

3 年後期ゼミ資料

齊藤 隆斗

j2200071@gunma-u.ac.jp

I. INTRODUCTION

Definition 1.1

n 次正方行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ に対して、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n \quad (1)$$

を満たす正方行列 $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在するとき A は可逆行列という。ただし、 E_n は $n \times n$ の単位行列である。

Definition 1.2

・ 階段行列とは以下のような行列 B のことである。

ある整数 $r \geq 1$ があって、 B の第 1 行から第 r 行までの各行はピボットとよばれる数 1 を含み、次の条件 (1) - (3) を満たす。

(1) B の第 $(r+1)$ 行から最後の行までの各行において、すべての成分が 0。

(2) B の第 1 行から第 r 行までの各行では、ピボットより左の成分はすべて 0。

(3) B の第 i 行のピボットが含まれる列の番号を p_i とすると、 $p_1 < p_2 < \dots < p_r$ であり、 B の第 p_i 列ではピボット以外の成分はすべて 0。

・ ここで、零行列 O も階段行列であるとする。

$$\text{例: } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II. EXERCISE [1]

A. Exercise 6

真か偽か(真ならば理由を説明し、偽ならば反例をあげよ)

(a) 正方行列には自由変数はない。

偽: (反例)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ について考える。

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, とする。

ここで $Ax = b$ を解く。

$Ax = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+4x_2 \end{pmatrix}$ であるから、

$\begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ 2x_1+4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を解けば良い。これを解くと

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ c \end{pmatrix} \quad (2)$$

となる。ただし、 $c \in \mathbb{R}$ である。ここで、 c は自由変数であるから、これは命題(a)に対する反例である。

(b) 可逆行列には自由変数はない。

真: (理由)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^n$ とする。ここで A は可逆行列とする。 A は可逆行列であるから、ある A^{-1} が存在して、

$$A^{-1}A = E_n \quad (3)$$

が成り立つ。

ここで、

$$Ax = b \quad (4)$$

を解く。左から (4) の両辺に A^{-1} をかけると

$$x = A^{-1}b \quad (5)$$

となる。ここで、 A^{-1}, b はそれぞれ定数行列、定数ベクトルであるから、解 x はただ一つに定まり、自由変数を含まない。

(c) $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々 n 個である。

真: (理由)

Definition 1.2 の (3) より、1 つの列に複数のピボットは存在しないため、行列のそれぞれの列に存在するピボットの数は 1 以下となる。行列の列の数は n であるから $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々 n 個である。

(d) $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々 m 個である。

真: (理由)

Definition 1.2 の (2) より、1 つの行に複数個のピボットは存在しない. 実際、1 つの行に複数個のピボットが存在するとする. この行ベクトルを v とする. v の 1 つ目のピボットを v_i とする. ここで $i < j$ を満たすピボットを v_j とする. しかしこれは、 v_j の左にピボット v_i が存在しており、Definition 1.2 の (2) に矛盾する. 1 つの行に複数個のピボットは存在しないので、それぞれの行に含まれるピボットの個数は 1 以下となる. 行列の行の数は m であるから、 $m \times n$ 行列に含まれるピボットは高々 m 個である.

REFERENCES

- [1] ギルバート・ストラング, “ストラング: 教養の線形代数,” 2020.