解析学 II 期末テスト対策

ryusuke_h*

2024 年 6 月 15 日

問 10

$n=0,1,2,\dots$ とする。$\displaystyle\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{n}{2}}\,dx$ を置換積分 $(x=\sin t)$ で求めよ。

$x=\sin t$ より $dx=\cos t\,dt$ であり、x が $0\to 1$ の時 t は $0\to\dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{n}{2}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 t\right)^{\frac{n}{2}}\cos t\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2 t\right)^{\frac{n}{2}}\cos t\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\,dt\end{aligned}$$

ここで、$\mathrm{I_n}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$ とする。

$$\begin{aligned}\mathrm{I_n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{n-1} t\right)\cos t\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^{n-1} t\right)\left(\sin t\right)'\,dt\\ &= \left[\sin t\cos^{n-1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2} t\sin^2 t\,dt\\ &= 0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2} t\left(1-\cos^2 t\right)\,dt\\ &= (n-1)(\mathrm{I_{n-2}}-\mathrm{I_n})\end{aligned}$$

したがって、$n\mathrm{I_n}=(n-1)\mathrm{I_{n-2}}$ であるから、$\mathrm{I_n}=\dfrac{n-1}{n}\mathrm{I_{n-2}}$ となる。

* Future University Hakodate M2

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\, dt &= \mathrm{I_{n+1}} \\ &= \frac{n}{n+1}\mathrm{I_{n-1}} \\ &= \frac{n}{n+1}\frac{n-2}{n-1}\mathrm{I_{n-3}} \\ &= \frac{n}{n+1}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-4}{n-3}\mathrm{I_{n-5}} \\ &= \dots\end{aligned}$$

$\mathrm{I_0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ dt = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{I_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = 1$ であることを踏まえると、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{n}{2}}\ dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\, dt \\ &= \mathrm{I_{n+1}} \\ &= \begin{cases} \dfrac{n!!}{(n+1)!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{n が奇数} \\ \dfrac{n!!}{(n+1)!!} & \text{n が偶数} \end{cases}\end{aligned}$$

問 11

関数 f は $[0,1]$ で連続としてつぎを示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\ dx$$

$\frac{\pi}{2} - x = t$ とすると $-dx =\ dt$、x が $0 \to \frac{\pi}{2}$ の時 t は $\frac{\pi}{2} \to 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}\ dx \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx \dots ①\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx$$

ここで $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left\{\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$ であるから $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とすると $dx=\ dt$ であり、x が $\dfrac{\pi}{2}\to\pi$ の時 t は $0\to\dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$ が得られるので、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \ldots ②$$

$\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi} xf\left\{\sin(\pi-x)\right\}\,dx$ より $\pi-x=t$ とすると、$-\,dx=\ dt$ であり、x が $0\to\pi$ の時 t は $\pi\to 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx &= -\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin x)\,dx\end{aligned}$$

したがって $\displaystyle 2\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ より、

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \ldots ③$$

以上の ①, ②, ③ より、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx$$

練習問題 1.3

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 x\log x\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\log x\,dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \log x\,dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x\,dx \\
&= \frac{1}{2}(4\log 2 - 1\log 1) - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^2 \\
&= 2\log 2 - \frac{1}{4}(4-1) \\
&= \log 4 - \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 \cdots ① \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi
\end{aligned}$$

① は、$\displaystyle\int \frac{1}{(x+a)^2+b-a^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b-a^2}}\arctan\frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}+C$ （C は積分定数）を用いて計算しています。暗記をする必要は全くなく、余力のある方は式変形をして成り立つことを確認してみましょう。

(3) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\arctan x\,dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' \arctan x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x^2\arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}(1\arctan 1 - 0) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}\,dx$

$$\begin{cases} |x^2-1| = x^2-1 & (x \geq 1, x \leq 1) \\ |x^2-1| = -(x^2-1) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{|x^2-1|}\,dx &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{x^2-1}\,dx \\
&= \pi 1^2 \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left\{2\sqrt{3} - \log(2+\sqrt{3}) - 0\right\} \\
&= \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

① は、$\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|) + C$ (C は積分定数) を用いて計算しています。こちらも (2) 同様、暗記をする必要は全くなく、余力のある方は式変形をして成り立つことを確認してみましょう。

(5) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = \int_0^1 (x)' \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$$

ここで、

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\right)' = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+x} - \sqrt{x}\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$$
$$= \frac{1+x-x}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$$
$$= \frac{1}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}$$

これを利用すると、

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = \left[x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right]_0^1 - \int_0^1 x\frac{\dfrac{1}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}}{\sqrt{1-\dfrac{x}{1+x}}}\,dx$$
$$= \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} - \int_0^1 x\frac{1}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}\dfrac{1+x-1}{1+x}}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x\sqrt{1+x}}{(1+x)2\sqrt{x}\sqrt{1+x}}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx \ldots ①$$

ここで、$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx$ について $\sqrt{x}=t$ とすると、$x=t^2$ であり $dx = 2t\,dt$ となり、x が $0\to 1$ の時 t は $0\to 1$ であるから、

$$\int_0^1 \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \int_0^1 \frac{t^2}{2t(1+t)^2}2t\,dt$$
$$= \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$
$$= [t-\arctan t]_0^1$$
$$= 1-\frac{\pi}{4}$$

これを ① に代入すると、$\dfrac{\pi}{4} - \left(1-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2} - 1$

したがって、

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx = \frac{\pi}{2}-1$$

(6) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx \quad (a<b)$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{(x-a)(x-b)}\,dx &= \int_a^b \sqrt{-x^2+(a+b)x-ab}\,dx \\
&= \int_a^b \sqrt{\left[-\left\{x-\frac{(a+b)}{2}\right\}^2 - ab + \frac{(a+b)^2}{4}\right]}\,dx \\
&= \int_a^b \sqrt{-\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4}\right\}}\,dx
\end{aligned}
$$

ここで、$x-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a-b}{2}\sin\theta$ とすると $dx=\dfrac{a-b}{2}\cos\theta\,d\theta$ であり、x が $a\to b$ の時 θ は $\dfrac{\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \sqrt{-\left\{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4}\right\}}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{-\left\{\frac{(a-b)^2}{4}\sin^2\theta - \frac{(a-b)^2}{4}\right\}}\frac{a-b}{2}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} -\left(\frac{a-b}{2}\cos\theta\right)\frac{a-b}{2}\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a-b)^2}{4}\cos^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{(a-b)^2}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\,d\theta \\
&= \frac{(a-b)^2}{4}\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{(a-b)^2}{4}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{(a-b)^2}{8}\pi
\end{aligned}
$$

(7) $\displaystyle\int_0^a x^5\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

$x=a\sin\theta$ とすると、$dx=a\cos\theta\,d\theta$ であり、x が $0\to a$ の時 θ は $0\to\dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$
\begin{aligned}
\int_0^a x^5\sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^5\sin^5\theta\sqrt{a^2\left(1-\sin^2\theta\right)}a\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^6\sin^5 a\cos\theta\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^7\sin^5\theta\left(1-\sin^2\theta\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^7\sin^5\theta\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\,d\theta \\
&= a^7\left(\frac{4!!}{5!!}-\frac{6!!}{7!!}\right) \\
&= a^7\left(\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}-\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}\right) \\
&= \frac{8}{105}a^7
\end{aligned}
$$

(8) $\displaystyle\int_{-1}^1 x3^x\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^1 x3^x &= \int_{-1}^1 x\left(\frac{3^x}{\log 3}\right)'\,dx \\
&= \left[x\cdot\frac{3^x}{\log 3}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 3^x\cdot\frac{1}{\log 3}\,dx \\
&= \frac{3}{\log 3}+\frac{1}{3\log 3}-\left[\frac{3^x}{(\log 3)^2}\right]_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{\log 3}\left(3+\frac{1}{3}\right)-\frac{3}{(\log 3)^2}+\frac{1}{3(\log 3)^2} \\
&= \frac{1}{\log 3}\cdot\frac{10}{3}-\frac{1}{(\log 3)^2}\left(3-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3\log 3}\left(10-\frac{8}{\log 3}\right)
\end{aligned}
$$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx &= \int_0^1 (x)'\log(1+\sqrt{x})\,dx \\
&= \left[x\log(1+\sqrt{x})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{(1+\sqrt{x})\cdot 2\sqrt{x}}\,dx
\end{aligned}
$$

ここで、$\sqrt{x}=t$ とすると $x=t^2,\ dx=2t\,dt$ であり、x が $0\to 1$ の時 t は $0\to 1$ であるから、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx &= \left[x\log(1+\sqrt{x})\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{(1+\sqrt{x})\cdot 2\sqrt{x}}\,dx \\
&= \log 2 - \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)2t} 2t\,dt \\
&= \log 2 - \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)\,dt \\
&= \log 2 - \left[\frac{1}{2}t^2 - t + \log|t+1|\right]_0^1 \\
&= \log 2 - \frac{1}{2} + 1 - \log 2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.

$p \geq 0$ として、次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

$\dfrac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{n}\left\{\left(\dfrac{1}{n}\right)^p + \left(\dfrac{2}{n}\right)^p + \left(\dfrac{3}{n}\right)^p + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^p\right\} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p$ であるから、

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p \\
&= \int_0^1 x^p\,dx \\
&= \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

3.

(1)　整数 $m, n\ (\geq 0)$ に対し、δ_{mn} を $\delta_{mn} = 1\ (m = n), \delta_{mn} = 0\ (m \neq n)$ で定める。$m = n = 0$ の場合を除き、次が成り立つことを示せ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \pi\delta_{mn},\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \pi\delta_{mn},\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$$

(2)　$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ について、次を示せ。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \pi a_m \quad (m = 0, 1, \ldots, n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \pi b_m \quad (m = 1, 2 \ldots, n)$$