

問3 n が十分大きな値のとき、問2の周辺確率分布が収束する確率分布を求めよ。

n が十分大きな値をとる時、問2の周辺確率分布は正規分布に近似するため、正規分布の公式に当てはめる。

$\mu = \frac{n}{9}$, $\sigma^2 = \mu(1 - \mu) = \frac{8}{81}n$ であるから、正規分布は

$$\begin{aligned} f(l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{8}{81}n}} \exp \left\{ -\frac{(x - \frac{n}{9})^2}{2 \frac{8}{81}n} \right\} \\ &= \frac{9}{4\sqrt{n\pi}} \exp \left\{ \frac{81}{16n} \left(x - \frac{n}{9} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

したがって、求める確率分布は

$$f(l) = \frac{9}{4\sqrt{n\pi}} \exp \left\{ \frac{81}{16n} \left(x - \frac{n}{9} \right)^2 \right\}$$