

夏休み毎日積分 8 日目 (解答)

2020 年 8 月 11 日

作成者: ryusuke.h

— day 8 —

次の定積分を求めよ。
※今日はガウス積分です。

問 1 $\iint_R e^{\frac{y}{x}} dx dy \quad (R = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\});$

求める積分値を I とすると、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{\frac{y}{x}} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[x e^{\frac{y}{x}} \right]_0^x = \int_0^1 (x e - x) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} (e - 1) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (e - 1) \end{aligned}$$

問 2 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad (D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq a^2\});$

求める積分値を I として、極座標に変換すると、

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta \\
&= \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\
&= \frac{2\pi}{3} \left[- (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} \pi a^2
\end{aligned}$$

～補足～

重積分を行いました。

出典は名古屋大学の解析学の期末試験の簡単な部分の問題です。

解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。