春休み毎日微分方程式 Day 9（解答）

ryusuke_h*

2021 年 3 月 17 日

問 1

以下の連立微分方程式を解け。

I.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 8x + 2y \\ \dfrac{dx}{dt} = -6x + y \end{cases}$$

解答

この問題は行列を用いると、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

* Future University Hakodate B2

となる。この A について、固有値を求めると、

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 2 \\ -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-8)+12 \\
&= \lambda^2-9\lambda+20 \\
&= (\lambda-4)(\lambda-5) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるので、

$$\lambda = 4, 5$$

となる。次に、対応する固有値ごとに固有ベクトルを求める。

(i) $\lambda = 4$ **の時、**

$$A-4I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。この時、

$$
\begin{aligned}
(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\
\Leftrightarrow 2x+y &= 0
\end{aligned}
$$

が得られ、この方程式の解は任意定数 k を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、固有値ベクトル $\overrightarrow{p_1}$ は、

$$\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \tag{0.0.1}$$

となる。

　同様に、固有値ベクトルをもう１つ求める。

(ii) $\lambda = 5$ **の時、**

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。この時、

$$\begin{aligned} (A-5I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

が得られ、この方程式の解は任意定数 k を用いて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

と表すことができるので、固有値ベクトル $\overrightarrow{p_2}$ は、

$$\overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{0.0.2}$$

となる。

したがって、(0.0.1),(0.0.2) より、行列 P を

$$P = (\overrightarrow{p_1} \quad \overrightarrow{p_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

とすることができ、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = D \tag{0.0.3}$$

と対角化することができる。

次に $P^{-1}AP$ つまり、 $A = PDP^{-1}$ より、

$$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = PDP^{-1}\overrightarrow{x}$$

と変形できる。さらに、P^{-1} を左辺に掛けることにより、

$$P^{-1}\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = P^{-1}PDP^{-1}\overrightarrow{x}$$

となる。ここで、P^{-1} は定数なので、

$$\frac{d}{dt}P^{-1}\overrightarrow{x} = DP^{-1}\overrightarrow{x}$$

と変形でき、さらに $\overrightarrow{y} = P^{-1}\overrightarrow{x}$ とおくことで、

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{y} = D\overrightarrow{y}$$

同様に、

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{x} = D\overrightarrow{x}$$
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

と変形できる。

したがって、任意定数 C_1, C_2 を用いて、

$$\frac{dX}{dt} = k_1 X \Rightarrow X = C_1 e^{4t}$$
$$\frac{dY}{dt} = k_2 X \Rightarrow Y = C_2 e^{5t}$$

と変形できる。**(変数分離系を用いて式変形をする。)**

また、$\overrightarrow{y} = P^{-1}\overrightarrow{x}$ つまり、$\overrightarrow{x} = P\overrightarrow{y}$ なので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= P\overrightarrow{y} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 e^{4t} \\ C_2 e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{5t} \\ -2C_1 e^{4t} - 3C_2 e^{5t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるので、求める一般解は

$$\begin{cases} x = C_1 e^{4t} + 2C_2 e^{5t} \\ y = -2C_1 e^{4t} - 3C_2 e^{5t} \end{cases}$$