

春休み毎日微分方程式 Day 10 (解答)

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 B2 日置竜輔

2021 年 2 月 19 日

問 1

以下の連立微分方程式を解け。

I.

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^x$$

解答

微分方程式を演算子法を用いて表すと、

$$Dy + 3y = (D + 3)y = e^x$$

となるので、

$$y = \frac{1}{D + 3} e^x$$

になるので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{D+3}e^x &= e^{-3x} \int e^{3x} e^x dx \\ &= e^{-3x} \int e^{3x} e^x dx \\ &= e^{-3x} \int e^{4x} dx \\ &= e^{-3x} \frac{1}{4} e^{4x} \\ &= \frac{1}{4} e^x + C \quad (C \text{ は任意定数})\end{aligned}$$

となる。

II.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 3x$$

解答

微分方程式を演算子法を用いて表すと、

$$\begin{aligned} D^2y - 7Dy + 12y &= (D^2 - 7D + 12)y \\ &= (D - 3)(D - 4)y \\ &= 3x \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{(D - 3)(D - 4)} 3x \end{aligned}$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D - 3)(D - 4)} 3x &= \frac{1}{D - 3} \left(\frac{1}{D - 4} 3x \right) \\ &= \frac{1}{D - 3} e^{-(-4)x} \left(\int e^{-4x} 3x dx \right) \\ &= \frac{1}{D - 3} e^{4x} \left(-\frac{1}{4} e^{-4x} 3x - \frac{3}{16} e^{-4x} \right) \\ &= \frac{1}{D - 3} \left(-\frac{1}{16} e^{4x} e^{-4x} (12x + 3) \right) \\ &= -\frac{3}{16} \frac{1}{D + 3} (4x + 1) \\ &= -\frac{3}{16} e^{-(-3)x} \left(\int e^{-3x} (4x + 1) dx \right) \\ &= -\frac{3}{16} e^{3x} \left(-\frac{1}{3} e^{-3x} (4x + 1) - \frac{1}{9} e^{-3x} 4 \right) \\ &= \frac{3}{16} \frac{1}{9} e^{-3x} e^{-3x} (12x + 7) \\ &= \frac{1}{48} (12x + 7) \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{7}{48} \end{aligned}$$

となるので、一般解は

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{48}$$

後期の授業では D を用いた方程式を解く際には分母を部分分数分解すると習いましたが、解説のように1つ1つ処理して行っても答えを求めることができるので覚えておきましょう。