夏休み毎日積分 7 日目 (解答)

2020 年 8 月 10 日

作成者:ryusuke.h

day 7

次の定積分を求めよ。
※今日はガウス積分です。

問 1 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$

求める積分値を I とおく。

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

ここで $\mathrm{x} = \mathrm{rcos}\,\theta, y = r\sin\theta$と置換すると，ヤコビアンは r なので,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty}\int_0^{2} \pi e^{-ar^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr \\ &= 2\pi \left[\frac{e^{-ar^2}}{-2a}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

問 2 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2} dx$

平行移動しても積分値は変わらない (x 軸方向に +b 平行移動) ので、グラフの形は不変であるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \frac{\pi}{a}$$

問 3 $\displaystyle\int_{0}^{\infty} e^{-ax^2} dx$

積分区間が問１の半分であるから、

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \frac{\pi}{2a}$$

〜補足〜

ガウス積分を行いました。

確率論では頻出なので覚えましょう。

解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。