

確率論 最終課題の解答

1019163 2-G 日置竜輔

次の問題を解き、解答過程を示したレポートを提出しなさい。
ただし、解答は単に答えを書くのではなく、どのように考えたかが分かるように書きなさい。

問題 あるサイコロを n 回投げたとき、 i の目が出る回数を X_i で表す。

このとき、以下の問いに答えよ。

但し、解答は単に答えを書くのではなく、どのように考えたかが分かるように書きなさい。

問 1 サイコロの偶数の目が奇数の目より 2 倍でやすいサイコロの X_i と X_j の同時確率 $P(X_i, X_j)$ が従う確率分布を求めよ。

ただし、奇数となるどの目が出る確率も等しく、偶数となるどの目が出る確率も等しいとする。

まず、「偶数の目が奇数の目より 2 倍でやすい」ので、サイコロを 1 回振ったら

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, 3, 5 \text{ の出る確率はそれぞれ } \frac{1}{9} \\ 2, 4, 6 \text{ の出る確率はそれぞれ } \frac{2}{9} \end{array} \right\} \quad \text{であることがわかる。}$$

(a) i, j が共に奇数であるとき、

さいころを n 回振って、 k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$ ）は、

$${}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k} \quad (\text{反復試行の回数})$$

また、サイコロを n 回振って、 k 回だけ i が出て、
 l 回だけ j が出る確率（すなわち $X_i = k, X_j = l$ の同時確率）は、

$$\frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l}$$

したがって、 i, j が共に奇数のときの表は以下ようになる。

表 1 i, j が共に奇数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	2	...
0	$\left(\frac{7}{9}\right)^n$	$n \frac{7^{n-1}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)}{2} \frac{7^{n-2}}{9^n}$...
1	$n \frac{7^{n-1}}{9^n}$	$n(n-1) \frac{7^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \frac{7^{n-3}}{9^n}$...
2	$\frac{n(n-1)}{2} \frac{7^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \frac{7^{n-3}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \frac{7^{n-5}}{9^n}$...
...
l	$\frac{n!}{l!(n-l)!} \frac{7^{n-l}}{9^n}$	$\frac{n!}{l!(n-l-1)!} \frac{7^{n-k-1}}{9^n}$	$\frac{n!}{2! l! (n-l-2)!} \frac{7^{n-l-2}}{9^n}$...
...

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	...	k	...
0	...	$\frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{7^{n-k}}{9^n}$...
1	...	$\frac{n!}{k! (n-k-1)!} \frac{7^{n-k-1}}{9^n}$...
2	...	$\frac{n!}{2! k! (n-k-2)!} \frac{7^{n-k-2}}{9^n}$...
...
l	...	$\frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \frac{7^{n-k-l}}{9^n}$...
...

(b) i が奇数, j が偶数であるとき、
さいころを n 回振って、 k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$ ）は、

$${}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k} \quad (\text{反復試行の回数})$$

また、サイコロを n 回振って、 k 回だけ i が出て、
 l 回だけ j が出る確率（すなわち $X_i = k, X_j = l$ の同時確率）は、

$$\frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}$$

したがって、 i が奇数、 j が偶数のときの表は以下のようになる。

表 2 i が奇数、 j が偶数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	...
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$n \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$...
1	$n \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$n(n-1) \frac{2}{81} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$...
2	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \frac{4}{9^3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$...
...
l	$\frac{n!}{l! (n-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{l! (n-l-1)!} \frac{2^l}{9^{l+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-1}$...
...

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	...	2	k	...
0	...	$\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$...
1	...	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \frac{2}{9^3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	$\frac{n!}{k! (n-k-1)!} \frac{2}{9^{k+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}$...
2	...	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \frac{4}{9^4} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$	$\frac{n!}{2! k! (n-k-2)!} \frac{4}{9^{k+2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-2}$...
...
l	...	$\frac{n!}{l! (n-l-2)!} \frac{2^l}{9^{l+2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-2}$	$\frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \frac{2^l}{9^{k+l}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}$...
...

(c) i が偶数、 j が奇数であるとき、

さいころを n 回振って、 k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$ ）は、

$${}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k} \quad (\text{反復試行の回数})$$

また、サイコロを n 回振って、 k 回だけ i が出て、
 l 回だけ j が出る確率（すなわち $X_i = k, X_j = l$ の同時確率）は、

$$\frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}$$

したがって、 i が偶数、 j が奇数のときの表は以下のようになる。

表 3 i が偶数、 j が奇数のときの確率分布

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	0	1	...
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\frac{n!}{(n-1)!} \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$...
1	$n \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$n(n-1) \frac{2}{81} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$...
2	$\frac{n(n-1)}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \frac{2}{9^3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$...
...
l	$\frac{n!}{(n-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}$	$\frac{n!}{l! (n-l-1)!} \frac{2}{9^{l+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-1}$...

(横 : X_i)/(縦 : X_j)	...	2	k	...
0	...	$\frac{n(n-1)}{2} \frac{4}{81} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$	$\frac{n!}{k! (n-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$...
1	...	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \frac{4}{9^3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}$	$\frac{n!}{k! (n-k-1)!} \frac{2^k}{9^{k+1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-1}$...
2	...	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} \frac{4}{9^4} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$	$\frac{n!}{2! k! (n-k-2)!} \frac{2^k}{9^{k+2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-2}$...
...
l	...	$\frac{n!}{2! l! (n-l-2)!} \frac{4}{9^{l+2}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-l-2}$	$\frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \frac{2^k}{9^{k+l}} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}$...
...

(d) i, j が共に偶数であるとき、

さいころを n 回振って、 k 回だけ i が出る確率（すなわち $X_i = k$ ）は、

$${}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k} \quad (\text{反復試行の回数})$$

また、サイコロを n 回振って、 k 回だけ i が出て、

l 回だけ j が出る確率（すなわち $X_i = k, X_j = l$ の同時確率）は、

$$\frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l}$$

したがって、 i, j が共に偶数のときの表は以下のようになる。

表 4 i, j が共に偶数のときの確率分布

(横 : X_i)(縦 : X_j)	1	2	...
1	$\frac{n(n-1)}{2} 4 \frac{5^{n-2}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} 8 \frac{5^{n-3}}{9^n}$...
2	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} 8 \frac{5^{n-3}}{9^n}$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4} 16 \frac{5^{n-4}}{9^n}$...
...
l	$\frac{n!}{l! (n-l-1)!} 2^{l+1} \frac{5^{n-l-1}}{9^n}$	$\frac{n!}{2! l! (n-l-2)!} 2^{l+2} \frac{5^{n-l-2}}{9^n}$...

(横 : X_i)(縦 : X_j)	...	k	...
1	...	$\frac{n!}{k! (n-k-1)!} 2^{k+1} \frac{5^{n-k-1}}{9^n}$...
2	...	$\frac{n!}{2! k! (n-k-2)!} 2^{k+2} \frac{5^{n-k-2}}{9^n}$...
...
l	...	$\frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} 2^{k+l} \frac{5^{n-k-l}}{9^n}$...
...

問 2 問 1 の同時確率分布から X_i の周辺確率分布を求めよ.

X_i の確率分布は j の出る回数によらずに全ての場合での和を求めれば良い。
したがって、問 1 の結果より、 $i = k$ 回、すなわち $X_i = k$ の時の周辺確率分布は、

(a) i, j が共に奇数であるとき、

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=0}^n \frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l} \\
 &= \sum_{l=0}^n \frac{n!(n-k)!}{k! l! (n-k-l)!(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \sum_{l=0}^n \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l} \\
 &= {}_n C_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \sum_{l=0}^n {}_{n-k} C_l \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k-l} \\
 &= {}_n C_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9} + \frac{7}{9}\right)^{n-k} \\
 &= {}_n C_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k}
 \end{aligned}$$

(b) i が奇数, j が偶数であるとき、

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^n \frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= \sum_{l=0}^n \frac{n!(n-k)!}{k! l! (n-k-l)!(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{1}{9}\right)^k \sum_{l=0}^n \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \sum_{l=0}^n {}_{n-k}C_l \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9} + \frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(\frac{8}{9}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

(c) i が偶数 , j が奇数であるとき、

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^n \frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= \sum_{l=0}^n \frac{n!(n-k)!}{k! l! (n-k-l)!(n-k)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \sum_{l=0}^n \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \sum_{l=0}^n {}_{n-k}C_l \left(\frac{1}{9}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\right)^{n-k} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

(d) i, j が共に偶数であるとき、

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^n \frac{n!}{k! l! (n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= \sum_{l=0}^n \frac{n!(n-k)!}{k! l! (n-k-l)!(n-k)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{2}{9}\right)^k \sum_{l=0}^n \frac{(n-k)!}{l!(n-k-l)!} \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \sum_{l=0}^n {}_{n-k}C_l \left(\frac{2}{9}\right)^l \left(\frac{5}{9}\right)^{n-k-l} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{2}{9} + \frac{5}{9}\right)^{n-k} \\
&= {}_nC_k \left(\frac{2}{9}\right)^k \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

問 3 n が十分大きな値のとき、問 2 の周辺確率分布が収束する確率分布を求めよ。

n が十分大きな値をとる時、問 2 の周辺確率分布は正規分布に近似するため、正規分布の公式に当てはめる。

$\mu = \frac{n}{9}, \sigma^2 = np(1-p) = \frac{8}{81}n$ であるから、正規分布は

$$\begin{aligned}
f(l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{8}{81}n}} \exp\left\{-\frac{(x-\frac{n}{9})^2}{2\frac{8}{81}n}\right\} \\
&= \frac{9}{4\sqrt{n\pi}} \exp\left\{\frac{81}{16n}\left(x-\frac{n}{9}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

したがって、求める確率分布は

$$f(l) = \frac{9}{4\sqrt{n\pi}} \exp\left\{\frac{81}{16n}\left(x-\frac{n}{9}\right)^2\right\}$$

問 4 $n = 25920000$, $X_3 = 2877000$ であったとき、このサイコロが、偶数の目が奇数の目より 2 倍以上でやすいサイコロであるかどうかを、有意水準 5% で検定せよ。
 ただし、 $n = 25920000$ は十分大きな値であるとして見做し、問 3 の確率分布に収束しているとして見做してよい。
 さらに、奇数となるどの目が出る確率も等しく、偶数となるどの目が出る確率も等しいとする。

このサイコロが、普通のサイコロ (1~6 が等確率で出る) と仮定すると、 X_3 の確率分布は、 n が十分大きいならば、

$$P_{(x,n)} = \frac{6}{\sqrt{10n\pi}} \exp \left\{ -\frac{8}{15n} \left(x - \frac{n}{6} \right)^2 \right\} \text{ に収束する。}$$

$$\text{したがって、} n = 2,592,0000 \text{ より、} \frac{n}{6} = 4,320,000$$

$$P_{(x)} = \frac{1}{1200\sqrt{5\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{7.2 \times 10^6} (x - 4.32 \times 10^6)^2 \right\} \text{ となる。}$$

$$\text{また、} \sigma = 600\sqrt{10} = 1897.3\dots, \quad 2\sigma = 3794.7\dots$$

$$\frac{n}{6} - 2\sigma = 4,316,205.2\dots, \quad \frac{n}{6} + 2\sigma = 4,323,794.7\dots \text{ である。}$$

以上より、 $4,316,205 \leq X_3 \leq 4,323,795$ となる確率が 95.4% 以上なので、このサイコロは偶数の目が奇数の目より 2 倍以上でやすいサイコロである可能性が高い。