

春休み毎日微分方程式 Day 7 (解答)

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 B2 日置竜輔

2021 年 3 月 13 日

問 1

次の微分方程式を計算せよ。

I. $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$

これは **変数分離系** の形であるから、

$$\frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} = 1$$

両辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int dx$$
$$\arctan y = x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

II. $(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} + y^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 1$

I と同様に変数分離を行うと、

$$\frac{1}{y^2 + 1} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + 1} dx$$

両辺を積分すると、

$$\arctan y = -\arctan x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$\arctan y + \arctan x = C$$

となるので、両辺に \tan をとると、

$$\tan(\arctan y + \arctan x) = \tan C \quad (0.0.1)$$

— \tan の加法定理 —

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

であるから、(0.0.1) 式に当てはめると、

$$\tan(\arctan y + \arctan x) = \frac{y + x}{1 - xy} \quad (0.0.2)$$

三角関数の逆関数との関係 —

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\tan(\arctan x) = x$$

したがって、(0.0.1),(0.0.2) 式より、

$$\frac{x+y}{1-xy} = \tan C$$

とが得られる。

あとは、初期値条件に $y(0) = 1$ を代入すると、

$$\tan C = 1$$

が得られるので、求める特殊解は、

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$