Метод на разполовяването

Задача: Дадено е уравнението:

x^5+103 sin x -34 x^3 - 23 = 0

1. Да се визуализира функцията и да се определят броя на корените.
2. Да се локализира един от корените.
3. Уточнете локализирания корен по **метода на разполовяването**.
4. Оценка на грешката
5. Колко биха били броя на итерациите за достигане на точност 0.0001 по **метода на разполовяването** използвайки интервала от локализацията на корена?

In[ ]:=
```
f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
```

In[ ]:=
```
f[x]
```

Out[ ]=

$-23 - 34 x^3 + x^5 + 103 \mathrm{Sin}[x]$

1. Да се визуализира функцията и да се определят броя на корените.

2. Да се локализира един от корените.

3. Уточнете локализирания корен по **метода на разполовяването**.

Уточнение за цикли и условни преходи

```
For[]
```

In[1]:=
```
For[i = 0, i < 4, i++, Print[i]]
```

```
0
1
2
3
```

In[2]:=
```
i
```

Out[2]= 4

In[3]:=
```
If[i < 2, Print["малко"], Print["голямо"]]
```

```
голямо
```

In[4]:=
```
For[i = 0, i < 4, i++,
 (*тяло на цикъла*)
 Print[i];
 If[i < 2, Print["малко"], Print["голямо"]]
]
```

```
0
малко
1
малко
2
голямо
3
голямо
```

Съставяне на програмен код, реализиращ **метода на разполовяването**

основен код:

In[40]:=
```
f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
a = -6.; b = -5.;
For[n = 0, n ≤ 3, n++,
 Print["n = ", n, " a_n = ", a, " b_n = ", b,
  " m_n = ", m = (a + b)/2, " f(m_n) = ", f[m], " ε_n = ", (b - a)/2];
 If[f[m] > 0, b = m, a = m]
]
```

$n = 0\ a_n = -6.\ b_n = -5.\ m_n = -5.5\ f(m_n) = 673.577\ \varepsilon_n = 0.5$

$n = 1\ a_n = -6.\ b_n = -5.5\ m_n = -5.75\ f(m_n) = 207.58\ \varepsilon_n = 0.25$

$n = 2\ a_n = -6.\ b_n = -5.75\ m_n = -5.875\ f(m_n) = -86.6728\ \varepsilon_n = 0.125$

$n = 3\ a_n = -5.875\ b_n = -5.75\ m_n = -5.8125\ f(m_n) = 65.9004\ \varepsilon_n = 0.0625$

In[39]:=
```
f[-5.5]
```

Out[39]=
```
673.577
```

Извод: На третата стъпка сме получили приближено решение -5.81 с точност 0.0625

пускаме с повече итерации:

```
In[43]:= f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
a = -6.; b = -5.;
For[n = 0, n ≤ 27, n++,
 Print["n = ", n, " a_n = ", a, " b_n = ", b,
  " m_n = ", m = (a + b)/2, " f(m_n) = ", f[m], " ε_n = ", (b - a)/2];
 If[f[m] > 0, b = m, a = m]
]
```

n = 0 a_n = -6. b_n = -5. m_n = -5.5 $f(m_n)$ = 673.577 ε_n = 0.5

n = 1 a_n = -6. b_n = -5.5 m_n = -5.75 $f(m_n)$ = 207.58 ε_n = 0.25

n = 2 a_n = -6. b_n = -5.75 m_n = -5.875 $f(m_n)$ = -86.6728 ε_n = 0.125

n = 3 a_n = -5.875 b_n = -5.75 m_n = -5.8125 $f(m_n)$ = 65.9004 ε_n = 0.0625

n = 4 a_n = -5.875 b_n = -5.8125 m_n = -5.84375 $f(m_n)$ = -8.99803 ε_n = 0.03125

n = 5 a_n = -5.84375 b_n = -5.8125 m_n = -5.82813 $f(m_n)$ = 28.7949 ε_n = 0.015625

n = 6 a_n = -5.84375 b_n = -5.82813 m_n = -5.83594 $f(m_n)$ = 9.98477 ε_n = 0.0078125

n = 7 a_n = -5.84375 b_n = -5.83594 m_n = -5.83984 $f(m_n)$ = 0.515009 ε_n = 0.00390625

n = 8 a_n = -5.84375 b_n = -5.83984 m_n = -5.8418 $f(m_n)$ = -4.2361 ε_n = 0.00195313

n = 9 a_n = -5.8418 b_n = -5.83984 m_n = -5.84082 $f(m_n)$ = -1.85919 ε_n = 0.000976563

n = 10 a_n = -5.84082 b_n = -5.83984 m_n = -5.84033 $f(m_n)$ = -0.671752 ε_n = 0.000488281

n = 11 a_n = -5.84033 b_n = -5.83984 m_n = -5.84009 $f(m_n)$ = -0.0782872 ε_n = 0.000244141

n = 12 a_n = -5.84009 b_n = -5.83984 m_n = -5.83997 $f(m_n)$ = 0.218382 ε_n = 0.00012207

n = 13 a_n = -5.84009 b_n = -5.83997 m_n = -5.84003 $f(m_n)$ = 0.0700526 ε_n = 0.0000610352

n = 14 a_n = -5.84009 b_n = -5.84003 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = -0.00411599 ε_n = 0.0000305176

n = 15 a_n = -5.84006 b_n = -5.84003 m_n = -5.84004 $f(m_n)$ = 0.0329687 ε_n = 0.0000152588

n = 16 a_n = -5.84006 b_n = -5.84004 m_n = -5.84005 $f(m_n)$ = 0.0144264 ε_n = 7.62939×10^{-6}

n = 17 a_n = -5.84006 b_n = -5.84005 m_n = -5.84005 $f(m_n)$ = 0.00515523 ε_n = 3.8147×10^{-6}

n = 18 a_n = -5.84006 b_n = -5.84005 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = 0.000519628 ε_n = 1.90735×10^{-6}

n = 19 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = -0.00179818 ε_n = 9.53674×10^{-7}

n = 20 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = -0.000639275 ε_n = 4.76837×10^{-7}

n = 21 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = -0.0000598237 ε_n = 2.38419×10^{-7}

n = 22 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = 0.000229902 ε_n = 1.19209×10^{-7}

n = 23 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = 0.0000850391 ε_n = 5.96046×10^{-8}

n = 24 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = 0.0000126077 ε_n = 2.98023×10^{-8}

n = 25 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = -0.000023608 ε_n = 1.49012×10^{-8}

n = 26 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = -5.50016×10^{-6} ε_n = 7.45058×10^{-9}

n = 27 a_n = -5.84006 b_n = -5.84006 m_n = -5.84006 $f(m_n)$ = 3.55377×10^{-6} ε_n = 3.72529×10^{-9}

пускаме с повече итерации и с повече значещи цифри в резултатите:

```
In[49]:= f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
a = -6.; b = -5.;
For[n = 0, n ≤ 27, n++,
 Print["n = ", n, " a_n = ", SetPrecision[a, 15], " b_n = ", SetPrecision[b, 15],
  " m_n = ", SetPrecision[m = (a + b)/2, 15], " f(m_n) = ", f[m], " ε_n = ", (b - a)/2];
 If[f[m] > 0, b = m, a = m]
]
```

n = 0 a_n = −6.00000000000000 b_n = −5.00000000000000
m_n = −5.50000000000000 $f(m_n)$ = 673.577 ε_n = 0.5

n = 1 a_n = −6.00000000000000 b_n = −5.50000000000000
m_n = −5.75000000000000 $f(m_n)$ = 207.58 ε_n = 0.25

n = 2 a_n = −6.00000000000000 b_n = −5.75000000000000
m_n = −5.87500000000000 $f(m_n)$ = −86.6728 ε_n = 0.125

n = 3 a_n = −5.87500000000000 b_n = −5.75000000000000
m_n = −5.81250000000000 $f(m_n)$ = 65.9004 ε_n = 0.0625

n = 4 a_n = −5.87500000000000 b_n = −5.81250000000000
m_n = −5.84375000000000 $f(m_n)$ = −8.99803 ε_n = 0.03125

n = 5 a_n = −5.84375000000000 b_n = −5.81250000000000
m_n = −5.82812500000000 $f(m_n)$ = 28.7949 ε_n = 0.015625

n = 6 a_n = −5.84375000000000 b_n = −5.82812500000000
m_n = −5.83593750000000 $f(m_n)$ = 9.98477 ε_n = 0.0078125

n = 7 a_n = −5.84375000000000 b_n = −5.83593750000000
m_n = −5.83984375000000 $f(m_n)$ = 0.515009 ε_n = 0.00390625

n = 8 a_n = −5.84375000000000 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.84179687500000 $f(m_n)$ = −4.2361 ε_n = 0.00195313

n = 9 a_n = −5.84179687500000 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.84082031250000 $f(m_n)$ = −1.85919 ε_n = 0.000976563

n = 10 a_n = −5.84082031250000 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.84033203125000 $f(m_n)$ = −0.671752 ε_n = 0.000488281

n = 11 a_n = −5.84033203125000 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.84008789062500 $f(m_n)$ = −0.0782872 ε_n = 0.000244141

n = 12 a_n = −5.84008789062500 b_n = −5.83984375000000
m_n = −5.83996582031250 $f(m_n)$ = 0.218382 ε_n = 0.00012207

n = 13 a_n = −5.84008789062500 b_n = −5.83996582031250
m_n = −5.84002685546875 $f(m_n)$ = 0.0700526 ε_n = 0.0000610352

n = 14 a_n = −5.84008789062500 b_n = −5.84002685546875
m_n = −5.84005737304688 $f(m_n)$ = −0.00411599 ε_n = 0.0000305176

n = 15 a_n = −5.84005737304688 b_n = −5.84002685546875
m_n = −5.84004211425781 $f(m_n)$ = 0.0329687 ε_n = 0.0000152588

n = 16 a_n = −5.84005737304688 b_n = −5.84004211425781
m_n = −5.84004974365234 $f(m_n)$ = 0.0144264 ε_n = 7.62939×10^{-6}

n = 17 a_n = −5.84005737304688 b_n = −5.84004974365234
m_n = −5.84005355834961 $f(m_n)$ = 0.00515523 ε_n = 3.8147×10^{-6}

n = 18 a_n = −5.84005737304688 b_n = −5.84005355834961
m_n = −5.84005546569824 $f(m_n)$ = 0.000519628 ε_n = 1.90735×10^{-6}

n = 19 a_n = −5.84005737304688 b_n = −5.84005546569824
m_n = −5.84005641937256 $f(m_n)$ = −0.00179818 ε_n = 9.53674×10^{-7}

n = 20 a_n = −5.84005641937256 b_n = −5.84005546569824
m_n = −5.84005594253540 $f(m_n)$ = −0.000639275 ε_n = 4.76837×10^{-7}

n = 21 a_n = −5.84005594253540 b_n = −5.84005546569824
m_n = −5.84005570411682 $f(m_n)$ = −0.0000598237 ε_n = 2.38419×10^{-7}

n = 22 a_n = −5.84005570411682 b_n = −5.84005546569824
m_n = −5.84005558490753 $f(m_n)$ = 0.000229902 ε_n = 1.19209×10^{-7}

n = 23 a_n = −5.84005570411682 b_n = −5.84005558490753
m_n = −5.84005564451218 $f(m_n)$ = 0.0000850391 ε_n = 5.96046×10^{-8}

n = 24 a_n = −5.84005570411682 b_n = −5.84005564451218
m_n = −5.84005567431450 $f(m_n)$ = 0.0000126077 ε_n = 2.98023×10^{-8}

n = 25 a_n = −5.84005570411682 b_n = −5.84005567431450
m_n = −5.84005568921566 $f(m_n)$ = −0.000023608 ε_n = 1.49012×10^{-8}

n = 26 a_n = −5.84005568921566 b_n = −5.84005567431450
m_n = −5.84005568176508 $f(m_n)$ = -5.50016×10^{-6} ε_n = 7.45058×10^{-9}

n = 27 a_n = −5.84005568176508 b_n = −5.84005567431450
m_n = −5.84005567803979 $f(m_n)$ = 3.55377×10^{-6} ε_n = 3.72529×10^{-9}

4. Оценка на грешката

цикъл при достигане на определена предварително зададена точност (със стоп-критерий):

In[52]:=
```
f[x_] := x^5 + 103 Sin[x] - 34 x^3 - 23
a = -6.; b = -5.;
epszad = 0.0001;
eps = Infinity; (*стойност по-голяма от зададената грешка*)
For[n = 0, eps > epszad, n++,
 Print["n = ", n, " a_n = ", a, " b_n = ", b,
  " m_n = ", m = (a + b)/2, " f(m_n) = ", f[m], " ε_n = ", eps = (b - a)/2];
 If[f[m] > 0, b = m, a = m]
]
```

n = 0 a_n = −6. b_n = −5. m_n = −5.5 $f(m_n)$ = 673.577 ε_n = 0.5

n = 1 a_n = −6. b_n = −5.5 m_n = −5.75 $f(m_n)$ = 207.58 ε_n = 0.25

n = 2 a_n = −6. b_n = −5.75 m_n = −5.875 $f(m_n)$ = −86.6728 ε_n = 0.125

n = 3 a_n = −5.875 b_n = −5.75 m_n = −5.8125 $f(m_n)$ = 65.9004 ε_n = 0.0625

n = 4 a_n = −5.875 b_n = −5.8125 m_n = −5.84375 $f(m_n)$ = −8.99803 ε_n = 0.03125

n = 5 a_n = −5.84375 b_n = −5.8125 m_n = −5.82813 $f(m_n)$ = 28.7949 ε_n = 0.015625

n = 6 a_n = −5.84375 b_n = −5.82813 m_n = −5.83594 $f(m_n)$ = 9.98477 ε_n = 0.0078125

n = 7 a_n = −5.84375 b_n = −5.83594 m_n = −5.83984 $f(m_n)$ = 0.515009 ε_n = 0.00390625

n = 8 a_n = −5.84375 b_n = −5.83984 m_n = −5.8418 $f(m_n)$ = −4.2361 ε_n = 0.00195313

n = 9 a_n = −5.8418 b_n = −5.83984 m_n = −5.84082 $f(m_n)$ = −1.85919 ε_n = 0.000976563

n = 10 a_n = −5.84082 b_n = −5.83984 m_n = −5.84033 $f(m_n)$ = −0.671752 ε_n = 0.000488281

n = 11 a_n = −5.84033 b_n = −5.83984 m_n = −5.84009 $f(m_n)$ = −0.0782872 ε_n = 0.000244141

n = 12 a_n = −5.84009 b_n = −5.83984 m_n = −5.83997 $f(m_n)$ = 0.218382 ε_n = 0.00012207

n = 13 a_n = −5.84009 b_n = −5.83997 m_n = −5.84003 $f(m_n)$ = 0.0700526 ε_n = 0.0000610352

Колко биха били броя на итерациите за достигане на точност 0.0001 по **метода на разполовяването** използвайки интервала от локализацията на корена?

In[57]:= $$\mathrm{Log2}\left[\frac{-5-(-6)}{0.0001}\right]-1$$

Out[57]=

12.2877

Извод: Най-малкото цяло число, което е по-голямо от 12.28 е 13. Следователно са необходими минимум 13 итерации за достигане на исканата точност.