第1章
平面および空間のベクトル、複素数

橋本　龍二

Contents

1　ベクトル、直線、平面

1.1

1.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{1}$$

と置くと、$c_1 = c_3 = 1,\ c_2 = -1$ は (1) を満たすので、線形従属。

2.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2}$$

と置くと、(2) を満たすのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみなので、線形独立。

3.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3}$$

と置くと、(3) を満たすのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみなので、線形独立。

4.

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4}$$

と置くと、$c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 2$ は (4) を満たすので、線形従属。

1.2

1. 直線 AB 上の任意の点の位置ベクトルは、定数 s を用いて

$$\boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

と表すことができる。今、$s = 1 - t$ と置くと、上式は

$$t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \qquad (t + s = 1)$$

である。

2. 線分 AB 上の任意の点の位置ベクトルは、定数 s を用いて

$$\boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

と表すことができる。今、$s = 1 - t$ と置くと、上式は

$$t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \qquad (0 \leq t, s \leq 1, \quad t + s = 1)$$

である。

1.3

1. 点 A を原点とする。平面 ABC 上のベクトルは線形独立な 2 本のベクトル $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ の一次結合としてかけるのだから、平面 ABC 上の任意の点の位置ベクトルは定数 r, s を用いて
$$\boldsymbol{a}+r(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+s(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$$
と書ける。今、$t=1-r-s$ と置くと、上式は
$$t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c} \quad (t+s+r=1)$$
である。

2. 点 A を原点とする。三角形 ABC 内部のベクトルは線形独立な 2 本のベクトル $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ の一次結合としてかけるのだから、平面 ABC 上の任意の点の位置ベクトルは定数 r, s を用いて
$$\boldsymbol{a}+r(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+s(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \quad (0 \leq t, s \leq 1,\ t+s \leq 1)$$
と書ける。今、$t=1-r-s$ と置くと、上式は
$$t\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c} \quad (0 \leq t, s, r \leq 1, \quad t+s+r=1)$$
である。

1.4

(方針)
とりあえず五角形で考える。左回りに点 $A_1 \sim A_5$ を取る。この五角形内部の任意の点 B が題意の通り書けると仮定すると、ここに A_6 を付け足した六角形において、三角形 $A_1A_5A_6$ 内部の点 C は前問より題意の通り書ける。
このように、任意の凸 k 角形は、$k-1$ 角形に三角形をくっつけた形と捉えることができるので帰納法の仮定で $k-1$ 角形で題意が成り立つことにしてしまえば後は三角形しか残っていないので証明できる。

(答案)
数学的帰納法によって題意の形で書けるベクトル $\boldsymbol{p}$ が凸多角形内部の点を表すことを示す。

(i) $n=1$ の時
点 A_1 は
$$\boldsymbol{p}=t_1\boldsymbol{a}_1, \quad t_1=1$$
の形で表せる。

(ii) $n=k-1$ の時

位置ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b}=t_1\boldsymbol{a}_1+...+t_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1} \quad (t_1+...+t_{k-1}=1,\ t_i\geq 0)$$

と定めて、$\boldsymbol{b}$ の表す点 B が凸 $k-1$ 角形内部の点であると仮定する。今、点 A_k を点 $A_1,...,A_{k-1}$ と隣り合うように取って凸 k 角形を作ると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \boldsymbol{b}+0\boldsymbol{a}_k \\ &= t_1\boldsymbol{a}_1+...+t_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}+t_k\boldsymbol{a}_k \\ &\quad (t_1+...+t_k=1,\ t_i\geq 0,\ t_k=0)\end{aligned}$$

は点 B なので、凸 k 角形内部の点である。逆に、凸 k 角形内部の点のうちこの形で表せない点 C は三角形 $A_1A_{k-1}A_k$ の内部の点なので、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= t_1\boldsymbol{a}_1+t_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}+t_k\boldsymbol{a}_k \\ &= t_1\boldsymbol{a}_1+...+t_k\boldsymbol{a}_k \\ &\quad (t_1+...+t_k=1,\ t_i=0,\ i\neq 1,\ i\neq k-1,\ i\neq k)\end{aligned}$$

である。したがって、凸 k 角形内部の点は題意の形で書ける。

以上より、任意の自然数 n についてベクトル $\boldsymbol{p}$ は凸多角形内部の点を表す。

1.5

1. 方程式の表す平面上の位置ベクトルとして、

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$$

が挙げられる。今、

$$\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$$

は一次独立なので、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1+t(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)+s(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2) \\ &= \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

はこの平面のベクトル表示の一例である。

2. 方程式の表す平面上の位置ベクトルとして、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が挙げられる。今、

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は一次独立なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + s(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの平面のベクトル表示の一例である。

1.6

(方針)
内積と外積について。

内積

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の内積を次の二通りで定義する。

(i) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$

(ii) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

(i)=(ii) の照明：

余弦定理により

$$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$$

なので、

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta &= \frac{1}{2}(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2) \\
&= \frac{1}{2}\{(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2\} \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2
\end{aligned}
$$

外積

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の外積 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次の二通りで定義する。

(i) $||\boldsymbol{c}|| = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \sin\theta$ かつ $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0,\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = 0$

(ii)

$$
\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}
$$

(i)⇔(ii) の照明：

$\boldsymbol{c}$ を (ii) のように定義すれば、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) &= a_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &\quad +a_2(a_3b_1 - b_3a_1) \\ &\quad +a_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= 0 \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) &= b_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &\quad +b_2(a_3b_1 - b_3a_1) \\ &\quad +b_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= 0\end{aligned}$$

より、$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と直交する。また、

$$\begin{aligned}||\boldsymbol{c}||^2 &= (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\ &= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\ &\quad -2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &\quad -a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 \\ &\quad -2a_2b_2a_3b_3 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_1a_2b_1a_2b_2 \\ &= ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \\ &= ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2\sin^2\theta \\ \therefore ||\boldsymbol{c}|| &= ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}||\sin\theta\end{aligned}$$

より、$\boldsymbol{c}$ の長さは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。

(答案)

1.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求める。

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$ は一次独立より、その外積 $\boldsymbol{c}$ は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \times (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} 0+6 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) &= 6(x-1) - 4(y-1) + 2(z-1) \\ &= 6x - 4y + 2z - 4 = 0 \end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $3x - 2y + z = 2$

2.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求める。

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$ は一次独立より、その外積 $\boldsymbol{c}$ は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \times (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} 6-6 \\ -4+2 \\ 3-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) &= -2(y-1)-3(z+1) \\ &= -2y-3z+1=0\end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $2y+3z=-1$

3.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求める。

$$\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2$ は一次独立より、その外積 $\boldsymbol{c}$ は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1)\times(\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix}4-2\\2+2\\2+4\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1) &= 2(x-1)+4y+6(z-1) \\ &= 2x-4y+6z-8=0\end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $x+2y+3z=4$

1.7

1. 第一式から第二式を引くことにより、求める直線は $y=1.\ x-2z=-1$ を満たす。したがって、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

2. 求める直線は $x - z = 0.\ y + z = 1$ を満たす。したがって、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

3. 求める直線は $x + y = -1.\ -y + 2z = 2$ を満たす。したがって、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

1.8

直線の方程式を平面の方程式に代入して媒介変数 t を求める。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{b}) &= c \\ \therefore t &= \frac{c - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} \end{aligned}$$

したがって、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{c - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$$

1.9

$||\boldsymbol{a}|| = ||\boldsymbol{b}|| = 1$ としても一般性を失わない。求める軌跡上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ から二平面へと下ろした垂線と平面との交点をそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とする。

(i) 二平面が平行でない、すなわち $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ の時、
$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{b}$ はそれぞれ平行で、$\boldsymbol{x}$ から二平面の距離は等しいので、これを t とおくと、

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = t\boldsymbol{b} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{b} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = -t\boldsymbol{b} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b} \end{cases} \tag{2}$$

の二通りで表せる。今、$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = c,\ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) = d$ であるから、(1)、(2) をそれぞれ代入することで、求める軌跡は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = c - d,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = c + d$$

の二平面である。

(ii) 二平面が平行、すなわち $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$ の時、

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = -t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \end{cases} \tag{4}$$

(i) と同様に (3)、(4) を $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{a})=c,\ (\boldsymbol{q},\boldsymbol{b})=d$ に代入することで、求める軌跡は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ の時

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=\frac{c+d}{2}$$

で、$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$ の時

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=\frac{c-d}{2}$$

1.10

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= ab\cos\theta=c\\ \therefore\cos\theta &= \frac{c}{ab}\end{aligned}$$

これが存在するための条件は、$0<a,b$ かつ $|c|\leq ab$

1.11

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PQ}) &= \frac{m}{m+n}\boldsymbol{d}-\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b}=\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\\ (\overrightarrow{RS}) &= (\frac{n}{m+n}\boldsymbol{c}+\frac{m}{m+n}\boldsymbol{d})-(\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b}+\frac{n}{m+n}\boldsymbol{c})=\frac{m}{m+n}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})\\ (\overrightarrow{PR}) &= (\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b}+\frac{n}{m+n}\boldsymbol{c})-\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b}=\frac{n}{m+n}\boldsymbol{c}\\ (\overrightarrow{QS}) &= (\frac{n}{m+n}\boldsymbol{c}+\frac{m}{m+n}\boldsymbol{d})-\frac{m}{m+n}\boldsymbol{d}=\frac{n}{m+n}\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

より、$(\overrightarrow{PQ})=(\overrightarrow{RS}),\ (\overrightarrow{PR})=(\overrightarrow{QS})$ なので P,Q,R,S は平行四辺形の四頂点。

2 行列と線形変換

2.1

(方針)

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a\cos\theta\\ b\sin\theta\end{pmatrix}$ なるベクトル $\boldsymbol{x}$ を取る。今、$\boldsymbol{x}$ を左回りに θ' だけ回転させたベクトル $\boldsymbol{x}'$ を考える。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}' &= \begin{pmatrix}a\cos(\theta+\theta')\\ b\cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\cos\theta\\ b\sin\theta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$$

と置けば、A は任意の二次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を θ' だけ回転させる $(\theta+\theta')$ 行列である。
次に、ベクトル $\boldsymbol{x}$ を右回りに θ' だけ回転させてから x 軸について折り返したベクトル $\boldsymbol{x}'$ を考える。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \begin{pmatrix} a\cos(\theta-\theta') \\ -b\sin(\theta-\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix}$$

と書けば、B は任意の二次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を右回りに θ' だけ回転させてから x 軸について折り返す $(-(\theta-\theta'))$ 行列である。

(答案)

1. 左回りに β だけ回転させてから左回りに α 回転させる $(A(\alpha)A(\beta))$ ことと $\alpha+\beta$ だけ回転させる $(A(\alpha+\beta))$ ことは同値。

$$\begin{aligned} A(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\ &= A(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

2. $-(\theta-\beta)+\alpha=-(\theta-(\alpha+\beta))$

$$
\begin{aligned}
A(\alpha)B(\beta) &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}\\
&= B(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

3. $-(\theta+\beta-\alpha)=-(\theta-(\alpha-\beta))$

$$
\begin{aligned}
B(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & -(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & -\cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}\\
&= B(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

4. $-(-(\theta-\beta)-\alpha)=\theta+(\alpha-\beta)$

$$
\begin{aligned}
B(\alpha)B(\beta) &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix}\\
&= A(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

5. 左回りに θ 開店するのを n 回繰り返すことと、左回りに $n\theta$ 回転させることは同値。
   (1) より、$A(\theta)A(\theta)=A(2\theta)$ で、帰納的に $A(\theta)^n=A(n\theta)$ である。

6. B の操作を 2 回繰り返すと元のベクトル $\boldsymbol{x}$ に戻り、もう一度 B を適用すれば $B\boldsymbol{x}$ になる。
   (4) より、$B(\theta)B(\theta)=A(\theta-\theta)$ で、帰納的に

$$
\begin{aligned}
B(\theta)^{2m} &= A(m\theta-m\theta)=E\\
B(\theta)^{2m+1} &= B(\theta)B(\theta)^{2m}=B(\theta)
\end{aligned}
$$