第2章
行列、一次方程式系

橋本　龍二

Contents

1　行列の定義と演算

1.1

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-2 & 4-4 \\ 4-4 & 8-8 \end{pmatrix} = O \\
BA &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+8 & 4+16 \\ 1+4 & -2-8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1.2

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+i & 1+2i \\ 6+4i & 4 \end{pmatrix} \\
A\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+i \\ 3+4i \end{pmatrix} \\
A\,{}^{T}\!A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} \\
{}^{T}\!AA &= \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \\
{}^{T}\!A\,{}^{T}\!B &= \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+3i & -i & 5+2i \\ 1+i & -i & 1 \\ 3+2i & -3i & 1-i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+3i & 1+i & 3+2i \\ -i & -i & -3i \\ 5+2i & 1 & 1-i \end{pmatrix} \\
{}^{T}B^{T}A &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+i & 6+4i \\ 1+2i & 4 \end{pmatrix} \\
{}^{T}B\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3i \\ 2i \end{pmatrix} \\
B\,{}^{T}B &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+2i & -i-1 & 3i \\ -i+1 & -1 & -i \\ 3i & -i & 4+4i \end{pmatrix} \\
{}^{T}BB &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+4i & 1+2i \\ 1+2i & 2i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^T\boldsymbol{c}\,{}^TA &= \begin{pmatrix} i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+i & 3+4i \end{pmatrix} \\
{}^T\boldsymbol{c}B &= \begin{pmatrix} i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3i & 2i \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{c}\,{}^T\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 2i \end{pmatrix} \\
{}^T\boldsymbol{c}\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= -1+2i
\end{aligned}
$$

1.3

行列 A を列ベクトルを並べた $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ の形で書く。単位ベクトルとして

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; \dots \; \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

と置くと、任意の $0 \le j \le 1$ について

$$
A\boldsymbol{e}_j = 1 \cdot \boldsymbol{a}_j + \sum_{i \neq j} 0 \cdot \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_j
$$

が成り立つので、A は単位行列。

1.4

例えば、

$$
\begin{aligned}
E_{1,2}^{(2,3)} E_{2,2}^{(3,2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= E_{1,2}^{(2,2)}
\end{aligned}
$$

このように、列数 $q =$ 行数 r ならば、p 行 s 列が 1 である l 行 n 列の行列となる。すなわち

$$\delta_{q,r} E_{p,s}^{(l,n)}$$

1.5

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$I = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}$$

と区分けできる。今、

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} &= A_1A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2 \\
A_{1,2} &= A_1A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_3 \\
A_{1,3} &= A_1A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A_2 \\
A_{2,1} &= A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A_3 \\
A_{2,2} &= A_2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \\
A_{2,3} &= A_2A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A_1 \\
A_{3,1} &= A_3A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_2 \\
A_{3,2} &= A_3A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 \\
A_{3,3} &= A_3A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2
\end{aligned}
$$

と置ける。ただし、E_n は n 次単位行列。ゆえ、

$$\begin{aligned}
I^2 &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & O \\ O & A_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4 \\
IJ &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{1,2} \\ A_{1,2} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = K \\
IK &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{1,3} \\ A_{1,3} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_2 \\ -A_2 & O \end{pmatrix} = -J \\
JI &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{2,1} \\ A_{2,1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_3 \\ -A_3 & O \end{pmatrix} = -K \\
J^2 &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{2,2} & O \\ O & -A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4 \\
JK &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{2,3} & O \\ O & -A_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = I \\
KI &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{3,1} \\ A_{3,1} & -O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = J \\
KJ &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{3,2} \\ O & -A_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 & O \\ O & -A_1 \end{pmatrix} = -I \\
K^2 &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{3,3} & O \\ O & --A_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4
\end{aligned}$$

1.6

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

より、これがゼロ行列となるには

$$\begin{cases} a^2+bc=0 & (1) \\ b(a+d)=0 & (2) \\ c(a+d)=0 & (3) \\ bc+d^2=0 & (4) \end{cases}$$

(1),(4) より、$(a+d)(a-d)=0$

(i) $a+d \neq 0$ の時、

$a=d,\ b=c=0$ より $a=b=c=d$ となってしまうので、二乗がゼロベクトルになることはない。

(ii) $a-d \neq 0$ の時、

$d=-a,\ bc=-a^2 \ \Rightarrow\ a=\pm\sqrt{-bc}$

すなわち、求める行列は

$$X=\begin{pmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$$

1.7

1.6 と同様に、

$$\begin{cases} a^2+bc=1 & (1) \\ b(a+d)=0 & (2) \\ c(a+d)=0 & (3) \\ bc+d^2=1 & (4) \end{cases}$$

(i) $a+d \neq 0$ の時、

$b=c=0,\ a=d=\pm1$ で、求める行列は $X=\pm E$

(ii) $a+d=0$ の時、

$a=\pm\sqrt{1-bc},\ d=\mp\sqrt{1-bc}$ で、求める行列は

$$X=\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$$