2020 数学1(Sセメスター)
授業ノート

橋本　龍二

January 22, 2021

Contents

1　数ベクトル空間とその性質

Def. 一次従属、一次独立

一般に、m 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{K}$ があって、そのうち一つが他のベクトルの一次結合で書ける、すなわち

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + ... + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

なる $c_1 = ... = c_m = 0$ でない $c_1, ..., c_m \in \mathbb{K}$ が存在する時、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ は一時従属である、という。
一方、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ が一次独立であるとは、それらが一次従属で無い、すなわち

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + ... + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

となるのは $c_1 = ... = c_m = 0$ に限る、ということである。

Def. 基底

集合 V について、

- $V =< \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m >$　(V 内の任意のベクトルは $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で書ける。= V は $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ が張る空間。)
- $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ は一次独立

が成り立つ時、$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ は V の基底であるという。

Def. 次元

V の基底が m 個のベクトルからなる時、V の次元は m であるとし、

$$dim(V) = m$$

と書く。(基底がない時、無限次元)

例：n 次元ユークリッド空間は次のように書ける。

$$\mathbb{R}^n =< \boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n >$$

よって $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底で、$dim(\mathbb{R}^n) = n$。

例：

$$V = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} > = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

とすると、V の次元は 1。(V 内の任意のベクトルは 1 つのベクトルの定数倍として書ける)

2　ベクトル空間と線形写像

2.1　ベクトル空間

Def. ベクトル空間

集合 U が $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間であるとは、U が次の性質を満たすことと定義する。

1. 加法、スカラー倍が定義される。つまり、
   - $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in U$ (加法について閉じている)
   - $k \in \mathbb{K},\ \boldsymbol{a} \in U \Rightarrow k\boldsymbol{a} \in U$ (スカラー倍について閉じている)
2. 次の条件 (a)∼(h) を満たす。
   (a) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ (加法が順不動)
   (b) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ (加法の交換律)
   (c) $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ (スカラー倍の分配法則)
   (d) $(k + h)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{b}$ (スカラーの分配法則)
   (e) $(hk)\boldsymbol{a} = (kh)\boldsymbol{a}$
   (f) 任意の $\boldsymbol{a}$ について、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{a}$ なる $\boldsymbol{0}$ が存在する。
   (ゼロベクトルを上のように定義し、その存在を仮定)
   (g) 任意の $\boldsymbol{a}$ に対して、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{0}$ なる $\boldsymbol{a}'$ が存在する。(逆ベクトルの仮定)
   (h) $1 \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

例：二次関数の集合を、ベクトル空間として次のように定義する。

$$R_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

和とスカラー倍を定義すると、下のように閉じていることがわかる。$a \in R_2[x] \Rightarrow a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$
関数の和：$a, b \in R_2[x], \quad (a+b)(x) = a(x) + b(x) \in R_2[x]$
スカラー倍：$k \in \mathbb{R},\ a \in R_2[x],\ (ka)(x) = ka(x) \in R_2[x]$

例：$C[a,b]$ を閉区間 $[a,b]$ 上に定義された連続関数全体の集合とする。$f \in C[a,b] \Leftrightarrow f : [a,b] \to \mathbb{R}, f$ は連続
和とスカラー倍は、下のように閉じている。
和：$f, g \in C[a,b],\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \in C[a,b]$
スカラー倍：$k \in \mathbb{R},\ f \in C[a,b],\ (kf)(x) = kf(x) \in C[a,b]$

ベクトル空間の定義の意味を考える。2.(a)$\sim$(h) の定義は、数ベクトルで成り立っていた性質を導出するのに最低限必要なものである。(ベクトル空間の定義はいわば仮定。仮定はたくさん置きたくないが、1,2(a)$\sim$(h) だけ仮定しておけば残りの性質は導出できる。) 次の定理を示すことで実感しよう。

Th'm

ゼロベクトルはただ一つ。

定義では「存在する」としか仮定していないが、「一意に存在する」ことが言える。

(証明)
ゼロベクトルが二つ $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$ 存在する、と仮定する。$\mathbf{0}$ はゼロベクトルなので、任意の $\boldsymbol{a}$ に対して、

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$$

ここで、$\boldsymbol{a}' = \mathbf{0}'$ を代入すると、

$$\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}' \tag{1}$$

一方、$\mathbf{0}'$ もゼロベクトルなので、任意の $\boldsymbol{a}$ について、

$$\boldsymbol{a} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$$

ここで、$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ を代入すると、

$$\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0} \tag{2}$$

(1),(2) より、加法の交換律を用いて、

$$\begin{aligned}\mathbf{0}' &= \mathbf{0}' + \mathbf{0} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}\end{aligned}$$

以上より、$\mathbf{0} = \mathbf{0}'$ が言えたので、ゼロベクトルはただ一つである。

Th'm

$$0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

(証明)
$0 + 0 = 0$ なので、

$$0\boldsymbol{a} = (0+0)\boldsymbol{a} \tag{1}$$

が成り立つ。今、$\boldsymbol{a}$ はベクトル空間の要素なので、和とスカラー倍について閉じている；

$$(0+0)\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a} \tag{2}$$

さて、ゼロベクトルとは、ベクトル空間内の任意の $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$ となるような $\mathbf{0}$ のことであった。(1),(2) より、

$$0\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{a} + 0\boldsymbol{a}$$

なので、$0\boldsymbol{a}$ はゼロベクトル。

ベクトル空間を定義したことで、数ベクトル空間と同じような概念を定義できる。

Def. 一次結合、一次独立、基底、次元

ベクトル空間 U について、

- $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m \in U$ の一次結合とは、$c_1, ..., c_m \in \mathbb{K}$ を用いて、

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + ... + c_m\boldsymbol{a}_m \in U$$

  (和とスカラー倍について閉じていることから一次結合が U に含まれることは証明できる)

- $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ が一次独立であるとは、

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + ... + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

  となるような定数 $c_1, ..., c_m$ が $c_1 = ... = c_m$ に限る、ということ。また一次従属は一次独立でないことと同値。

- $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ が U の基底であるとは、$U \ =< \ \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m \ >$($U$ は $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ で張られる) かつ $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_m$ が一次独立ということ。

- U の次元とは、基底を構成するベクトルの個数のこと。

例：次の二次関数の集合を考える。

$$R_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$1, x, x^2$ は $R_2[x]$ の基底。(一次独立な元 $1, x, x^2$ のスカラー倍と和によって $R_2[x]$ は張られる。)
$1, (1+x), (1+x)^2$ も $R_2[x]$ の基底。このことを示そう。

$$c_1 + c_2(1+x) + c_3(1+x)^2 = 0 \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

となるような定数 c_1, c_2, c_3 は、$c_1 = c_2 = c_3 = 0$ しかないので、$1, (1+x), (1+x)^2$ は一次独立。また $R_2[x]$ 内の任意の元は $1, (1+x), (1+x)^2$ の一次結合で表すことができるのだから、これは $R_2[x]$ の基底。

Def. 部分ベクトル空間

U がベクトル空間の時、$V \subset U$ について、

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \Rightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$ (和について閉じている)
- $k \in \mathbb{K} \Rightarrow k\boldsymbol{a} \in V$ (スカラー倍について閉じている)

が成り立つ時、V はベクトル空間で、U の部分ベクトル空間である、という。
(ベクトル空間 U があって、その部分集合 U について、それがベクトル空間であるかどうかをチェックしたい時、和とスカラー倍について閉じている、ということが言えれば 2(a)~(h) は自動的に成り立ち、ベクトル空間であるとして良い)

2.2 線形写像

数学では集合そのものだけを考えるのではない。集合から集合へとものを写す (関数でいえば実数を実数へと写す)、というような写像を考えることが多い。故に、ベクトル空間からベクトル空間へと対応づけを与えるような写像の性質にも興味がある。2 時間数の集合の場合、微分という操作は線形写像の重要な例である。

Def. 線形写像

二つの $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 U, U' があって、写像 $f : U \to U'$ を考える。
「f が線形写像である」とは、次の条件を満たすことである。

- 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$(インプット)、$k, h \in \mathbb{K}$(スカラー) に対して

$$f(k\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{b}) = kf(\boldsymbol{a}) + hf(\boldsymbol{b})$$

($\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の一次結合を f で写したものは、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を個別に f で写して一次結合を取ったものと一致する。一次結合の写像＝写像の一次結合)

例 : $C(a, b)$ を閉区間 $[a, b]$ 上で定義された連続関数全体の集合と置く。今、写像 F を考える。$f \in C[a, b]$ について、F を次のように定義する。

$$F(f)(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\begin{array}{rcl} F : C[a,b] & \longrightarrow & C[a,b] \\ \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\; & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\; \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

(連続関数の有限閉区間上での積分は有限なので、写像 F の行き先の集合は $C[a,b]$)
この時、$F : C[a,b] \to C[a,b]$ は線形写像である。これを示すには、任意の $f, g \in C[a,b]$ と $k, h \in \mathbb{R}$ について

$$F(kf + hg) = kF(f) + hF(g)$$

を示せば良い。

$$\begin{aligned} F(kf+hg) &= F(kf+hg)(x) \\ &= \int_a^x (kf+hg)(t)dt \\ &= \int_a^x \{kf(t)+hg(t)\}dt \\ &= k\int_a^x f(t)dt + h\int_a^x g(t)dt \\ &= k\int_a^x f(t)dt + h\int_a^x g(t)dt \\ &= kF(f)(x) + hF(g)(x) \\ &= (kF(f)+hF(g))(x) \\ &= kF(f)+hF(g) \end{aligned}$$

より、$F(kf+hg)$ と $kF(f)+hF(g)$ は任意のインプット x に対して同じ値を返す $C[a,b]$ 上の関数であることが示せた。

例：次の二次関数の集合を考える。

$$R_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

写像 $D : R_2[x] \to R_1[x]$ を微分とする。すなわち、

$$f \in R_2[x] \Rightarrow F(f)(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

$$\begin{array}{rcl} F : R_2[x] & \longrightarrow & R_1[x] \\ \cup & & \cup \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

この時、D が線形写像であることを示す。

$$f, g \in R_2[x],\ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

について、

$$\begin{aligned} D(kf+hg)(x) &= \frac{d}{dx}(kf+hg)(x) \\ &= k\frac{d}{dx}f(x) + h\frac{d}{dx}g(x) \\ &= kD(f)(x) + hD(g)(x) \\ &= (kD(f)+hD(g))(x) \end{aligned}$$

より、$D(kf+hg) = kD(f) + hD(g)$ なので、D は線形写像。

3 線形写像の表現

抽象的な関数の空間が数ベクトル空間に対応できる、という話や、微分、積分といった線形写像が行列の掛け算として書ける、という話を厳密にやっていく。
線形写像 $f: U \to V$ について、U の基底を $\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_m$ とすると、任意の $\boldsymbol{x} \in U$ は、

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{u}_1 + ... + c_m\boldsymbol{u}_m \quad (c_1, ..., c_m \in \mathbb{R})$$

と一意に書ける。この時、$\boldsymbol{x}$ を線形写像 f で写すと、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(c_1\boldsymbol{u}_1 + ... + c_m\boldsymbol{u}_m) \\ &= c_1 f(\boldsymbol{u}_1) + ... + c_m f(\boldsymbol{u}_m) \end{aligned}$$

(ベクトル空間 U の任意の元についての線形写像 f は、基底の写像の線形結合として書くことができる)
このように、基底の行先 $(f(\boldsymbol{u}_1), ..., f(\boldsymbol{u}_m))$ さえわかれば、全ての $\boldsymbol{x} \in U$ について、その行先 $f(\boldsymbol{x})$ を知ることができる。

3.1 数ベクトル空間における線形写像の表現

行列とベクトルの積

A を $m \times n$ 行列、$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ とおく。

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{a}_1 x_1 + ... + \boldsymbol{a}_n x_n \end{aligned}$$

(行列とベクトルの積は、行列の列ベクトルの一次結合として解釈できる。)

$U = \mathbb{K}^m, V = \mathbb{K}^n$ として、線形写像 $f : U \to V$ を考える。改めて書くと、

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}^m & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ \Cup & & \Cup \\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} & \longmapsto & \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{x}$ について考えよう。数ベクトル空間上のベクトル $\boldsymbol{x}$ というのは、次のように $\mathbb{K}^m$ の基底である基本ベクトル $(\boldsymbol{e}_i)_{i=1}^m$ の一次結合として一意に書ける。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + x_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \boldsymbol{e}_1 + ... + x_m \boldsymbol{e}_m \end{aligned}$$

では $\boldsymbol{x}$ を線形写像 f で写した行先の $\boldsymbol{y}$ はどのように表せるだろうか。線形写像の定義より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= f(\boldsymbol{x}) \\ &= f(x_1 \boldsymbol{e}_1 + ... + x_m \boldsymbol{e}_m) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + ... + x_m f(\boldsymbol{e}_m) \qquad (1) \end{aligned}$$

$f(\boldsymbol{e}_j) \in \mathbb{K}^n,\ j = 1, ..., m$ より、$\boldsymbol{a}_j = f(\boldsymbol{e}_j)$ と書くことにする。$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
(1) &= x_1\boldsymbol{a}_1 + ... + x_m\boldsymbol{a}_m \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= A\boldsymbol{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

つまり、$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$『線形写像 $f(\boldsymbol{x})$ は、$\boldsymbol{x}$ に依存しない行列 A で表現できる !! 』

ここまでのまとめ

線形写像 $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ は、出発地の数ベクトル空間の基底 $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_m$ を集めて

$$A = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_m) \end{pmatrix}$$

なる行列 A を定義することで、$n \times m$ 行列の左からの掛け算に相当する。

例：数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 f を以下のように定義する。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とすると、

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

まずはこれが線形写像であることを証明する。定義域内のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と定

数 $k, h \in \mathbb{R}$ を考える。

$$\begin{aligned}
f(k\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{b}) &= f(k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}) \\
&= f(\begin{pmatrix}ka_1+hb_1\\ka_2+hb_2\\ka_3+hb_3\end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix}k(a_1+a_3)+h(b_1+b_3)\\k(a_1+a_3)+h(b_2+b_3)\end{pmatrix} \\
&= k\begin{pmatrix}a_1+a_3\\a_2+a_3\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}b_1+b_3\\b_2+b_3\end{pmatrix} \\
&= kf(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix})+hf(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}) \\
&= kf(\boldsymbol{a})+hf(\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

より、f は線形写像。次に、定義域の基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を f で写すことを考える。

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{e}_1) &= f(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\
f(\boldsymbol{e}_2) &= f(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
f(\boldsymbol{e}_3) &= f(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\
\therefore f(\boldsymbol{x}) &= A\boldsymbol{x} \\
&= \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

このように、数ベクトル空間上の線形写像を行列の掛け算として表現することができた。

3.2 一般のベクトル空間における線形写像の表現

(準備)

Def. 像、単射、全射、全単射

一般の集合 M, N について、写像 $f : M \to N$ を考える。

- 像とは、定義域内 x を f で写した先の集合のことで、値域ともいい、$Im(f)$ と書く。

$$Im(f) = \{f(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in M\}$$

- f が単射であるとは、「任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in M$ に対して、$\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ ならば、$f(\boldsymbol{x}_1) \neq f(\boldsymbol{x}_2)$ である」ことである。(M の異なる要素には N の異なる要素が対応する)
- 全射：$Im(f) = N$ (像が N と一致する)
- 全単射 $\Leftrightarrow$ 全射かつ単射

Def. 同型写像

U, U' をベクトル空間であるとする。今、

$$f : U \to U' \text{ は線形写像かつ全単射}$$

なる f が存在する時、f を同型写像という。また集合 U と U' は同型であるといい、$U \cong U'$ と書く。
(二つの空間を同一視して互いに行ったり来たりしたい、という時は、その間に線形写像 f があって、それが全単射であることが必要)

(重要)『任意のベクトル空間は数ベクトル空間と同型 !!!! 』
これを示すためには一般のベクトル空間 U 内のあるベクトルから数ベクトル空間への写像を一つ選んでそれが同型であることをいえば良い。一般のベクトル空間 U において、その基底を $\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n$ とする。基底の定義により、任意の $\boldsymbol{u} \in U$ について、

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + ... + c_n\boldsymbol{u}_n, \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}$$

と一意に書ける。今、写像 $f : U \to \mathbb{K}^n$ を

$$f(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

と定義すると、これは自明に全単射で、同型写像なので、$U \cong \mathbb{K}^n$。

- ベクトル空間に規定が存在するならば、数ベクトル空間と同一視できる。
- 数ベクトル空間における線形写像は行列の掛け算である。

この 2 点を用いて、一般の線形写像を行列として表したい。これが表現行列である。
一般の線形写像を $f : U \to V$ とする。U の基底を $\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n$、$V$ の基底を $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_m$ とする。直接ここからこれを考えるのは難しいので、集合 U, V をそれぞれ $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$ を同一視することで、数ベクトル空間の線形写像と同様に表現行列を考える。($U \cong \mathbb{K}^n, V \cong \mathbb{K}^n$ として $\mathbb{K}^n$ から $\mathbb{K}^m$ への写像を考えたい。その同一視の道具として $\varphi : U \to \mathbb{K}^n,\ \psi : V \to \mathbb{K}^m$ を導入する。)
まずは、$U \cong \mathbb{K}^n$ とするために、線形写像 $\varphi : U \to \mathbb{K}^n$ を定義する。上の (重要) で述べたようにベクトル空間は数ベクトル空間と同型で、

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$$

は同型写像。ただし、$\boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{u}_1 + ... + x_n\boldsymbol{u}_n$($\varphi$ はベクトルを基底の一次結合としてみたときのの係数を並べて数ベクトルを作る写像。基底を写すと単位ベクトルになる。)
同様に、全単射な線形写像 $\psi : V \to \mathbb{K}^m$ を定義して $V \cong \mathbb{K}^n$ としよう。$\boldsymbol{v} = y_1\boldsymbol{v}_1 + ... + y_m\boldsymbol{v}_m \in V$ について、

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^m$$

は同型写像。以上より、$f(\boldsymbol{u}) : U \to V$ の代わりに、$\boldsymbol{u}$ を基底の一次結合としたときの係数を並べた数ベクトル $\boldsymbol{x}$ に、

1. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ を引数にとり $\boldsymbol{u}$ を返す写像 φ^{-1} を通す。$\boldsymbol{u} = \varphi^{-1}(\boldsymbol{x})$
2. $\boldsymbol{u}$ を引数にとり $\boldsymbol{v}$ を返す写像 f を通す。$\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) = f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x}))$
3. $\boldsymbol{v}$ を引数にとり同じく係数を並べた数ベクトル $\boldsymbol{y}$ を返す写像 ψ を通す。$\boldsymbol{y} = \psi(\boldsymbol{v}) = \psi(f(\boldsymbol{u})) = \psi(f(\varphi^{-1}(\boldsymbol{x})))$

なる処理を行うことで、合成写像 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ の表現行列を f の表現行列と定義することができる。(曼荼羅が死ぬほどわかりやすいので参照)

例：微分、積分、期待値などを含む線形写像の操作は全て行列の掛け算で表すことができる。例えば、二次関数の集合 U

$$U = R_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

について、U の要素を引数として、これを微分する写像を D としよう。つまり、

$$\begin{array}{rcl} D : R_2[x] & \longrightarrow & R_2[x] \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f(x) & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

D の表現行列を構成する。まずは、$\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ を考える。U の基底 $1, x, x^2$ をそれぞれ $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ と書くと、φ とは前述の通り「基底を φ で写すと単位ベクトルになるように定義」するものなので、

$$\varphi(\boldsymbol{u}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi(\boldsymbol{u}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \varphi(\boldsymbol{u}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり、$\boldsymbol{u} = a_0 \boldsymbol{u}_1 + a_1 \boldsymbol{u}_2 + a_2 \boldsymbol{u}_3 \in U$ に対して

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\boldsymbol{u}) & = & \varphi(a_0 \boldsymbol{u}_1 + a_1 \boldsymbol{u}_2 + a_2 \boldsymbol{u}_3) \\ & = & a_0 \varphi(\boldsymbol{u}_1) + a_1 \varphi(\boldsymbol{u}_2) + a_2 \varphi(\boldsymbol{u}_2) \\ & = & \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

さて、今回は出発地も行き先も同じ U なので、$\varphi = \psi$ である。ゆえ、D の表現行列は、基底ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ の行き先 $D(\boldsymbol{u}_i)$ を φ で写した $\varphi \circ D(\boldsymbol{u}_i)$ を並べた

ものである。

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{u}_1) &= \frac{d}{dx}\boldsymbol{u}_1 \\
&= 0 \times 1 + 0 \times x + 0 \times x^2 \\
\varphi \circ D(\boldsymbol{u}_1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
D(\boldsymbol{u}_2) &= \frac{d}{dx}\boldsymbol{u}_2 \\
&= 1 \times 1 + 0 \times x + 0 \times x^2 \\
\varphi \circ D(\boldsymbol{u}_2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
D(\boldsymbol{u}_3) &= \frac{d}{dx}\boldsymbol{u}_3 \\
&= 0 \times 1 + 2 \times x + 0 \times x^2 \\
\varphi \circ D(\boldsymbol{u}_3) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上より、表現行列は

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} \varphi \circ D(\boldsymbol{u}_1) & \varphi \circ D(\boldsymbol{u}_2) & \varphi \circ D(\boldsymbol{u}_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D の表現行列は、「元のベクトルを基底の一次結合で書いたときの係数を並べた数ベクトル $\to f$ で写した先のベクトルを基底の一次結合で書いたときの係数を並べたベクトル」である。

4　線形写像の性質

ベクトル空間 U と数ベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ を同一視する道具として同型写像を定義した。この同型写像の定義とは、「線形写像かつ全単射という要件を満たすもの」だった。では、必ず全単射について考察しよう。

4.1 全射

例えば、写像 D が次のように定義されていたとする (微分)。

$$
\begin{array}{cccc}
D: & R_2[x] & \longrightarrow & R_2[x] \\
 & \cup & & \cup \\
 & f(x) & \longmapsto & f'(x)
\end{array}
$$

ここでは $D(\boldsymbol{u}) = x^2$ となるような $\boldsymbol{u} \in R_2[x]$ は存在しないので全射とはいえない。しかし、このような例を排除するために値域を変更して、

$$
\begin{array}{cccc}
D: & R_2[x] & \longrightarrow & R_1[x] \\
 & \cup & & \cup \\
 & f(x) & \longmapsto & f'(x)
\end{array}
$$

とすればこれは全射である。このように、写像を定義するときに値域に気をつける (像と一致させる) ことで全射は作れる。
より一般に、線形写像 $f : U \to U'(U, U'$ はベクトル空間) について、f が全射出なければ改めて $f : U \to Im(f)$ と定義すれば f は全射になる。では f の像 $Im(f)$ がベクトル空間であることを示そう。

Th'm

U, U' をベクトル空間とし、$f : U \to U'$ を線形写像とする。

1. $Im(f)$ は U' の部分ベクトル空間。
2. $U =< \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n >\Rightarrow Im(f) =< f(\boldsymbol{a}), ..., f(\boldsymbol{a}_n) >$

(証明 1.)
和とスカラー倍について閉じていることを示せば良い。$\boldsymbol{y} \in Im(f)$ を取ると、像の定義からある $\boldsymbol{x} \in U$ が存在して $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ なので、$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ を考えて $\boldsymbol{y}_1 = f(\boldsymbol{x}_1),\ \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_2)$ とする。線形写像の定義より、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 &= f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) \\
&= f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in Im(f)
\end{aligned}
$$

$$k\boldsymbol{y}_1 = kf(\boldsymbol{x}_1) = f(k\boldsymbol{x}_1) \in Im(f)$$

(証明 2.)
$U =< \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n >$ のとき、$< f(\boldsymbol{a}), ..., f(\boldsymbol{a}_n) >\subset Im(f)$ かつ $Im(f) \subset< f(\boldsymbol{a}), ..., f(\boldsymbol{a}_n) >$ を示す。

1. $< f(\boldsymbol{a}), ..., f(\boldsymbol{a}_n) > \subset Im(f)$ を示す。
   $Im(f)$ の定義により、$f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n) \in Im(f)$ である。$Im(f)$ はベクトル空間なので、

$$c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + ... + c_n f(\boldsymbol{a}_n) \in Im(f)$$

   よって、任意の $\boldsymbol{x} \in < f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n) >$ について、

$$\boldsymbol{x} = c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + .. + c_n f(\boldsymbol{a}) \in Im(f)$$

   (U が V の部分集合であることを示すためには、U 内の任意の元が V に含まれることを示せば良い)

2. $Im(f) \subset < f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n) >$ を示す。
   $\boldsymbol{y} \in Im(f)$ を取る。像の定義により、$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ なる $\boldsymbol{x} \in U$ が存在する。今、$\boldsymbol{x} \in U =< \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n >$ より、

$$\boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{a}_1 + ... + c_n \boldsymbol{a}_n$$

   と書ける。このことを用いて、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) &= f(c_1 \boldsymbol{a}_1 + ... + c_n \boldsymbol{a}_n) \\ &= c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + ... + c_n f(\boldsymbol{a}_n) \in < f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}) >\end{aligned}$$

1,2 より、定理の主張は示された。

※ $f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n)$ は $Im(f)$ を張るが、一次独立でない場合があり、この時は基底ではない。「$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ が一次独立 $\Rightarrow f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n)$ が一次独立」が f が単射であるための必要十分条件となる。

Def. 階数

$Im(f)$ の次元を f の階数 (ランク) という。すなわち、

$$rank(f) = dim(Im(f))$$

4.2 単射

単射は、「全ての $\boldsymbol{y}$ について $\{\boldsymbol{x} \in U | f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}\}$ がただ一つ」であること。線形写像が単射になるための条件について考察する。

Def. 核

$f : U \to U'$ を線形写像であるとする。写像 f の核 (カーネル、$Ker(f)$) とは、行き先が U' 内のゼロベクトル $\mathbf{0}$ であるような U 内の $\boldsymbol{x}$ の集合のことである。

$$Ker(f) = \{x \in U | f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}'\}$$

Th'm

$f : U \to U'$ を線形写像であるとする。$\mathbf{0} \in U$ は核の要素である。

(証明)
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in U$ について、$f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}')$ であることを考える。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{a}') &\Leftrightarrow f(\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{a}') = \mathbf{0}' \\ &\Leftrightarrow f(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}') = \mathbf{0}' \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' \in Ker(f) \end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$ とすると、$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' = \mathbf{0}' \in Ker(f)$

例：核の具体例を挙げる。次数が n 次以下の実数多項式全体の集合；

$$R_n[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n | a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$$

について考える。今、線形写像 f を次のように定義する。

$$\begin{array}{ccc} f : R_n[x] & \longrightarrow & R_{n-1}[x] \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ a(x) & \longmapsto & a'(x) \end{array}$$

f の核とは、

$$Ker(f) = \{a(x) \in R_n[x] | f(x) = \mathbf{0}'\}$$

である。$R_{n-1}[x]$ 上のゼロベクトル (足しても変わらない要素) とは定数 0 であるから、

$$f(a)(x) = \mathbf{0}' \Leftrightarrow \frac{d}{dx} a(x) = 0$$

微分して 0 となるような $a(x)$ とは、$a(x) = a_0$(定数) であるから、f の核は

$$Ker(f) = \{a(x) = a_0 | a_0 \in \mathbb{R}\}$$

Th'm (重要) 線形写像 $f: U \to U'$ が単射になるための必要十分条件

1. f が単射 $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ (核の要素が $\mathbf{0}$ ただ一つ。シングルトン。)
2. f が単射 $\Leftrightarrow$『$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ が一次独立 $\Rightarrow f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n)$ が一次独立』
3. (U が有限次元の時)f が単射 $\Leftrightarrow dim(Im(f)) = dim(U)$

※したがって、f の表現行列を A とすると $rankA = dim(Im(f))$ と定義されるので、f が単射であるための条件は $rankA = dim(U)$、全射であることの条件は $rankA = dim(U')$ と言い換えられる。

(証明 1.)
($\Rightarrow$)
f が単射である ($f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$) と仮定して、$Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ を示す。

$$Ker(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \mathbf{0} \in Ker(f) \wedge \forall \boldsymbol{a} \in Ker(f),\ \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

ゼロベクトルが核に含まれることはすでに示したので、全ての核内の要素 $\boldsymbol{a}$ がゼロベクトルであることを示せば良い。
$Ker(f)$ 内の任意の $\boldsymbol{a}$ を取ると、核の定義により $f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}'$ となる。一方 $\mathbf{0} \in Ker(f)$ より、$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$ であるから、f は単射より $f(\boldsymbol{a}) = f(\mathbf{0}) \Rightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$
($\Leftarrow$)
$ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ を仮定して、f が単射 ($f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2)$) となることを示す。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) &\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}' \\ &\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0}' \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \quad (\because Ker(f) = \{\mathbf{0}\}) \\ &\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 \end{aligned}$$

(証明 2.)
($\Rightarrow$)
f が単射であると ($Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$) 仮定して、『$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ が一次独立 $\Leftarrow f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n)$ が一次独立』を示す。U 上の一次独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ に対して $f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n)$

が一次独立になるとは、

$$c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + ... + c_n f(\boldsymbol{a}_n) = \mathbf{0}'$$

となる定数の組 $c_1, ..., c_n$ が $c_1 = ... = c_n = 0$ のみとなること。

$$\begin{aligned} \mathbf{0}' &= c_1 f(\boldsymbol{a}_1) + ... + c_n f(\boldsymbol{a}_n) \\ &= f(c_1 \boldsymbol{a}_1 + ... + c_n \boldsymbol{a}_n) \in Ker(f) \end{aligned}$$

今、単射の定義により $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ なので、

$$c_1 \boldsymbol{a}_1 + ... + c_n \boldsymbol{a}_n = 0$$

したがって、$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ が一次独立ならば $c_1 = ... = c_n = 0$ のみである。

($\Leftarrow$)
『$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ が一次独立 $\Leftarrow f(\boldsymbol{a}_1), ..., f(\boldsymbol{a}_n)$ が一次独立』と仮定して、f が単射(全ての $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ について $f(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}'$) を示す。
$\boldsymbol{a}$ ($\neq \mathbf{0}$) (非ゼロのベクトル一つからなるベクトルの組) は一次独立なので、$c\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ となるような定数 c は $c = 0$ のみ。今、$\boldsymbol{a}$ が一次独立であれば $f(\boldsymbol{a})$ も一次独立という仮定が置かれているので、$cf(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}'$ となるような定数 c は $c = 0$ のみ。すなわち $c \neq 0$ に対し、$cf(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}'$。したがって、$c = 1$ とすると、$f(\boldsymbol{a}) \neq \mathbf{0}'$ が言える。

3. について。一般の線形写像 f で、次の不等式が成り立つ。

$$dim(Im(f)) \leq dim(U)$$

特に、単射でないとき、不等式は厳密に成り立つ。関連して、次の次元定理を示す。

次元定理

$$dim(U) = dim(Im(f)) + dim(Ker(f))$$

次元定理が成り立つならば、単射の時 $Ker(f)) = \{\mathbf{0}\}$(シングルトン。ゼロ次元なので $dim(U) = dim(Im(f)))$ であるから 3. は成り立つ。では次元定理を証明するためにいくつか定義をする。(次元定理の証明は 27 ページ)

Def. 空間と和

$V \subset U,\ W \subset U$、$V, W$ は U の部分ベクトル空間であるとする。この時、V と W の和とは、

$$V + W = \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W\}$$

直和

任意の $\boldsymbol{u} \in V + W$ に対し、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ が一意に取れるとき、

$$V + W = V \oplus W$$

とかき、直和と呼ぶ。

例：$U = \mathbb{R}^2$(二次元平面) とする。以下のような U の部分ベクトル空間 V, W を考える。

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} | x_1 \in \mathbb{R}\},\quad W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_2 \in \mathbb{R}\}$$

(V は x 軸、W は y 軸のこと。) 今、$\mathbb{R}^2$ 上のベクトルは V 上のベクトルと W 上のベクトルの和として一意に書けるので、直和。すなわち、

$$V + W = \mathbb{R}^2 = V \oplus W$$

例：直和でない例を挙げる。$U = \mathbb{R}^3$ とし、以下のような U の部分ベクトル空間 V, W を考える。

$$V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},\quad W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} | x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

(V は xy 平面、W は yz 平面のこと)

$V+W=\mathbb{R}^3$。これは直和でない。なぜなら $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\ (=V+W)$ について、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように、V, W 上のベクトルの和として一意に表せない。

Th'm

$$V+W=V\oplus W \Leftrightarrow V\cap W=\{\mathbf{0}\}$$

V と W の和空間が直和であることと、V と W の共通部分がゼロベクトルのみとなることは同値。

(証明)
($\Rightarrow$)
V と W が直和であると仮定する。V と W は共にベクトル空間より、$\mathbf{0}\in V\cap W$ は自明。
ゆえに、$\boldsymbol{u}\in V\cap W$ であるようなベクトル $\boldsymbol{u}$ をとって、$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$ を示す。この $\boldsymbol{u}$ について、$\boldsymbol{u}\in V$ かつ $\boldsymbol{u}\in W$ であって

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{u}$$

と表せる。V と W は直和より、V の要素であるベクトルと W の要素であるベクトルの和は一意に書けなければならないので、$\mathbf{0}\in V, \mathbf{0}\in W$ に留意すると、$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$
($\Leftarrow$)
$V\cap W=\{0\}$ を仮定する。$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ について、$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{w}_2$ と書けているとすると、$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{w}_2$ なることを示す。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{w}_2 \\ \Rightarrow \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_1 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in V$ と $\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1 \in W$ と上式より、$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in V \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$ であるから、$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$。同様に $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$。

Th'm 基底と直和の関係

$U = V + W$、V の基底 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r$、$W$ の基底 $\boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$ とする。この時、次の 1.∼3. は同値。

1. $U = V \oplus W$
2. $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$ は一次独立
3. $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$ は U の基底

(証明)
(1. ⇒ 2.)
$V + W = V \oplus W$ であると仮定して、$a_1\boldsymbol{v}_1 + ... + a_r\boldsymbol{v}_r + b_1\boldsymbol{w}_1 + ... + b_s\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0}$ なる係数の組が $a_1 = ... = a_r = b_1 = ... = b_s = 0$ のみであることを示す。

$$\begin{cases} \boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + ... + a_r\boldsymbol{v}_r \\ \boldsymbol{w} = b_1\boldsymbol{w}_1 + ... + b_s\boldsymbol{w}_s \end{cases}$$

と書き、$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ について考える。$V + W$ は直和より、要素の表し方は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ と一意でなければならない。つまり、

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + ... + a_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}, \quad b_1\boldsymbol{w}_1 + ... + b_s\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r$ が V の基底で、$\boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$ が W の基底であることから、等式を満たす係数の組は

$$a_1 = ... = a_r = b_1 = ... = b_s = 0$$

のみである。ゆえに、$\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$ は一次独立である。
(2. ⇒ 3.)
任意の $\boldsymbol{u} \in U = V + W$ を取ると、ある $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W$ が存在して、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ で書ける。$\boldsymbol{v} \in V$ について、基底の定義により $a_1, ..., a_r$ が存在して $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + ... + a_r\boldsymbol{v}_r$ と基底の一次結合で書ける。$\boldsymbol{w} \in W$ についても同様に $\boldsymbol{w} = b_1\boldsymbol{w}_1 + ... + b_s\boldsymbol{w}_s$ と書ける。以上より、

$$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{v}_1 + ... + a_r\boldsymbol{v}_r + b_1\boldsymbol{w}_1 + ... + b_s\boldsymbol{w}_s$$

と一次独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$ の一時結合でかけるのだからこれらは基底。
(3. $\Rightarrow$ 1.)
$\boldsymbol{u} \in U = V + W$ (ただし、U の基底は $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$) について、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}'$ の時、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}'$ を示す。

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} - (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{w}') = \boldsymbol{0} \\ \therefore \quad & (a_1 - a_1')\boldsymbol{v}_1 + ... + (a_r - a_r')\boldsymbol{v}_r + (b_1 - b_1')\boldsymbol{w}_1 + ... + (b_s - b_s')\boldsymbol{w}_s = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

今 $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$ は U の基底なので、

$$a_1 - a_1' = 0, ..., a_r - a_r' = 0, b_1 - b_1' = 0, ..., b_a - b_s' = 0$$

したがって、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}', \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}'$

系

$U = V \oplus W$ の時、

$$dim(U) = dim(V) + dim(W)$$

$r + s = r + s$。$\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_s$ が U の基底であることの言い換え。

Th'm 補助定理

U は n 次元ベクトル空間で、$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_r \in U$ は一次独立 $r < n$ とすると、$n - r$ 個の $\boldsymbol{a}_{r+1}, .., \boldsymbol{a}_n \in U$ が存在して、$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ は U の基底である。

Th'm 補部分空間の存在

U は n 次元ベクトル空間で、$V \subset U$ は部分ベクトル空間とする。この時、$W \subset U$ が存在して、W は部分ベクトル空間かつ $U = V \oplus W$ となる。この W を補部分空間という。

Def. 写像の制限

$f : U \to U'$ について、定義域 U を $W \subset U$ に制限したものを

$$f_W : W \to U'$$

と定義する。($\boldsymbol{w} \in W$ に対して、f_W を $f_W(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{w})$ で定義)

Th'm

有限次元ベクトル空間 U において、線形写像 $f : U \to U'$ を考える。$V = Ker(f) \subset U$ を定めると、V は U の部分ベクトル空間であるから、補部分空間 W が存在して、$U = V \oplus W$ を満たす。この時、

1. $f_W : W \to U'$ は単射
2. $Im(f_W) = Im(f)$

(証明 1.)
$Ker(f_W) = \{\mathbf{0}\}$ は f_W が単射であることと同値なので、このことを示す。任意の $\boldsymbol{x} \in Ker(f_W)$ について、$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ を示せば良い。$\boldsymbol{x} \in Ker(f_W)$ に対して、

$$f_W(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}' \quad \wedge \quad \boldsymbol{x} \in W \tag{1}$$

また、f_W は f の W への制限なので、

$$f(\boldsymbol{x}) = f_W(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}' \Rightarrow \boldsymbol{x} \in Ker(f) = V \tag{2}$$

(1)、(2) より、$\boldsymbol{x} \in V \cap W$。今、$V \oplus W = U$ よし、$V \cap W = \{\mathbf{0}\}$ なのだから、$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$。よって単射。

(証明 2.)

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{f(\boldsymbol{u}) | \boldsymbol{u} \in U\} \\ &= \{f(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) | \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\} \\ &= \{f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) | \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\} \\ &= \{\mathbf{0}' + f(\boldsymbol{w}) | \boldsymbol{w} \in W\} \\ &= \{f(\boldsymbol{w}) | \boldsymbol{w} \in W\} \\ &= \{f_W(\boldsymbol{w}) | \boldsymbol{w} \in W\} = Im(f_W) \end{aligned}$$

(改めて) 次元定理

$$dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$$

(証明)
$V = Ker(f)$ と置く。V の補部分空間を W と置く。$U = V \oplus W$

$$\begin{aligned}
dim(U) &= dim(V \oplus W) \\
&= dim(V) + dim(W) \\
&= dim(V) + dim(Im(f_W)) \\
&= dim(V) + dim(Im(f)) \\
&= dim(Ker(f)) + dim(Im(f))
\end{aligned}$$

線形写像 $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を考える。$\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ について、写像の表現行列を A と置くと、

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

次元定理の主張は、

$$\begin{aligned}
dim(\mathbb{K}^n) &= dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) \\
\therefore n &= dim(Ker(f)) + rankA
\end{aligned}$$

例：$n = 2, m = 3$、$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ とし、A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

と置く。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ について、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 0 \\ -x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ベクトル $\boldsymbol{x}$ の行った先は一本のベクトルの定数倍で表せる。)

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{(x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} > \quad \therefore dim(Im(f)) = 1 \end{aligned}$$

また、

$$f(\boldsymbol{x}) = (x_1 + 2x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と置くと、$x_1 = -2x_2$ となるので、

$$\begin{aligned} Ker(f) &= \{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} | x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= < \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} > \ \therefore dim(ker(f)) = 1 \end{aligned}$$

以上より、確かに $dim(\mathbb{R}^2) = dim(Imf()) = dim(Ker(f))$

5　線形方程式

Def. 線形方程式

線形方程式 $f : U \to V$ について、$\boldsymbol{b} \in V$ を考える。

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

これを線形方程式といい、これを満たす $\boldsymbol{x} \in U$ を解という。

Def. 解集合、特殊解

解集合 S とは、

$$S = \{\boldsymbol{x} \in U | f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}\}$$

今、$S \neq$ とすると、線型方程式の特殊解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ とは、

$$\hat{\boldsymbol{x}} \in S$$

命題

$$\begin{aligned} S &= \{\hat{\boldsymbol{x}} + ker(f) \\ &= \{\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\xi} \in Ker(f)\} \end{aligned}$$

つまり、一般解 $\boldsymbol{x} \in S$ は $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\xi}$ で書ける。

(証明)

$$WTS: \ S = \{\hat{\boldsymbol{x}}\} + Ker(f)$$

両方の包含関係を示せば良い。
$(\subset)$
$\boldsymbol{x} \in S \Rightarrow \boldsymbol{x} \in \{\hat{\boldsymbol{x}}\} + Ker(f)$ を示す。つまり、$\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \in Ker(f)$ を示す。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}) &= f(\boldsymbol{x}) - f(\hat{\boldsymbol{x}}) \\ &= \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

(⊃)
$\boldsymbol{x} \in \hat{\boldsymbol{x}}\} + Ker(f) \Rightarrow \boldsymbol{x} \in S$ を示す。つまり、

$$\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\xi} \in Ker(f)$$

これが解であることを示す。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\xi}) \\ &= f(\hat{\boldsymbol{x}}) + f(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0}' = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

線形方程式における単射、全射

- 単射
  $Ker(f) = \{\boldsymbol{0}\}$ の時、

  $$S = \{\hat{\boldsymbol{x}}\} + \{\boldsymbol{0}\} = \{\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{0}\} = \{\hat{\boldsymbol{x}}\}$$

  つまり、f が単射であれば解はただ一つに定まる。

- 全射
  「解が存在する」ということは、「ある $\boldsymbol{x} \in U$ が存在して、$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ を満たす」ということ。つまり、$\boldsymbol{b} \in Im(f)$ であるから、解が存在しないとは $\boldsymbol{b} \notin Im(f)$ と言い換えることができる。今、f が全射なら、$Im(f) = V, \boldsymbol{b} \in V$ より、解は存在する。

以下、数ベクトル空間に限定して線形方程式を考える。
$U = \mathbb{K}^n,\ V = \mathbb{K}^m$ とすると、線形写像 $f : U \to V$ には $m \times n$ の表現行列 A がぞんざいして、

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

と書けるので、線形方程式は、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} &\Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \end{aligned}$$

このように、数ベクトル空間における線形方程式は連立一次方程式で書ける。この時、解が存在する条件は、A を列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ を横に並べたものと考えると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} \in Im(f) = Im(A) &\Leftrightarrow \boldsymbol{b} \in < \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n > \\ &\Leftrightarrow \exists c_1, ..., c_n \in \mathbb{K}, \quad \boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{a}_1 + ... + c_n\boldsymbol{a}_n \\ &\Leftrightarrow < \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{b} > = < \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n > \\ &\Leftrightarrow rank(A|\boldsymbol{b}) = rank A \end{aligned}$$

例：$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \ f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とする。では $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解集合を求めよう。
まずは $Ker(f)$ を求める。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} \in Ker(f) &\Leftrightarrow f(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}' \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1+2\xi_2=0 \\ 0+0=0 \\ -1\xi_1-2\xi_2=0 \end{cases} \\
\therefore Ker(f) &= \{\xi\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}|\xi \in \mathbb{R}\} \\
&= <\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}>
\end{aligned}
$$

次に特殊解を見つける。$A\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{b}$ を満たす $\hat{\boldsymbol{x}}$ として、$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
以上より、一般解は

$$
S=\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}+<\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}>
$$

$\rightarrow$ 解が一意に定まる (f が全単射) 場合、

$$
\boldsymbol{x}=f^{-1}(\boldsymbol{b})
$$

みたいなことがしたくなる。これはできるの？という話をする。(掃き出し法。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に左からある行列 P を掛けるといいことがある)

Def. 正則行列

$f:U\rightarrow U$ が同型写像 (線形写像かつ全単射) であるならば、$f^{-1}:U\rightarrow U$ が存在して、これも同型写像である。このような f を「U の正則な線形変換」という。また f の表現行列 A を正則行列という。

例：同型写像 g

$$
\begin{aligned}
g:\mathbb{K}^m\rightarrow\mathbb{K}^m \quad &, \quad g(\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \\
g^{-1}:\mathbb{K}^m\rightarrow\mathbb{K}^m \quad &, \quad g^{-1}(\boldsymbol{y})=P^{-1}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

正則な線形写像 g に対応する表現行列 P は正則行列である。また、g は同型写像より、$g^{-1}:\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^m$ が存在し、g^{-1} も表現行列を持つ。これが P^{-1} である。

Th'm

次の 1.~4. は同値。

1. $m\times m$ 行列 P が正則
2. $rankP=m$ (次元とランクが一致する。full-ranked)
3. $PQ=QP=E$ なる Q が存在し、$Q=P^{-1}$
4. $\mathbb{K}^m$ の基底 $\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_m$ を P で写すと $P\boldsymbol{u}_1,...,P\boldsymbol{u}_m$ も $\mathbb{K}^m$ の基底。

(証明)
(1. $\Rightarrow$ 3.)
$m\times m$ 行列 P が正則であるならば、$PQ=QP=E$ を満たす Q が存在することを示す。
「P を左から掛け算する」ことに対応する正則な写像 $g:\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^m$ を考える。

$$g(\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$$

g は同型写像なのだから、$g^{-1}:\mathbb{K}^m\to\mathbb{K}^m$ が存在して、これも正則である。その表現行列を Q とおくと、

$$\begin{aligned} g^{-1}(\boldsymbol{y})=Q\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{x} \\ QP\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x} \qquad (\because \boldsymbol{y}=P\boldsymbol{x}) \\ PQ\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y} \qquad (\because \boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}) \\ \therefore PQ &= QP=E \end{aligned}$$

(3. $\Rightarrow$ 2.)
$PQ=QP=E$ を満たす Q が存在するならば、$rankP=m$ を示す。$QP=E$ より、

$$\begin{aligned} QP &= Q\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \dots & \boldsymbol{p}_m\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_m\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$<\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_m>=\mathbb{K}^m$、すなわち $\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_m$ は $\mathbb{K}^m$ 上の基底である。ゆえに、$Q\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \dots & \boldsymbol{p}_m\end{pmatrix}$ は基底の取り替えで、$<\boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_m>=\mathbb{K}^m$ と言える。した

がって、

$$dim(<\boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_m>) = rankP = m$$

(2. $\Rightarrow$ 4.)
$rankP = m$ ならば $\mathbb{K}^m$ の基底 $\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_m$ を行列 P で写すと $P\boldsymbol{u}_1,...,P\boldsymbol{u}_m$ も $\mathbb{K}^m$ の基底になることを示す。m 個のベクトル $P\boldsymbol{u}_1,...,P\boldsymbol{u}_m$ が $\mathbb{K}^m$ の基底であるためには、

$$c_1P\boldsymbol{u}_1 + ... + c_mP\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}$$

なる $c_1,...,c_m \in \mathbb{K}$ の組が $c_1 = ... = c_m = 0$ のみになれば良い。

$$\begin{aligned} c_1P\boldsymbol{u}_1 + ... + c_mP\boldsymbol{u}_m &= P(c_1\boldsymbol{u}_1 + ... + c_m\boldsymbol{u}_m) \\ &= g(c_1\boldsymbol{u}_1 + ... + c_m\boldsymbol{u}_m) \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

今、g は単射 ($Ker(g) = \{\boldsymbol{0}\}$) かつ $\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_m$ は一次独立より、$c_1,...,c_m \in \mathbb{K}$ の組は $c_1 = ... = c_m = 0$ のみ。
(4. $\Rightarrow$ 1.)
$\mathbb{K}^m$ の基底 $\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_m$ を行列 P で写すと $P\boldsymbol{u}_1,...,P\boldsymbol{u}_m$ も $\mathbb{K}^m$ の基底になる時、$m \times m$ 行列 P が正則であることを示す。写像 g は線形かつ $dim(\mathbb{K}^m) = dim(Im(g)) = m$ より全単射なので、g は正則で、その表現行列 P も正則。

この定理に留意して、$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,\ f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ について、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を変形することを考える。A を列ベクトルを横に並べたものとして

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

と書くことにすると、$rankA = r \leq n$ である (A 内の列ベクトルのうち、一次独立なものは r 個) から、A のうち一次独立な列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_r$ と置き、残りを $\boldsymbol{a}_{r+1},...,\boldsymbol{a}_n$ としておく。

$$Im(A) =<\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_r>\subset \mathbb{K}^m$$

つまり $Im(A)$ は $\mathbb{K}^m$ の部分ベクトル空間である。この時、補助定理により、線形独立なベクトル $\tilde{\boldsymbol{a}}_{r+1}, ..., \tilde{\boldsymbol{a}}_m$ が存在して、

$$< \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_r, \tilde{\boldsymbol{a}}_{r+1}, ..., \tilde{\boldsymbol{a}}_m >= \mathbb{K}^m$$

ゆえ、$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_r, \tilde{\boldsymbol{a}}_{r+1}, ..., \tilde{\boldsymbol{a}}_m$ は $\mathbb{K}^m$ の基底となっている。この基底を $\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_m$ に取り替える。すなわち、

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_i = P\boldsymbol{a}_i & (i \leq r) \\ \boldsymbol{e}_i = P\tilde{\boldsymbol{a}}_i & (r+1 \leq i) \end{cases}$$

となるような同型写像が存在して、その表現行列が P である。

$$\begin{aligned} PA &= P\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_r & \boldsymbol{a}_{r+1} & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P\boldsymbol{a}_1 & \dots & P\boldsymbol{a}_r & P\boldsymbol{a}_{r+1} & \dots & P\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_r & P\boldsymbol{a}_{r+1} & \dots & P\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Er & C \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

さて、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$ であるから、r 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_1$ と $(m-r)$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x}_2$ を用いると、

$$\begin{aligned} PA\boldsymbol{x} &= \begin{pmatrix} Er & C \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{b}} \quad (\tilde{\boldsymbol{b}} = P\boldsymbol{b}) \\ &= \begin{cases} \boldsymbol{x}_1 + C\boldsymbol{x}_2 = \tilde{\boldsymbol{b}}_1 \\ \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}_2 \end{cases} \end{aligned}$$

より、解が存在する条件は $\tilde{\boldsymbol{b}}_2 = \boldsymbol{0}$ が満たされることであり、解は $\boldsymbol{x}_1 + C\boldsymbol{x}_2 = \tilde{\boldsymbol{b}}_1$ を満たすもの。

6　内積

Def. 数ベクトル空間の内積、直交、ノルム

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ とすると、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積は、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ &= {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するとは、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$$

$\boldsymbol{a}$ の長さ (ノルム) とは、

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

内積の性質

1. 歪対称性 (実数空間に限れば対称性)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \bar{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$$

2. 線形性
   $k, h \in \mathbb{K}$ の時、

$$(k\boldsymbol{a}_1 + h\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + h(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$$

3. 正値性

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0,\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

一般のベクトル空間に対して、1,2,3 を満たす写像を内積という。

例：$[a,b]$ 上の連続関数の集合 $U = C[a,b]$ について、$f,g \in U$ とすると、

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

これは内積である。また、

$$||f||^2 = \int_a^b f(x)^2 dx$$

を L^2 ノルムという。

Cauchy-Schwarz の不等式

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \leq ||\boldsymbol{a}||\ ||\boldsymbol{b}||$$

(内積の絶対値 $\leq$ ノルムの積)

(証明)
任意の $x,y \in \mathbb{K}$ について、内積の正値性により、

$$(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}) \geq 0$$

歪対称性と線形性により、左辺は

$$(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}, x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}) = x\bar{x}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + x\bar{y}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + y\bar{x}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + y\bar{y}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) \tag{1}$$

今、$x = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}),\ y = -(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ とすると、

$$\begin{array}{rcl}
(1) & = & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})||x||^2 - x||y||^2 - \bar{x}||y||^2 + x||y||^2 \\
 & = & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})||x||^2 - \bar{x}||y||^2 \\
 & = & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})||x||^2 - \bar{x}||y||^2 \\
 & = & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})||x||^2 - x||y||^2 \\
 & = & x\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})x - ||y||^2\} \geq 0 \\
\therefore & & (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})x - ||y||^2 \geq 0 \Leftrightarrow |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2 \leq ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2
\end{array}$$

Def. 正規直交系

ベクトルの集合 $S \subset U$ が正規直交系であるとは、

1. $\boldsymbol{a} \in S \Rightarrow ||\boldsymbol{a}|| = 1$
2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S \ (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}) \Rightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$

を満たすことをいう。S が U の基底である時、S は U の正規直交基底である、という。

例：$\mathbb{K}^m$ において、$\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_m \in \mathbb{K}^m$ は正規直交基底。
例：$C[-\pi, \pi]$ において、

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx),\ S = \{f_1, ...\} \subset C[-\pi, \pi]$$

とすると、S は正規直交基底。なぜなら、

$$\begin{aligned}(f_n, f_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x) f_m(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx) dx\end{aligned}$$

これは $n = m$ の時 1、そうでない時 0。

Th'm

前提：$\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_m$ が V の基底だとすると、$\boldsymbol{v} \in V$ について、

$$\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{b}_1 + ... + c_m \boldsymbol{b}_m \quad (c_1, ..., c_m \in \mathbb{K}^m)$$

と書ける。今、$\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_m$ が正規直交基底であれば、

$$c_i = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_i)$$

となる。

(証明)

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_i) &= (c_1\boldsymbol{b}_1 + ... + c_m\boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{b}_i) \\
&= c(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_i) + .. + c_i\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) + ... + c_m(\boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{b}_i) \\
&= c_i
\end{aligned}
$$

Def. 正射影

$\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_m$ を U の正規直交系だとし、$V =< \boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_m >\subset U$ とすると、$\boldsymbol{x} \in U$ について、

$$\boldsymbol{y} = \arg\min_{\boldsymbol{x}' \in V} ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'||$$

となる $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{x}$ の V への正射影という。

Def. 直交補空間

$\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_m$ を U の正規直交系であるとし、$V =< \boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_m >\subset U$ とする。U における V の直交補空間を以下のように定義する。

$$W = \{\boldsymbol{x} \in U | \forall \boldsymbol{v} \in V, \ \ (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = 0\}$$

Th'm

上で定義したような正射影は

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 + ... + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{b}_m$$

(証明)
U における V の直交補空間を W と置く。$U = V \oplus W$, $\boldsymbol{x} \in U$ に対し、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ なる $\boldsymbol{v} \in V$ と $\boldsymbol{w} \in W$ は一意に存在する。また上で証明した通り $\boldsymbol{v} \in V$ とは、

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 + ... + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{b}_m)\boldsymbol{b}_m$$

と書ける。$\boldsymbol{x}' \in V$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}' \in V$ に注意して、

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'||^2 &= ||\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}')||^2 \\
&= ||\boldsymbol{w}||^2 + ||\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}'||^2 \geq ||\boldsymbol{w}||^2
\end{aligned}
$$

等号は $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{v}$ で成立する。

Gram-Schmidt の直交化

U の基底 $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ を用いて U の正規直交基底 $\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_n$ を作る。

1. $\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{a}_1||}\boldsymbol{a}_1$　一個目を長さ 1 にする。

2. $\boldsymbol{a}_2 \subset U$ の $< \boldsymbol{b}_1 >$ への正射影は $(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1$ であることを用いて、$\tilde{\boldsymbol{b}}_2$ を次のように定める。

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1$$

すると、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}_1, \tilde{\boldsymbol{b}}_2) &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1) \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) \\ &= (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2) - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = 0\end{aligned}$$

これを長さ 1 にしたものが $\boldsymbol{b}_2$

$$\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{||\tilde{\boldsymbol{b}}_2||}\tilde{\boldsymbol{b}}_2$$

3. 帰納的に正規直交な $\boldsymbol{b}_1, ..., \boldsymbol{b}_{m-1}$ のもとで $\boldsymbol{b}_m$ を定める。

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{b}}_m &= \boldsymbol{a}_m - \sum_{j=1}^{m-1}(\boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}_j)\boldsymbol{b}_j \\ &\Rightarrow (\tilde{\boldsymbol{b}}_m, \boldsymbol{b}_j) = 0, \quad j = 1, ..., m-1 \\ \boldsymbol{b}_m &= \frac{1}{||\tilde{\boldsymbol{b}}_m||}\tilde{\boldsymbol{b}}_m\end{aligned}$$

7　行列式

Def. 行列式

$n \times n$ 行列を $\mathbb{K}$ の値に写す写像 D のうち以下を満たすものを行列式という。

1. 多重線形性 (各ベクトルについて線形)

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{a}_1, ..., k\boldsymbol{a}_j + h\tilde{\boldsymbol{a}}_j, ..., \boldsymbol{a}_n) &= kD(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_j, ..., \boldsymbol{a}_n) \\ &\quad +hD(\boldsymbol{a}_1, ..., \tilde{\boldsymbol{a}}_j, ..., \boldsymbol{a}_n) \end{aligned}$$

2. 同じ列があったらゼロ

$$D(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}^*, ..., \boldsymbol{a}^*, ..., \boldsymbol{a}_n) = 0$$

3. 規格化条件

$$D(E) = D(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n) = 1$$

行列式の性質

a. 歪対称性 (二つの列を入れ替えると (-1) 倍)

$$D(..., \boldsymbol{a}_i, ..., \boldsymbol{a}_j, ...) = -D(..., \boldsymbol{a}_j, ..., \boldsymbol{a}_i, ...)$$

b. 列に関する基本変形に関して不変。

c. A の列ベクトルが一次従属ならば、$D(A) = 0$

(証明)
(a.)
略記として $D(A) = D(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_i, ..., \boldsymbol{a}_j, ..., \boldsymbol{a}_n) = D(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ と書く。定義の 2. より、

$$D(\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j) = 0$$

となる。多重線形性を用いて左辺を次のように変形する。

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j) &= D(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j) + D(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j) \\
&= D(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) + D(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) + D(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i) + D(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) \\
&= D(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) + D(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i) = 0
\end{aligned}$$

したがって、$D(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = -D(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i)$

(b.)
i 列目 $\boldsymbol{a}_i$ に j 列目 $\boldsymbol{a}_j$ の c 倍を足す。多重線形性により、

$$\begin{aligned}
D(\boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) &= D(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) + cD(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) \\
&= D(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)
\end{aligned}$$

(c.)

$$D(\boldsymbol{a}_i, c\boldsymbol{a}_i) = cD(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = 0$$

さて、以上のような D とはどのような写像か。A の一列目は次のように基本ベクトルの一次結合として書ける。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + ... + a_{n1}\boldsymbol{e}_n$$

これを各列に用いて、

$$\begin{aligned}
D(A) &= D(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n) \\
&= D(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + ... + a_{n1}\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} D(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} D(\boldsymbol{e}_i, a_{12}\boldsymbol{e}_1 + ... + a_{n2}\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{a}_3, ..., \boldsymbol{a}_n) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} D(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \boldsymbol{a}_3, ..., \boldsymbol{a}_n) \\
&= \sum_{i_1}^{n} ... \sum_{i_n}^{n} a_{i_1 1} ... a_{i_2 n} D(\boldsymbol{e}_{i1}, ..., \boldsymbol{e}_{i_n})
\end{aligned}$$

ここで $D(\boldsymbol{e}_{i_1}, ..., \boldsymbol{e}_{i_n})$ とは、E の列を何回か入れ替えたもの。ゆえ、規格化条件と歪対称性より、

$$D(\boldsymbol{e}_{i_1}, ..., \boldsymbol{e}_{i_n}) = \pm 1$$

(入れ替えが偶数回なら $+1$、奇数回なら -1)

8 対角化

行列の対角化とは、$n \times n$ 行列 A に対し、$P^{-1}AP = \Lambda$ なる正則行列 P と対角行列 Λ を見つけること。

8.1 対角化の意味

線形変換 $f : U \to U \ \ dim(U) < \infty$ を考える。U の基底 (1) として、$\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n \in U$ を取る。f の同型写像 $\varphi : U \to \mathbb{K}^n$ は、

$$\varphi(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ベクトル U の基底を数ベクトル空間の基底へと写す) より、φ のもとでの表現行列は

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

であり、これを A と置く。
次に、U の基底 (2) として $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n \in U$ を取る。f の同型写像 $\psi : U \to \mathbb{K}^n$ は、

$$\psi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{e}_i$$

より、ψ のもとでの表現行列は

$$\psi \circ f \circ \psi^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

であり、これを Λ と置く。今、$\Lambda = P^{-1}AP$ と置くと、P とは、

$$\begin{array}{rcl} \Lambda & = & P^{-1}AP \\ \psi \circ f \circ \psi^{-1} & = & (\psi \circ \varphi^{-1}) \ \circ \ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \ \circ \ (\varphi \circ \psi^{-1}) \\ & = & (\varphi \circ \psi^{-1})^{-1} \ \circ \ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \ \circ \ (\varphi \circ \psi^{-1}) \end{array}$$

行列 $A(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})$ と $\Lambda(\varphi \circ \psi^{-1})$ はどちらも写像 f の表現行列だが、対角行列である Λ の方が扱いやすい。扱いやすいように基底の取り方を帰る操作が対角化である。

8.2 対角化の方法

Def. 固有値、固有ベクトル

$n \times n$ 行列 A とスカラー $\lambda \in \mathbb{K}$ に対し、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

となるような $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ で、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ なるものが存在する時、λ を固有値、$\boldsymbol{x}$ を A の λ に属する固有ベクトルであるという。

Th'm

λ に属する固有ベクトルが存在することと、$|\lambda E - A| = 0$(行列式がゼロ、非正則) は同値。また、λ が A の固有値である時、λ は $|\lambda E - A| = 0$ の解である。

Def. 固有空間

固有空間 $V(\lambda)$ とは、λ の固有ベクトル全体の集合に 0 を加えたものである。すなわち、

$$\begin{array}{rcl} V(\lambda) & = & \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n | A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}\} \\ & = & \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n | (\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} \\ & = & Ker(\lambda E - A) \end{array}$$

$|\lambda E - A| = \boldsymbol{0}$ を解いて固有値 $\lambda_1, ..., \lambda_n$ を見つけたとする。各 λ_i の固有ベク

トルを一つとり、$\boldsymbol{p}_i$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
& A\boldsymbol{p}_i = \lambda_i \boldsymbol{p}_i \quad (\boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{0}), \quad \boldsymbol{p}_i \in V(\lambda_i) \\
\Rightarrow\ & \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & \dots & A\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{p}_1 & \dots & \lambda_n \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \\
& A \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \dots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \dots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
& AP = P\Lambda \quad \therefore P^{-1}AP = \Lambda
\end{aligned}
$$