# 3 年後期ゼミ資料

齊藤 隆斗
j2200071@gunma-u.ac.jp

## I. Introduction

Definitions 1.1
n 次正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n \tag{1}$$

を満たす正方行列 $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在するとき $A$ は可逆行列という. ただし、$E_n$ は $n \times n$ の単位行列である.

## II. Exercise

### A. 問題 6

真か偽か(真ならば理由を説明し、偽ならば反例をあげよ)

(a) 正方行列には自由変数はない.
偽: (反例)
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について考える.
$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, とする.
ここで $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く.
$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+4x_2 \end{pmatrix}$ であるから、
$\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解けば良い. これを解くと

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる. ただし、$c \in \mathbb{R}$ である. ここで、$c$ は自由変数であるから、これは命題(a)に対する反例である.

(b) 可逆行列には自由変数はない.
真: (証明)
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする. ここで $A$ は可逆行列とする. $A$ は可逆行列であるから、ある $A^{-1}$ が存在して、

$$A^{-1}A = E_n \tag{3}$$

が成り立つ.
ここで、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

を解く. 左から (4) の両辺に $A^{-1}$ をかけると

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \tag{5}$$

となる. ここで、$A^{-1}, \boldsymbol{b}$ はそれぞれ定数行列、定数ベクトルであるから、 解 $\boldsymbol{x}$ はただ一つに定まり、自由変数を含まない.

(c) $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々$n$個である.

(d) $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々$m$個である.

## References