Marathon
第一周第1回

学籍番号：t160d081
氏名：土田康平

2019年4月12日 締切
2019年4月10日 提出

Abstract

行列マラソン
証明に文中に書かれていない Exercise を用いる際は，"Exercise"を省いて番号のみを示す.

1 l_2-norm

1.1 Definition

The l_2-norm of vectors is defined as

$$\|\boldsymbol{x}\| \coloneqq \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle} \tag{1}$$

where

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^*.$$

1.2 Exercise: 2.2.2.

Show that, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2. \tag{2}$$

Proof.

$$\text{LHS} = \left(\sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}\right)^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \text{RHS}.$$

□

1.3 Exercise: 2.2.4

For $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$,

$$\|a\boldsymbol{x}\| = |a|\|\boldsymbol{x}\|. \tag{3}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \text{LHS} = \sqrt{\langle a\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{x} \rangle} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a^2 x_i^2} \\ &= \sqrt{a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |a|\|\boldsymbol{x}\| = \text{RHS}. \end{aligned}$$

□

1.4 Exercise: 2.2.6

It is known that $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ is hold only if $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Show this fact.

Proof. 背理法を用いる．
$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{x}$ を考える．このとき，$\exists k \in \mathbb{N}_n, x_k \neq 0$ であることを考えると，

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \geq \sqrt{x_k^2} = |x_k| > 0$$

となり，これは $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ という仮定と矛盾する．よって，命題は真. □

1.5 Exercise: 2.2.8

Let $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Derive the equality:

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle. \tag{4}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2) + \sum_{i=1}^{n} (y_i^2) + 2\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i) \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \text{RHS}.
\end{aligned}$$

□

1.6 Exercise: 2.2.10

Let $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Show that

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|. \tag{5}$$

Proof. 場合分けを用いる．

- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle < 0$ の場合
  $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0, \|\boldsymbol{y}\| \geq 0$ であるので，明らか．
- $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \geq 0$ の場合
  $a \in \mathbb{R}$ とする．

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y} \rangle &= \sum_{i=1}^{n} (x_i + a y_i)(x_i + a y_i) && (6) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + a^2 y_i^2 + 2a x_i y_i \right) && (7) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2a \sum_{i=1}^{n} x_i y_i && (8) \\
&= \|\boldsymbol{y}\|^2 a^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle a + \|\boldsymbol{x}\|^2 && (9)
\end{aligned}$$

このとき，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \geq 0$ であるので，(9) ≥ 0 となる．よって，(9) 式の判別式 D とすると

$$\begin{aligned}
D = 4\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 - 4\|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq 0 \\
\therefore \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle^2 \leq (\|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|)^2 \\
\therefore \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|.
\end{aligned}$$

以上より，命題は全ての a について成り立つ．

以上より，いずれの場合も成り立つ． □

1.7 Exercise: 2.2.14

Let $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ be $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$. Show that

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq 1. \tag{10}$$

Proof. (5) 式より，

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &\leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &\leq 1 * 1 \\
\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &\leq 1.
\end{aligned}$$

□