Matrix Algebra Marathon
$\boldsymbol{\ell}_2$-Norm
190412

Kenya Tajima

2019 年 4 月 10 日

1 l_2-Norm

1.1 Exercise-2.2.2

ここでは,

$$\boxed{\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{1}$$

を示す．左辺より,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|^2 &\overset{2.2.1}{=} \left(\sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}\right)^2 && (2)\\
&= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle && (3)\\
&\overset{2.2.2}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 && (4)
\end{aligned}$$

よって題意は示せた．

1.2 Exercise-2.2.4

ここでは,

$$\boxed{\|a\boldsymbol{x}\| = |a|\|\boldsymbol{x}\|} \tag{5}$$

を示す．左辺より,

$$\begin{aligned}
\|a\boldsymbol{x}\| &\overset{2.2.1}{=} \sqrt{\langle a\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{x} \rangle} && (6)\\
&\overset{2.1.4}{=} \sqrt{a^2 \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} && (7)\\
&= |a|\sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} && (8)\\
&\overset{2.2.1}{=} |a|\|\boldsymbol{x}\| && (9)
\end{aligned}$$

よって題意は示せた．

1.3 Exercise-2.2.6

ここでは,

$$\boxed{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \|\boldsymbol{x}\| = 0} \tag{10}$$

となることを背理法を用いて示す.

$\exists k \in \mathbb{N}_n$ を用いて，$\boldsymbol{x}$ の要素の一つである $\boldsymbol{x}_k \neq 0$ であると仮定する．このとき，

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_k^2} = \|x_k\| > 0 \tag{11}$$

となる．したがって，$\boldsymbol{x}_k \neq 0$ であるとき矛盾する．よって題意は示せた.

1.4 Exercise-2.2.8

ここでは,

$$\boxed{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle} \tag{12}$$

を示す．左辺より，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &\overset{2.2.2}{=} \sum_{i=1}^{n} (x+y)_i^2 && (13)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 + y_i^2 + 2x_i y_i\right)^2 && (14)\\
&\overset{2.2.1/2.2.2}{=} \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle && (15)
\end{aligned}$$

となる．よって題意は示せた.

1.5 Exercise-2.2.10

ここでは,

$$\boxed{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \tag{16}$$

が成り立つことを示す.

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のとき，両辺ともに 0 であるから等号が成り立つ.

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ のとき，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を用いて $f(t) = \|t\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$ と立式する．この式に対し，

$$\begin{aligned}
\|t\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (tx_i - y_i)^2 && (17)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(t^2 x_i^2 - 2x_i y_i t + y_i^2\right) && (18)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 && (19)\\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 t^2 - 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle t + \|\boldsymbol{y}\|^2 && (20)
\end{aligned}$$

という変換を施すと，非負の 2 次関数の式とみなすことができる．よって，この 2 次関数の判別式は,

$$\frac{D}{4} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 \leq 0$$

と，0 以下でなくてはならない．よって，

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 \|\boldsymbol{y}\|^2 && (21) \\ |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| &\leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| && (22) \end{aligned}$$

である．したがって，左辺の絶対値を省いても結果は変わらないので，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|.$$

よって題意は示せた．

1.6 Exercise-2.2.14

ここでは，

$$\boxed{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq 1 \qquad (23)}$$

が成り立つことを示す．

まず，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ はともに単位ベクトルであるから $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = 1$ が成り立つ．これより，(1.5) 項で示した不等式を用いると，

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &\leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| && (24) \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &\leq 1 \cdot 1 && (25) \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle &\leq 1 && (26) \\ & && (27) \end{aligned}$$

と変形できる．よって題意は示せた．