

春休み毎日微分方程式 Day 3 (解答)

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 B2 日置竜輔

2021 年 3 月 5 日

問 1

以下の微分方程式を解け。

I. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$

右辺の分子分母を x で割ると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

この形は同次形であるから、 $u = \frac{y}{x}$ の変数変換を行うと、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-u}{1+u} \tag{0.0.1}$$

となり、また $u = \frac{y}{x}$ より $y = ux$ が導かれるので、

これらの両辺を x で微分すると、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}x + u \tag{0.0.2}$$

(0.0.1), (0.0.2) より、

$$\frac{1-u}{1+u} = \frac{dy}{dx}x + u$$

が得られる。

これを $\frac{du}{dx}$ について整理すると、

$$\frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 2u - 1}{u + 1} \frac{1}{x}$$

これは**変数分離系**の形であるから、 $u^2 + 2u - 1 \neq 0$ を仮定して、

u を左辺に、 x を右辺にまとめると、

$$\frac{u+1}{u^2+2u-1} \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

この両辺を x で積分すると、

$$\int \frac{u+1}{u^2+2u-1} du = -\int \frac{1}{x} dx \quad (0.0.3)$$

公式

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

(0.0.3) の左辺について、上記の公式を用いると、

$$\log |u^2 + 2u - 1| = -2 \log |x| + C$$

$$\log |u^2 + 2u - 1| + 2 \log |x| = C$$

$$\log |u^2 + 2u - 1| + \log |x|^2 = C$$

$$\log |(u^2 + 2u - 1)x^2| = C$$

$$|(u^2 + 2u - 1)x^2| = e^C$$

$$(u^2 + 2u - 1)x^2 = \pm e^C$$

$$(u^2 + 2u - 1)x^2 = D \quad (D \neq 0) \quad (C, D \text{ は任意定数})$$

ここで、 $u^2 + 2u - 1 = 0$ を仮定すると、

$$u = -1 \pm \sqrt{2} \quad (\text{定数関数}) \quad (0.0.4)$$

この時の式は、

$$\frac{du}{dx} = 0$$

であり、これは (0.0.4) の解も満たしている。

したがって、 $D \neq 0$ はではなく、全ての D において成り立つことになったので、

$$(u^2 + 2u - 1)x^2 = C' \quad (C' \text{ は任意定数})$$

したがって、 $u = \frac{y}{x}$ を代入すると、求める解は

$$(y^2 + 2xy - x^2) = C'$$