Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jan Poslušný

Optimální řízení stochastických lineárních rovnic s gaussovským šumem

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Praha 2014

Poděkování (nepovinné).

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Optimální řízení stochastických lineárních rovnic s gaussovským šumem

Autor: Bc. Jan Poslušný

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Český abstrakt v rozsahu 80 – 200 slov. Nejedná se o opis zadání diplomové práce

Klíčová slova: optimální řízení, gaussovský šum, frakcionální Brownův pohyb

Title: Optimal Control of Stochastic Linear Equations with Fractional Noise

Author: Bc. Jan Poslušný

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Bohdan Maslowski, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Anglický abstrakt v rozsahu 80 – 200 slov. Nejedná se o překlad zadání diplomové práce.

Keywords: Optimal Control, Gaussian Noise, Fractional Brownian Motion

Obsah

Úvod **2**

1 Základní pojmy **3**

2 Stochastické optimální řízení **5**
2.1 Lineární kvadratické řízení (LQC) 5
2.2 Stochastický princip maxima 6

Seznam použité literatury **7**

Úvod

Zde v bodech je shrnutí plánovaného členění této práce:

- V první kapitole budou zavedeny pojmy, které se nadále budou používat v textu.
- Ve druhé kapitole budou shrnuty výsledky, ke kterým se již došlo v oblasti optimálního řízení rovnic s gaussovským šumem.
- Ve třetí kapitole bude prostor pro případné důležité příklady a případné využití optimálního řízení ve finanční matematice.
- Čtvrtá kapitola by mohla nabídnout případné numerické porovnání výsledků dosahovaných při použití modelů s Brownovým pohybem a frakcionálním Brownovým pohybem a empirickými daty.

Kleptsyna, LeBreton a Viot v pracích [7, 8] obdrželi optimální řízení pro skalární stochastický systém s *fBm* pro $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ za předpokladu uplné pozorovatelnosti stavu. Pro případ částečné pozorovatelnosti navazují předem zmínění autoři prací [9]. Duncan a Pasik-Duncan popsali některé speciální případy vícerozměrného systému v [3] a [4]. Pro optimální řízení linearních rovnic v Hilbertově prostoru s *fBm* pro $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ a kvadratický hodnotový funkcionál, tento případ explicitně vyřešili Duncan, Maslowski a Pasik-Duncan v [2]. Hu a Zhou [6] odvodili optimální řízení pro skalární bilineární systém s *fBm* pro $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, avšak za podmínky, že takovéto řízení je markovské. Dále Duncan a Pasik-Duncan v [5] se zabývali optimálním řízením lineárních stochastických systémů s libovolným centrovaným, kvadraticky integrovatelným stochastickým procesem se spojitými trajektoriemi a hodnotovým funkcionálem kvadratickým ve stavové proměnné, s explicitím vyjádřením případu *fBm*.

Kapitola 1

Základní pojmy

Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je úplný pravděpodobnostní prostor. Více na thema frakcionálního Brownova pohybu např. [10].

Definice 1.1. *Standardním frakcionálním Brownovým pohybem (fBm) indexovaný Hurstovým parametrem $H \in (0,1)$ nazveme spojitý centrovaný gaussovský proces $\left(B^H(t), t \geq 0\right)$ s kovarianční funkcí*

$$\mathbb{E}\left[B^H(s)\, B^H(t)\right] = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Definice 1.2. *Náhodný proces $\left(B^H(t), t \geq 0\right)$ nazveme cylindrickým frakcionálním Brownovým pohybem s Hurstovým parametrem $H \in (1/2, 1)$ na prostoru V, definovaný na filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $\left(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, pokud*

$$B^H(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e_i \sqrt{\lambda_i}\, \beta_i(t), \qquad t > 0,$$

kde $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ je úplná ortonormální báze prostoru V, $(\beta_i(t), i \in \mathbb{N}, t \geq 0)$ je rodina (stochasticky) nezávislých, reálných standardních frakcionálních Brownových pohybů s pevně zvoleným Hurstovým parametrem $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ a $\lambda \geq 0$, $(\lambda_i, i \in \mathbb{N})$ je omezená poslopnoust v $\mathbb{R}_+$.

Definice 1.3. *Řekneme, že filtrace $(\mathscr{F}_t, t \geq 0)$ splňuje obvyklé podmínky, pokud*

(i) $\mathscr{F}_t$ *je* $\mathbb{P}$*-úplná,*

(ii) $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$ *(zprava spojitá).*

Definice 1.4. *Inkrementální kovariance $\tilde{Q}$ cylindrického fBm $\left(B^H(t), t \geq 0\right)$ je definovaná vztahem*

$$\tilde{Q} e_n = \lambda_n e_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Definice 1.5 [5]**.** *Nechť $\alpha \in (0,1)$ je pevné. Potom levostranný, popř. pravostranný frakcionální (Riemann–Liouvilleův) integrál pro $\varphi \in L^1([0,T])$ definovaný pro skoro všechna $t \in [0,T]$ je dán předpisem*

$$\left(I^{\alpha}_{0_+}\varphi\right)(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\, \varphi(s)\, \mathrm{d}s,$$

popř.

$$\left(I^{\alpha}_{T-}\varphi\right)(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (s-t)^{\alpha-1} \varphi(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ *je gama funkce.*

Definice 1.6 [5]**.** *Nechť* $\alpha \in (0,1)$ *je pevné. Potom levostranná, popř. pravostranná frakcionální (Riemann–Liouvilleva) derivace pro* $\varphi \in L^1([0,T])$ *definovaná pro skoro všechna* $t \in [0,T]$ *je dána předpisem*

$$\left(D^{\alpha}_{0+}\varphi\right)(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I^{1-\alpha}_{0+}\varphi\right)(t),$$

popř.

$$\left(D^{\alpha}_{T-}\varphi\right)(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I^{1-\alpha}_{T-}\varphi\right)(t),$$

což ve Weylově reprezentaci dostáváme

$$\left(D^{\alpha}_{0+}\varphi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(t)}{t^\alpha} + \alpha\int_0^t \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}s,\right],$$

popř.

$$\left(D^{\alpha}_{T-}\varphi\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left[\frac{\varphi(t)}{(T-t)^\alpha} + \alpha\int_t^T \frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}s\right].$$

Definice 1.7. *Prostorem* $L^2_H([0,T])$ *nazveme hilbertův prostor, kde* $f, g \in L^2_H$*, pokud* $\langle f, f\rangle_H < \infty$ *a* $\langle g, g\rangle_H < \infty$ *a skalární součin je dán jako*

$$\langle f, g\rangle_H = \rho(H)\int_0^T u^2_{\frac{1}{2}-H}(r)\left(I^{\left(H-\frac{1}{2}\right)}_{T^-} u_{H-\frac{1}{2}}\, f\right)(r)\left(I^{\left(H-\frac{1}{2}\right)}_{T^-} u_{H-\frac{1}{2}}\, g\right)(r)\,\mathrm{d}r,$$

kde

$$\rho(H) = \frac{2H\,\Gamma(H+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(2-2H)}$$

a $u_a(s) = s^a$*,* $a > 0$*,* $s > 0$*.*

Tvrzení 1.1 [1]**.** *Nechť* $f \in L^2_H([0,T])$*. Potom*

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t f\,\mathrm{d}B^H \mid B^H(r), r \in (s,t)\right] = \int_0^s u_{\frac{1}{2}-H}\left(I^{-\left(H-\frac{1}{2}\right)}_{s^-}\left(I^{\left(H-\frac{1}{2}\right)}_{t^-} u_{H-\frac{1}{2}}\, f\right)\right)\mathrm{d}B^H,$$

kde $u_a(s) = s^a$*,* $a > 0$*,* $s > 0$*.*

Kapitola 2

Stochastické optimální řízení

2.1 Lineární kvadratické řízení (LQC)

[2] Nechť U, V a $\mathscr{H}$ jsou reálné Hilbertovy prostory a uvažujme stavovou rovnici

$$\mathrm{d}X(t) = (AX(t) + Bu(t))\,\mathrm{d}t + C\,\mathrm{d}B^H(t) \tag{2.1}$$

$$X_0 = x, \tag{2.2}$$

v prostoru $\mathscr{H}$, kde $t \geq 0$, $x \in \mathscr{H}$, $A : D_A \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ je lineární, (obecně) neomezený operátor, jenž je infinitesimální generátor silně spojité semigrupy $(S(t), t \geq 0)$, a dále $\left(B^H(t), t \geq 0\right)$ je cylindrický frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým parametrem $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ na prostoru V, definovaný na filtrovaném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}(t), t \geq 0), \mathbb{P})$.

Můžeme předpokládat, že filtrace $(\mathscr{F}(t), t \geq 0)$ splňuje tzv. obvyklé podmínky. V případě zde uvažovaného problému optimálního řízení je přirozené předpokládat, že $(\mathscr{F}(t), t \geq 0)$ je $\mathbb{P}$-zúplněním $(\sigma(B(s), s \leq t), t \geq 0)$.

Nyní uveďme některé předpoklady:

(A1) Nechť je jedna z následujících dvou podmínek splněna pro B a C v (2.1):

  (a) $B \in \mathscr{L}(U, \mathscr{H})$, $C \in \mathscr{L}(V, \mathscr{H})$, kde $U = (U, \langle\cdot,\cdot\rangle_U, |\cdot|_U)$ je Hilbertův prostor (stavový prostor of controls).

  (b) $(S(t), t \geq 0)$ je analytickou semigrupou a existují konstanty $\alpha \in (0,1)$ a $\beta \in (0,1]$ takové, že $B \in \mathscr{L}\left(U, D_A^{\alpha-1}\right)$ a $C \in \mathscr{L}\left(U, D_A^{\beta-1}\right)$.

(A2) Nechť $\mathscr{U}$ je rodina admissible controls, pak pro $u \in \mathscr{U} := L^p_{\mathscr{F}} = L^p_{\mathscr{F}}((0,T) \times \Omega; U)$, kde $p > \frac{1}{a}$, $p \geq 2$ je pevné a $L^p_{\mathscr{F}}$ označuje uzavřený lineární podprostor všech $\mathscr{F}(t)$-progresivně měřitelných procesů v $L^p((0,T) \times \Omega; U)$. Pokud $B \in \mathscr{L}(U, \mathscr{H})$, potom stačí, aby $p \geq 2$.

(A3) Předpokládejme, že existuje $T_0 > 0$ a $\eta > 0$ takové, že

$$\int_0^T \int_0^T r^{-\eta} s^{-\eta} |S(r)C\tilde{Q}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{L}_2(V,\mathscr{H})} |S(s)C\tilde{Q}^{\frac{1}{2}}|_{\mathscr{L}_2(V,\mathscr{H})} \phi_H(r-s)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s$$

je konečný a kde $\phi_H(r) := H(2H-1)|r|^{2H-2}$.

(A4) $Q, G \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, $Q \geq 0$, $G \geq 0$, $R \in \mathscr{L}(U)$, $R \geq 0$, Q, G a R jsou samoadjungované.

(A5) (a) $\operatorname{Tr} \tilde{Q} < \infty$.

(b) $\beta \geq \alpha > 1 - H$.

(c) Inverzní operátor k R je omezený, tedy $R^{-1} \in \mathscr{L}(U)$, a $G \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, D_{A^*}^{\alpha-1})$.

2.2 Stochastický princip maxima

Seznam použité literatury

[1] T. Duncan, *Prediction for some processes related to a fractional brownian motion*, Statistics & probability letters, 76 (2006), pp. 128–134.

[2] T. E. Duncan, B. Maslowski, and B. Pasik-Duncan, *Linear-quadratic control for stochastic equations in a hilbert space with fractional brownian motions*, SIAM Journal on Control and Optimization, 50 (2012), pp. 507–531.

[3] T. E. Duncan and B. Pasik-Duncan, *Control of some linear stochastic systems with a fractional brownian motion*, in Decision and Control, 2009 held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference. CDC/CCC 2009. Proceedings of the 48th IEEE Conference on, IEEE, 2009, pp. 8518–8522.

[4] ——, *Stochastic linear-quadratic control for systems with a fractional brownian motion*, in Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on, IEEE, 2010, pp. 6163–6168.

[5] ——, *Linear-quadratic fractional gaussian control*, SIAM Journal on Control and Optimization, 51 (2013), pp. 4504–4519.

[6] Y. Hu and X. Y. Zhou, *Stochastic control for linear systems driven by fractional noises*, SIAM journal on control and optimization, 43 (2005), pp. 2245–2277.

[7] M. L. Kleptsyna, A. Le Breton, and M. Viot, *About the linear-quadratic regulator problem under a fractional brownian perturbation*, ESAIM. P&S, 7 (2003), pp. 159–168.

[8] ——, *On the infinite time horizon linear-quadratic regulator problem under a fractional brownian perturbation*, ESAIM: Probability and Statistics, 9 (2005), pp. 185–205.

[9] ——, *Separation principle in the fractional gaussian linear-quadratic regulator problem with partial observation*, ESAIM: Probability and Statistics, 12 (2008), pp. 94–126.

[10] I. Nourdin, *Selected aspects of fractional Brownian motion*, vol. 4, Springer, 2013.