)/h;
I2 = h * Sum[f[a + i * h], {i, 1, n}];
M1 = Abs[f'[b]];
R2 = (b - a)^2/(2 n) * M1;
Print["Мрежата е със стъпка h = ", h, " и брой подинтервали n = ", n]
Print["Приблежената стойност по метода на десните правоъгълници е ", I2]
Print["Точната стойност е                                              ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по метода на десните правоъгълници е ", R2]
Print["Истинската грешка е                                             ", Abs[I2 - Itochno]]
```

Мрежата е със стъпка h = 0.1 и брой подинтервали n = 10.

Приблежената стойност по метода на десните правоъгълници е 85.9721

Точната стойност е 76.1938

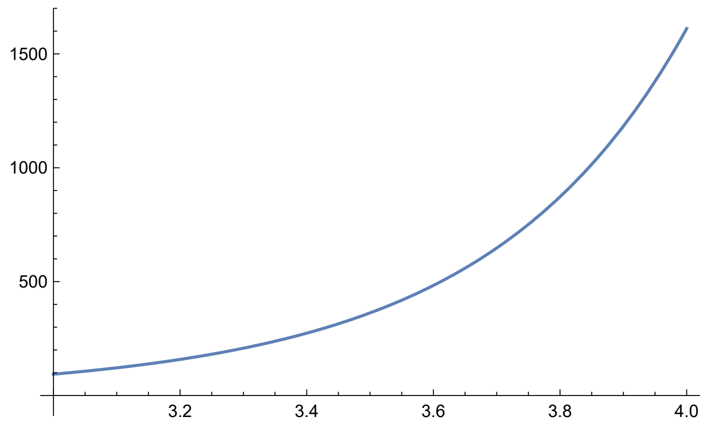
Теоретичната грешка по метода на десните правоъгълници е 27.617

Истинската грешка е 9.77823

Средни правоъгълници

In[51]:=
```
Plot[Abs[f''[x]], {x, a, b}]
```

Out[51]=



In[65]:=
```
f[x_] := \sqrt[3]{e^{x^2}}
Itochno = \int_3^4 f[x] dx // N;(*за сравнение с нашите резултати*)
a = 3; b = 4;
h = 0.1;
n = (b - a)/h;
I3 = h * \sum_{i=0}^{n-1} f[a + i * h + h/2];
M2 = Abs[f''[b]];
R3 = (b - a)^3/(24 n^2) * M2;
Print["Мрежата е със стъпка h = ", h, " и брой подинтервали n = ", n]
Print["Приблежената стойност по метода на средните правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност е                                           ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по метода на средните правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка е                                           ", Abs[I3 - Itochno]]
```

Мрежата е със стъпка h = 0.1 и брой подинтервали n = 10.

Приблежената стойност по метода на средните правоъгълници е 75.981

Точната стойност е 76.1938

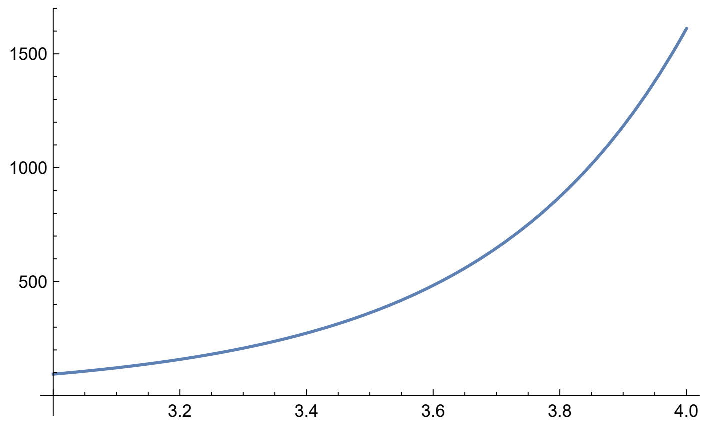
Теоретичната грешка по метода на средните правоъгълници е 0.671246

Истинската грешка е 0.212823

Трапеци - **САМОСТОЯТЕЛНО**

In[ ]:=
```
Plot[Abs[f''[x]], {x, a, b}]
```

Out[ ]=



```
In[•]:= f[x_] := ∛(e^(x^2))
Itochno = ∫_3^4 f[x] dx // N ;(*за сравнение с нашите резултати*)
a = 3; b = 4;
h = 0.1;
n = (b - a)/h;
I3 = h * Sum[f[a + i * h + h/2], {i, 0, n-1}];
M2 = Abs[f''[b]];
R3 = (b - a)^3/(24 n^2) * M2;
Print["Мрежата е със стъпка h = ", h, " и брой подинтервали n = ", n]
Print["Приблежената стойност по метода на средните правоъгълници е ", I3]
Print["Точната стойност е                                          ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по метода на средните правоъгълници е ", R3]
Print["Истинската грешка е                                          ", Abs[I3 - Itochno]]
```

$$f[x\_] := \sqrt[3]{e^{x^2}}$$

$$Itochno = \int_3^4 f[x]\, dx \;//\; N$$

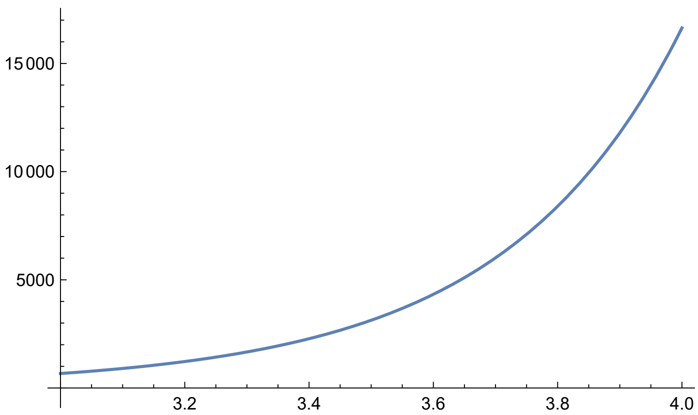
$$n = \frac{b-a}{h}; \quad I3 = h * \sum_{i=0}^{n-1} f\left[a + i * h + \frac{h}{2}\right]; \quad R3 = \frac{(b-a)^3}{24 n^2} * M2;$$

```
Мрежата е със стъпка h = 0.1 и брой подинтервали n = 10.
Приблежената стойност по метода на средните правоъгълници е 75.981
Точната стойност е                                          76.1938
Теоретичната грешка по метода на средните правоъгълници е 0.671246
Истинската грешка е                                        0.212823
```

Симпсън

Условие за приложение - ако n (броят на подинтервалите) е четно число!

```
In[78]:= Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]
Out[78]=
```



In[92]:=
```
f[x_] := ∛(e^(x^2))
Itochno = ∫_3^4 f[x] dx // N ;(*за сравнение с нашите резултати*)
a = 3; b = 4;
h = 0.1;
n = (b - a)/h; m = n / 2;
IS = h/3 * (f[a] + 4 Sum[f[a + (2 i - 1) * h], {i, 1, m}] + 2 Sum[f[a + (2 i) * h], {i, 1, m-1}] + f[b]);
M4 = Abs[f''''[b]];
RS = (b - a)^5/(180 n^4) * M4;
Print["Мрежата е със стъпка h = ", h, " и брой подинтервали n = ", n]
Print["Приблежената стойност по метода на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност е                            ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по метода на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка е                           ", Abs[IS - Itochno]]
```

$$f[x\_] := \sqrt[3]{e^{x^2}}$$

$$Itochno = \int_3^4 f[x]\, dx \; // \; N$$

$$IS = \frac{h}{3} * \left(f[a] + 4\sum_{i=1}^{m} f[a + (2i-1)*h] + 2\sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2i)*h] + f[b] \right);$$

$$RS = \frac{(b-a)^5}{180\, n^4} * M4;$$

```
Мрежата е със стъпка h = 0.1 и брой подинтервали n = 10.

Приблежената стойност по метода на Симпсън е 76.1965

Точната стойност е                            76.1938

Теоретичната грешка по метода на Симпсън е 0.00924543

Истинската грешка е                          0.0026255
```

Пресмятане с предварително зададена точност

In[107]:=
```
eps = 10^-6;
```

In[110]:=
```
Clear[n]
Reduce[(b - a)^2/(2 n) * M1 ≤ eps, n] // N
```

$$Reduce\left[\frac{(b-a)^2}{2n} * M1 \le eps,\ n\right] \; // \; N$$

Out[111]=

$n < 0. \;||\; n \ge 2.7617 \times 10^8$

Леви правоъгълници

In[125]:=

```
f[x_] := ∛(ⅇ^(x^2))
Itochno = ∫_3^4 f[x] ⅆx // N ;(*за сравнение с нашите резултати*)
a = 3; b = 4;
n = 2.77 * 10^8;
h = (b - a)/n;
I1 = h * Sum[f[a + i * h], {i, 0, n-1}] // N;
M1 = Abs[f'[b]];
R1 = (b - a)^2/(2 n) * M1;
Print["Мрежата е със стъпка h = ", h, " и брой подинтервали n = ", n]
Print["Приблежената стойност по метода на левите правоъгълници е ", I1]
Print["Точната стойност е                                          ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по метода на левите правоъгълници е ", R1]
Print["Истинската грешка е                                         ", Abs[I1 - Itochno]]
```

Мрежата е със стъпка h = 3.61011×10^{-9} и брой подинтервали n = 2.77×10^{8}

Приблежената стойност по метода на левите правоъгълници е 76.1938

Точната стойност е 76.1938

Теоретичната грешка по метода на левите правоъгълници е 9.97002×10^{-7}

Истинската грешка е 3.3762×10^{-7}

Десни правоъгълници - САМОСТОЯТЕЛНО

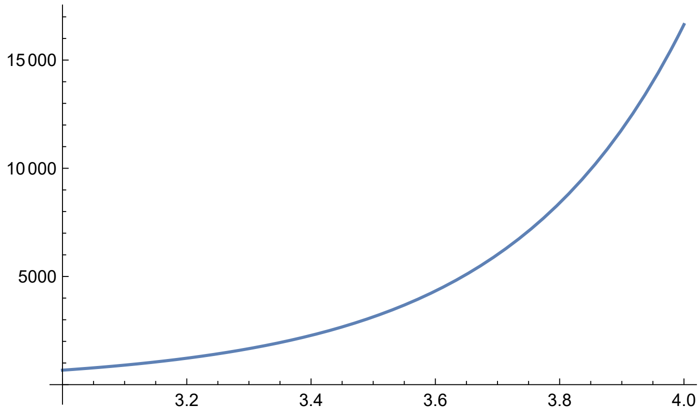
Средни правоъгълници - САМОСТОЯТЕЛНО

Трапци - САМОСТОЯТЕЛНО

Симпсън

Условие за приложение - ако n (броят на подинтервалите) е четно число!

In[•]:=
```
Plot[Abs[f''''[x]], {x, a, b}]
```
Out[•]=



In[138]:=
```
M4 = Abs[f''''[b]]
```
Out[138]=

$$\frac{6508\, e^{16/3}}{81}$$

In[139]:=
```
eps = 10^-6;
Clear[n]
```
$$\text{Reduce}\left[\frac{(b-a)^5}{180\, n^4} * M4 \le eps,\ n\right] \text{ // N}$$

Out[141]=

$n \le -98.0577\ ||\ n \ge 98.0577$

In[170]:=

$$f[x\_] := \sqrt[3]{e^{x^2}}$$

$$\text{Itochno} = \int_3^4 f[x]\, dx \text{ // N ; (*за сравнение с нашите резултати*)}$$

```
a = 3; b = 4;
n = 100;
```
$$h = \frac{b-a}{n};$$

```
m = n / 2;
```
$$IS = \frac{h}{3} * \left(f[a] + 4\sum_{i=1}^{m} f[a + (2 i - 1) * h] + 2\sum_{i=1}^{m-1} f[a + (2 i) * h] + f[b]\right) \text{ // N;}$$

```
M4 = Abs[f''''[b]];
```
$$RS = \frac{(b-a)^5}{180\, n^4} * M4 \text{ // N;}$$

```
Print["Мрежата е със стъпка h = ", h, " и брой подинтервали n = ", n]
Print["Приблежената стойност по метода на Симпсън е ", IS]
Print["Точната стойност е                              ", Itochno]
Print["Теоретичната грешка по метода на Симпсън е ", RS]
Print["Истинската грешка е                            ", Abs[IS - Itochno]]
```

Мрежата е със стъпка $h = \frac{1}{100}$ и брой подинтервали $n = 100$

Приблежената стойност по метода на Симпсън е 76.1938

Точната стойност е 76.1938

Теоретичната грешка по метода на Симпсън е 9.24543×10^{-7}

Истинската грешка е 2.66152×10^{-7}