

# 第2章 行列、一次方程式系

橋本 龍二

## Contents

<b>1</b>	<b>行列の定義と演算</b>	<b>2</b>
1.1	.....	2
1.2	.....	3
1.3	.....	5
1.4	.....	6
1.5	.....	6
1.6	.....	8
1.7	.....	9
<b>2</b>	<b>正方行列特に正則行列</b>	<b>9</b>
2.1	.....	9
2.2	.....	13
2.3	.....	13
2.4	.....	14
2.5	.....	14
2.6	.....	15
2.7	.....	15
<b>3</b>	<b>行列と線形写像、ベクトルの線形独立性</b>	<b>16</b>
3.1	.....	16
3.2	.....	17

## 1 行列の定義と演算

### 1.1

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 2-2 & 4-4 \\ 4-4 & 8-8 \end{pmatrix} = O \\BA &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 2+8 & 4+16 \\ 1+4 & -2-8 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

## 1.2

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+i & 1+2i \\ 6+4i & 4 \end{pmatrix}$$

$$Ac = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+i \\ 3+4i \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$$

$${}^T AA = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$${}^T A^T B = \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3i & -i & 5+2i \\ 1+i & -i & 1 \\ 3+2i & -3i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+3i & 1+i & 3+2i \\ -i & -i & -3i \\ 5+2i & 1 & 1-i \end{pmatrix} \\
{}^T B^T A &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+i & 6+4i \\ 1+2i & 4 \end{pmatrix} \\
{}^T Bc &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3i \\ 2i \end{pmatrix} \\
B^T B &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+2i & -i-1 & 3i \\ -i+1 & -1 & -i \\ 3i & -i & 4+4i \end{pmatrix} \\
{}^T BB &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+4i & 1+2i \\ 1+2i & 2i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^T\mathbf{c}^T A &= (i \ 0 \ 1+i) \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (-1+i \ 3+4i) \\
{}^T\mathbf{c} B &= (i \ 0 \ 1+i) \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= (3i \ 2i) \\
\mathbf{c}^T \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} (i \ 0 \ 1+i) \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 2i \end{pmatrix} \\
{}^T\mathbf{c} \mathbf{c} &= (i \ 0 \ 1+i) \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= -1+2i
\end{aligned}$$

### 1.3

行列  $A$  を列ベクトルを並べた  $A = (\mathbf{a}_1 \ \dots \ \mathbf{a}_n)$  の形で書く。単位ベクトルとして

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

と置くと、任意の  $0 \leq j \leq 1$  について

$$A\mathbf{e}_j = 1 \cdot \mathbf{a}_j + \sum_{i \neq j} 0 \cdot \mathbf{a}_i = \mathbf{e}_j$$

が成り立つので、 $A$  は単位行列。

#### 1.4

例えば、

$$\begin{aligned} E_{1,2}^{(2,3)} E_{2,2}^{(3,2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_{1,2}^{(2,2)} \end{aligned}$$

このように、列数  $q$  = 行数  $r$  ならば、 $p$  行  $s$  列が 1 である  $l$  行  $n$  列の行列となる。すなわち

$$\delta_{q,r} E_{p,s}^{(l,n)}$$

#### 1.5

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$I = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}$$

と区分けできる。今、

$$A_{1,1} = A_1 A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2$$

$$A_{1,2} = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_3$$

$$A_{1,3} = A_1 A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A_2$$

$$A_{2,1} = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A_3$$

$$A_{2,2} = A_2 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$A_{2,3} = A_2 A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A_1$$

$$A_{3,1} = A_3 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_2$$

$$A_{3,2} = A_3 A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

$$A_{3,3} = A_3 A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

と置ける。ただし、 $E_n$  は  $n$  次単位行列。ゆえ、

$$\begin{aligned}
I^2 &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & O \\ O & A_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4 \\
IJ &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{1,2} \\ A_{1,2} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = K \\
IK &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{1,3} \\ A_{1,3} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_2 \\ -A_2 & O \end{pmatrix} = -J \\
JI &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{2,1} \\ A_{2,1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_3 \\ -A_3 & O \end{pmatrix} = -K \\
J^2 &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{2,2} & O \\ O & -A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4 \\
JK &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{2,3} & O \\ O & -A_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = I \\
KI &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{3,1} \\ A_{3,1} & -O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = J \\
KJ &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{3,2} \\ O & -A_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 & O \\ O & -A_1 \end{pmatrix} = -I \\
K^2 &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{3,3} & O \\ O & -A_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4
\end{aligned}$$

## 1.6

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

より、これがゼロ行列となるには

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ b(a+d) = 0 & (2) \\ c(a+d) = 0 & (3) \\ bc + d^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

(1),(4) より、 $(a+d)(a-d) = 0$



(i)  $a + d \neq 0$  の時、  
 $a = d, b = c = 0$  より  $a = b = c = d$  となってしまうので、二乗がゼロベクトルになることはない。

(ii)  $a - d \neq 0$  の時、  
 $d = -a, bc = -a^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{-bc}$   
すなわち、求める行列は

$$X = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$$

## 1.7

1.6 と同様に、

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 & (1) \\ b(a + d) = 0 & (2) \\ c(a + d) = 0 & (3) \\ bc + d^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

(i)  $a + d \neq 0$  の時、  
 $b = c = 0, a = d = \pm 1$  で、求める行列は  $X = \pm E$

(ii)  $a + d = 0$  の時、  
 $a = \pm\sqrt{1 - bc}, d = \mp\sqrt{1 - bc}$  で、求める行列は

$$X = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1 - bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1 - bc} \end{pmatrix}$$

## 2 正方行列特に正則行列

### 2.1

1.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} x^2 - yz & 0 \\ 0 & x^2 - yz \end{pmatrix} \\ &= (x^2 - yz) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $p$  が偶数の時

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^p = (x^2 - yz)^{p/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$p$  が奇数の時

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^p &= (x^2 - yz)^{(p-1)/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix} \\ &= (x^2 - yz)^{(p-1)/2} \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3 + 3ab^2 & b^3 + 3a^2b \\ b^3 + 3a^2b & a^3 + 3ab^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^p &= \begin{pmatrix} x_p & y_p \\ y_p & x_p \end{pmatrix} \tag{1} \\ x_p &= \frac{1}{2}\{(a+b)^p + (a-b)^p\} \\ y_p &= \frac{1}{2}\{(a+b)^p - (a-b)^p\}\end{aligned}$$

と予想できる。これを数学的帰納法によって証明する。 $p=1$ の時  $x_p = a$ ,  $y_p = b$  より成立。 $k$  を自然数とし、 $p=k$ の時 (1) が成り立っていると仮定すると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k & y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_k + by_k & bx_k + ay_k \\ bx_k + ay_k & ax_k + by_k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
ax_k + by_k &= \frac{1}{2}\{a(a+b)^k + a(a-b)^k + b(a+b)^k - b(a-b)^k\} \\
&= \frac{1}{2}\{(a+b)^{k+1} + (a-b)^{k+1}\} = x_{k+1} \\
bx_k + ay_k &= \frac{1}{2}\{b(a+b)^k + b(a-b)^k + a(a+b)^k - a(a-b)^k\} \\
&= \frac{1}{2}\{(a+b)^{k+1} - (a-b)^{k+1}\} = y_{k+1}
\end{aligned}$$

ゆえに、 $p = k + 1$  の時も (1) は成り立つ。帰納的に任意の自然数  $p$  について (1) が成り立つことが示された。

3.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2 + ad + d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} a^4 & b(a^3 + a^2d + ad^2 + d^3) \\ 0 & d^4 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} a^5 & b(a^4 + a^3d + a^2d^2 + ad^3 + d^4) \\ 0 & d^5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より、与えられた行列を  $p$  乗した時の 1 行 2 列目の要素  $x_{1,2}^{(p)}$  は

$$x_{1,2}^{(p)} = b(a^{p-1}d^0 + a^{p-2}d + a^{p-3}d^2 + \dots + a^2d^{p-3} + ad^{p-2} + a^0d^{p-1}) \quad (1)$$

と予想できるので、数学的帰納法によってこれを証明する。 $p = 1$  の時、 $x_{1,2}^{(1)} = b$  より (1) は成り立つ。自然数  $k$  に対して  $p = k$  の時 (1) が成り立っているとすると、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^k & x_{1,2}^{(k)} \\ 0 & d^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{k+1} & ax_{1,2}^{(k)} + bd^k \\ 0 & d^{k+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
ax_{1,2}^{(k)} + bd^k &= ab(a^{k-1}d^0 + a^{k-2}d + a^{k-3}d^2 + \dots + a^2d^{k-3} + ad^{k-2} + a^0d^{k-1}) + bd^k \\
&= b(a^k d^0 + a^{k-1}d + a^{k-2}d^2 + \dots + a^2d^{k-2} + ad^{k-1} + a^0d^k) \\
&= x_{1,2}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

ゆえに、 $p = k + 1$  のときも (1) は成り立つ。帰納的に任意の自然数  $p$  に対して (1) が成り立つことが示された。

さらに、 $a \neq d$  ならば

$$a^p - d^p = (a - d)(a^{p-1}d^0 + a^{p-2}d + a^{p-3}d^2 + \dots + a^2d^{p-3} + ad^{p-2} + a^0d^{p-1})$$

が成り立つので、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & \frac{b(a^p - d^p)}{a - d} \\ 0 & d^p \end{pmatrix}$$

$a = d$  ならば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & pba^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix}$$

4.

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad aE = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

とすれば  $Y = X - aE$  は冪零上三角行列。

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$\begin{aligned} X^p &= (Y + aE)^p \\ &= \sum_{n=0}^p {}_pC_n Y^n (aE)^{p-n} \\ &= (aE)^p + pY(aE)^{p-1} + {}_pC_2 Y^2 (aE)^{p-2} \\ &= \begin{pmatrix} a^p & 0 & 0 \\ 0 & a^p & 0 \\ 0 & 0 & a^p \end{pmatrix} + pa^{p-1} \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}b & pa^{p-1}c + \frac{p(p-1)}{2} a^{p-2}bd \\ 0 & a^p & pa^{p-1}d \\ 0 & 0 & a^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2.2

数学的帰納法によって二項定理を証明する。

(i)  $p = 1$  のとき

$$A + B = {}_1C_0 A^1 B^0 + {}_1C_1 A^0 B^1$$

(ii)  $p = m$  のとき

$$(A + B)^m = \sum_{q=0}^m {}_mC_q A^q B^{m-q}$$

が成り立つと仮定する。両辺に  $A + B$  を掛けて

$$\begin{aligned} (A + B)^{m+1} &= (A + B) \sum_{q=0}^m {}_mC_q A^q B^{m-q} \\ &= \sum_{q=0}^m {}_mC_q A^{q+1} B^{m-q} + \sum_{q=0}^m {}_mC_q A^q B^{m-q+1} \\ &= A^{m+1} + \sum_{q=0}^{m-1} {}_mC_q A^{q+1} B^{m-q} + B^{m+1} + \sum_{q=1}^m {}_mC_q A^q B^{m-q+1} \\ &= A^{m+1} + \sum_{q=1}^m {}_mC_{q-1} A^q B^{m-q+1} + B^{m+1} + \sum_{q=1}^m {}_mC_q A^q B^{m-q+1} \\ &= A^{m+1} + B^{m+1} + \sum_{q=1}^m ({}_mC_{q-1} + {}_mC_q) A^q B^{m-q+1} \\ &= A^{m+1} + B^{m+1} + \sum_{q=1}^m {}_{m+1}C_q A^q B^{m-q+1} \\ &= \sum_{q=0}^{m+1} {}_{m+1}C_q A^q B^{m+1-q} \end{aligned}$$

より、 $p = m + 1$  に対しても成立。以上より、任意の自然数  $p$  について二項定理が成立することが示された。

## 2.3

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}APP^{-1}AP\dots P^{-1}AP = P^{-1}A^kP$$

## 2.4

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \dots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \dots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \dots & a_n b_{nn} \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} a_1 & b_{12} a_2 & \dots & b_{1n} a_n \\ b_{21} a_1 & b_{22} a_2 & \dots & b_{2n} a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} a_1 & b_{n2} a_2 & \dots & b_{nn} a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、 $B$  が  $A$  と交換可能であるためには  $b_{jk}$  について

$$a_j b_{jk} = a_k b_{jk}$$

が成り立つ必要がある。今、 $a_j \neq a_k$  ( $j \neq k$ ) なので、 $b_{jk} = 0$  ( $j \neq k$ )、すなわち  $B$  は任意の対角行列。

## 2.5

前問と同様に、 $B$  が  $A$  と交換可能であるためには

$$\alpha_j b_{jk} = \alpha_k b_{jk}$$

が成り立つ必要がある。これは、 $n_m \leq j \leq k \leq n_m$  ( $1 \leq m \leq p$ ) の時のみ成り立つ。よって  $B$  は

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_n \end{pmatrix}$$

の形の行列。

## 2.6

(方針)

ケーリー・ハミルトンの定理

$n$  次正方行列  $A$  に対し、 $n$  次多項式  $\det(A - \lambda I)$  の  $\lambda$  の部分を  $A$  に変えたものはゼロ行列  $O$  になる。

本問は  $n = 2$  でケーリー・ハミルトンの定理が成り立つことを示す問題。

(答案)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  と置くと、

$$\begin{aligned} A^2 - (\text{Tr} A)A + (\det A)E &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - a^2 - ad + ad - bc & ab + bd - ab - bd \\ ac + cd - ac - cd & d^2 + bc - ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

## 2.7

冪零行列  $A$  が正則であると仮定する。この時、逆行列  $A^{-1}$  が存在して

$$AA^{-1} = E$$

両辺から  $A^{k-1}$  を掛けて、

$$\begin{aligned} A^{k-1}AA^{-1} &= A^{k-1}E \\ A^k A^{-1} &= A^{k-1} \end{aligned}$$

$A^{k+m} = O$  より左辺は  $O$  だが、右辺は  $O$  でないため矛盾。したがって  $A$  は非正則。

### 3 行列と線形写像、ベクトルの線形独立性

#### 3.1

1.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ &= (f(\mathbf{e}_1) \ \dots \ f(\mathbf{e}_n)) \mathbf{x} \end{aligned}$$

より、求める表現行列は

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{e}_1) \ \dots \ f(\mathbf{e}_n)) &= (\mathbf{e}_n \ \dots \ \mathbf{e}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ &= (f(\mathbf{e}_1) \ \dots \ f(\mathbf{e}_n)) \mathbf{x} \end{aligned}$$



より、求める表現行列は

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_n)) &= (a_1 \mathbf{e}_1 \quad \dots \quad a_n \mathbf{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \Downarrow &\quad \Downarrow \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} ax_1 + x_2 \\ ax_2 + x_3 \\ \vdots \\ ax_{n-1} + x_n \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を考える。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) \\ &= x_1 f(\mathbf{e}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ &= (f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_n)) \mathbf{x} \end{aligned}$$

より、求める表現行列は

$$(f(\mathbf{e}_1) \quad \dots \quad f(\mathbf{e}_n)) = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

## 3.2

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \Downarrow &\quad \Downarrow \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto x_1 + \dots + x_n \end{aligned}$$

を考える。

$$f(\mathbf{e}_1) = 1, \dots, f(\mathbf{e}_n) = 1$$

より、求める表現行列は

$$(1 \quad \dots \quad 1)$$

2.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, f(\mathbf{e}_m) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, f(\mathbf{e}_{m+1}) = \mathbf{0}, \dots, f(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$$

より、求める表現行列は  $m$  行  $n$  列で

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & & & \\ 0 & \dots & & & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} = x & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_1 x \\ a_2 x \\ \vdots \\ a_n x \end{pmatrix} \end{array}$$

を考える。

$$f(1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

より、求める表現行列は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$