夏休み毎日積分 6 日目 (解答)

2020 年 8 月 8 日

作成者:ryusuke.h

day 6

次の定積分を求めよ。
※今日から本格的に難しくなります。
解けたら十分自信を持っていいと思います。

問 1 $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$$

と分けて考える。

前半について、

$t = x^2 + 4$ とおくと、$dt = 2xdx$ であり、x は $0 \to 2$ のとき、t は $4 \to 8$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx &= \int_4^8 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \\ &= [2\sqrt{t}]_4^8 \\ &= 4\sqrt{2} - 4 \text{ となる。}\end{aligned}$$

後半について、

$x = \tan\theta$ と置くと、$d\theta = \dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$ であり、x は $0 \to 2$ のとき、θ は $0 \to \dfrac{\pi}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\tan^2\theta+1}}\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta\end{aligned}$$

さらにここで、$t = \sin\theta$ と置くと、$dt = \cos\theta d\theta$ であり、θは $0 \to \dfrac{\pi}{4}$ のとき、t は $0 \to \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2 \\ &= \log(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

問 2 $\displaystyle\int_0^2 \left|x^2-a^2\right| dx$ を a を用いて表せ。

解法について、

$x = a$ が積分区間 $0 \leqq x \leqq 2$ に含まれているか否かで場合分けをする。

$(a) 0 \leq a \leqq 2$ のとき、

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^a \{-(x^2-a^2)\}dx + \int_a^2 (x^2-a^2)dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + a^2x\right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3} - a^2\right]_a^2 \\
&= \frac{2}{3}a^3 + (\frac{8}{3} - 2a^2 + \frac{2}{3}a^3) \\
&= \frac{4}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

(b) a ≧ 2 のとき、

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^2 \{-(x^2-a^2)\}dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + a^2x\right]_0^2 \\
&= 2a^2 - \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

したがって、(a), (b) より

$$
\begin{cases}
\frac{4}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3} & (0 \ \leq a \ \leqq 2 \text{ のとき}) \\
2a^2 - \frac{8}{3} & (a \ \geqq \ 2 \text{ のとき})
\end{cases}
$$

〜補足〜

問 1 は難問でしたが、問 2 は単純な絶対値の場合分けの問題です。
中身の正負で場合分けをすれば終わりですね。
解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。