

夏休み毎日積分 Day5 (問題)

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 B2 日置竜輔

2020 年 8 月 5 日

— day 5 —

次の定積分を求めよ。

※本日は難問なので 1 問のみの出題です。

問 1 $\int_0^1 \log(x^2 + 1) dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x^2 + 1) dx &= \int_0^1 (x)' \log(x^2 + 1) dx \\ &= [x \log(x^2 + 1)]_0^1 - \int_0^1 x \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ &= \log 2 - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= \log 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx\end{aligned}$$

ここで、 $x = \tan \theta$ とおくと、

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

であり、

$$x = 0 \rightarrow 1, \quad \theta = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

より、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\log 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx &= \log 2 - 2([x]_0^1 - \frac{\pi}{4}) \\ &= \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

～補足～

$(x)'$ を補って、部分積分を行うという手法です

単独の \log は部分積分を行うのが常套手段です。

解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。