確率論　宿題４の解答

1019163 2-G 日置竜輔

次の問題を解き，解答過程を示したレポートを提出しなさい.
ただし，解答は単に答えを書くのではなく，どのように考えたかが分かるように書きなさい.

問題　あるサイコロを n 回投げたとき，i の目が出る回数を Xi で表す.
このとき，以下の問いに答えよ.
但し、解答は単に答えを書くのではなく，どのように考えたかが分かるように書きなさい.

問 1　サイコロの偶数の目が奇数の目より 2 倍でやすいサイコロの Xi と Xj の同時確率 P(Xi, Xj) が従う確率分布を求めよ.
ただし，奇数となるどの目が出る確率も等しく，偶数となるどの目が出る確率も等しいとする.

まず、「偶数の目が奇数の目より 2 倍でやすい」ので、サイコロを 1 回振ったら

$$\begin{cases} 1,3,5 \text{ の出る確率はそれぞれ} & \frac{1}{9} \\ 2,4,6 \text{ の出る確率はそれぞれ} & \frac{2}{9} \end{cases} \quad \text{であることがわかる。}$$

(a)i , j が共に奇数であるとき、
さいころを n 回振って、k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$）は,

$$ {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k} \qquad \text{(反復試行の回数)}$$

また、サイコロを n 回振って、k 回だけ i が出て、
l 回だけ j が出る確率（すなわち $X_i = k$, $X_j = l$ の同時確率）は、

$$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{1}{9}\right)^l\left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l}$$

したがって、i , j が共に奇数のときの表は以下のようになる。

表 1　i,j が共に奇数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	2	…	k	…
0	$\left(\frac{7}{9}\right)^n$	$n\frac{7^{n-1}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)}{2}\frac{7^{n-2}}{9^n}$	…	$\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{7^{n-k}}{9^n}$	…
1	$n\frac{7^{n-1}}{9^n}$	$n(n-1)\frac{7^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{7^{n-3}}{9^n}$	…	$\frac{n!}{k!\ (n-k-1)!}\frac{7^{n-k-1}}{9^n}$	…
2	$\frac{n(n-1)}{2}\frac{7^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{7^{n-3}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\frac{7^{n-5}}{9^n}$	…	$\frac{n!}{2!\ k!\ (n-k-2)!}\frac{7^{n-k-2}}{9^n}$	…
…	…	…	…	…	…	…
l	$\frac{n!}{l!(n-l)!}\frac{7^{n-l}}{9^n}$	$\frac{n!}{l!\ (n-l-1)!}\frac{7^{n-k-1}}{9^n}$	$\frac{n!}{2!\ l!\ (n-l-2)!}\frac{7^{n-l-2}}{9^n}$	…	$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}\frac{7^{n-k-l}}{9^n}$	…
…	…	…	…	…	…	…

(b) i が奇数, j が偶数であるとき、
さいころを n 回振って、k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$）は,

$$ {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k} \qquad \text{(反復試行の回数)} $$

また、サイコロを n 回振って、k 回だけ i が出て、
l 回だけ j が出る確率（すなわち X$_i = k$, $X_j = l$ の同時確率）は、

$$ \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} $$

したがって、 i が奇数, j が偶数のときの表は以下のようになる。

表 2　i が奇数, j が偶数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	$\dots$
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$n\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$\dots$
1	$n\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$n(n-1)\frac{2}{81}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\dots$
2	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{4}{9^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l	$\frac{n!}{l!\ (n-l)!}\left(\frac{2}{9}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{l!\ (n-l-1)!}\frac{2^l}{9^{l+1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-1}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	$\dots$	2	k	$\dots$
0	$\dots$	$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{k!\ (n-k)!}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$	$\dots$
1	$\dots$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{2}{9^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	$\frac{n!}{k!\ (n-k-1)!}\frac{2}{9^{k+1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}$	$\dots$
2	$\dots$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\frac{4}{9^4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$	$\frac{n!}{2!\ k!\ (n-k-2)!}\frac{4}{9^{k+2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-2}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l	$\dots$	$\frac{n!}{l!\ (n-l-2)!}\frac{2^l}{9^{l+2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-2}$	$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}\frac{2^l}{9^{k+l}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

(c) i が偶数, j が奇数であるとき、

さいころを n 回振って、k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$）は,

$$
{}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k} \qquad \text{(反復試行の回数)}
$$

また、サイコロを n 回振って、k 回だけ i が出て、
l 回だけ j が出る確率（すなわち $X_i = k$, $X_j = l$ の同時確率）は、

$$
\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}
$$

したがって、 i が偶数, j が奇数のときの表は以下のようになる。

表 3　i が偶数, j が奇数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	…
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\frac{n!}{(n-1)!}\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	…
1	$n\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$n(n-1)\frac{2}{81}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	…
2	$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{2}{9^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	…
…	…	…	…
l	$\frac{n!}{(n-l)!}\left(\frac{1}{9}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}$	$\frac{n!}{l!\ (n-l-1)!}\frac{2}{9^{l+1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-1}$	…

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	…	2	k	…
0	…	$\frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{81}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{k!\ (n-k)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$	…
1	…	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{4}{9^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	$\frac{n!}{k!\ (n-k-1)!}\frac{2^k}{9^{k+1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}$	…
2	…	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\frac{4}{9^4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$	$\frac{n!}{2!\ k!\ (n-k-2)!}\frac{2^k}{9^{k+2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-2}$	…
…	…	…	…	…
l	…	$\frac{n!}{2!\ l!\ (n-l-2)!}\frac{4}{9^{l+2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-2}$	$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}\frac{2^k}{9^{k+l}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}$	…
…	…	…	…	…

(d) i ,j が共に偶数であるとき、
さいころを n 回振って、k 回だけ i が出る確率（すなわち X$_i = k$）は,

$$ {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k} \qquad (反復試行の回数) $$

　また、サイコロを n 回振って、k 回だけ i が出て、
l 回だけ j が出る確率（すなわち X$_i = k$ ，$X_j = l$ の同時確率）は、

$$ \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} $$

　したがって、 i, j が共に偶数のときの表は以下のようになる。

表 4　 i, j が共に偶数のときの確率分布

(横 : X_i)(縦 : X_j)	1	2	$\ldots$
1	$n(n-1)4\frac{5^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}8\frac{5^{n-3}}{9^n}$	$\ldots$
2	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}8\frac{5^{n-3}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}16\frac{5^{n-4}}{9^n}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
l	$\frac{n!}{l!\ (n-l-1)!}2^{l+1}\frac{5^{n-l-1}}{9^n}$	$\frac{n!}{2!\ l!\ (n-l-2)!}2^{l+2}\frac{5^{n-l-2}}{9^n}$	$\ldots$

(横 : X_i)(縦 : X_j)	$\ldots$	k	$\ldots$
1	$\ldots$	$\frac{n!}{k!\ (n-k-1)!}2^{k+1}\frac{5^{n-k-1}}{9^n}$	$\ldots$
2	$\ldots$	$\frac{n!}{2!\ k!\ (n-k-2)!}2^{k+2}\frac{5^{n-k-2}}{9^n}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
l	$\ldots$	$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}2^{k+l}\frac{5^{n-k-l}}{9^n}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

問 2　問 1 の同時確率分布から Xi の周辺確率分布を求めよ.

X$_i$の確率分布は j の出る回数によらずに全ての場合での和を求めれば良い。
したがって、問 1 の結果より、$i = k$ 回、すなわち $X_i = k$ の時の周辺確率分布は、

(a)i , j が共に奇数であるとき、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!(n-k)!}{k!\ l!\ (n-k-l)!(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \sum_{l=0}^{n} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \sum_{l=0}^{n} {}_{n-k}C_l \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9} + \frac{7}{9}\right)^{n-k} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

(b)i が奇数 , j が偶数であるとき、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!(n-k)!}{k!\ l!\ (n-k-l)!(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{k} \sum_{l=0}^{n} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{1}{9}\right)^{k} \sum_{l=0}^{n} {}_{n-k}C_{l} \left(\frac{2}{9}\right)^{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{1}{9}\right)^{k} \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{1}{9}\right)^{k} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

(c)i が偶数 , j が奇数であるとき、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{1}{9}\right)^{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!(n-k)!}{k!\ l!\ (n-k-l)!(n-k)!} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{1}{9}\right)^{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \sum_{l=0}^{n} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \sum_{l=0}^{n} {}_{n-k}C_{l} \left(\frac{1}{9}\right)^{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

(d)i , j が共に偶数であるとき、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \frac{n!(n-k)!}{k!\ l!\ (n-k-l)!(n-k)!} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \sum_{l=0}^{n} \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \sum_{l=0}^{n} {}_{n-k}C_{l} \left(\frac{2}{9}\right)^{l} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{2}{9} + \frac{5}{9}\right)^{n-k} \\
&= {}_{n}C_{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k}
\end{aligned}
$$

問 3　n が十分大きな値のとき，問 2 の周辺確率分布が収束する確率分布を求めよ．

n が十分大きな値をとる時、問 2 の周辺確率分布は正規分布に近似するため、正規分布の公式に当てはめる。
$\mu = \dfrac{n}{9}$, $\sigma^2 = np(1-p) = \dfrac{8}{81}n$ であるから、正規分布は

$$
\begin{aligned}
f(l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{8}{81}n}} \exp\left\{-\frac{(x-\frac{n}{9})^2}{2\frac{8}{81}n}\right\} \\
&= \frac{9}{4\sqrt{n\pi}} \exp\left\{\frac{81}{16n}\left(x-\frac{n}{9}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

したがって、求める確率分布は

$$
f(l) = \frac{9}{4\sqrt{n\pi}} \exp\left\{\frac{81}{16n}\left(x-\frac{n}{9}\right)^2\right\}
$$

問 4　n = 25920000, X3 = 2877000 であったとき，このサイコロが，偶数の目が奇数の目より 2 倍以上でやすいサイコロであるかどうかを，有意水準 5% で検定せよ．
ただし，n = 25920000 は十分大きな値であると見做し，問 3 の確率分布に収束していると見做してよい．
さらに，奇数となるどの目が出る確率も等しく，偶数となるどの目が出る確率も等しいとする．

このサイコロが、普通のサイコロ (1 〜 6 が等確率で出る) と仮定すると、
X_3の確率分布は、n が十分大きいならば、

$$P_{(x,n)} = \frac{6}{\sqrt{10n\pi}} \exp\left\{-\frac{8}{15n}\left(x - \frac{n}{6}\right)^2\right\}$$ に収束する。

したがって、$n = 2,592,0000$ より、$\frac{n}{6} = 4,320,000$

$$P_{(x)} = \frac{1}{1200\sqrt{5\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{7.2 \times 10^6}\left(x - 4.32 \times 10^6\right)^2\right\}$$ となる。

また、$\sigma = 600\sqrt{10} = 1897.3\ldots$ ， $2\sigma = 3794.7\ldots$

$\frac{n}{6} - 20 = 4,316,205.2\ldots$ ， $\frac{n}{6} + 20 = 4,323,794.7\ldots$ である。

以上より、　4,316,205 $\leqq X_3 \leqq 4,323,795$ となる確率が 95.4 % 以上なので、
このサイコロは偶数の目が奇数の目より 2 倍以上でやすいサイコロである可能性が高い。