

夏休み毎日積分 Day6 (問題)

公立はこだて未来大学 システム情報科学部 B2 日置竜輔

2020 年 8 月 6 日

— day 6 —

次の定積分を求めよ。

※今日から本格的に難しくなります。

解けたら十分自信を持ていいと思います。

問 1 $\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx$

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

と分けて考える。

前半について、 $t = x^2 + 4$ とおくと、 $dt = 2x dx$ であり、 x は $0 \rightarrow 2$ のとき、 t は $4 \rightarrow 8$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int_4^8 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \left[2\sqrt{t} \right]_4^8 \\ &= 4\sqrt{2} - 4 \end{aligned}$$

となる。

後半について、

$x = \tan \theta$ と置くと、 $d\theta = \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta$ であり、 x は $0 \rightarrow 2$ のとき、 $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\tan^2 \theta + 1}} \frac{2}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

さらにここで、 $t = \sin \theta$ と置くと、 $dt = \cos \theta d\theta$ であり、 θ は $0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ のとき、 t は $0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} \log (\sqrt{2}+1)^2 \\ &= \log (\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

問2 $\int_0^2 |x^2 - a^2| dx$ を a を用いて表せ。

$x = a$ が積分区間 $0 \leq x \leq 2$ に含まれているか否かで場合分けをする。

(a) $0 \leq a \leq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^a \{-(x^2 - a^2)\} dx + \int_a^2 (x^2 - a^2) dx \\&= \left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x \right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3} - a^2 x \right]_a^2 \\&= \frac{2}{3} a^3 + \left(\frac{8}{3} - 2a^2 + \frac{2}{3} a^3 \right) \\&= \frac{4}{3} a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3}\end{aligned}$$

(b) $a \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int_0^2 \{-(x^2 - a^2)\} dx \\&= \left[-\frac{x^3}{3} + a^2 x \right]_0^2 \\&= 2a^2 - \frac{8}{3}\end{aligned}$$

したがって、(a), (b) より

$$\begin{cases} \frac{4}{3} a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3} & (0 \leq a \leq 2 \text{ のとき}) \\ 2a^2 - \frac{8}{3} & (a \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

～補足～

問1 は難問でしたが、問2 は単純な絶対値の場合分けの問題です。

中身の正負で場合分けをすれば終わりですね。

解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。