Изпит по Компютърни Числени Методи

Борис Даскалов, 2001261020

Задача 1

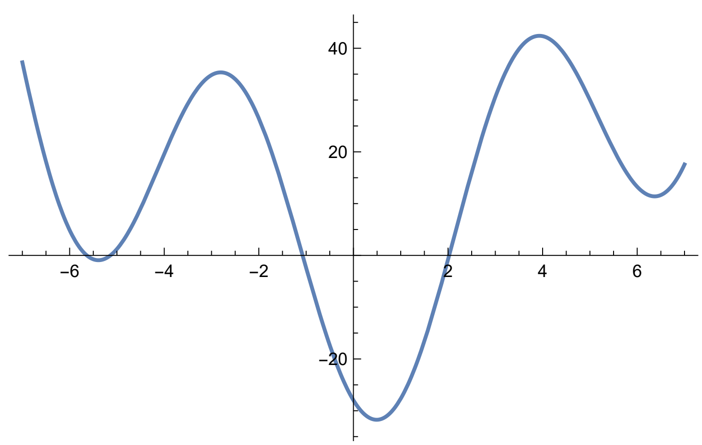
Дадено е уравнението $x^2 - 30\sin\left(x + \frac{3.14}{a+1}\right)$-(a+b) = 0, където a = 2 и b = 0

=> $x^2 - 30\sin\left(x + \frac{3.14}{3}\right) - 2 = 0$

Да се намери общия брой на корените на уравнението

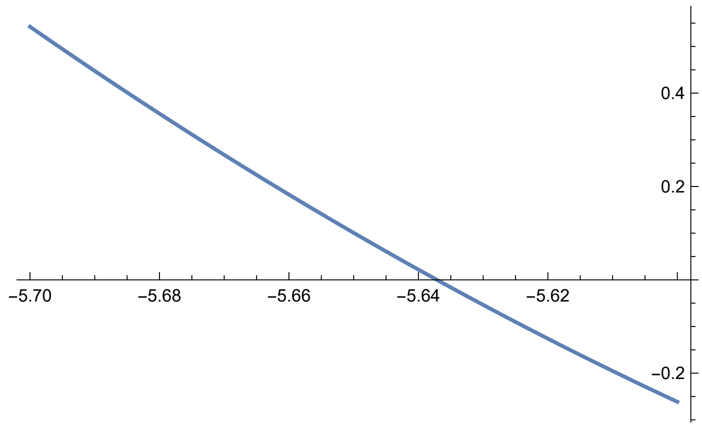
In[ ]:=
```
f[x_] := x^2 - 30 Sin[x + 3.14/3] - 2
Plot[f[x], {x, -7, 7}]
```

Out[ ]=



Първи корен

In[∘]:=
```
Plot[f[x], {x, -5.7, -5.6}]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
f[-5.7]
```
Out[∘]=

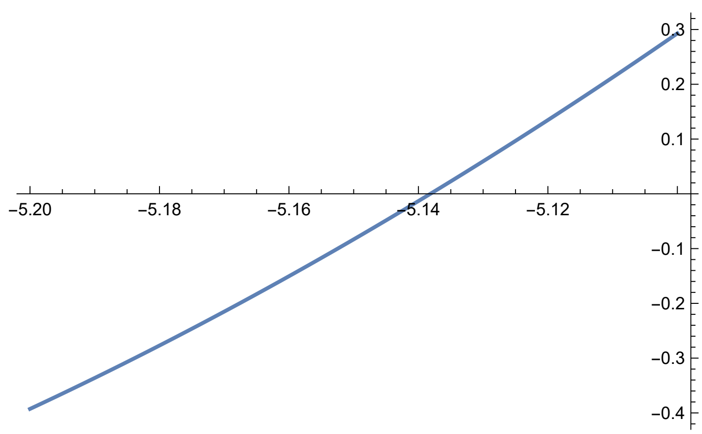
0.542298

In[∘]:=
```
f[-5.6]
```
Out[∘]=

-0.261319

Втори корен

In[∘]:=
```
Plot[f[x], {x, -5.2, -5.1}]
```
Out[∘]=



In[∘]:=
```
f[-5.2]
```
Out[∘]=

-0.392691

In[∘]:= **f[-5.1]**

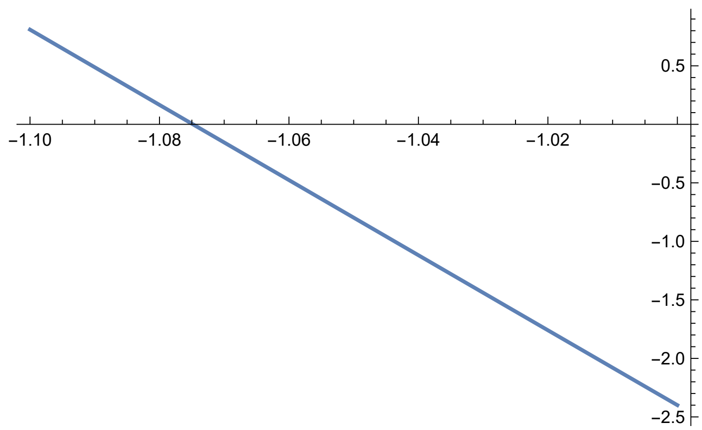
Out[∘]=

0.292874

Трети корен

In[∘]:= **Plot[f[x], {x, -1.1, -1}]**

Out[∘]=



In[∘]:= **f[-1.1]**

Out[∘]=

0.809242

In[∘]:= **f[-1.]**

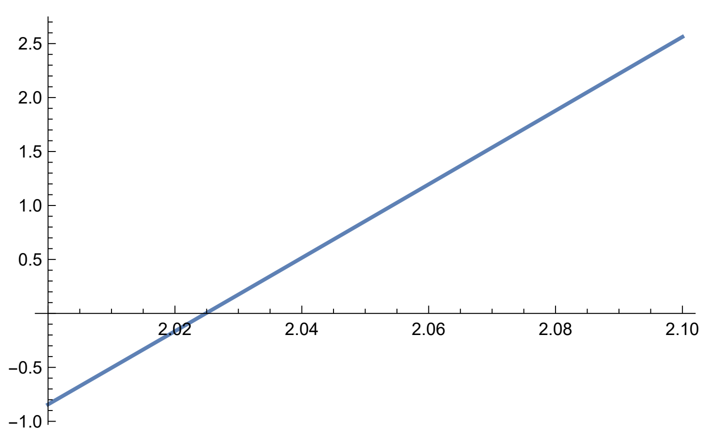
Out[∘]=

-2.39949

Четвърти корен

In[∘]:= **Plot[f[x], {x, 2, 2.1}]**

Out[∘]=



In[∘]:= `f[2.]`

Out[∘]=

`-0.843505`

In[∘]:= `f[2.1]`

Out[∘]=

`2.56222`

Отговор: Общият брой на корените на уравнението е 4.

Първи корен (най-малък) - **[-5.7,-5.6]**.

Втори корен - **[-5.2,-5.1]**.

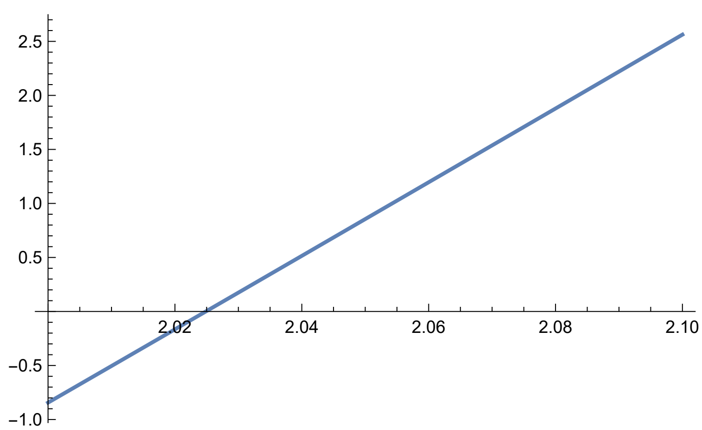
Трети корен - **[-1.1,-1]**.

Четвърти корен (най-голям) - **[2,2.1]**.

Да се локализира най-големия реален корен в интервал [p,q]

In[∘]:= `Plot[f[x], {x, 2, 2.1}]`

Out[∘]=



In[∘]:= `f[2.]`

Out[∘]=

`-0.843505`

In[∘]:= `f[2.1]`

Out[∘]=

`2.56222`

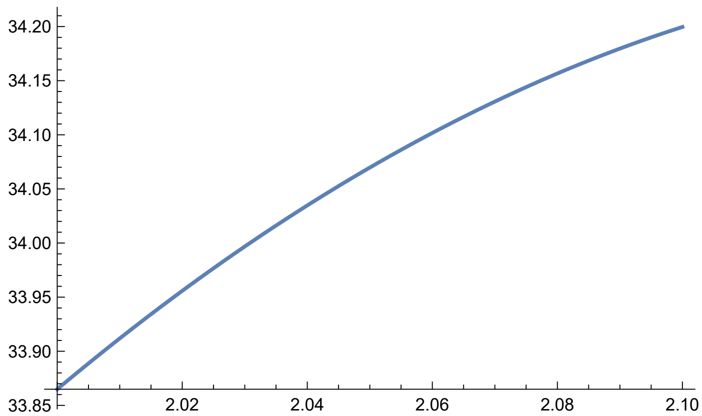
Отговор: Най-големия реален корен се намира в интервал **[2,2.1].**

Да се проверят условията за приложение на метода на Нютон

Проверка на условията за сходимост на метода

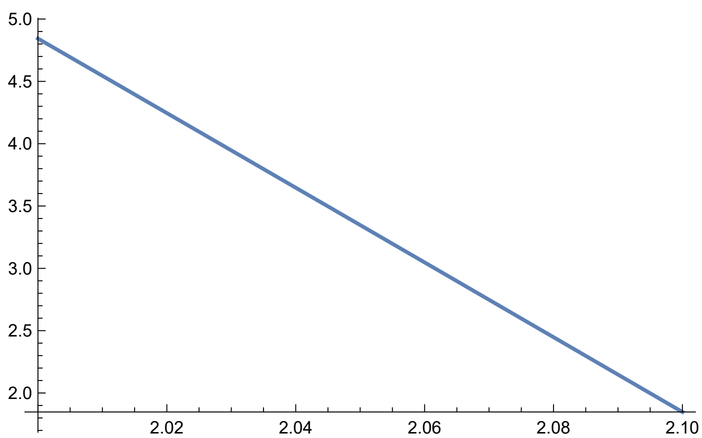
In[ ]:=
```
Plot[f'[x], {x, 2., 2.1}]
```

Out[ ]=



In[ ]:=
```
Plot[f''[x], {x, 2., 2.1}]
```

Out[ ]=



Извод: f'(x) и f''(x) са с постоянни знаци в разглеждания интервал [2; 2.1], следователно методът на Нютон е сходящ.

Определяне на начално приближение

f''(x) > 0, следователно избираме x_0 така че f(x0) >0

In[ ]:=
```
x0 = 2.1
```

Out[ ]=

```
2.1
```

Да се изчисли корена по метода на Нютон с точност 10^{-4}. Представете таблица с изчисленията.

In[◦]:=
```
f[x_] := x^2 - 30 Sin[x + 3.14/3] - 2
x0 = 2.1;
M2 = Abs[f''[2.1]];
m1 = Abs[f'[2.]];
P = M2/(2 m1);
Print["n = ", 0, ", xn = ", x0, ", f(xn) = ", f[x0],
 ", f'(xn) = ", f'[x0]]
epszad = 10^-4;
eps = 1;
For[n = 1, eps > epszad, n++,
 x1 = x0 - f[x0]/f'[x0];
 eps = P * Abs[x1 - x0]^2;
 x0 = x1;
 Print["n = ", n, ", xn = ", x0, ", f(xn) = ", f[x0],
  ", f'(xn) = ", f'[x0], ", εn = ", eps]
]
```

n = 0, x_n = 2.1, f(x_n) = 2.56222, f'(x_n) = 34.1996

n = 1, x_n = 2.02508, f(x_n) = 0.00728792, f'(x_n) = 33.977, ε_n = 0.00015313

n = 2, x_n = 2.02487, f(x_n) = 9.42205×10^{-8}, f'(x_n) = 33.9761, ε_n = 1.25518×10^{-9}

Да се провери колко итерации биха били необходими, ако се използва метода на разполовяването в същия интервал [p,q] за същата стойност.

In[◦]:=
```
Log2[(2.1 - 2.)/10^-04] - 1
```

Out[◦]=

8.96578

Отговор: По метода на раполовяването биха били необходими **9** итерации за достигане на исканата
точност.

Да се направи сравнение кой метод е по-ефективен за избрания интервал.

Отговор: По метода на раполовяването биха били необходими **9** итерации за достигане на исканата
точност.А по метода на Нютон бяха достатъчни **2** итерации. Следователно методът на Нютон е по-ефективен.

Задача 3

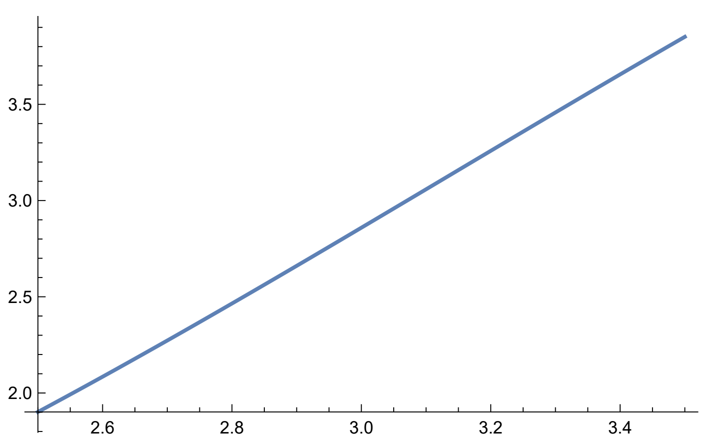
Да се състави таблицата (xi,f(xi)), където xi = a + i(0.5), i = -5,5, f(x) = x - (b + 1) sin x, където a = 2 и b = 0
=> xi = 2 +i(0.5), i = -5,5, f(x) = x - 1sinx

Генериране на данни (съставяне на табличната функция)

```
In[ ]:= xt = Table[2 + i * 0.1, {i, -5, 5}]
Out[ ]=
{1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2., 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5}
```

```
In[ ]:= f[x_] := x - 1 Sin[x]
```

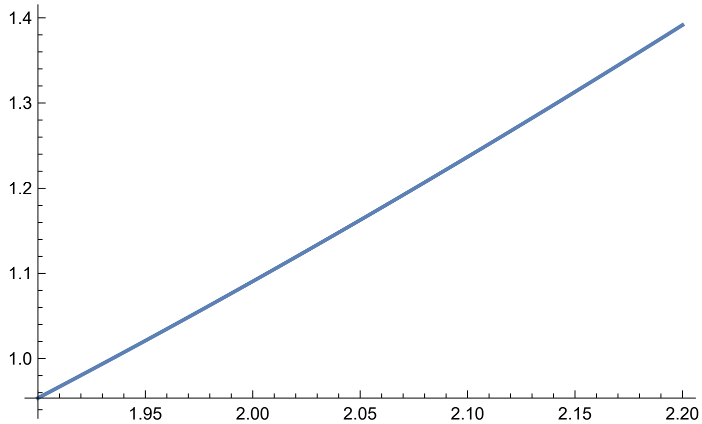
```
In[ ]:= Plot[f[x], {x, 2.5, 3.5}]
Out[ ]=
```



Избирам точките 1.9,2.,2.1,2.2

In[∘]:=
```
grf = Plot[f[x], {x, 1.9, 2.2}];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[grf, grp]
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
points
```

Out[∘]=
```
{{0.5, 2.}, {0.525, 2.00099}, {0.55, 1.99981}, {0.575, 1.99645}, {0.6, 1.99088},
 {0.625, 1.98308}, {0.65, 1.97302}, {0.675, 1.9607}, {0.7, 1.94609}, {0.725, 1.92917},
 {0.75, 1.90993}, {0.775, 1.88835}, {0.8, 1.86441}, {0.825, 1.83811},
 {0.85, 1.80942}, {0.875, 1.77833}, {0.9, 1.74484}, {0.925, 1.70892},
 {0.95, 1.67057}, {0.975, 1.62978}, {1., 1.58654}, {1.025, 1.54083}}
```

Задача 4

Дадена е началната задача за ОДУ:

y’ = y - (2 + a)sinx, y(b) = a + b, x ∊ [b, b + 0.5] където a = 2 и b = 0;

=> y’ = y - 4sinx, y(0) = 2, x ∊ [0, 0.5]

Да се намери точното решение на задачата

Търсим точно решение

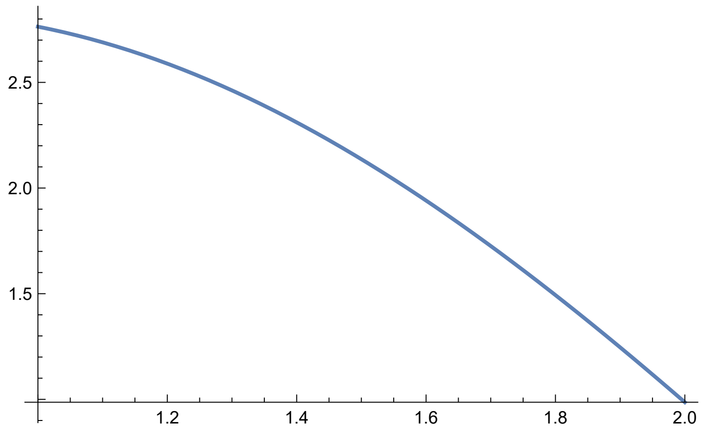
In[∘]:=
```
Clear[x, y]
DSolve[{y'[x] == y[x] - (2 + 2) Sin[x], y[0] == 2}, y[x], x]
```

Out[∘]=
```
{{y[x] → 2 (Cos[x] + Sin[x])}}
```

Визуализация на точно решение

In[∘]:=
```
yt[x_] := 2 (Cos[x] + Sin[x])
Plot[yt[x], {x, 1, 2}]
```

Out[∘]=



По метод на Рунге-Кута (1,1) да се реши приближено задачата със стъпка 0.025. Запишете резултатите в таблица. Сравнете с точното решение.

In[ ]:=
```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 0.; b = 0.5;
x = b;
y = 2.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - (2 + 2) Sin[x]

(*Точно решение*)
yt[x_] := 2 (Cos[x] + Sin[x])
(*Съставяме мрежата*)
h = 0.025; n = (b - a)/h;
Print["Мрежата е с n = ", n, " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална  грешка е ", h^3]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h^2]

(*Намираме неизвестните стойности за yi*)
For[i = 0, i ≤ n, i++,
 k1 = h * f[x, y];
 k2 = h * f[x + h, y + k1];
 Print["i = ", i, ", xi = ", x, ", yi = ", y, ", k1 = ", k1, ", k2 = ",
  k2, ", yточно = ", yt[x], ", Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
 y = y + 1/2 (k1 + k2);
 x = x + h;
 AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

```
Мрежата е с n = 20. и стъпка h = 0.025

Теоретичната локална  грешка е 0.000015625

Теоретичната глобална грешка е 0.000625
```

i = 0, x_i = 0.5, y_i = 2., k1 = 0.00205745, k2 = −0.0000698643, $y_{точно}$ = 2.71402, Истинска грешка = 0.714016

i = 1, x_i = 0.525, y_i = 2.00099, k1 = −0.0000964557, k2 = −0.00224629, $y_{точно}$ = 2.73307, Истинска грешка = 0.73208

i = 2, x_i = 0.55, y_i = 1.99982, k1 = −0.00227316, k2 = −0.00444475, $y_{точно}$ = 2.75042, Истинска грешка = 0.750601

i = 3, x_i = 0.575, y_i = 1.99646, k1 = −0.00447189, k2 = −0.00666446, $y_{точно}$ = 2.76605, Истинска грешка = 0.769591

i = 4, x_i = 0.6, y_i = 1.9909, k1 = −0.00669187, k2 = −0.00890464, $y_{точно}$ = 2.77996, Истинска грешка = 0.789061

i = 5, x_i = 0.625, y_i = 1.9831, k1 = −0.0089323, k2 = −0.0111645, $y_{точно}$ = 2.79212, Истинска грешка = 0.809024

i = 6, x_i = 0.65, y_i = 1.97305, k1 = −0.0111924, k2 = −0.0134433, $y_{точно}$ = 2.80254, Истинска грешка = 0.829492

i = 7, x_i = 0.675, y_i = 1.96073, k1 = −0.0134715, k2 = −0.0157403, $y_{точно}$ = 2.81121, Истинска грешка = 0.850478

i = 8, x_i = 0.7, y_i = 1.94612, k1 = −0.0157686, k2 = −0.0180546, $y_{точно}$ = 2.81812, Истинска грешка = 0.871995

i = 9, x_i = 0.725, y_i = 1.92921, k1 = −0.0180832, k2 = −0.0203856, $y_{точно}$ = 2.82327, Истинска грешка = 0.894057

i = 10, x_i = 0.75, y_i = 1.90998, k1 = −0.0204144, k2 = −0.0227325, $y_{точно}$ = 2.82666, Истинска грешка = 0.916676

i = 11, x_i = 0.775, y_i = 1.88841, k1 = −0.0227615, k2 = −0.0250945, $y_{точно}$ = 2.82827, Истинска грешка = 0.939869

i = 12, x_i = 0.8, y_i = 1.86448, k1 = −0.0251237, k2 = −0.0274709, $y_{точно}$ = 2.82813, Истинска грешка = 0.963648

i = 13, x_i = 0.825, y_i = 1.83818, k1 = −0.0275003, k2 = −0.029861, $y_{точно}$ = 2.82621, Истинска грешка = 0.988029

i = 14, x_i = 0.85, y_i = 1.8095, k1 = −0.0298906, k2 = −0.0322641, $y_{точно}$ = 2.82253, Истинска грешка = 1.01303

i = 15, x_i = 0.875, y_i = 1.77842, k1 = −0.0322938, k2 = −0.0346795, $y_{точно}$ = 2.81708, Истинска грешка = 1.03866

i = 16, x_i = 0.9, y_i = 1.74494, k1 = −0.0347093, k2 = −0.0371064, $y_{точно}$ = 2.80987, Истинска грешка = 1.06494

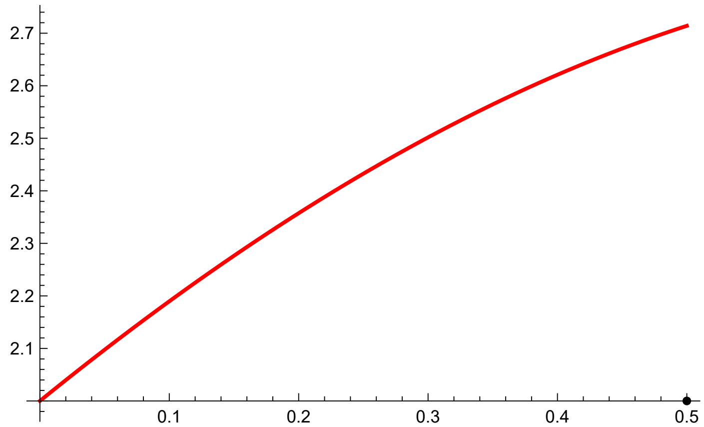
i = 17, x_i = 0.925, y_i = 1.70903, k1 = −0.0371364, k2 = −0.0395443, $y_{точно}$ = 2.80091, Истинска грешка = 1.09188

i = 18, x_i = 0.95, y_i = 1.67069, k1 = −0.0395744, k2 = −0.0419924, $y_{точно}$ = 2.7902, Истинска грешка = 1.11951

i = 19, x_i = 0.975, y_i = 1.6299, k1 = −0.0420226, k2 = −0.0444501, $y_{точно}$ = 2.77774, Истинска грешка = 1.14784

i = 20, x_i = 1., y_i = 1.58667, k1 = −0.0444804, k2 = −0.0469167, $y_{точно}$ = 2.76355, Истинска грешка = 1.17688

Out[ ]=



Каква би била точността при използване на модифицирания метод на Ойлер за поставнеата задача със същата стъпка? Направете сравнени между двата метода.

In[ ]:=
```
(*Въвеждаме условието на задачата*)
a = 0.; b = 0.5;
x = b;
y = 2.;
points = {{x, y}};
f[x_, y_] := y - (2 + 2) Sin[x]

(*Точно решение*)
yt[x_] := 2 (Cos[x] + Sin[x])

(*Съставяме мрежата*)
n = 20; h = (b - a)/n;
Print["Мрежата е с n = ", n , " и стъпка h = ", h]

(*Изчисляваме теоретичната грешка*)
Print["Теоретичната локална грешка  е ", h^2]
Print["Теоретичната глобална грешка е ", h]

(*Намираме неизвестните стойности за y_i*)
For[i = 0, i  ≤ n, i++,
 x12 = x + h/2;
 y12 = y + h/2 f[x, y];
 Print["i = ", i, ", x_i = ", x, ", y_i = ", y, ", f_i = ",
  f[x, y] , ", x_{i+1/2} = ", x12, ", y_{i+1/2} = ", y12, ", f_{i+1/2} = ",
  f[x12, y12] ", y_точно = ", yt[x], ", Истинска грешка = ", Abs[y - yt[x]]];
 y = y + h * f[x12, y12];
 x = x + h;
 AppendTo[points, {x, y}]
]

(*Визуализация на резултатите*)
gryt = Plot[yt[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
grp = ListPlot[points, PlotStyle → Black];
Show[gryt, grp]
```

Мрежата е с n = 20 и стъпка h = 0.025

Теоретичната локална грешка е 0.000625

Теоретичната глобална грешка е 0.025

i = 0, x_i = 0.5, y_i = 2., f_i = 0.0822978, $x_{i+1/2}$ = 0.5125, $y_{i+1/2}$ = 2.00103, $f_{i+1/2}$ = 0.0395984 , $y_{точно}$ = 2.71402, Истинска грешка = 0.714016

i = 1, x_i = 0.525, y_i = 2.00099, f_i = −0.00386206, $x_{i+1/2}$ = 0.5375, $y_{i+1/2}$ = 2.00094, $f_{i+1/2}$ = −0.0470188 , $y_{точно}$ = 2.73307, Истинска грешка = 0.732084

$i = 2$, $x_i = 0.55$, $y_i = 1.99981$, $f_i = -0.0909344$, $x_{i+1/2} = 0.5625$, $y_{i+1/2} = 1.99868$, $f_{i+1/2} = -0.134533$, $y_{точно} = 2.75042$, Истинска грешка = 0.750609

$i = 3$, $x_i = 0.575$, $y_i = 1.99645$, $f_i = -0.178888$, $x_{i+1/2} = 0.5875$, $y_{i+1/2} = 1.99422$, $f_{i+1/2} = -0.222913$, $y_{точно} = 2.76605$, Истинска грешка = 0.769603

$i = 4$, $x_i = 0.6$, $y_i = 1.99088$, $f_i = -0.267692$, $x_{i+1/2} = 0.6125$, $y_{i+1/2} = 1.98753$, $f_{i+1/2} = -0.312127$, $y_{точно} = 2.77996$, Истинска грешка = 0.789078

$i = 5$, $x_i = 0.625$, $y_i = 1.98308$, $f_i = -0.357314$, $x_{i+1/2} = 0.6375$, $y_{i+1/2} = 1.97861$, $f_{i+1/2} = -0.402145$, $y_{точно} = 2.79212$, Истинска грешка = 0.809046

$i = 6$, $x_i = 0.65$, $y_i = 1.97302$, $f_i = -0.447724$, $x_{i+1/2} = 0.6625$, $y_{i+1/2} = 1.96743$, $f_{i+1/2} = -0.492935$, $y_{точно} = 2.80254$, Истинска грешка = 0.829519

$i = 7$, $x_i = 0.675$, $y_i = 1.9607$, $f_i = -0.538891$, $x_{i+1/2} = 0.6875$, $y_{i+1/2} = 1.95396$, $f_{i+1/2} = -0.584466$, $y_{точно} = 2.81121$, Истинска грешка = 0.85051

$i = 8$, $x_i = 0.7$, $y_i = 1.94609$, $f_i = -0.630784$, $x_{i+1/2} = 0.7125$, $y_{i+1/2} = 1.9382$, $f_{i+1/2} = -0.676709$, $y_{точно} = 2.81812$, Истинска грешка = 0.872033

$i = 9$, $x_i = 0.725$, $y_i = 1.92917$, $f_i = -0.723373$, $x_{i+1/2} = 0.7375$, $y_{i+1/2} = 1.92013$, $f_{i+1/2} = -0.769632$, $y_{точно} = 2.82327$, Истинска грешка = 0.894101

$i = 10$, $x_i = 0.75$, $y_i = 1.90993$, $f_i = -0.816627$, $x_{i+1/2} = 0.7625$, $y_{i+1/2} = 1.89972$, $f_{i+1/2} = -0.863205$, $y_{точно} = 2.82666$, Истинска грешка = 0.916727

$i = 11$, $x_i = 0.775$, $y_i = 1.88835$, $f_i = -0.910516$, $x_{i+1/2} = 0.7875$, $y_{i+1/2} = 1.87697$, $f_{i+1/2} = -0.957399$, $y_{точно} = 2.82827$, Истинска грешка = 0.939926

$i = 12$, $x_i = 0.8$, $y_i = 1.86441$, $f_i = -1.00501$, $x_{i+1/2} = 0.8125$, $y_{i+1/2} = 1.85185$, $f_{i+1/2} = -1.05218$, $y_{точно} = 2.82813$, Истинска грешка = 0.963713

$i = 13$, $x_i = 0.825$, $y_i = 1.83811$, $f_i = -1.10008$, $x_{i+1/2} = 0.8375$, $y_{i+1/2} = 1.82436$, $f_{i+1/2} = -1.14753$, $y_{точно} = 2.82621$, Истинска грешка = 0.988101

$i = 14$, $x_i = 0.85$, $y_i = 1.80942$, $f_i = -1.1957$, $x_{i+1/2} = 0.8625$, $y_{i+1/2} = 1.79447$, $f_{i+1/2} = -1.24341$, $y_{точно} = 2.82253$, Истинска грешка = 1.01311

$i = 15$, $x_i = 0.875$, $y_i = 1.77833$, $f_i = -1.29184$, $x_{i+1/2} = 0.8875$, $y_{i+1/2} = 1.76219$, $f_{i+1/2} = -1.3398$, $y_{точно} = 2.81708$, Истинска грешка = 1.03875

$i = 16$, $x_i = 0.9$, $y_i = 1.74484$, $f_i = -1.38847$, $x_{i+1/2} = 0.9125$, $y_{i+1/2} = 1.72748$, $f_{i+1/2} = -1.43666$, $y_{точно} = 2.80987$, Истинска грешка = 1.06503

$i = 17$, $x_i = 0.925$, $y_i = 1.70892$, $f_i = -1.48556$, $x_{i+1/2} = 0.9375$, $y_{i+1/2} = 1.69035$, $f_{i+1/2} = -1.53397$, $y_{точно} = 2.80091$, Истинска грешка = 1.09199

$i = 18$, $x_i = 0.95$, $y_i = 1.67057$, $f_i = -1.58309$, $x_{i+1/2} = 0.9625$, $y_{i+1/2} = 1.65079$, $f_{i+1/2} = -1.63171$, $y_{точно} = 2.7902$, Истинска грешка = 1.11962

$i = 19$, $x_i = 0.975$, $y_i = 1.62978$, $f_i = -1.68103$, $x_{i+1/2} = 0.9875$, $y_{i+1/2} = 1.60877$, $f_{i+1/2} = -1.72984$, $y_{точно} = 2.77774$, Истинска грешка = 1.14796

$i = 20$, $x_i = 1.$, $y_i = 1.58654$, $f_i = -1.77935$, $x_{i+1/2} = 1.0125$, $y_{i+1/2} = 1.56429$, $f_{i+1/2} = -1.82834$, $y_{точно} = 2.76355$, Истинска грешка = 1.17701

Out[•]=