春休み毎日微分方程式 Day 7（解答）

ryusuke_h*

2021 年 3 月 13 日

問 1

次の微分方程式を計算せよ。

I. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

これは **変数分離系**の形であるから、

$$\frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = 1$$

両辺を積分すると、

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \int dx$$
$$\arctan y = x + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

* Future University Hakodate B2

II. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+y^2+1=0, \qquad y(0)=1$

I と同様に変数分離を行うと、

$$\frac{1}{y^2+1}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2+1}dx$$

両辺を積分すると、

$$\begin{aligned}\arctan y &= -\arctan x + C \qquad (C\text{ は積分定数})\\ \arctan y &+ \arctan x = C\end{aligned}$$

となるので、両辺に tan をとると、

$$\tan(\arctan y+\arctan x)=\tan C \tag{0.0.1}$$

tan の加法定理

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$$

であるから、(0.0.1) 式に当てはめると、

$$\tan(\arctan y+\arctan x)=\frac{y+x}{1-xy} \tag{0.0.2}$$

三角関数の逆関数との関係

$$\sin(\arcsin x)=x$$

$$\cos(\arccos x)=x$$

$$\tan(\arctan x)=x$$

したがって、(0.0.1),(0.0.2) 式より、

$$\frac{x+y}{1-xy} = \tan C$$

とが得られる。

あとは、初期値条件に $y(0)=1$ を代入すると、

$$\tan C = 1$$

が得られるので、求める特殊解は、

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$