春休み毎日微分方程式 Day 3（解答）

ryusuke_h*

2021 年 3 月 5 日

問 1

以下の微分方程式を解け。

I. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$

右辺の分子分母を x で割ると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}$$

この形は同次形であるから、$u = \dfrac{y}{x}$ の変数変換を行うと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-u}{1+u} \tag{0.0.1}$$

となり、また $u = \dfrac{y}{x}$ より $y = ux$ が導かれるので、

これらの両辺を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}x + u \tag{0.0.2}$$

* Future University Hakodate B2

(0.0.1), (0.0.2) より、

$$\frac{1-u}{1+u} = \frac{dy}{dx}x + u$$

が得られる。

これを $\dfrac{du}{dx}$ について整理すると、

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+2u-1}{u+1}\frac{1}{x}$$

これは**変数分離系**の形であるから、$u^2+2u-1 \neq 0$ を仮定して、

u を左辺に、x を右辺にまとめると、

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

この両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1}du = -\int \frac{1}{x}dx \tag{0.0.3}$$

公式

$$\int \frac{f\prime(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

(0.0.3) の左辺について、上記の公式を用いると、

$$\begin{aligned}
\log|u^2+2u-1| &= -2\log|x| + C \\
\log|u^2+2u-1| + 2\log|x| &= C \\
\log|u^2+2u-1| + \log|x|^2 &= C \\
\log|(u^2+2u-1)x^2| &= C \\
|(u^2+2u-1)x^2| &= \mathrm{e}^C \\
(u^2+2u-1)x^2 &= \pm\mathrm{e}^C \\
(u^2+2u-1)x^2 &= D \qquad (D \neq 0) \quad (C, D \text{ は任意定数})
\end{aligned}$$

ここで、$u^2+2u-1 = 0$ を仮定すると、

$$u = -1 \pm \sqrt{2} \qquad \text{(定数関数)} \tag{0.0.4}$$

この時の式は、

$$\frac{du}{dx} = 0$$

であり、これは (0.0.4) の解も満たしている。

したがって、$D \neq 0$ はではなく、全ての D において成り立つことになったので、

$$(u^2 + 2u - 1)x^2 = C\prime \qquad (C\prime \text{ は任意定数})$$

したがって、 $u = \dfrac{y}{x}$ を代入すると、求める解は

$$(y^2 + 2xy - x^2) = C\prime$$