

## 春休み毎日微分方程式 Day 8 (解答)

ryusuke\_h\*

2021 年 3 月 15 日

### 問 1

ニュートンの冷却の法則に基づいて、以下の問いに答えよ。

(必要ならば関数電卓を用いてもよい。)

I. ニュートンの冷却の法則によると、

温度  $T_0$  の物質で囲まれた物質の温度  $T(t)$  の変化率は温度差  $T(t) - T_0$  に比例し、

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0) \quad (k > 0)$$

が成り立つ。

この時、100 度の銅球を 20 度の液体に入れた。

ただし、液体の質量の温度は銅球の質量に比べて、十分に大きいものとする。

3 分後に銅球の温度は 80 度になった。この時、銅球が 21 度になるのは何分後か。

---

\* Future University Hakodate B2

## 解答

変数分離系の形なので、式変形を行うと、

$$\frac{1}{T - T_0} dT = -k dt$$

が得られ、初期条件である媒体の温度を代入し、両辺を積分すると、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{T - 20} dT &= \int -k dt \\ \ln |T - 20| &= -kt + C \quad (C \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

と積分できて、さらに式変形を行うと、

$$\begin{aligned} \ln |T - 20| &= -kt + C \\ \ln T - 20 &= \pm(C - kt) \\ T - 20 &= \pm e^{C - kt} \\ T(t) &= 20 + C' e^{-kt} \quad (C' \text{ は任意定数}) \end{aligned}$$

$t = 0$  において、銅球の温度は 100 度のままであるからこれらを代入すると、

$$100 = 20 + C'$$

$$C' = 80$$

そして、 $t = 3$  において、

$$\begin{aligned} 80 &= 20 + 80e^{-3k} \\ e^{-3k} &= \frac{60}{80} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

求める時刻での銅球の温度は 21 度であるから、 $T(t) = 21$  の時、

$$21 = 20 + 80e^{-kt}$$

$$1 = 80 \left( e^{-3k} \right)^{\frac{t}{3}}$$

$$1 = 80 \left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{t}{3}}$$

$$\frac{1}{80} = \left( \frac{3}{4} \right)^{\frac{t}{3}}$$

が得られるので、両辺に対数を取ると、

$$\frac{t}{3} \ln \left( \frac{3}{4} \right) = \ln \left( \frac{1}{80} \right)$$

したがって、

$$t = 3 \frac{\ln \frac{1}{80}}{\ln \frac{3}{4}} = 3 \times \frac{-4.3820}{-0.2877} = 45.6966 [min]$$

このようにして解が得られた。