

春休み毎日微分方程式 Day 4 (解答)

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 B2 日置竜輔

2021 年 3 月 7 日

問 1

次の一階線形微分方程式を解け。

I. $\frac{dy}{dx} - y = e^{2x}$

一階線形微分方程式は一般的に次のように表される。

公式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

この時、解である y は、

$$P(x) = \int p(x)dx$$

$$\mu(x) = e^{P(x)}$$

として、 $y = \frac{1}{\mu} \int \mu q(x)dx$ で求められる。

この問題の場合だと、 $p(x) = -1$ 、 $q(x) = e^{2x}$ となるので、 $P(x) = -x$ となる。

したがって、 $\mu(x) = e^{-x}$ となり、 y は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\mu} \int \mu q(x) dx \\
&= \frac{1}{e^{-x}} \int e^{-x} e^{2x} dx \\
&= \frac{1}{e^{-x}} \int e^x dx \\
&= e^x (e^x + C) \\
&= e^{2x} + Ce^x \quad (C \text{ は任意定数})
\end{aligned}$$

II. I で解いた微分方程式が解を満たすことを示せ。I で求めた y を実際に代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} - y &= (e^{2x} + Ce^x)' - (e^{2x} + Ce^x) \\
&= 2e^{2x} + Ce^x - e^{2x} - Ce^x \\
&= e^{2x}
\end{aligned}$$

したがって、この解は成り立つ。