確率論　宿題４の解答

1019163 2-G 日置竜輔

次の問題を解き，解答過程を示したレポートを提出しなさい.
ただし，解答は単に答えを書くのではなく，どのように考えたかが分かるように書きなさい.

問題　あるサイコロを n 回投げたとき，i の目が出る回数を Xi で表す.
このとき，以下の問いに答えよ.
但し、解答は単に答えを書くのではなく，どのように考えたかが分かるように書きなさい.

問 1　サイコロの偶数の目が奇数の目より 2 倍でやすいサイコロの Xi と Xj の同時確率 P(Xi, Xj) が従う確率分布を求めよ.
ただし，奇数となるどの目が出る確率も等しく，偶数となるどの目が出る確率も等しいとする.

まず、「偶数の目が奇数の目より 2 倍でやすい」ので、サイコロを１回振ったら

$$\begin{cases} 1,3,5 \text{ の出る確率はそれぞれ} \quad \frac{1}{9} \\ 2,4,6 \text{ の出る確率はそれぞれ} \quad \frac{2}{9} \end{cases} \quad \text{であることがわかる。}$$

(a)i , j が共に奇数であるとき、
さいころを n 回振って、k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$）は,

$$ {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k} \qquad \text{(反復試行の回数)}$$

また、サイコロを n 回振って、k 回だけ i が出て、
l 回だけ j が出る確率（すなわち $\mathrm{X}_i = k$, $X_j = l$ の同時確率）は、

$$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{1}{9}\right)^l\left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l}$$

したがって、i , j が共に奇数のときの表は以下のようになる。

表 1　i,j が共に奇数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	2	$\ldots$
0	$\left(\frac{7}{9}\right)^n$	$n\frac{7^{n-1}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)}{2}\frac{7^{n-2}}{9^n}$	$\ldots$
1	$n\frac{7^{n-1}}{9^n}$	$n(n-1)\frac{7^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{7^{n-3}}{9^n}$	$\ldots$
2	$\frac{n(n-1)}{2}\frac{7^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{7^{n-3}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\frac{7^{n-5}}{9^n}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
l	$\frac{n!}{l!(n-l)!}\frac{7^{n-l}}{9^n}$	$\frac{n!}{l!\ (n-l-1)!}\frac{7^{n-k-1}}{9^n}$	$\frac{n!}{2!\ l!\ (n-l-2)!}\frac{7^{n-l-2}}{9^n}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	$\ldots$	k	$\ldots$
0	$\ldots$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{7^{n-k}}{9^n}$	$\ldots$
1	$\ldots$	$\frac{n!}{k!\ (n-k-1)!}\frac{7^{n-k-1}}{9^n}$	$\ldots$
2	$\ldots$	$\frac{n!}{2!\ k!\ (n-k-2)!}\frac{7^{n-k-2}}{9^n}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
l	$\ldots$	$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}\frac{7^{n-k-l}}{9^n}$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

(b) i が奇数, j が偶数であるとき、
さいころを n 回振って、k 回だけ i が出る確率（すなわち $\mathrm{X}_i = k$）は,

$$ {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k} \qquad \text{(反復試行の回数)} $$

また、サイコロを n 回振って、k 回だけ i が出て、
l 回だけ j が出る確率（すなわち $\mathrm{X}_i = k$, $X_j = l$ の同時確率）は、

$$ \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} $$

したがって、 i が奇数, j が偶数のときの表は以下のようになる。

表 2　i が奇数, j が偶数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	$\cdots$
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$n\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$\cdots$
1	$n\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$n(n-1)\frac{2}{81}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\cdots$
2	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{4}{9^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
l	$\frac{n!}{l!\ (n-l)!}\left(\frac{2}{9}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{l!\ (n-l-1)!}\frac{2^l}{9^{l+1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-1}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	$\cdots$	2	k	$\cdots$
0	$\cdots$	$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{k!\ (n-k)!}\left(\frac{1}{9}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$	$\cdots$
1	$\cdots$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{2}{9^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	$\frac{n!}{k!\ (n-k-1)!}\frac{2}{9^{k+1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}$	$\cdots$
2	$\cdots$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\frac{4}{9^4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$	$\frac{n!}{2!\ k!\ (n-k-2)!}\frac{4}{9^{k+2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-2}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
l	$\cdots$	$\frac{n!}{l!\ (n-l-2)!}\frac{2^l}{9^{l+2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-2}$	$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}\frac{2^l}{9^{k+l}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

(c) i が偶数, j が奇数であるとき、

さいころを n 回振って、k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$）は,

$$ {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k} \qquad \text{(反復試行の回数)} $$

また、サイコロを n 回振って、k 回だけ i が出て、
l 回だけ j が出る確率（すなわち $X_i = k$, $X_j = l$ の同時確率）は、

$$ \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} $$

したがって、 i が偶数, j が奇数のときの表は以下のようになる。

表 3　i が偶数, j が奇数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	…
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\frac{n!}{(n-1)!}\frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	…
1	$n\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$n(n-1)\frac{2}{81}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	…
2	$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{2}{9^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	…
…	…	…	…
l	$\frac{n!}{(n-l)!}\left(\frac{1}{9}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}$	$\frac{n!}{l!\ (n-l-1)!}\frac{2}{9^{l+1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-1}$	…

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	…	2	k	…
0	…	$\frac{n(n-1)}{2}\frac{4}{81}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{k!\ (n-k)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$	…
1	…	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\frac{4}{9^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	$\frac{n!}{k!\ (n-k-1)!}\frac{2^k}{9^{k+1}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}$	…
2	…	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}\frac{4}{9^4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$	$\frac{n!}{2!\ k!\ (n-k-2)!}\frac{2^k}{9^{k+2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-2}$	…
…	…	…	…	…
l	…	$\frac{n!}{2!\ l!\ (n-l-2)!}\frac{4}{9^{l+2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-2}$	$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}\frac{2^k}{9^{k+l}}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}$	…
…	…	…	…	…

(d) i ,j が共に偶数であるとき、
さいころを n 回振って、k 回だけ i が出る確率（すなわち X$_i = k$）は,

$$ {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k} \qquad \text{(反復試行の回数)} $$

また、サイコロを n 回振って、k 回だけ i が出て、
l 回だけ j が出る確率（すなわち X$_i = k$, $X_j = l$ の同時確率）は、

$$ \frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} $$

したがって、 i, j が共に偶数のときの表は以下のようになる。

表 4　i, j が共に偶数のときの確率分布

(横 : X_i)(縦 : X_j)	1	2	...
1	$n(n-1)4\frac{5^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}8\frac{5^{n-3}}{9^n}$	...
2	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}8\frac{5^{n-3}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}16\frac{5^{n-4}}{9^n}$	...
...	...	...	...
l	$\frac{n!}{l!\ (n-l-1)!}2^{l+1}\frac{5^{n-l-1}}{9^n}$	$\frac{n!}{2!\ l!\ (n-l-2)!}2^{l+2}\frac{5^{n-l-2}}{9^n}$	...
...	...	...	...

(横 : X_i)(縦 : X_j)	$\dots$	k	$\dots$
1	$\dots$	$\frac{n!}{k!\ (n-k-1)!}2^{k+1}\frac{5^{n-k-1}}{9^n}$	$\dots$
2	$\dots$	$\frac{n!}{2!\ k!\ (n-k-2)!}2^{k+2}\frac{5^{n-k-2}}{9^n}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l	$\dots$	$\frac{n!}{k!\ l!\ (n-k-l)!}2^{k+l}\frac{5^{n-k-l}}{9^n}$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$