Дискретна математика

доц. д-р Тодорка Глушкова,
Катедра „Компютърни технологии“, ФМИ

5

Двоични функции

Съдържание

- Основни понятия
- Свойства на функциите
- Пълно множество
- Теорема на Бул
- Полином на Жигалкин

Двоични функции

- Съвременните дигитални устройства използват двоична логика, тъй като на входа и изхода се подават само два различими сигнала – 0 и 1.
- Важна част от работата на дигиталните устройства е свързана с пресмятането на двоични функции
- Задачите за описване, минимизиране и използване на двоични функции са свързани с етапите на проектиране и реализиране на изчислителните процеси.

Основни понятия

- Нека B ={0,1}. Знаем, че B^n=B x B x B x…x B е Декартовото произведение.
- Очевидно B^n се състои от всички наредени n-орки от 0 и 1-ци, чийто брой е 2 на степен 2^n
- Ако променливата е една, съществуват 4 функции:

x1	**f1**	**f2**	**f3**	**f4**
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- Забелязваме, че f1=0; f2=x1; f3=$\neg$x1; f4=1

Основни понятия

- Ако променливите са 2, получаваме 16 функции:

x1	x2	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- Забелязваме, че $f0=0$; $f15=1$; $f1=x1.x2$ (конюнкция); $f3=x1$; $f5=x2$; $f6=x1+x2$ (изключващо или); $f7=x1 \vee x2$ (дисюнкция); $f8=x1 \downarrow x2$ (стрелка на Пиърс); $f9=x1 \leftrightarrow x2$ (еквивалентност); $f13=x1 \rightarrow x2$ (импликация); $f14=x1|x2$ (черта на Шефер)

Свойства на функциите

1. $x1.x1=x1$; $x1 \vee x1=x1$; $x1+x1=0$ –идемпотентност
2. $x1.x2=x2.x1$; $x1 \vee x2=x2 \vee x1$; $x1+x2=x2+x1$- комутативни закони
3. $x1.(x2.x3)=(x1.x2).x3$; $x1 \vee (x2 \vee x3)=(x1 \vee x2) \vee x3$; $x1+(x2+x3)=(x1+x2)+x3$ – асоциативни закони
4. $x1(x2 \vee x3)=x1.x2 \vee x1.x3$; $x1 \vee (x2.x3)=x1 \vee x2.x1 \vee x3$; $x1(x2+x3)=x1.x2+x1.x3$ – дистрибутивни закони

Свойства на функциите

5. $x1.0=0$; $x1 \vee 0=x1$; $x1+0=x1$

6. $x1.1=x1$; $x1 \vee 1=1$; $x1+1=\neg x1$

7. $x1. \neg x1=0$; $x1 \vee \neg x1=1$; $x1+\neg x1=1$

8. $\neg(x1.x2)=\neg x1 \vee \neg x2$; $\neg(x1 \vee x2)= (\neg x1). (\neg x2)$ – Закони на Де Морган.

x1	x2	x1.x2	¬x1	¬x2	¬(x1.x2)	¬x1∨¬x2
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Приоритет на операциите

- Подизрази в скоби
- Отрицания
- Конюнкция
- Дисюнкция и “+”
- Всички останали функции

Представянето на функциите с таблица е много сложно и дълго, затова ги представяме аналитично чрез формула.

Формули и суперпозиция

- Нека F е множество от функции.

Опр.1. Ако една функция f се представя с една формула над F, казваме че f е ***суперпозиция*** над F.

Опр.2. Множеството на всички суперпозиции над F ще наричаме ***обвивка*** на F и ще означаваме с [F]

Т.е. Обвивката се състои от всички функции, които можем да реализираме чрез формула над F.

Пълно множество

Да означим с P_2 множеството на всички двоични функции.

Опр. Ще казваме, че множеството от двоични функции F е ***пълно***, ако $[F]=P_2$, т.е. Ако всяка двоична функция се реализира с формула над F.

Заб. Множеството $\{\neg x\}$ е непълно, а множеството P_2 е пълно. Да потърсим други пълни множества, различни от P_2.

Теорема на Бул

Теорема на Бул: Множеството от двоични функции $\{\neg x_1, x_1.x_2, x_1 \vee x_2\}$ е пълно.

Теорема: Нека $F=\{f_1,f_2,f_3\ldots f_n\}$ е пълно. Множеството $G=\{g_1,g_2,g_3,\ldots g_k\}$ е пълно, тогава и само тогава, когато за всяко $f_i \in F$: $f_i \in [G]$, т.е. когато може да се представи като формула над G.

Полином на Жигалкин

Опр. ***Елементарна конюнкция*** е израз от вида:

$x_1.x_2.x_3 \ldots x_k$, $k=1,2,3 \ldots n$ за всяко $n \in N$ без повтарящи се множители.

Полином на Жигалкин е израз от вида:

$E_1+E_2+E_3+\ldots E_k$ без повтарящи се събираеми, където $k=1,2,3,\ldots,n$ и $E_k=1$ или E_k е елементарна конюнкция.

Напр. ПЖ$=x_1.x_2+x_1.x_3+x_2.x_3+1$

Теорема на Жигалкин

Теорема на Жигалкин: Всяка двоична функция се представя с точно един Полином на Жигалкин, т.е.

$f(x_1,x_2,x_3,\ldots x_n)=a_1.x_1.x_2.x_3\ldots x_n+$

$b_1.x_2.x_3\ldots x_n +b_2.x_1.x_3\ldots x_n+\ldots b_n.x_1.x_2\ldots x_{n-1}+$

$c_1.x_3.x_4\ldots x_n+c_2.x_1.x_4\ldots x_n+\ldots+$

$d_1.x_1+d_2.x_2+\ldots d_n.x_n+e$

Всички ПЖ са 2 на степен 2^n

Пример 1

Да се намери ПЖ за функцията:

x1	x2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$f=a.x_1.x_2+b_1.x_1+b_2.x_2+c$

$f(0,0)=0+0+0+c=1$. Тогава $c=1$

$f(0,1)=b_2.1+1=0$. Тогава $b_2=1$

$f(1,0)=b_1.1+1=1$. Тогава $b_1=0$

$f(1,1)=a.1.1+0+1.1+1=0$. Тогава $a=0$

$f(x_1,x_2)=x_2+1$

Пример 2

Намерете ПЖ за $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \vee x_2)+\neg x_3$

<u>Решение:</u>

А) Аналитично:

$(x_1 \vee x_2)+\neg x_3= \neg(\neg x_1 . \neg x_2)+ \neg x_3=$
$=((x_1+1).(x_2+1)+1)+(x_3+1)=$

$=x_1.x_2+x_1+x_2+1+1+x_3+1=$

$=\mathbf{x_1.x_2+x_1+x_2+x_3+1}$

Пример 2

Б) Таблично – изчисляваме f за различните стойности на x_1,x_2 и x_3:

$f=a.x_1.x_2.x_3+b_1.x_2.x_3+b_2.x_1.x_3+b_3.x_1.x_2+c_1.x_1+c_2.x_2+c_3.x_3+d$

От таблицата определяме $a=0$; $b_1=0$; $b_2=0$; $b_3=1$; $c_1=1$; $c_2=1$; $c_3=1$; $d=1$.

Тогава: $\mathbf{f=x_1.x_2+x_1+x_2+x_3+1}$

x1	x2	x3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Използвана литература в курса

- D. W. Hoffmann, Theoretische Informatik, Hansen Verlag, 2009
- H. P. Gumm, M. Sommer, Einfuehrung in die Informatik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, 2004
- J. W. Grossman, Discrete Mathematics, Macmillan Pub. Co., 1990
- К. Манев, Увод в дискретната математика, КЛМН, 2005
- Й. Денев, Р. Павлов, Я. Демирович. *Дискретна математика*. Наука и изкуство, София, 1984.

Използвана литература в курса

- Д. Байнов, С. Костадинов, Р. Павлов, Л. Луканова. *Ръководство за решаване на задачи по дискретна математика.* Университетско издателство “Паисий Хилендарски”, Пловдив, 1990.
- В.А. Успенский, *Машина Поста*, Москва, Наука, 1988, ISBN 5-02-013735-9.
- L. Lovasz, J. Pelikan, K. Vesztergombi, *Discrete Mathematics – Elementary and Beyond*, Springer Verlag, New York, 2003, ISBN 0-387-95584-4.

Използвана литература в курса

- E. Bender, S. Williamson, *A Short Course in Discrete Mathematics*, Dover, 2006, ISBN 0-486-43946-1.
- P. Linz, An *Introduction to Formal Languages and Automata,* Jones and Bartlett Publishers, 6-th edition, Jones & Bartlett Publishers, ISBN-13: 9781284077247, 2016
- Kenneth H. Rosen, Kamala Krithivasan, Discrete mathematics and its application, McGraw-Hill Companies, 7-th edition, ISBN 978-0-07-338309-5, 2012

Използвана литература в курса

- Owen D. Byer, Deirdre L. Smeltzer, Kenneth L. Wantz, Journey into Discrete Mathematics, AMS, MAA Press, Providence Rhode Island, ISBN 9781470446963, 2018
- Christopher Rhoades, Introductory Discrete Mathematics, Willford Press, ISBN 1682854922, 9781682854921, 2018
- David Liben-Nowell, Discrete Mathematics for Computer Science, Wiley, 2017, ISBN 1119397197, 9781119397199, 2017.
- http://www.jflap.org/ - софтуерна среда