夏休み毎日積分 5 日目 (解答)

2020 年 8 月 7 日

作成者:ryusuke.h

day 5

次の定積分を求めよ。
※本日は難問なので１問のみの出題です。頑張ってください。

問 1　$\displaystyle\int_0^1 \log(x^2+1)dx$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(x^2+1)dx &= \int_0^1 (x)' \log(x^2+1)dx \\ &= [x\log(x^2+1)]_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{x^2+1}dx \\ &= \log 2 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx \\ &= \log 2 - 2\int_0^1 (1-\frac{1}{x^2+1})dx\end{aligned}$$

ここで、$x=\tan\theta$ とおくと、$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であり、$x=0\to 1$　,　$\theta=0\to\dfrac{\pi}{4}$ より、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\log 2 - 2\int_0^1 (1 - \frac{1}{x^2+1})dx &= \log 2 - 2([x]_0^1 - \frac{\pi}{4}) \\ &= \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

〜補足〜

(x)' を補って、部分積分を行うという手法です

単独の log は部分積分を行うのが常套手段です。

解説でわからなければ自分で調べるか、個別に聞いてください。