第1章
平面および空間のベクトル、複素数

橋本　龍二

Contents

1　ベクトル、直線、平面

1.1

1.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{1}$$

と置くと、$c_1 = c_3 = 1,\ c_2 = -1$ は (1) を満たすので、線形従属。

2.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{2}$$

と置くと、(2) を満たすのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみなので、線形独立。

3.

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3}$$

と置くと、(3) を満たすのは $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のみなので、線形独立。

4.

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4}$$

と置くと、$c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 2$ は (4) を満たすので、線形従属。

1.2

1. 直線 AB 上の任意の点の位置ベクトルは、定数 s を用いて

$$\boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

と表すことができる。今、$s = 1 - t$ と置くと、上式は

$$t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \qquad (t + s = 1)$$

である。

2. 線分 AB 上の任意の点の位置ベクトルは、定数 s を用いて

$$\boldsymbol{a} + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

と表すことができる。今、$s = 1 - t$ と置くと、上式は

$$t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \qquad (0 \leq t, s \leq 1, \quad t + s = 1)$$

である。

1.3

1. 点 A を原点とする。平面 ABC 上のベクトルは線形独立な 2 本のベクトル $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ の一次結合としてかけるのだから、平面 ABC 上の任意の点の位置ベクトルは定数 r, s を用いて

$$\boldsymbol{a} + r(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

と書ける。今、$t = 1 - r - s$ と置くと、上式は

$$t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c} \quad (t + s + r = 1)$$

である。

2. 点 A を原点とする。三角形 ABC 内部のベクトルは線形独立な 2 本のベクトル $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ の一次結合としてかけるのだから、平面 ABC 上の任意の点の位置ベクトルは定数 r, s を用いて

$$\boldsymbol{a} + r(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) + s(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) \quad (0 \leq t, s \leq 1,\ t + s \leq 1)$$

と書ける。今、$t = 1 - r - s$ と置くと、上式は

$$t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} + r\boldsymbol{c} \quad (0 \leq t, s, r \leq 1, \quad t + s + r = 1)$$

である。

1.4

(方針)
とりあえず五角形で考える。左回りに点 $A_1 \sim A_5$ を取る。この五角形内部の任意の点 B が題意の通り書けると仮定すると、ここに A_6 を付け足した六角形において、三角形 $A_1A_5A_6$ 内部の点 C は前問より題意の通り書ける。
このように、任意の凸 k 角形は、$k-1$ 角形に三角形をくっつけた形と捉えることができるので帰納法の仮定で $k-1$ 角形で題意が成り立つことにしてしまえば後は三角形しか残っていないので証明できる。

(答案)
数学的帰納法によって題意の形で書けるベクトル $\boldsymbol{p}$ が凸多角形内部の点を表すことを示す。

(i) $n=1$ の時
点 A_1 は

$$\boldsymbol{p} = t_1\boldsymbol{a}_1, \quad t_1 = 1$$

の形で表せる。

(ii) $n=k-1$ の時
位置ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{b} = t_1\boldsymbol{a}_1 + ... + t_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1} \qquad (t_1 + ... + t_{k-1} = 1,\ t_i \geq 0)$$

と定めて、$\boldsymbol{b}$ の表す点 B が凸 $k-1$ 角形内部の点であると仮定する。今、点 A_k を点 $A_1, ..., A_{k-1}$ と隣り合うように取って凸 k 角形を作ると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{a}_k \\ &= t_1\boldsymbol{a}_1 + ... + t_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1} + t_k\boldsymbol{a}_k \\ &\quad (t_1 + ... + t_k = 1,\ t_i \geq 0,\ t_k = 0) \end{aligned}$$

は点 B なので、凸 k 角形内部の点である。逆に、凸 k 角形内部の点のうちこの形で表せない点 C は三角形 $A_1A_{k-1}A_k$ の内部の点なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= t_1\boldsymbol{a}_1 + t_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1} + t_k\boldsymbol{a}_k \\ &= t_1\boldsymbol{a}_1 + ... + t_k\boldsymbol{a}_k \\ &\quad (t_1 + ... + t_k = 1,\ t_i = 0,\ i \neq 1,\ i \neq k-1,\ i \neq k) \end{aligned}$$

である。したがって、凸 k 角形内部の点は題意の形で書ける。

以上より、任意の自然数 n についてベクトル $\boldsymbol{p}$ は凸多角形内部の点を表す。

1.5

1. 方程式の表す平面上の位置ベクトルとして、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が挙げられる。今、

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は一次独立なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + s(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの平面のベクトル表示の一例である。

2. 方程式の表す平面上の位置ベクトルとして、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が挙げられる。今、

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

は一次独立なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) + s(\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの平面のベクトル表示の一例である。

1.6

(方針)
内積と外積について。

内積

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の内積を次の二通りで定義する。

(i) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$

(ii) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

(i)=(ii) の照明：

余弦定理により

$$||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - 2||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta$$

なので、

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \cos\theta &= \frac{1}{2}(||\boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{b}||^2 - ||\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}||^2) \\ &= \frac{1}{2}\{(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2\} \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

外積

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の外積 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ を次の二通りで定義する。

(i) $||\boldsymbol{c}|| = ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \sin\theta$ かつ $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = 0$, $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = 0$

(ii)

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

(i)⇔(ii) の照明：

$\boldsymbol{c}$ を (ii) のように定義すれば、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) &= a_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &\quad + a_2(a_3b_1 - b_3a_1) \\ &\quad + a_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= 0 \\ (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) &= b_1(a_2b_3 - b_2a_3) \\ &\quad + b_2(a_3b_1 - b_3a_1) \\ &\quad + b_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、$\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と直交する。また、

$$\begin{aligned}
||\boldsymbol{c}||^2 &= (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 \\
&\quad -2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
&\quad -a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 \\
&\quad -2a_2b_2a_3b_3 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_1a_2b_1a_2b_2 \\
&= ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \\
&= ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2(1 - \cos^2\theta) \\
&= ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 \sin^2\theta \\
\therefore ||\boldsymbol{c}|| &= ||\boldsymbol{a}|| \cdot ||\boldsymbol{b}|| \sin\theta
\end{aligned}$$

より、$\boldsymbol{c}$ の長さは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。

(答案)

1.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求める。

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$ は一次独立より、その外積 $\boldsymbol{c}$ は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \times (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} 0+6 \\ 0-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) &= 6(x-1) - 4(y-1) + 2(z-1) \\ &= 6x - 4y + 2z - 4 = 0\end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $3x - 2y + z = 2$

2.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求める。

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$ は一次独立より、その外積 $\boldsymbol{c}$ は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \times (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} 6-6 \\ -4+2 \\ 3-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) &= -2(y-1) - 3(z+1) \\ &= -2y - 3z + 1 = 0\end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $2y + 3z = -1$

3.

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とする。平面の法線ベクトル $\boldsymbol{c}$ を求める。

$$\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

平面上のベクトル $\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$ は一次独立より、その外積 $\boldsymbol{c}$ は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \times (\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2) &= \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2+2 \\ 2+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$ は直交するため、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1) &= 2(x-1) + 4y + 6(z-1) \\ &= 2x - 4y + 6z - 8 = 0 \end{aligned}$$

これを整理することで、求める方程式は $x + 2y + 3z = 4$

1.7

1. 第一式から第二式を引くことにより、求める直線は $y = 1.\ x - 2z = -1$ を満たす。したがって、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

2. 求める直線は $x - z = 0.\ y + z = 1$ を満たす。したがって、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

3. 求める直線は $x + y = -1.\ -y + 2z = 2$ を満たす。したがって、

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は直線上の点の一つ。したがって、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}_1 + t(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

はこの直線のベクトル表示の一つ。

1.8

直線の方程式を平面の方程式に代入して媒介変数 t を求める。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{b}) &= c \\ \therefore t &= \frac{c - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} \end{aligned}$$

したがって、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \frac{c - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{p})}{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$$

1.9

$||\boldsymbol{a}|| = ||\boldsymbol{b}|| = 1$ としても一般性を失わない。求める軌跡上の任意の点 $\boldsymbol{x}$ から二平面へと下ろした垂線と平面との交点をそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ とする。

(i) 二平面が平行でない、すなわち $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ の時、

$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{b}$ はそれぞれ平行で、$\boldsymbol{x}$ から二平面の距離は等しいので、これを t とおくと、

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = t\boldsymbol{b} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{b} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = -t\boldsymbol{b} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{b} \end{cases} \tag{2}$$

の二通りで表せる。今、$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = c, \ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) = d$ であるから、(1)、(2) をそれぞれ代入することで、求める軌跡は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = c - d, \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = c + d$$

の二平面である。

(ii) 二平面が平行、すなわち $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ または $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$ の時、

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = -t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{a} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{p} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = t\boldsymbol{a} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{x} - t\boldsymbol{a} \end{cases} \tag{4}$$

(i) と同様に (3)、(4) を $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}) = c, \ (\boldsymbol{q}, \boldsymbol{b}) = d$ に代入することで、求める軌跡は $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ の時

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \frac{c + d}{2}$$

で、$\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$ の時

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = \frac{c - d}{2}$$

1.10

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= ab\cos\theta = c \\ \therefore \cos\theta &= \frac{c}{ab} \end{aligned}$$

これが存在するための条件は、$0 < a, b$ かつ $|c| \leq ab$

1.11

$$
\begin{aligned}
(\overrightarrow{PQ}) &= \frac{m}{m+n}\boldsymbol{d} - \frac{m}{m+n}\boldsymbol{b} = \frac{m}{m+n}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}) \\
(\overrightarrow{RS}) &= (\frac{n}{m+n}\boldsymbol{c} + \frac{m}{m+n}\boldsymbol{d}) - (\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b} + \frac{n}{m+n}\boldsymbol{c}) = \frac{m}{m+n}(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}) \\
(\overrightarrow{PR}) &= (\frac{m}{m+n}\boldsymbol{b} + \frac{n}{m+n}\boldsymbol{c}) - \frac{m}{m+n}\boldsymbol{b} = \frac{n}{m+n}\boldsymbol{c} \\
(\overrightarrow{QS}) &= (\frac{n}{m+n}\boldsymbol{c} + \frac{m}{m+n}\boldsymbol{d}) - \frac{m}{m+n}\boldsymbol{d} = \frac{n}{m+n}\boldsymbol{c}
\end{aligned}
$$

より、$(\overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{RS}),\ (\overrightarrow{PR}) = (\overrightarrow{QS})$ なので P, Q, R, S は平行四辺形の四頂点。

2　行列と線形変換

2.1

(方針)

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}$ なるベクトル $\boldsymbol{x}$ を取る。今、$\boldsymbol{x}$ を左回りに θ' だけ回転させたベクトル $\boldsymbol{x}'$ を考える。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' &= \begin{pmatrix} a\cos(\theta+\theta') \\ b\cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
A = \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}
$$

と置けば、A は任意の二次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を θ' だけ回転させる $(\theta+\theta')$ 行列である。

次に、ベクトル $\boldsymbol{x}$ を右回りに θ' だけ回転させてから x 軸について折り返したベクトル $\boldsymbol{x}'$ を考える。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' &= \begin{pmatrix} a\cos(\theta-\theta') \\ -b\sin(\theta-\theta') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ b\sin\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ \sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix}$$

と書けば、B は任意の二次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ を右回りに θ' だけ回転させてから x 軸について折り返す $(-(\theta-\theta'))$ 行列である。

(答案)

1. 左回りに β だけ回転させてから左回りに α 回転させる $(A(\alpha)A(\beta))$ ことと $\alpha+\beta$ だけ回転させる $(A(\alpha+\beta))$ ことは同値。

$$\begin{aligned} A(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\ &= A(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

2. $-(\theta-\beta)+\alpha = -(\theta-(\alpha+\beta))$

$$\begin{aligned} A(\alpha)B(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & -\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\ &= B(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

3. $-(\theta+\beta-\alpha) = -(\theta-(\alpha-\beta))$

$$\begin{aligned} B(\alpha)A(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & -(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & -\cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} \\ &= B(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

4. $-(-(\theta-\beta)-\alpha)=\theta+(\alpha-\beta)$

$$\begin{aligned}
B(\alpha)B(\beta) &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta)\end{pmatrix} \\
&= A(\alpha-\beta)
\end{aligned}$$

5. 左回りに θ 開店するのを n 回繰り返すことと、左回りに $n\theta$ 回転させることは同値。
   (1) より、$A(\theta)A(\theta)=A(2\theta)$ で、帰納的に $A(\theta)^n=A(n\theta)$ である。

6. B の操作を 2 回繰り返すと元のベクトル $\boldsymbol{x}$ に戻り、もう一度 B を適用すれば $B\boldsymbol{x}$ になる。
   (4) より、$B(\theta)B(\theta)=A(\theta-\theta)$ で、帰納的に

$$\begin{aligned}
B(\theta)^{2m} &= A(m\theta-m\theta)=E \\
B(\theta)^{2m+1} &= B(\theta)B(\theta)^{2m}=B(\theta)
\end{aligned}$$

2.2

$$\begin{aligned}
& A^2-(a+d)A+(ad-bc)E \\
= & \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}-(a+d)\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}+(ad-bc)\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc\end{pmatrix} \\
= & O
\end{aligned}$$

2.3

(方針)

$$\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & q \\ 0 & s\end{pmatrix}$$

なる式について、$ad-bc=0$ が成り立つならば、$\alpha^2+\beta^2=1,\ p>0,\ q>0$ を満たすように α,β,p,q を求めることができる、という問題。変形して、

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q \\ 0 & s\end{pmatrix}$$

から求められる。

(答案)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

を解き、$\alpha^2 + \beta^2 = 1,\ p > 0,\ q > 0$ を満たすように α, β, p, q を与えることができることを示す。上式は、

$$\begin{aligned} p &= a\alpha + \beta c & (1) \\ 0 &= -a\beta + \alpha c & (2) \\ q &= \alpha b + \beta d & (3) \\ s &= -b\beta + \alpha d & (4) \end{aligned}$$

と書ける。(2) より、$\alpha = \frac{a}{c}\beta$ なので、これを (1)、(4) の代入することで

$$\begin{aligned} p &= \beta(\frac{a^2}{c} + c) = \beta(\frac{a^2 + c^2}{c}) & (5) \\ s &= \beta(\frac{ad}{c} - b) = \beta(\frac{ad - bc}{c}) & (6) \end{aligned}$$

また $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ より、

$$\beta^2(\frac{a^2}{c^2} + 1) = 1 \quad (7)$$

$$\therefore\ \beta^2 = \frac{c^2}{a^2 + c^2} \quad (8)$$

(5) > 0 より、

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ \alpha &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ p &= \sqrt{a^2 + c^2} > 0 \\ s &= \frac{c}{p}\frac{ad - bc}{c} \\ &= \frac{ad - bc}{p} > 0 \end{aligned}$$

以上より、$p=\sqrt{a^2+c^2}>0$ とすれば、$ad-bc>0$ ならば、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a}{p} & -\frac{c}{p} \\ \frac{c}{p} & \frac{a}{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & \frac{ad+cd}{p} \\ 0 & \frac{ad-bc}{c} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

は題意を満たす。

2.4

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

と置くと、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{pmatrix} \\ B\boldsymbol{a} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da_1+ca_2 \\ -ba_1+aa_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} (B\boldsymbol{a},\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{ad-bc}\{(ax_1+bx_2)(da_1-ca_2)+(cx_1+dx_2)(-ba_1+aa_2)\} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \\ &\quad \{(ad-bc)x_1a_1+(ad-bc)x_2a_2+(ac-ac)x_1a_2+(bd-bd)x_2a_1\} \\ &= x_1a_1+x_2a_2 \\ &= (\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=b \end{aligned}$$

2.5

1.

$$\begin{aligned} B\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、$2x-3y=2$

2.

$$\begin{aligned} B\boldsymbol{a} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より、$3x - 7y = 3$