

第1章

平面および空間のベクトル、複素数

橋本 龍二

Contents

1	ベクトル、直線、平面	2
1.1	2
1.2	2
1.3	3
1.4	3
1.5	4
1.6	5
1.7	10
1.8	11
1.9	12
1.10	12
1.11	13
2	行列と線形変換	13
2.1	13
2.2	15
2.3	15
2.4	17
2.5	17
3	行列式及びベクトル積	18
3.1	18
3.2	18
3.3	19

1 ベクトル、直線、平面

1.1

1.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (1)$$

と置くと、 $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = -1$ は (1) を満たすので、線形従属。

2.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2)$$

と置くと、(2) を満たすのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみなので、線形独立。

3.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3)$$

と置くと、(3) を満たすのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみなので、線形独立。

4.

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4)$$

と置くと、 $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 2$ は (4) を満たすので、線形従属。

1.2

1. 直線 AB 上の任意の点の位置ベクトルは、定数 s を用いて

$$\mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

と表すことができる。今、 $s = 1 - t$ と置くと、上式は

$$t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \quad (t + s = 1)$$

である。

2. 線分 AB 上の任意の点の位置ベクトルは、定数 s を用いて

$$\mathbf{a} + s(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

と表すことができる。今、 $s = 1 - t$ と置くと、上式は

$$t\mathbf{a} + s\mathbf{b} \quad (0 \leq t, s \leq 1, \quad t + s = 1)$$

である。

1.3

1. 点 A を原点とする。平面 ABC 上のベクトルは線形独立な 2 本のベクトル $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ と $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ の一次結合としてかけるのだから、平面 ABC 上の任意の点の位置ベクトルは定数 r, s を用いて

$$\mathbf{a} + r(\mathbf{c} - \mathbf{a}) + s(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

と書ける。今、 $t = 1 - r - s$ と置くと、上式は

$$t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + r\mathbf{c} \quad (t + s + r = 1)$$

である。

2. 点 A を原点とする。三角形 ABC 内部のベクトルは線形独立な 2 本のベクトル $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ と $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ の一次結合としてかけるのだから、平面 ABC 上の任意の点の位置ベクトルは定数 r, s を用いて

$$\mathbf{a} + r(\mathbf{c} - \mathbf{a}) + s(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (0 \leq t, s \leq 1, \quad t + s \leq 1)$$

と書ける。今、 $t = 1 - r - s$ と置くと、上式は

$$t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + r\mathbf{c} \quad (0 \leq t, s, r \leq 1, \quad t + s + r = 1)$$

である。

1.4

(方針)

とりあえず五角形で考える。左回りに点 $A_1 \sim A_5$ を取る。この五角形内部の任意の点 B が題意の通り書けると仮定すると、ここに A_6 を付け足した六角形において、三角形 $A_1 A_5 A_6$ 内部の点 C は前問より題意の通り書ける。このように、任意の凸 k 角形は、 $k - 1$ 角形に三角形をくっつけた形と捉えることができるので帰納法の仮定で $k - 1$ 角形で題意が成り立つことにしてし

まえば後は三角形しか残っていないので証明できる。

(答案)

数学的帰納法によって題意の形で書けるベクトル \boldsymbol{p} が凸多角形内部の点を表すことを示す。

- (i) $n = 1$ の時
点 A_1 は

$$\boldsymbol{p} = t_1 \boldsymbol{a}_1, \quad t_1 = 1$$

の形で表せる。

- (ii) $n = k - 1$ の時
位置ベクトル \boldsymbol{b} を

$$\boldsymbol{b} = t_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + t_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} \quad (t_1 + \dots + t_{k-1} = 1, \quad t_i \geq 0)$$

と定めて、 \boldsymbol{b} の表す点 B が凸 $k - 1$ 角形内部の点であると仮定する。今、点 A_k を点 A_1, \dots, A_{k-1} と隣り合うように取って凸 k 角形を作ると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{b} + 0 \boldsymbol{a}_k \\ &= t_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + t_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} + t_k \boldsymbol{a}_k \\ &\quad (t_1 + \dots + t_k = 1, \quad t_i \geq 0, \quad t_k = 0) \end{aligned}$$

は点 B なので、凸 k 角形内部の点である。逆に、凸 k 角形内部の点のうちこの形で表せない点 C は三角形 $A_1 A_{k-1} A_k$ の内部の点なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= t_1 \boldsymbol{a}_1 + t_{k-1} \boldsymbol{a}_{k-1} + t_k \boldsymbol{a}_k \\ &= t_1 \boldsymbol{a}_1 + \dots + t_k \boldsymbol{a}_k \\ &\quad (t_1 + \dots + t_k = 1, \quad t_i = 0, \quad i \neq 1, \quad i \neq k-1, \quad i \neq k) \end{aligned}$$

である。したがって、凸 k 角形内部の点は題意の形で書ける。

以上より、任意の自然数 n についてベクトル \boldsymbol{p} は凸多角形内部の点を表す。

1.5

1. 方程式の表す平面上の位置ベクトルとして、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が挙げられる。今、

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は一次独立なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + s(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの平面のベクトル表示の一例である。

2. 方程式の表す平面上の位置ベクトルとして、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が挙げられる。今、

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は一次独立なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + s(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの平面のベクトル表示の一例である。

1.6

(方針)

内積と外積について。

内積

ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の内積を次の二通りで定義する。

(i) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \theta$

(ii) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

(i)=(ii) の証明：

余弦定理により

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

なので、

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos \theta &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\{(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2\} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

外積

ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の外積 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を次の二通りで定義する。

(i) $\|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin \theta$ かつ $(\mathbf{c}, \mathbf{a}) = 0$, $(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = 0$

(ii)

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

(i) \Leftrightarrow (ii) の証明：

\mathbf{c} を (ii) のように定義すれば、

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}, \mathbf{a}) &= a_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &\quad + a_2(a_3b_1 - b_3a_1) \\ &\quad + a_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= 0 \\ (\mathbf{c}, \mathbf{b}) &= b_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &\quad + b_2(a_3b_1 - b_3a_1) \\ &\quad + b_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、 \mathbf{c} は \mathbf{a}, \mathbf{b} と直交する。また、

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{c}\|^2 &= (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\
&\quad - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&\quad - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 \\
&\quad - 2a_2b_2a_3b_3 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_1a_2b_1a_2b_2 \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1 - \cos^2 \theta) \\
&= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta
\end{aligned}$$

$$\therefore \|\mathbf{c}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$

より、 \mathbf{c} の長さは \mathbf{a}, \mathbf{b} の張る平行四辺形の面積に等しい。

(答案)

1.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル \mathbf{c} を求める。

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$ は一次独立より、その外積 \boldsymbol{c} は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \times (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} 0+6 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) &= 6(x-1) - 4(y-1) + 2(z-1) \\ &= 6x - 4y + 2z - 4 = 0\end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $3x - 2y + z = 2$

2.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル \boldsymbol{c} を求める。

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$ は一次独立より、その外積 \boldsymbol{c} は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \times (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} 6-6 \\ -4+2 \\ 3-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) &= -2(y-1) - 3(z+1) \\ &= -2y - 3z + 1 = 0\end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $2y + 3z = -1$

3.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル \boldsymbol{c} を求める。

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1$ は一次独立より、その外積 \boldsymbol{c} は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \times (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1) &= \begin{pmatrix} 4 - 2 \\ 2 + 2 \\ 2 + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) &= 2(x - 1) + 4y + 6(z - 1) \\ &= 2x - 4y + 6z - 8 = 0 \end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $x + 2y + 3z = 4$

1.7

1. 第一式から第二式を引くことにより、求める直線は $y = 1, x - 2z = -1$ を満たす。したがって、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

2. 求める直線は $x - z = 0$. $y + z = 1$ を満たす。したがって、

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

3. 求める直線は $x + y = -1$. $-y + 2z = 2$ を満たす。したがって、

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

1.8

直線の方程式を平面の方程式に代入して媒介変数 t を求める。

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{p} + t\mathbf{b}) &= c \\ \therefore t &= \frac{c - (\mathbf{a}, \mathbf{p})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \end{aligned}$$

したがって、

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{c - (\mathbf{a}, \mathbf{p})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \mathbf{b}$$

1.9

$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$ としても一般性を失わない。求める軌跡上の任意の点 \mathbf{x} から二平面へと下ろした垂線と平面との交点をそれぞれ \mathbf{p}, \mathbf{q} とする。

- (i) 二平面が平行でない、すなわち $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ の時、
 $\mathbf{x} - \mathbf{p}$ と \mathbf{a} 、 $\mathbf{x} - \mathbf{q}$ と \mathbf{b} はそれぞれ平行で、 \mathbf{x} から二平面の距離は等しいので、これを t とおくと、

$$\begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{p} = t\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{x} - t\mathbf{a} \\ \mathbf{x} - \mathbf{q} = t\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{x} - t\mathbf{b} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{p} = t\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{x} - t\mathbf{a} \\ \mathbf{x} - \mathbf{q} = -t\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{x} + t\mathbf{b} \end{cases} \quad (2)$$

の二通りで表せる。今、 $(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = c$ 、 $(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = d$ であるから、(1)、(2) をそれぞれ代入することで、求める軌跡は

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) = c - d, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = c + d$$

の二平面である。

- (ii) 二平面が平行、すなわち $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ または $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ の時、

$$\begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{p} = t\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{x} - t\mathbf{a} \\ \mathbf{x} - \mathbf{q} = -t\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{x} + t\mathbf{a} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} - \mathbf{p} = t\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{x} - t\mathbf{a} \\ \mathbf{x} - \mathbf{q} = t\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{x} - t\mathbf{a} \end{cases} \quad (4)$$

- (i) と同様に (3)、(4) を $(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = c$ 、 $(\mathbf{q}, \mathbf{b}) = d$ に代入することで、求める軌跡は $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ の時

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{c + d}{2}$$

で、 $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$ の時

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \frac{c - d}{2}$$

1.10

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= ab \cos \theta = c \\ \therefore \cos \theta &= \frac{c}{ab} \end{aligned}$$

これが存在するための条件は、 $0 < a, b$ かつ $|c| \leq ab$

1.11

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{PQ}) &= \frac{m}{m+n}\mathbf{d} - \frac{m}{m+n}\mathbf{b} = \frac{m}{m+n}(\mathbf{d} - \mathbf{b}) \\
(\overrightarrow{RS}) &= \left(\frac{n}{m+n}\mathbf{c} + \frac{m}{m+n}\mathbf{d}\right) - \left(\frac{m}{m+n}\mathbf{b} + \frac{n}{m+n}\mathbf{c}\right) = \frac{m}{m+n}(\mathbf{d} - \mathbf{b}) \\
(\overrightarrow{PR}) &= \left(\frac{m}{m+n}\mathbf{b} + \frac{n}{m+n}\mathbf{c}\right) - \frac{m}{m+n}\mathbf{b} = \frac{n}{m+n}\mathbf{c} \\
(\overrightarrow{QS}) &= \left(\frac{n}{m+n}\mathbf{c} + \frac{m}{m+n}\mathbf{d}\right) - \frac{m}{m+n}\mathbf{d} = \frac{n}{m+n}\mathbf{c}
\end{aligned}$$

より、 $(\overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{RS})$, $(\overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{QS})$ なので P, Q, R, S は平行四辺形の四頂点。

2 行列と線形変換

2.1

(方針)

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix}$ なるベクトル \mathbf{x} を取る。今、 \mathbf{x} を左回りに θ' だけ回転させたベクトル \mathbf{x}' を考える。

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} a \cos(\theta + \theta') \\ b \sin(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので、

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix}$$

と置けば、 A は任意の二次元ベクトル \mathbf{x} を θ' だけ回転させる $(\theta + \theta')$ 行列である。

次に、ベクトル \mathbf{x} を右回りに θ' だけ回転させてから x 軸について折り返したベクトル \mathbf{x}' を考える。

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= \begin{pmatrix} a \cos(\theta - \theta') \\ -b \sin(\theta - \theta') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ \sin \theta' & -\cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となるので、

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta' & \sin \theta' \\ \sin \theta' & -\cos \theta' \end{pmatrix}$$

と書けば、 B は任意の二次元ベクトル \boldsymbol{x} を右回りに θ' だけ回転させてから x 軸について折り返す $-(\theta - \theta')$ 行列である。

(答案)

1. 左回りに β だけ回転させてから左回りに α 回転させる $(A(\alpha)A(\beta))$ ことと $\alpha + \beta$ だけ回転させる $(A(\alpha + \beta))$ ことは同値。

$$\begin{aligned} A(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \\ &= A(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

2. $-(\theta - \beta) + \alpha = -(\theta - (\alpha + \beta))$

$$\begin{aligned} A(\alpha)B(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} \\ &= B(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

3. $-(\theta + \beta - \alpha) = -(\theta - (\alpha - \beta))$

$$\begin{aligned} B(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & -(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) & \sin(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) & -\cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \\ &= B(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$4. -(-(\theta - \beta) - \alpha) = \theta + (\alpha - \beta)$$

$$\begin{aligned} B(\alpha)B(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta & -(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) \\ \sin(\alpha - \beta) & \cos(\alpha - \beta) \end{pmatrix} \\ &= A(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

5. 左回りに θ 開店するのを n 回繰り返すことと、左回りに $n\theta$ 回転させることは同値。

(1) より、 $A(\theta)A(\theta) = A(2\theta)$ で、帰納的に $A(\theta)^n = A(n\theta)$ である。

6. B の操作を 2 回繰り返すと元のベクトル \mathbf{x} に戻り、もう一度 B を適用すれば $B\mathbf{x}$ になる。

(4) より、 $B(\theta)B(\theta) = A(\theta - \theta)$ で、帰納的に

$$\begin{aligned} B(\theta)^{2m} &= A(m\theta - m\theta) = E \\ B(\theta)^{2m+1} &= B(\theta)B(\theta)^{2m} = B(\theta) \end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned} &A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

2.3

(方針)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

なる式について、 $ad - bc = 0$ が成り立つならば、 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $p > 0$, $q > 0$ を満たすように α, β, p, q を求めることができる、という問題。変形して、

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

から求められる。

(答案)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

を解き、 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $p > 0$, $q > 0$ を満たすように α, β, p, q を与えることができることを示す。上式は、

$$p = a\alpha + \beta c \quad (1)$$

$$0 = -a\beta + \alpha c \quad (2)$$

$$q = \alpha b + \beta d \quad (3)$$

$$s = -b\beta + \alpha d \quad (4)$$

と書ける。(2)より、 $\alpha = \frac{a}{c}\beta$ なので、これを(1)、(4)の代入することで

$$p = \beta\left(\frac{a^2}{c} + c\right) = \beta\left(\frac{a^2 + c^2}{c}\right) \quad (5)$$

$$s = \beta\left(\frac{ad}{c} - b\right) = \beta\left(\frac{ad - bc}{c}\right) \quad (6)$$

また $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ より、

$$\beta^2\left(\frac{a^2}{c^2} + 1\right) = 1 \quad (7)$$

$$\therefore \beta^2 = \frac{c^2}{a^2 + c^2} \quad (8)$$

(5) > 0 より、

$$\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$p = \sqrt{a^2 + c^2} > 0$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{c}{p} \frac{ad - bc}{c} \\ &= \frac{ad - bc}{p} > 0 \end{aligned}$$

以上より、 $p = \sqrt{a^2 + c^2} > 0$ とすれば、 $ad - bc > 0$ ならば、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a}{p} & -\frac{c}{p} \\ \frac{c}{p} & \frac{a}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & \frac{ad+cd}{p} \\ 0 & \frac{ad-bc}{c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

は題意を満たす。

2.4

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \\ B\mathbf{a} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} da_1 + ca_2 \\ -ba_1 + aa_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} (B\mathbf{a}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{ad-bc} \{ (ax_1 + bx_2)(da_1 + ca_2) + (cx_1 + dx_2)(-ba_1 + aa_2) \} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \\ &\quad \{ (ad-bc)x_1a_1 + (ad-bc)x_2a_2 + (ac-ac)x_1a_2 + (bd-bd)x_2a_1 \} \\ &= x_1a_1 + x_2a_2 \\ &= (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = b \end{aligned}$$

2.5

1.

$$\begin{aligned} B\mathbf{a} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $2x - 3y = 2$

2.

$$\begin{aligned} B\mathbf{a} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $3x - 7y = 3$

3 行列式及びベクトル積

3.1

1.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 + 3 \\ 3 - 2 \\ -1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 0 \\ 1 + 6 \\ 0 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 + 12 \\ 6 - 6 \\ 12 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{a})\mathbf{b}$ より、

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a}\} \times \mathbf{b} &= \{-(\mathbf{b}, \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{a}, \mathbf{a})\mathbf{b}\} \times \mathbf{b} \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{a})\mathbf{a} \times \mathbf{b} + (\mathbf{a}, \mathbf{a})\mathbf{b} \times \mathbf{b} \\ &= -(\mathbf{b}, \mathbf{a})\mathbf{a} \times \mathbf{b} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

したがって、求める条件は $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ 、すなわち \boldsymbol{a} と \boldsymbol{b} は垂直または平行

3.3

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より、求める四面体の体積は

$$\frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}$$