第 2 章
行列、一次方程式系

橋本　龍二

Contents

1　行列の定義と演算

1.1

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2-2 & 4-4 \\ 4-4 & 8-8 \end{pmatrix} = O \\
BA &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+8 & 4+16 \\ 1+4 & -2-8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

1.2

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+i & 1+2i \\ 6+4i & 4 \end{pmatrix} \\
A\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+i \\ 3+4i \end{pmatrix} \\
A\,{}^{T}\!A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} \\
{}^{T}\!AA &= \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix} \\
{}^{T}\!A\,{}^{T}\!B &= \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+3i & -i & 5+2i \\ 1+i & -i & 1 \\ 3+2i & -3i & 1-i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+3i & 1+i & 3+2i \\ -i & -i & -3i \\ 5+2i & 1 & 1-i \end{pmatrix} \\
{}^T B^T A &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2+i & 6+4i \\ 1+2i & 4 \end{pmatrix} \\
{}^T B \boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3i \\ 2i \end{pmatrix} \\
B\, {}^T B &= \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+2i & -i-1 & 3i \\ -i+1 & -1 & -i \\ 3i & -i & 4+4i \end{pmatrix} \\
{}^T B B &= \begin{pmatrix} i & 0 & 2+i \\ 1+i & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+4i & 1+2i \\ 1+2i & 2i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^T\boldsymbol{c}\,{}^T A &= \begin{pmatrix} i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1+i & 3+4i \end{pmatrix} \\
{}^T\boldsymbol{c}B &= \begin{pmatrix} i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & -i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3i & 2i \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{c}\,{}^T\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+i \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+i & 0 & 2i \end{pmatrix} \\
{}^T\boldsymbol{c}\boldsymbol{c} &= \begin{pmatrix} i & 0 & 1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \\
&= -1+2i
\end{aligned}
$$

1.3

行列 A を列ベクトルを並べた $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ の形で書く。単位ベクトルとして

$$
\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
$$

と置くと、任意の $0 \leq j \leq 1$ について

$$
A\boldsymbol{e}_j = 1 \cdot \boldsymbol{a}_j + \sum_{i \neq j} 0 \cdot \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{e}_j
$$

が成り立つので、A は単位行列。

1.4

例えば、

$$\begin{aligned} E_{1,2}^{(2,3)} E_{2,2}^{(3,2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_{1,2}^{(2,2)} \end{aligned}$$

このように、列数 $q =$ 行数 r ならば、p 行 s 列が 1 である l 行 n 列の行列となる。すなわち

$$\delta_{q,r} E_{p,s}^{(l,n)}$$

1.5

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$I = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}$$

と区分けできる。今、

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} &= A_1A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E_2 \\
A_{1,2} &= A_1A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_3 \\
A_{1,3} &= A_1A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -A_2 \\
A_{2,1} &= A_2A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A_3 \\
A_{2,2} &= A_2A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \\
A_{2,3} &= A_2A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A_1 \\
A_{3,1} &= A_3A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_2 \\
A_{3,2} &= A_3A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1 \\
A_{3,3} &= A_3A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2
\end{aligned}
$$

と置ける。ただし、E_n は n 次単位行列。ゆえ、

$$\begin{aligned}
I^2 &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & O \\ O & A_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4 \\
IJ &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{1,2} \\ A_{1,2} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = K \\
IK &= \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{1,3} \\ A_{1,3} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_2 \\ -A_2 & O \end{pmatrix} = -J \\
JI &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{2,1} \\ A_{2,1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A_3 \\ -A_3 & O \end{pmatrix} = -K \\
J^2 &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{2,2} & O \\ O & -A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4 \\
JK &= \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{2,3} & O \\ O & -A_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = I \\
KI &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{3,1} \\ A_{3,1} & -O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = J \\
KJ &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_2 \\ A_2 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & -A_{3,2} \\ O & -A_{3,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 & O \\ O & -A_1 \end{pmatrix} = -I \\
K^2 &= \begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A_3 \\ A_3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_{3,3} & O \\ O & --A_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E_2 & O \\ O & -E_2 \end{pmatrix} = -E_4
\end{aligned}$$

1.6

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

より、これがゼロ行列となるには

$$\begin{cases} a^2+bc=0 & (1) \\ b(a+d)=0 & (2) \\ c(a+d)=0 & (3) \\ bc+d^2=0 & (4) \end{cases}$$

(1),(4) より、$(a+d)(a-d)=0$

(i) $a+d \neq 0$ の時、
$a=d,\ b=c=0$ より $a=b=c=d$ となってしまうので、二乗がゼロベクトルになることはない。

(ii) $a-d \neq 0$ の時、
$d=-a,\ bc=-a^2 \ \Rightarrow\ a=\pm\sqrt{-bc}$
すなわち、求める行列は

$$X=\begin{pmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$$

1.7

1.6 と同様に、

$$\begin{cases} a^2+bc=1 & (1) \\ b(a+d)=0 & (2) \\ c(a+d)=0 & (3) \\ bc+d^2=1 & (4) \end{cases}$$

(i) $a+d \neq 0$ の時、
$b=c=0,\ a=d=\pm 1$ で、求める行列は $X=\pm E$

(ii) $a+d=0$ の時、
$a=\pm\sqrt{1-bc},\ d=\mp\sqrt{1-bc}$ で、求める行列は

$$X=\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{1-bc} \end{pmatrix}$$

2 正方行列特に正則行列

2.1

1.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} x^2-yz & 0 \\ 0 & x^2-yz \end{pmatrix} \\ &= (x^2-yz)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、p が偶数の時

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^p = (x^2-yz)^{p/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

p が奇数の時

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}^p &= (x^2-yz)^{(p-1)/2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix} \\ &= (x^2-yz)^{(p-1)/2}\begin{pmatrix} x & -y \\ z & -x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3+3ab^2 & b^3+3a^2b \\ b^3+3a^2b & a^3+3ab^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^p &= \begin{pmatrix} x_p & y_p \\ y_p & x_p \end{pmatrix} \qquad (1) \\ x_p &= \frac{1}{2}\{(a+b)^p+(a-b)^p\} \\ y_p &= \frac{1}{2}\{(a+b)^p-(a-b)^p\}\end{aligned}$$

と予想できる。これを数学的帰納法によって証明する。$p=1$ の時 $x_p = a,\ y_p = b$ より成立。k を自然数とし、$p=k$ の時 (1) が成り立っていると仮定すると、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k & y_k \\ y_k & x_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax_k+by_k & bx_k+ay_k \\ bx_k+ay_k & ax_k+by_k \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
ax_k + by_k &= \frac{1}{2}\{a(a+b)^k + a(a-b)^k + b(a+b)^k - b(a-b)^k\} \\
&= \frac{1}{2}\{(a+b)^{k+1} + (a-b)^{k+1}\} = x_{k+1} \\
bx_k + ay_k &= \frac{1}{2}\{b(a+b)^k + b(a-b)^k + a(a+b)^k - a(a-b)^k\} \\
&= \frac{1}{2}\{(a+b)^{k+1} - (a-b)^{k+1}\} = y_{k+1}
\end{aligned}$$

ゆえに、$p = k+1$ の時も (1) は成り立つ。帰納的に任意の自然数 p について (1) が成り立つことが示された。

3.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ad+d^2) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a^3+a^2d+ad^2+d^3) \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^5 &= \begin{pmatrix} a^2 & b(a^4+a^3d+a^2d^2+ad^3+d^4) \\ 0 & d^5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より、与えられた行列を p 乗した時の 1 行 2 列目の要素 $x_{1,2}^{(p)}$ は

$x_{1,2}^{(p)} = b(a^{p-1}d^0 + a^{p-2}d + a^{p-3}d^2 + ... + a^2d^{p-3} + ad^{p-2} + a^0d^{p-1})$ (1)

と予想できるので、数学的帰納法によってこれを証明する。$p = 1$ の時、$x_{1,2}^{(1)} = b$ より (1) は成り立つ。自然数 k に対して $p = k$ の時 (1) が成り立っているとすると、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^k & x_{1,2}^{(k)} \\ 0 & d^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^{k+1} & ax_{1,2}^{(k)} + bd^k \\ 0 & d^{k+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
ax_{1,2}^{(k)} + bd^k &= ab(a^{k-1}d^0 + a^{k-2}d + a^{k-3}d^2 + ... + a^2d^{k-3} + ad^{k-2} + a^0d^{k-1}) + bd^k \\
&= b(a^kd^0 + a^{k-1}d + a^{k-2}d^2 + ... + a^2d^{k-2} + ad^{k-1} + a^0d^k) \\
&= x_{1,2}^{(k+1)}
\end{aligned}$$

ゆえに、$p = k+1$ のときも (1) は成り立つ。帰納的に任意の自然数 p に対して (1) が成り立つことが示された。
さらに、$a \neq d$ ならば

$$a^p - d^p \quad = \quad (a-d)(a^{p-1}d^0 + a^{p-2}d + a^{p-3}d^2 + ... + a^2d^{p-3} + ad^{p-2} + a^0d^{p-1})$$

が成り立つので、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & \frac{b(a^p-d^p)}{a-b} \\ 0 & d^p \end{pmatrix}$$

$a = d$ ならば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a^p & pba^{p-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix}$$

4.

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad aE = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

とすれば $Y = X - aE$ は冪零上三角行列。

$$\begin{aligned} Y^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Y^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} X^p &= (Y + aE)^p \\ &= \sum_{n=0}^{p} {}_pC_n Y^n (aE)^{p-n} \\ &= (aE)^p + pY(aE)^{p-1} + \ pC_2 Y^2 (aE)^{p-2} \\ &= \begin{pmatrix} a^p & 0 & 0 \\ 0 & a^p & 0 \\ 0 & 0 & a^p \end{pmatrix} + pa^{p-1}\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & bd \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}b & pa^{p-1}c + \frac{p(p-1)}{2}a^{p-2}bd \\ 0 & a^p & pa^{p-1}d \\ 0 & 0 & a^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2

数学的帰納法によって二項定理を証明する。

(i)$p=1$ のとき

$$A+B={}_1C_0A^1B^0+{}_1C_1A^0B^1$$

(ii)$p=m$ のとき

$$(A+B)^m=\sum_{q=0}^{m}{}_mC_qA^qB^{m-q}$$

が成り立つと仮定する。両辺に $A+B$ を掛けて

$$\begin{aligned}
(A+B)^{m+1} &= (A+B)\sum_{q=0}^{m}{}_mC_qA^qB^{m-q}\\
&= \sum_{q=0}^{m}{}_mC_qA^{q+1}B^{m-q}+\sum_{q=0}^{m}{}_mC_qA^qB^{m-q+1}\\
&= A^{m+1}+\sum_{q=0}^{m-1}{}_mC_qA^{q+1}B^{m-q}+B^{m+1}+\sum_{q=1}^{m}{}_mC_qA^qB^{m-q+1}\\
&= A^{m+1}+\sum_{q=1}^{m}{}_mC_{q-1}A^qB^{m-q+1}+B^{m+1}+\sum_{q=1}^{m}{}_mC_qA^qB^{m-q+1}\\
&= A^{m+1}+B^{m+1}+\sum_{q=1}^{m}({}_mC_{q-1}+{}_mC_q)A^qB^{m-q+1}\\
&= A^{m+1}+B^{m+1}+\sum_{q=1}^{m}{}_{m+1}C_qA^qB^{m-q+1}\\
&= \sum_{q=0}^{m+1}{}_{m+1}C_qA^qB^{m+1-q}
\end{aligned}$$

より、$p=m+1$ に対しても成立。以上より、任意の自然数 p について
二項定理が成立することが示された。

2.3

$$(P^{-1}AP)^k=P^{-1}APP^{-1}AP...P^{-1}AP=P^{-1}A^kP$$

2.4

$A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ とおく。

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \dots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \dots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \dots & a_n b_{nn} \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} a_1 & b_{12} a_2 & \dots & b_{1n} a_n \\ b_{21} a_1 & b_{22} a_2 & \dots & b_{2n} a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} a_1 & b_{n2} a_2 & \dots & b_{nn} a_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、B が A と交換可能であるためには b_{jk} について

$$a_j b_{jk} = a_k b_{jk}$$

が成り立つ必要がある。今、$a_j \neq a_k \ (j \neq k)$ なので、$b_{jk} = 0 \quad (j \neq k)$、すなわち B は任意の対角行列。

2.5

前問と同様に、B が A と交換可能であるためには

$$\alpha_j b_{jk} = \alpha_k b_{jk}$$

が成り立つ必要がある。これは、$n_m \leq j \leq k \leq n_m \quad (1 \leq m \leq p)$ の時のみ成り立つ。よって B は

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}$$

の形の行列。

2.6

(方針)

ケーリー・ハミルトンの定理

n 次正方行列 A に対し、n 次多項式 $\det(A-\lambda I)$ の λ の部分を A に変えたものはゼロ行列 O になる。

本問は $n=2$ でケーリー・ハミルトンの定理が成り立つことを示す問題。

(答案)
$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と置くと、

$$\begin{aligned}
A^2-(\mathrm{Tr}A)+(\det A)E &= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc-a^2-ad+ad-bc & ab+bd-ab-bd \\ ac+cd-ac-cd & d^2+bc-ad-d^2+ad-bc \end{pmatrix} \\
&= O
\end{aligned}$$

2.7

冪零行列 A が正則であると仮定する。この時、逆行列 A^{-1} が存在して

$$AA^{-1}=E$$

両辺から A^{k-1} を掛けて、

$$\begin{aligned}
A^{k-1}AA^{-1} &= A^{k-1}E \\
A^kA^{-1} &= A^{k-1}
\end{aligned}$$

$A^{k+m}=O$ より左辺は O だが、右辺は O でないため矛盾。したがって A は非正則。

2.8