

夏休み毎日積分 10 日目 (解答)

2020 年 8 月 5 日

作成者: ryusuke.h

— day 10 —

次の定積分を求めよ。

今日も今日とて重積分の問題です。

飽きてきたと思うので、明日は変わった問題を出題してみます。

問 1 $\iint_D \sqrt{y} dx dy \quad D = \left\{ (x, y) \mid \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1 \quad (a > 0, b > 0) \right\}$

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \text{ のとき } x = a \left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2 \text{ から、}$$

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq a \left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2, 0 \leq y \leq b \right\} \text{ となるので、}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{y} dx dy &= \int_0^b \left(\int_0^a \left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}} \right) \sqrt{y} dx \right) dy = \int_0^b \sqrt{y} [x]_{x=0}^{x=a(1-\sqrt{\frac{y}{b}})^2} dy \\ &= a \int_0^b \sqrt{y} \left(1 - \sqrt{\frac{y}{b}} \right)^2 dy = a \int_0^b \left(\sqrt{y} - \frac{2y}{\sqrt{b}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{b} \right) dy \\ &= a \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{\sqrt{b}} \frac{y^2}{2} + \frac{1}{b} \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right]_0^b \\ &= \frac{1}{15} ab^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

問 2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dy$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dy &= [-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \\ &= \left\{ -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right\} - (-\cos(x)) \end{aligned}$$

ここで、 $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ を用いると、

$$\left\{ -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right\} - (-\cos(x)) = \sin x + \cos x$$

となるので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dy = [-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} = (0+1) - (-1+0) = 2$$

～補足～

解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。