

夏休み毎日積分 3 日目 (解答)

2020 年 8 月 6 日

作成者: ryusuke.h

— day 3 —

次の積分を求めよ。

※今日から少しずつレベル上げていきます～

問 1 $\int \frac{3x^3 + 12x + 1}{x^2 + 4} dx$

とりあえず分子の次数を下げてみましょう。

$$\frac{3x^3 + 12x + 1}{x^2 + 4} = \frac{3x(x^2 + 4)}{x^2 + 4} + \frac{1}{x^2 + 4} = 3x + \frac{1}{x^2 + 4} \text{ となるので、}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 + 12x + 1}{x^2 + 4} dx &= \int 3x + \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \int 3x dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx \text{ について、} x = 2 \tan \frac{\theta}{2} \text{ と置くと、}$$

$$\frac{x}{2} = \tan \frac{\theta}{2}, \quad dx = \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \text{ であるから、}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \int \frac{1}{4} \frac{1}{\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta \\ &= \int \frac{1}{4} d\theta \\ &= \frac{1}{4} \theta\end{aligned}$$

$$\frac{\theta}{2} = \arctan \frac{x}{2} \text{ より、} \frac{1}{4} \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2}$$

したがって、

$$(\text{与式}) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数とする})$$

問 2 $\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{8x+3} dx$

$\int \frac{1}{f(x)} dx = \log f(x) \frac{1}{f'(x)} + C$ であることを考えると、

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{1}{8x+3} dx &= \frac{1}{8} [\log(8x+3)]_{\frac{1}{2}}^4 \\ &= \frac{1}{8} \{ \log(32+3) - \log(4+3) \} \\ &= \frac{1}{8} (\log 35 - \log 7) \\ &= \frac{1}{8} \log 5\end{aligned}$$

～補足～

次数下げの問題です。

分子の方が大きい時はこのような工夫をするようにしましょう。

解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。