

春休み毎日微分方程式 Day 9 (解答)

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 B2 日置竜輔

2021 年 2 月 19 日

問 1

以下の連立微分方程式を解け。

I.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 8x + 2y \\ \frac{dx}{dt} = -6x + y \end{cases}$$

解答

この問題は行列を用いると、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。この A について、固有値を求めると、

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 8 - \lambda & 2 \\ -6 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 8) + 12 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 20 \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 5) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、

$$\lambda = 4, 5$$

となる。次に、対応する固有値ごとに固有ベクトルを求める。

(i) $\lambda = 4$ の時、

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。この時、

$$\begin{aligned} (A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x + y &= 0 \end{aligned}$$

が得られ、この方程式の解は任意定数 k を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、固有値ベクトル \vec{p}_1 は、

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (0.0.1)$$

となる。

同様に、固有値ベクトルをもう1つ求める。

(ii) $\lambda = 5$ の時、

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。この時、

$$\begin{aligned} (A - 5I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

が得られ、この方程式の解は任意定数 k を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、固有値ベクトル \vec{p}_2 は、

$$\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (0.0.2)$$

となる。

したがって、(0.0.1),(0.0.2) より、行列 P を

$$P = (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

とすることができ、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D \quad (0.0.3)$$

と対角化することができる。

次に $P^{-1}AP$ つまり、 $A = PDP^{-1}$ より、

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = PDP^{-1}\vec{x}$$

と変形できる。さらに、 P^{-1} を左辺に掛けることにより、

$$P^{-1}\frac{d\vec{x}}{dt} = P^{-1}PDP^{-1}\vec{x}$$

となる。ここで、 P^{-1} は定数なので、

$$\frac{d}{dt}P^{-1}\vec{x} = DP^{-1}\vec{x}$$

と変形でき、さらに $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$ とおくことで、

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = D\vec{y}$$

同様に、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{x} &= D\vec{x} \\ \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と変形できる。

したがって、任意定数 C_1, C_2 を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= k_1 X \Rightarrow X = C_1 e^{4t} \\ \frac{dY}{dt} &= k_2 Y \Rightarrow Y = C_2 e^{5t}\end{aligned}$$

と変形できる。(変数分離系を用いて式変形をする。)

また、 $\vec{y} = P^{-1}\vec{x}$ つまり、 $\vec{x} = P\vec{y}$ なので、

$$\begin{aligned}\vec{x} &= P\vec{y} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{4t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{5t} \\ -2C_1 e^{4t} - 3C_2 e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、求める一般解は

$$\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{5t} \\ y = -2C_1 e^{4t} - 3C_2 e^{5t} \end{cases}$$