

第2章

行列、一次方程式系

橋本 龍二

Contents

1 行列の定義と演算	2
1.1	2
1.2	3
1.3	5
1.4	6
1.5	6
1.6	8
1.7	9
2 正方形行列特に正則行列	9
2.1	9
2.2	13
2.3	13
2.4	14
2.5	14
2.6	15
2.7	15
3 行列と線形写像、ベクトルの線形独立性	16
3.1	16
3.2	17

1 行列の定義と演算

1.1

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2 & 4-4 \\ 4-4 & 8-8 \end{pmatrix} = O \\ BA &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+8 & 4+16 \\ 1+4 & -2-8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+i & 1+2i \\ 6+4i & 4 \end{pmatrix} \\
A\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+i \\ 3+4i \end{pmatrix} \\
A^T A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} \\
{}^T A A &= \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \\
{}^T A {}^T B &= \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+3i & -i & 5+2i \\ 1+i & -i & 1 \\ 3+2i & -3i & 1-i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+3i & 1+i & 3+2i \\ -i & -i & -3i \\ 5+2i & 1 & 1-i \end{pmatrix} \\
{}^T B^T A &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+i & 6+4i \\ 1+2i & 4 \end{pmatrix} \\
{}^T B c &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3i \\ 2i \end{pmatrix} \\
B {}^T B &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+2i & -i-1 & 3i \\ -i+1 & -1 & -i \\ 3i & -i & 4+4i \end{pmatrix} \\
{}^T B B &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+4i & 1+2i \\ 1+2i & 2i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^T \mathbf{c} {}^T A &= (i \ 0 \ 1+i) \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (-1+i \ 3+4i) \\
{}^T \mathbf{c} B &= (i \ 0 \ 1+i) \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= (3i \ 2i) \\
\mathbf{c} {}^T \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} (i \ 0 \ 1+i) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 2i \end{pmatrix} \\
{}^T \mathbf{c} \mathbf{c} &= (i \ 0 \ 1+i) \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= -1+2i
\end{aligned}$$

1.3

行列 A を列ベクトルを並べた $A = (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$ の形で書く。単位ベクトルとして

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

と置くと、任意の $0 \leq j \leq 1$ について

$$A \mathbf{e}_j = 1 \cdot \mathbf{a}_j + \sum_{i \neq j} 0 \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{e}_j$$

が成り立つので、 A は単位行列。

1.4

例えば、

$$\begin{aligned} E_{1,2}^{(2,3)} E_{2,2}^{(3,2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_{1,2}^{(2,2)} \end{aligned}$$

このように、列数 $q =$ 行数 r ならば、 p 行 s 列が 1 である l 行 n 列の行列となる。すなわち

$$\delta_{q,r} E_{p,s}^{(l,n)}$$

1.5

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$I = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}$$

と区分けできる。今、

$$\begin{aligned}
 A_{1,1} &= A_1 A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2 \\
 A_{1,2} &= A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_3 \\
 A_{1,3} &= A_1 A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A_2 \\
 A_{2,1} &= A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A_3 \\
 A_{2,2} &= A_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \\
 A_{2,3} &= A_2 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A_1 \\
 A_{3,1} &= A_3 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_2 \\
 A_{3,2} &= A_3 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 \\
 A_{3,3} &= A_3 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2
 \end{aligned}$$

と置ける。ただし、 E_n は n 次単位行列。ゆえ、

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & O \\ O & A_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4 \\
 IJ &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{1,2} \\ A_{1,2} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = K \\
 IK &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{1,3} \\ A_{1,3} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_2 \\ -A_2 & O \end{pmatrix} = -J \\
 JI &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{2,1} \\ A_{2,1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_3 \\ -A_3 & O \end{pmatrix} = -K \\
 J^2 &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{2,2} & O \\ O & -A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4 \\
 JK &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{2,3} & O \\ O & -A_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = I \\
 KI &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{3,1} \\ A_{3,1} & -O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = J \\
 KJ &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{3,2} \\ O & -A_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 & O \\ O & -A_1 \end{pmatrix} = -I \\
 K^2 &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{3,3} & O \\ O & -A_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4
 \end{aligned}$$

1.6

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

より、これがゼロ行列となるには

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + bc = 0 \\ b(a+d) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b(a+d) = 0 \\ c(a+d) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c(a+d) = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} bc + d^2 = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

(1),(4) より、 $(a+d)(a-d) = 0$

(i) $a + d \neq 0$ の時、

$a = d, b = c = 0$ より $a = b = c = d$ となってしまうので、二乗がゼロベクトルになることはない。

(ii) $a - d \neq 0$ の時、

$$d = -a, bc = -a^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{-bc}$$

すなわち、求める行列は

$$X = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$$

1.7

1.6 と同様に、

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a + d) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} c(a + d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} c(a + d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} c(a + d) = 0 \\ bc + d^2 = 1 \end{cases} \quad (4)$$

(i) $a + d \neq 0$ の時、

$b = c = 0, a = d = \pm 1$ で、求める行列は $X = \pm E$

(ii) $a + d = 0$ の時、

$a = \pm\sqrt{1 - bc}, d = \mp\sqrt{1 - bc}$ で、求める行列は

$$X = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1 - bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1 - bc} \end{pmatrix}$$

2 正方行列特に正則行列

2.1

1.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} x^2 - yz & 0 \\ 0 & x^2 - yz \end{pmatrix} \\ &= (x^2 - yz) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 p が偶数の時

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^p = (x^2 - yz)^{p/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

p が奇数の時

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^p &= (x^2 - yz)^{(p-1)/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix} \\ &= (x^2 - yz)^{(p-1)/2} \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3 + 3ab^2 & b^3 + 3a^2b \\ b^3 + 3a^2b & a^3 + 3ab^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^p &= \begin{pmatrix} x_p & y_p \\ y_p & x_p \end{pmatrix} \quad (1) \\ x_p &= \frac{1}{2}\{(a+b)^p + (a-b)^p\} \\ y_p &= \frac{1}{2}\{(a+b)^p - (a-b)^p\} \end{aligned}$$

と予想できる。これを数学的帰納法によって証明する。 $p = 1$ の時 $x_p = a$, $y_p = b$ より成立。 k を自然数とし、 $p = k$ の時 (1) が成り立っていると仮定すると、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k & y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_k + by_k & bx_k + ay_k \\ bx_k + ay_k & ax_k + by_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 ax_k + by_k &= \frac{1}{2} \{a(a+b)^k + a(a-b)^k + b(a+b)^k - b(a-b)^k\} \\
 &= \frac{1}{2} \{(a+b)^{k+1} + (a-b)^{k+1}\} = x_{k+1} \\
 bx_k + ay_k &= \frac{1}{2} \{b(a+b)^k + b(a-b)^k + a(a+b)^k - a(a-b)^k\} \\
 &= \frac{1}{2} \{(a+b)^{k+1} - (a-b)^{k+1}\} = y_{k+1}
 \end{aligned}$$

ゆえに、 $p = k + 1$ の時も (1) は成り立つ。帰納的に任意の自然数 p について (1) が成り立つことが示された。

3.

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ad+d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a^3+a^2d+ad^2+d^3) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a^4+a^3d+a^2d^2+ad^3+d^4) \\ 0 & d^5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

より、与えられた行列を p 乗した時の 1 行 2 列目の要素 $x_{1,2}^{(p)}$ は

$$x_{1,2}^{(p)} = b(a^{p-1}d^0 + a^{p-2}d + a^{p-3}d^2 + \dots + a^2d^{p-3} + ad^{p-2} + a^0d^{p-1}) \quad (1)$$

と予想できるので、数学的帰納法によってこれを証明する。 $p = 1$ の時、 $x_{1,2}^{(1)} = b$ より (1) は成り立つ。自然数 k に対して $p = k$ の時 (1) が成り立っているとすると、

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^k & x_{1,2}^{(k)} \\ 0 & d^k \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a^{k+1} & ax_{1,2}^{(k)} + bd^k \\ 0 & d^{k+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 ax_{1,2}^{(k)} + bd^k &= ab(a^{k-1}d^0 + a^{k-2}d + a^{k-3}d^2 + \dots + a^2d^{k-3} + ad^{k-2} + a^0d^{k-1}) + bd^k \\
 &= b(a^kd^0 + a^{k-1}d + a^{k-2}d^2 + \dots + a^2d^{k-2} + ad^{k-1} + a^0d^k) \\
 &= x_{1,2}^{(k+1)}
 \end{aligned}$$

ゆえに、 $p = k + 1$ のときも (1) は成り立つ。帰納的に任意の自然数 p に対して (1) が成り立つことが示された。

さらに、 $a \neq d$ ならば

$$a^p - d^p = (a - d)(a^{p-1}d^0 + a^{p-2}d + a^{p-3}d^2 + \dots + a^2d^{p-3} + ad^{p-2} + a^0d^{p-1})$$

が成り立つので、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & \frac{b(a^p-d^p)}{a-b} \\ 0 & d^p \end{pmatrix}$$

$a = d$ ならば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & pba^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix}$$

4.

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad aE = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

とすれば $Y = X - aE$ は冪零上三角行列。

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} X^p &= (Y + aE)^p \\ &= \sum_{n=0}^p {}_p C_n Y^n (aE)^{p-n} \\ &= (aE)^p + pY(aE)^{p-1} + {}_p C_2 Y^2 (aE)^{p-2} \\ &= \begin{pmatrix} a^p & 0 & 0 \\ 0 & a^p & 0 \\ 0 & 0 & a^p \end{pmatrix} + pa^{p-1} \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}b & pa^{p-1}c + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2}bd \\ 0 & a^p & pa^{p-1}d \\ 0 & 0 & a^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2

数学的帰納法によって二項定理を証明する。

(i) $p = 1$ のとき

$$A + B = {}_1C_0 A^1 B^0 + {}_1C_1 A^0 B^1$$

(ii) $p = m$ のとき

$$(A + B)^m = \sum_{q=0}^m {}_m C_q A^q B^{m-q}$$

が成り立つと仮定する。両辺に $A + B$ を掛けて

$$\begin{aligned} (A + B)^{m+1} &= (A + B) \sum_{q=0}^m {}_m C_q A^q B^{m-q} \\ &= \sum_{q=0}^m {}_m C_q A^{q+1} B^{m-q} + \sum_{q=0}^m {}_m C_q A^q B^{m-q+1} \\ &= A^{m+1} + \sum_{q=0}^{m-1} {}_m C_q A^{q+1} B^{m-q} + B^{m+1} + \sum_{q=1}^m {}_m C_q A^q B^{m-q+1} \\ &= A^{m+1} + \sum_{q=1}^m {}_m C_{q-1} A^q B^{m-q+1} + B^{m+1} + \sum_{q=1}^m {}_m C_q A^q B^{m-q+1} \\ &= A^{m+1} + B^{m+1} + \sum_{q=1}^m ({}_m C_{q-1} + {}_m C_q) A^q B^{m-q+1} \\ &= A^{m+1} + B^{m+1} + \sum_{q=1}^m {}_{m+1} C_q A^q B^{m-q+1} \\ &= \sum_{q=0}^{m+1} {}_{m+1} C_q A^q B^{m+1-q} \end{aligned}$$

より、 $p = m + 1$ に対しても成立。以上より、任意の自然数 p について二項定理が成立することが示された。

2.3

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}APP^{-1}AP\dots P^{-1}AP = P^{-1}A^k P$$

2.4

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \dots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \dots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \dots & a_n b_{nn} \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} a_1 & b_{12} a_2 & \dots & b_{1n} a_n \\ b_{21} a_1 & b_{22} a_2 & \dots & b_{2n} a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} a_1 & b_{n2} a_2 & \dots & b_{nn} a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 B が A と交換可能であるためには b_{jk} について

$$a_j b_{jk} = a_k b_{jk}$$

が成り立つ必要がある。今、 $a_j \neq a_k$ ($j \neq k$) のので、 $b_{jk} = 0$ ($j \neq k$)、すなわち B は任意の対角行列。

2.5

前問と同様に、 B が A と交換可能であるためには

$$\alpha_j b_{jk} = \alpha_k b_{jk}$$

が成り立つ必要がある。これは、 $n_m \leq j \leq k \leq n_m$ ($1 \leq m \leq p$) の時のみ成り立つ。よって B は

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}$$

の形の行列。

2.6

(方針)

ケーリー・ハミルトンの定理 —————

n 次正方形行列 A に対し、 n 次多項式 $\det(A - \lambda I)$ の λ の部分を A に変えたものはゼロ行列 O になる。

本問は $n = 2$ でケーリー・ハミルトンの定理が成り立つことを示す問題。

(答案)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ と置くと、}$$

$$\begin{aligned} A^2 - (\text{Tr}A)E + (\det A)E &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - bd \\ ac + cd - ac - cd & d^2 + bc - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

2.7

幂零行列 A が正則であると仮定する。この時、逆行列 A^{-1} が存在して

$$AA^{-1} = E$$

両辺から A^{k-1} を掛けて、

$$\begin{aligned} A^{k-1}AA^{-1} &= A^{k-1}E \\ A^kA^{-1} &= A^{k-1} \end{aligned}$$

$A^{k+m} = O$ より左辺は O だが、右辺は O でないため矛盾。したがって A は非正則。

3 行列と線形写像、ベクトルの線形独立性

3.1

1.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ &= (f(\mathbf{e}_1) \ \dots \ f(\mathbf{e}_n)) \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

より、求める表現行列は

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{e}_1) \ \dots \ f(\mathbf{e}_n)) &= (\mathbf{e}_n \ \dots \ \mathbf{e}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ &= (f(\mathbf{e}_1) \ \dots \ f(\mathbf{e}_n)) \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

より、求める表現行列は

$$\begin{aligned}(f(\mathbf{e}_1) & \dots & f(\mathbf{e}_n)) = (a_1\mathbf{e}_1 & \dots & a_n\mathbf{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax_1 + x_2 \\ ax_2 + x_3 \\ \vdots \\ ax_{n-1} + x_n \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_nf(\mathbf{e}_n) \\ &= (f(\mathbf{e}_1) \dots f(\mathbf{e}_n))\mathbf{x}\end{aligned}$$

より、求める表現行列は

$$(f(\mathbf{e}_1) \dots f(\mathbf{e}_n)) = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

3.2

1.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & x_1 + \dots + x_n \end{array}$$

を考える。

$$f(\mathbf{e}_1) = 1, \dots, f(\mathbf{e}_n) = 1$$

より、求める表現行列は

$$(1 \ \dots \ 1)$$

2.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, f(\mathbf{e}_{m+1}) = \mathbf{0}, \dots, f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$$

より、求める表現行列は m 行 n 列で

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = x & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_1x \\ a_2x \\ \vdots \\ a_nx \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$f(1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

より、求める表現行列は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$