春休み毎日微分方程式 Day 12（解答）

公立はこだて未来大学　システム情報科学部　B2　日置竜輔

2021 年 3 月 24 日

問 1

以下の微分方程式を解け。

I.

$$(3y^2 - 2xy) + (x^2 - 2xy)y' = 0$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-3^2 + 2xy}{x^2 - 2xy} \\ &= \frac{-3\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)} \end{aligned}$$

$z = \dfrac{y}{x}$ と変数変換を行うと、 $y' = z + xz'$ となるのでもとの微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} z + xz' &= \frac{-3z^2 + 2z}{1 - 2z} \\ xz' &= \frac{-3z^2 + 2z}{1 - 2z} - z \\ &= \frac{z - z^2}{1 - 2z} \end{aligned}$$

さらにここから変数分離を行うと、以下のように式変形できる。

$$\begin{aligned}
\frac{1-2z}{z-z^2}dz &= \frac{dx}{x} \\
\int \frac{1-2z}{z-z^2} &= \int \frac{dx}{x} \\
\log|z-z^2| &= log|x| + C' \\
\log\left|\frac{z-z^2}{x}\right| &= C' \\
\frac{z-z^2}{x} &= \pm e^{C'} \\
z-z^2 &= Cx
\end{aligned}$$

z の式を y に直すと、

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} &= Cx \\
xy - y^2 &= Cx^3
\end{aligned}$$

$$y^2 - xy + Cx^3 = 0$$

今回はまた変数分離系と同次系の問題を出題しました。なかなか式変形などが大変だと思うので頑張って慣れましょう！