解析学 II 期末テスト対策

ryusuke_h*

2024 年 6 月 13 日

問 10

$n = 0, 1, 2, \ldots$ とする。$\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{\frac{n}{2}} dx$ を置換積分 $(x = \sin t)$ で求めよ。

$x = \sin t$ より $dx = \cos t dt$ であり、x が $0 \to 1$ の時 t は $0 \to \dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{\frac{n}{2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sin^2 t\right)^{\frac{n}{2}} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t\right)^{\frac{n}{2}} \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt\end{aligned}$$

ここで、$\mathrm{I_n} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$ とする。

$$\begin{aligned}\mathrm{I_n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{n-1} t\right) \cos t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{n-1} t\right) (\sin t)' dt \\ &= \left[\sin t \cos^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t \sin^2 t dt \\ &= 0 + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t \left(1 - \cos^2 t\right) dt \\ &= (n-1)(\mathrm{I_{n-2}} - \mathrm{I_n})\end{aligned}$$

したがって、$n\mathrm{I_n} = (n-1)\mathrm{I_{n-2}}$ であるから、$\mathrm{I_n} = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I_{n-2}}$ となる。

* Future University Hakodate M2

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt &= \mathrm{I_{n+1}} \\
&= \frac{n}{n+1}\mathrm{I_{n-1}} \\
&= \frac{n}{n+1}\frac{n-2}{n-1}\mathrm{I_{n-3}} \\
&= \frac{n}{n+1}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-4}{n-3}\mathrm{I_{n-5}} \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

$\mathrm{I}_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{I}_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 1$ であることを踏まえると、

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{n}{2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t dt \\
&= \mathrm{I_{n+1}} \\
&= \begin{cases} \dfrac{n!!}{(n+1)!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{n が奇数} \\ \dfrac{n!!}{(n+1)!!} & \text{n が偶数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

問 11

関数 f は $[0,1]$ で連続としてつぎを示せ。

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx
$$

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} dx
$$

$\frac{\pi}{2} - x = t$ とすると $-dx = dt$、x が $0 \to \frac{\pi}{2}$ の時 t は $\frac{\pi}{2} \to 0$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\} dx \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx \dots ①
\end{aligned}
$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx$$

ここで $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left\{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ であるから $x - \dfrac{\pi}{2} = t$ とすると $dx = dt$ であり、x が $\dfrac{\pi}{2} \to \pi$ の時 t は $0 \to \dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ が得られるので、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \ldots ②$$

$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_0^{\pi} xf\{\sin(\pi - x)\}dx$ より $\pi - x = t$ とすると、$-dx = dt$ であり、x が $0 \to \pi$ の時 t は $\pi \to 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx &= -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin t)dt \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - t)f(\sin t)dt \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - x)f(\sin x)dx\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle 2\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ より、

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx \ldots ③$$

以上の ①, ②, ③ より、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$$

練習問題 1.3

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 x\log x dx$

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 x\log x dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x dx \\
&= \frac{1}{2}(4\log 2 - 1\log 1) - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^2 \\
&= 2\log 2 - \frac{1}{4}(4-1) \\
&= \log 4 - \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx &= \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 \cdots ① \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi
\end{aligned}
$$

① は、$\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^2+b-a^2}dx = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}} + C$ (C は積分定数) を用いて計算しています。暗記をする必要は全くなく、余力のある方は式変形をして成り立つことを確認してみましょう。

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x dx$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x\arctan x dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \arctan x dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}(1\arctan 1 - 0) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}dx$

$$
\begin{cases}
|x^2-1| = x^2-1 & (x \geq 1, x \leq 1) \\
|x^2-1| = -(x^2-1) & (-1 \leq x \leq 1)
\end{cases}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}dx &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx + \int_1^2 \sqrt{x^2-1}dx \\
&= \pi 1^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3}) - 0\right\} \\
&= \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

① は、$\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|) + C$ （C は積分定数）を用いて計算しています。こちらも (2) 同様、暗記をする必要は全くなく、余力のある方は式変形をして成り立つことを確認してみましょう。

(5) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$

$$
\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \int_0^1 (x)'\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx
$$

ここで、

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\right)' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+x} - \sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$$
$$= \frac{1+x-x}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$$
$$= \frac{1}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$$

これを利用すると、

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \left[x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{\frac{1}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1-\frac{x}{1+x}}}dx$$
$$= \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \int_0^1 x\frac{1}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}\frac{1+x-1}{1+x}}dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}dx \ldots ①$$

ここで、$\int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$ について $\sqrt{x}=t$ とすると、$x=t^2$ であり $dx=2tdt$ となり、x が $0 \to 1$ の時 t は $0 \to 1$ であるから、

$$\int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}dx = \int_0^1 \frac{t^2}{2t(1+t)^2}2tdt$$
$$= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt$$
$$= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$
$$= [t-\arctan t]_0^1$$
$$= 1-\frac{\pi}{4}$$

これを ① に代入すると、$\frac{\pi}{4} - \left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

したがって、

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

(6) $\int_a^b \sqrt{(x-a)(x-b)}dx \quad (a<b)$