

夏休み毎日積分 Day7 (問題)

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 B2 日置竜輔

2020 年 8 月 7 日

— day 7 —

次の定積分を求めよ。
※今日はガウス積分です。

問 1 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$

求める積分値を I とおく。

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

ここで $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と置換すると, ヤコビアンは r なので,

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \pi e^{-ar^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-ar^2} r dr \\ &= 2\pi \left[\frac{e^{-ar^2}}{-2a} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

問 2 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2} dx$

平行移動しても積分値は変わらない (x 軸方向に $+b$ 平行移動) ので, グラフの形は不変であるので,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \frac{\pi}{a}$$

問 3 $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx$

積分区間が問 1 の半分であるから,

$$\int_0^{\infty} e^{-a(x-b)^2} dx = \frac{\pi}{2a}$$

～補足～

ガウス積分を行いました。

確率論では頻出なので覚えましょう。

解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。