3 年後期ゼミ資料

齊藤 隆斗
j2200071@gunma-u.ac.jp

I. Introduction

Definition 1.1

n 次正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ に対して、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n \tag{1}$$

を満たす正方行列 $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が存在するとき A は可逆行列という. ただし、E_n は $n \times n$ の単位行列である.

Definition 1.2

- 階段行列とは以下のような行列 B のことである.

ある整数 $r \geq 1$ があって、B の第 1 行から第 r 行までの各行は **ピボット** とよばれる数 1 を含み、 次の条件 (1) - (3) を満たす.

(1) B の第(r + 1)行から最後の行までの各行において、すべての成分が 0.

(2) B の第 1 行から第 r 行までの各行では、ピボットより左の成分はすべて 0.

(3) B の第 i 行 のピボットが含まれる列の番号を p_i とすると、$p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ であり、B の第 p_i 列ではピボット以外の成分はすべて 0.

- ここで、零行列 O も階段行列であるとする.

例: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

II. Exercise [1]

A. *Exercise 6*

真か偽か(真ならば理由を説明し、偽ならば反例をあげよ)

(a) 正方行列には自由変数はない.

偽: (反例)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について考える.

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, とする.

ここで $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を解く.

$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+4x_2 \end{pmatrix}$ であるから、

$\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解けば良い. これを解くと

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる. ただし、$c \in \mathbb{R}$ である. ここで、c は自由変数であるから、これは命題(a)に対する反例である.

(b) 可逆行列には自由変数はない.

真: (理由)

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ とする. ここで A は可逆行列とする. A は可逆行列であるから、ある A^{-1} が存在して、

$$A^{-1}A = E_n \tag{3}$$

が成り立つ.

ここで、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{4}$$

を解く. 左から (4) の両辺に A^{-1} をかけると

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \tag{5}$$

となる. ここで、$A^{-1}, \boldsymbol{b}$ はそれぞれ定数行列、定数ベクトルであるから、解 $\boldsymbol{x}$ はただ一つに定まり、自由変数を含まない.

(c) $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々n個である.

真: (理由)

Definition 1.2 の (3) より、1 つの列に複数個のピボットは存在しないため、行列のそれぞれの列に存在するピボットの数は1以下となる. 行列の列の数は n であるから $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々n個である.

(d) $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々m個である.

真: (理由)

Definition 1.2 の (2) より、1 つの行に複数個のピボットは存在しない. 実際、1 つの行に複数個のピボットが存在するとする. この行ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする. $\boldsymbol{v}$ の１つ目のピボットを $\boldsymbol{v}_i$ とする. ここで $i < j$ を満たすピボットを $\boldsymbol{v}_j$ とする. しかしこれは、$\boldsymbol{v_j}$ の左にピボット $\boldsymbol{v_i}$ が存在しており、Definition 1.2 の (2) に矛盾する. よって、1 つの行に複数個のピボットは存在しないので、それぞれの行に含まれるピボットの個数は 1 以下となる. 行列の行の数は m であるから、$m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々 m 個である.

References

[1] ギルバート・ストラング, “ストラング: 教養の線形代数,” 2020.