

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jan Poslušný

Optimální řízení stochastických lineárních rovnic s gaussovským šumem

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2014

Poděkování (nepovinné).

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Optimální řízení stochastických lineárních rovnic s gaussovským šumem

Autor: Bc. Jan Poslušný

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Český abstrakt v rozsahu 80–200 slov. Nejedná se o opis zadání diplomové práce

Klíčová slova: optimální řízení, gaussovský šum, frakcionální Brownův pohyb

Title: Optimal Control of Stochastic Linear Equations with Fractional Noise

Author: Bc. Jan Poslušný

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Anglický abstrakt v rozsahu 80–200 slov. Nejedná se o překlad zadání diplomové práce.

Keywords: Optimal Control, Gaussian Noise, Fractional Brownian Motion

Obsah

Úvod	2
1 Základní pojmy	3
2 Stochastické optimální řízení	5
2.1 Lineární kvadratické řízení (LQC)	5
2.2 Stochastický princip maxima	6
Seznam použité literatury	7

Úvod

Zde v bodech je shrnutí plánovaného členění této práce:

- V první kapitole budou zavedeny pojmy, které se nadále budou používat v textu.
- Ve druhé kapitole budou shrnuty výsledky, ke kterým se již došlo v oblasti optimálního řízení rovnic s gaussovským šumem.
- Ve třetí kapitole bude prostor pro případné důležité příklady a případné využití optimálního řízení ve finanční matematice.
- Čtvrtá kapitola by mohla nabídnout případné numerické porovnání výsledků dosahovaných při použití modelů s Brownovým pohybem a frakcionálním Brownovým pohybem a empirickými daty.

Kleptsyna, LeBreton a Viot v pracích [7, 8] obdrželi optimální řízení pro skalární stochastický systém s fBm pro $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ za předpokladu úplné pozorovatelnosti stavu. Pro případ částečné pozorovatelnosti navazují předem zmínění autoři prací [9]. Duncan a Pasik-Duncan popsali některé speciální případy více-rozměrného systému v [3] a [4]. Pro optimální řízení lineárních rovnic v Hilbertově prostoru s fBm pro $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ a kvadratický hodnotový funkcionál, tento případ explicitně vyřešili Duncan, Maslowski a Pasik-Duncan v [2]. Hu a Zhou [6] odvodili optimální řízení pro skalární bilineární systém s fBm pro $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, avšak za podmínky, že takovéto řízení je markovské. Dále Duncan a Pasik-Duncan v [5] se zabývali optimálním řízením lineárních stochastických systémů s libovolným centrovaným, kvadraticky integrovatelným stochastickým procesem se spojitými trajektoriemi a hodnotovým funkcionálem kvadratickým ve stavové proměnné, s explicitím vyjádřením případu fBm .

Kapitola 1

Základní pojmy

Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je úplný pravděpodobnostní prostor. Více na thema frakcionálního Brownova pohybu např. [10].

Definice 1.1. *Standardním frakcionálním Brownovým pohybem (fBm) indexovaným Hurstovým parametrem $H \in (0, 1)$ nazveme spojitý centrovaný gaussovský proces $(B^H(t), t \geq 0)$ s kovarianční funkcí*

$$\mathbb{E}[B^H(s) B^H(t)] = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Definice 1.2. *Náhodný proces $(B^H(t), t \geq 0)$ nazveme cylindrickým frakcionálním Brownovým pohybem s Hurstovým parametrem $H \in (1/2, 1)$ na prostoru V , definovaný na filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, pokud*

$$B^H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \sqrt{\lambda_i} \beta_i(t), \quad t > 0,$$

kde $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ je úplná ortonormální báze prostoru V , $(\beta_i(t), i \in \mathbb{N}, t \geq 0)$ je rodina (stochasticky) nezávislých, reálných standardních frakcionálních Brownových pohybů s pevně zvoleným Hurstovým parametrem $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ a $\lambda \geq 0$, $(\lambda_i, i \in \mathbb{N})$ je omezená posloupnost v \mathbb{R}_+ .

Definice 1.3. *Řekneme, že filtrace $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ splňuje obvyklé podmínky, pokud*

- (i) \mathcal{F}_t je \mathbb{P} -úplná,
- (ii) $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ (zprava spojitá).

Definice 1.4. *Inkrementální kovariance \tilde{Q} cylindrického fBm $(B^H(t), t \geq 0)$ je definovaná vztahem*

$$\tilde{Q}e_n = \lambda_n e_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definice 1.5 [5]. *Nechť $\alpha \in (0, 1)$ je pevné. Potom levostranný, popř. pravostranný frakcionální (Riemann–Liouvilleův) integrál pro $\varphi \in L^1([0, T])$ definovaný pro skoro všechna $t \in [0, T]$ je dán předpisem*

$$(I_{0+}^{\alpha} \varphi)(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds,$$

popř.

$$\left(I_{T-}^{\alpha} \varphi\right)(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (s-t)^{\alpha-1} \varphi(s) \, ds,$$

kde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx$ je gama funkce.

Definice 1.6 [5]. Necht $\alpha \in (0, 1)$ je pevné. Potom levostranná, popř. pravostranná frakcionální (Riemann–Liouvilleova) derivace pro $\varphi \in L^1([0, T])$ definovaná pro skoro všechna $t \in [0, T]$ je dána předpisem

$$\left(D_{0+}^{\alpha} \varphi\right)(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dt} \left(I_{0+}^{1-\alpha} \varphi\right)(t),$$

popř.

$$\left(D_{T-}^{\alpha} \varphi\right)(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{d}{dt} \left(I_{T-}^{1-\alpha} \varphi\right)(t),$$

což ve Weylově reprezentaci dostáváme

$$\left(D_{0+}^{\alpha} \varphi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\varphi(t)}{t^{\alpha}} + \alpha \int_0^t \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} \, ds \right],$$

popř.

$$\left(D_{T-}^{\alpha} \varphi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{\varphi(t)}{(T-t)^{\alpha}} + \alpha \int_t^T \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{(s-t)^{\alpha+1}} \, ds \right].$$

Definice 1.7. Prostorem $L_H^2([0, T])$ nazveme hilbertův prostor, kde $f, g \in L_H^2$, pokud $\langle f, f \rangle_H < \infty$ a $\langle g, g \rangle_H < \infty$ a skalární součin je dán jako

$$\langle f, g \rangle_H = \rho(H) \int_0^T u_{\frac{1}{2}-H}^2(r) \left(I_{T-}^{(H-\frac{1}{2})} u_{H-\frac{1}{2}} f \right)(r) \left(I_{T-}^{(H-\frac{1}{2})} u_{H-\frac{1}{2}} g \right)(r) \, dr,$$

kde

$$\rho(H) = \frac{2H \Gamma(H + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{2} - H)}{\Gamma(2 - 2H)}$$

a $u_a(s) = s^a$, $a > 0$, $s > 0$.

Tvrzení 1.1 [1]. Necht $f \in L_H^2([0, T])$. Potom

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f \, dB^H \mid B^H(r), r \in (s, t) \right] = \int_0^s u_{\frac{1}{2}-H} \left(I_{s-}^{-(H-\frac{1}{2})} \left(I_{t-}^{(H-\frac{1}{2})} u_{H-\frac{1}{2}} f \right) \right) \, dB^H,$$

kde $u_a(s) = s^a$, $a > 0$, $s > 0$.

Kapitola 2

Stochastické optimální řízení

2.1 Lineární kvadratické řízení (LQC)

[2] Necht U, V a \mathcal{H} jsou reálné Hilbertovy prostory a uvažujme stavovou rovnici

$$dX(t) = (AX(t) + Bu(t))dt + C dB^H(t) \quad (2.1)$$

$$X_0 = x, \quad (2.2)$$

v prostoru \mathcal{H} , kde $t \geq 0$, $x \in \mathcal{H}$, $A : D_A \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ je lineární, (obecně) neomezený operátor, jenž je infinitesimálním generátorem silně spojitě semigrupy $(S(t), t \geq 0)$, a dále $(B^H(t), t \geq 0)$ je cylindrický frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým parametrem $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ na prostoru V , definovaný na filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}(t), t \geq 0), \mathbb{P})$.

Můžeme předpokládat, že filtrace $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ splňuje tzv. obvyklé podmínky. V případě zde uvažovaného problému optimálního řízení je přirozené předpokládat, že $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ je \mathbb{P} -zúplněním $(\sigma(B(s), s \leq t), t \geq 0)$.

Nyní uvedme předpoklady:

(A1) Necht je pro B a C z (2.1) splněna jedna z následujících dvou podmínek:

- (a) $B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{H})$, $C \in \mathcal{L}(V, \mathcal{H})$, kde $U = (U, \langle \cdot, \cdot \rangle_U, |\cdot|_U)$ je Hilbertův prostor (stavový prostor regulací).
- (b) $(S(t), t \geq 0)$ je analytickou semigrupou a existují konstanty $\alpha \in (0, 1)$ a $\beta \in (0, 1]$ takové, že $B \in \mathcal{L}(U, D_A^{\alpha-1})$ a $C \in \mathcal{L}(U, D_A^{\beta-1})$.

(A2) Necht \mathcal{U} je rodina přípustných regulací, pak pro $u \in \mathcal{U} := L_{\mathcal{F}}^p = L_{\mathcal{F}}^p((0, T) \times \Omega; U)$, kde $p > \frac{1}{\alpha}$, $p \geq 2$ je pevné a $L_{\mathcal{F}}^p$ označuje uzavřený lineární podprostor všech $\mathcal{F}(t)$ -progresivně měřitelných procesů v $L^p((0, T) \times \Omega; U)$. Pokud $B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{H})$, potom stačí, aby $p \geq 2$.

(A3) Předpokládejme, že existuje $T_0 > 0$ a $\eta > 0$ takové, že

$$\int_0^T \int_0^T r^{-\eta} s^{-\eta} |S(r)C\tilde{Q}^{\frac{1}{2}}|_{\mathcal{L}_2(V, \mathcal{H})} |S(s)C\tilde{Q}^{\frac{1}{2}}|_{\mathcal{L}_2(V, \mathcal{H})} \phi_H(r-s) dr ds$$

je konečný a kde $\phi_H(r) := H(2H-1)|r|^{2H-2}$.

(A4) $Q, G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $Q \geq 0$, $G \geq 0$, $R \in \mathcal{L}(U)$, $R \geq 0$, Q , G a R jsou samoadjungované.

(A5) (a) $\text{Tr } \tilde{Q} < \infty$.

(b) $\beta \geq \alpha > 1 - H$.

(c) Inverzní operátor k R je omezený, tedy $R^{-1} \in \mathcal{L}(U)$, a $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, D_{A^*}^{\alpha-1})$.

Hodnotový funkcionál je definovaný jako

$$J(x, y) := \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T \left(\langle QX_s, X_s \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Ru_s, u_s \rangle_U \right) ds + \frac{1}{2} \mathbb{E} \langle GX_T, X_T \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (2.3)$$

pro $x \in \mathcal{H}$ a $u \in U$, kde Q , R a G jsou lineární operátory splňující podmínku (A4).

Úlohou je minimalizovat hodnotový funkcionál $J(x, u)$, tedy

$$\tilde{J}(x) := \inf_{u \in \mathcal{U}} J(x, u) \quad (2.4)$$

a (pro dané $x \in \mathcal{H}$) abychom našli optimální regulaci $\hat{u} \in \mathcal{U}$, která dosahuje infima v (2.4), tj. $J(\hat{x}, u) = \tilde{J}(x)$.

Formální Ricattiho rovnice je v tomto případě

$$\dot{V} = A^*V + VA - VBR^{-1}B^*V + Q, \quad (2.5)$$

$$V(0) = G, \quad (2.6)$$

která nezahrnuje lineární operátor šumu C , takže v tomto případě lze uplatnit dobře známý výsledek pro deterministický případ.

Nechť $\Sigma^+ = \{V \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), V = V^*; V \geq 0\}$.

Věta 2.1. *Pokud jsou (A1), (A4) a (A5) splněny, potom pro libovolný operátor $V_0 \in \Sigma^+ \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}, D_{A^*}^{1-\alpha})$ existuje operátorová funkce $V \in C_s([0, T], \mathcal{L}(\mathcal{H}, D_{A^*}^{1-\alpha}) \cap C_s([0, T], \Sigma^+))$ taková, že*

$$V(t) = S^*(t)V_0S(t) + \int_0^t S^*(t-s) \left(Q - (B^*V(s))^* R^{-1} B^*V(s) \right) S(t-s) ds \quad (2.7)$$

pro všechna $t \in [0, T]$ nebo (ekvivalentně)

$$\frac{d}{dt} \langle V(t)x, y \rangle_{\mathcal{H}} \quad (2.8)$$

2.2 Stochastický princip maxima

Seznam použité literatury

- [1] T. DUNCAN, *Prediction for some processes related to a fractional brownian motion*, Statistics & probability letters, 76 (2006), pp. 128–134.
- [2] T. E. DUNCAN, B. MASLOWSKI, AND B. PASIK-DUNCAN, *Linear-quadratic control for stochastic equations in a hilbert space with fractional brownian motions*, SIAM Journal on Control and Optimization, 50 (2012), pp. 507–531.
- [3] T. E. DUNCAN AND B. PASIK-DUNCAN, *Control of some linear stochastic systems with a fractional brownian motion*, in Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on, IEEE, 2009, pp. 8518–8522.
- [4] —, *Stochastic linear-quadratic control for systems with a fractional brownian motion*, in Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on, IEEE, 2010, pp. 6163–6168.
- [5] —, *Linear-quadratic fractional gaussian control*, SIAM Journal on Control and Optimization, 51 (2013), pp. 4504–4519.
- [6] Y. HU AND X. Y. ZHOU, *Stochastic control for linear systems driven by fractional noises*, SIAM journal on control and optimization, 43 (2005), pp. 2245–2277.
- [7] M. L. KLEPTSyna, A. LE BRETON, AND M. VIOT, *About the linear-quadratic regulator problem under a fractional brownian perturbation*, ESAIM. P&S, 7 (2003), pp. 159–168.
- [8] —, *On the infinite time horizon linear-quadratic regulator problem under a fractional brownian perturbation*, ESAIM: Probability and Statistics, 9 (2005), pp. 185–205.
- [9] —, *Separation principle in the fractional gaussian linear-quadratic regulator problem with partial observation*, ESAIM: Probability and Statistics, 12 (2008), pp. 94–126.
- [10] I. NOURDIN, *Selected aspects of fractional Brownian motion*, vol. 4, Springer, 2013.