37–4　一次元モデル方程式

37–4–1　Burgers 方程式

オランダの物理学者 J. Burgers (1895–1981) は乱流現象の理解のため **Burgers 方程式**として知られるシンプルな一次元偏微分方程式を提唱した．

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

未知関数は $u(t,x)$ であり，ν は動摩擦係数に対応するパラメータを表す．この方程式は Navier–Stokes 方程式において圧力項を無視して，その他の項を一次元に帰着させたものである．一次元のモデル方程式では一般に非圧縮条件を満たせないという欠点はあるが，その可解性のため様々な解析に有用である．厳密解の導出のため，**Forsyth–Florin–Hopf–Cole 変換 (FFHC 変換)** を以下で定義する．

$$u=-2\nu\left(\log\psi\right)_x=-2\nu\frac{\psi_x}{\psi}.$$

FFHC 変換の定義から，それぞれを x と t で偏微分して Burgers 方程式に代入する．

$$-2\nu\left(\frac{\psi_t}{\psi}\right)_x=u_t=\left(\nu u_x-\frac{u^2}{2}\right)_x=\left(-2\nu^2\frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)_x.$$

これを x について積分すれば，ある時間依存する関数 $C(t)$ が存在して次を得る．

$$\psi_t=\nu\psi_{xx}+C(t)\psi.$$

さらに，変数変換

$$\psi\mapsto\psi\exp\left(-\int^t C(s)ds\right).$$

により，熱方程式 $\psi_t=\nu\psi_{xx}$ に帰着される．

あとは適当な境界条件と初期条件に対して，この熱方程式を解けば解の表示が得られる．まず，無限区間 $x\in(-\infty,\infty)$ を考え，無限遠方で減衰する初期値 $\psi(0,x)=f(x)$ に対する解は，熱作用素の基本解（熱核）$K(x)$ を使って以下で与えられる．

$$K(x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\nu t}\right),\qquad \psi(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)dy.$$

したがって，Burgers 方程式の解は FFCH 変換により形式的に次で与えられる．

$$u(t,x)=-2\nu\frac{\partial_x\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)f(y)dy}.$$

次に，境界条件 $\psi(t,0)=\psi(t,2\pi)=0$ および初期条件 $\psi(0,x)=f(x)$ の熱方程式の解は形式的には次のように書ける．

$$\psi(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\mathrm{e}^{-\nu n^2 t}\sin nx,\qquad A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx.$$

ここで，A_n は $f(x)$ の三角級数展開の係数である．数学的にはこの展開が意味を持つ初期関数，例えば L^2 などの関数空間で収束する関数に対して解は定義できる．

Burgers 方程式の解は熱方程式の解から構成されるため，粘性係数 $\nu > 0$ が少しでもあれば，十分長い時間でゼロに減衰する．一方で，粘性係数が十分小さいときに，時間発展の初期において解は衝撃波のような切り立った構造に遷移してから減衰することも，その数値計算などから知られている．したがって，この方程式においては，$\nu \to 0$ での挙動がどのようになるかについても興味がある．すなわち，$\nu = 0$ の場合は，初期値が滑らかでも有限時間でその滑らかさを失い，不連続性（特異点）が形成されることが予測されるかからである．このとき，非粘性 Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

の解も一般に書き下すことができる．次の常微分方程式を考える．

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = u(t, x(t)), \qquad x(0) = a.$$

この $x(t)$ を**特性曲線**と呼ぶ．このとき，$x(t) = a + tu(t, x(t))$ はこの方程式の解を与えている．実際 $x(0) = a$ かつ $\dot{x} = u(t, x(t)) + t(u_t + u_x\dot{x}) = u(t, x(t)) + t(u_t + uu_x) = u(t, x(t))$ となる．また，この軌道に沿って $u(t, x(t))$ は保存される．

$$\frac{d}{dt}u(t, x) = u_t + u_x\frac{dx}{dt} = u_t + uu_x = 0.$$

すなわち， $u_0(a) = u(0, x(0)) = u(t, x(t))$．よって，次の解の陰関数表示を得る．

$$u(t, x) = u_0(x - tu(t, x)).$$

いま例えば初期関数を $u_0(x) = \sin x$ とおくと，$x \in (0, \pi)$ で $u > 0$, $x \in (\pi, 2\pi)$ で $u < 0$ であるため $a \in (0, \pi)$ から出発した軌道は右側に進み，$a \in (\pi, 2\pi)$ の軌道は左側に進み，その結果，有限の時間で $x = \pi$ でぶつかり特異点（一意性の破れ）を形成する．

この特異性の解析ため初期値 $u_0(x) = -\sin x$ に対する解の挙動を考える．このとき，$0 < t < 1$ フーリエ級数表示を得ることができる[2)]．

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nt)}{nt} \sin nx.$$

ただし，$J_n(x)$ はベッセル関数である．$t \to 1$ のとき $J_n(n)/n \sim n^{-4/3}$ なので，一階微分が発散する解に漸近し，そのエネルギースペクトルは $E(k) \sim k^{-8/3}$ となる．なお，少しでも粘性係数があると，衝撃波に起因するエネルギースペクトルは $E(k) \sim k^{-2}$ である．

なお，Burgers 方程式において以下の fractional な粘性項をつけたとき，$\alpha \geqq 1/2$ で時間大域解が存在することが知られている．

$$\partial_t u + u\partial_x u = -\nu\left(-\partial_{xx}\right)^{\alpha} u.$$

また，Burgers 方程式は，ランダムに形成される衝撃波の作る Burgers 乱流として知られる乱流モデルとして用いられる[9)7)19)]．

37–4–2　Constantin–Lax–Majda 方程式

三次元非粘性非圧縮流体の渦度場 $\boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{x})$ と速度場 $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})$ は以下の渦度方程式を満たす．

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\cdot\nabla\boldsymbol{v} \equiv \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},0)=\boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{x}).$$

右辺は渦の引き延ばし（Vortex stretching）効果を表現する二次の非線形項である．与えられた渦度場 $\boldsymbol{\omega}$ に対して，速度場 $\boldsymbol{v}$ は Biot–Savart の公式から構成されるので，右辺は Biot–Savart 積分の微分として定義される特異積分作用素 $\mathcal{D}(\boldsymbol{\omega})$ により渦度場に関する閉じた方程式となる．この非線形項は二次元の渦度方程式ではゼロになり，これを用いて時間大域解の存在を示すことができる．一方，三次元の場合，この項の存在のために時間大域解の存在を示すことが困難となっているため，この項が解の存在に果たす役割は重要と考えられる．

これに対して，数学者の P. Constantin, P. D. Lax, A. Majda[3]は三次元非粘性渦度方程式の解の存在における渦引き延ばし項の影響を調べるため，スカラー関数 $\omega(t,x)$ に対する以下の Constantin–Lax–Majda (CLM) 方程式を提唱した．

$$\partial_t\omega = H[\omega]\omega, \qquad \omega(x,0)=\omega_0(x).$$

ここで $H[\omega]$ は ω の Hilbert 変換と呼ばれる特異積分作用素である．

$$H[\omega](x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{pv}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega(y)}{x-y}dy.$$

なお，$\mathrm{pv}\int$ は Cauchy の主値積分を表し，三次元における Biot–Savart 積分から導かれる特異積分作用素 $\mathcal{D}$ の一次元のアナロジーである．CLM 方程式は，無限遠方で十分な速さで減衰する初期関数，例えば $\omega_0 \in H^1(\mathbf{R})$ に対して以下の厳密解を持つ．

$$\omega(t,x) = \frac{4\omega_0(x)}{(2-tH[\omega_0](x))^2 + t^2\omega_0^2(x)}.$$

この公式から，もし初期関数が $\omega_0(x_0)=0$ かつ $H[\omega_0](x_0)>0$ なる点 x_0 をもてば有限時間 $T^* = 2/\max H[\omega_0](x_0)$ で $1/(x-x_0)$ の特異性を持つ．これは，渦引き延ばしの効果により三次元渦度方程式の解が時間大域的に存在しえないことを示唆する結果である．また，この解は $1 \leqq p < \infty$ に対して，$v \in L^p(\mathbf{R})$ であることも示されている．

三次元非圧縮 Navier–Stokes 方程式への自然な対応として Schochet[16]は以下の方程式を考えた．

$$\partial_t\omega = H[\omega]\omega + \nu\partial_{xx}\omega, \qquad \omega(0,x)=\omega_0(x).$$

この方程式は，上半平面上で正則かつ無限遠点で減衰する関数 $Q=\omega+\mathrm{i}H[\omega]$ に対する偏微分方程式

$$Q_t = -\frac{1}{2}\mathrm{i}Q^2 + \nu Q_{xx}$$

を実軸上に制限したものである．下半平面上の点 z_0 に対して，関数

$$Q(t,x) = -\frac{12\nu\mathrm{i}}{(z-z_0)^2}$$

は，この方程式を満たすので，これを使って実軸への極限をとって有理関数型の厳密解

を構成できる．この解は有限時間で発散する解であるだけでなく，爆発時刻 T^* に対して $\lim_{t\to T^*}\|v\|_{L^p}=\infty$ となり非粘性の場合は有界にとどまる量が爆発すること，非粘性の CLM 方程式と同じ初期値に対しては粘性項をつけた解の方が早く爆発する．そのため，粘性項の解の平滑化効果に反するモデルとなっている．

この CLM 方程式における非線形項と粘性項の関係をさらに詳しく調べるため以下の一般化方程式を周期境界条件で考える[17)]．

$$\partial_t\omega = H[\omega]\omega - \nu(-\partial_{xx})^\alpha\omega, \qquad \omega(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx.$$

特に $\omega_0(x)=A_1\sin x$，$A_1>0$ に対する厳密解がいくつか知られている．$\nu=0$ のとき，

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_1\left(\frac{A_1}{2}t\right)^{n-1}\sin nx$$

であり，これは Constantin–Lax–Majda が与えた厳密解と一致する．$\alpha=1/2$ のときは

$$\omega(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_1}{2}\left(\frac{A_1}{2}t\right)^{n-1}\exp(-n\nu t)\sin nx$$

で与えられる．この公式と初期値と微分階数 α に対する比較定理を用いて，$\alpha \geqq 1/2$ に対して，十分小さい粘性係数 ν に対して有限時間で解の L^2 ノルムが発散することを示している．すなわち，CLM 方程式における非線形項はどれだけ強い粘性項をつけても解の爆発が抑えられない．なお，十分大きな粘性係数に対しては，時間大域解が存在することも示されている[18)]．

37–4–3　その他の方程式

CLM 方程式は三次元渦度方程式のモデルとしては成功していないが，この一般化方程式はさまざまな物理現象の数理モデルとして用いられる．CLM 方程式では渦度方程式に現れるもう一つの非線形項である移流項が無視されているが，これは移流項が解の正則性に与える影響は少ないと考えられているためである．これに対して，解の正則性に対する移流項と渦引き延ばし項のバランスを調べるため $a\in\mathbf{R}$ なるパラメータを持つ以下の generalized Constantin–Lax–Majda–DeGregorio (gCLMDG) 方程式を導入する[11)]．

$$\partial_t\omega + av\omega_x - H[\omega]\omega = 0, \quad v_x = H[\omega], \quad \omega(x,0)=\omega_0(x).$$

$a=0$ のときは CLM 方程式[3)], $a=1$ のときは CLM 方程式に移流項を導入した DeGregorio 方程式[6)]である．さらに，$a=-1$ のときは 2 次元準地衡方程式や表面張力つきの渦層の一次元モデル方程式[4)5)]，$a=-1/2$ のときはある Lie 群の上の分数階 Sobolev 計量の測地流方程式[20)]，$a=\infty$ に対しては二次元渦度方程式のモデル方程式[11)]となっており，多くの 1 次元モデル方程式を包含している．この方程式は十分小さな初期値に対して時間局所解を持つが，$a=1$ のときは解が時間大域的に存在することが数値的に確かめられている[11)]．また，a が負の時はいくつかの場合で有限時間で爆発することが知られている[4)20)]．

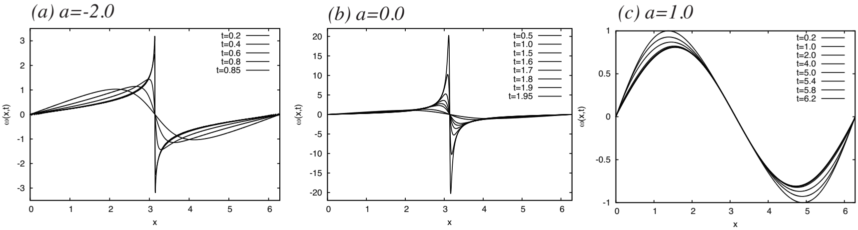

図 37-1　gCLMDG 方程式の解の時間発展の例．(a) $a = -2.0$，$\omega_0(x) = \sin x$; (b) $a = 0.0$，$\omega_0(x) = \sin x$; (c) $a = 1.0$，$\omega_0(x) = \sin x + 0.1 \sin 2x$.

なお，$a = 0$ では CML 方程式の解が爆発することから，ある $a_c \in (0, 1)$ が存在してそれより大きい時は時間大域解が存在し，小さいときは解が爆発すると予測されている[12)]．また，$a \leqq -1$ の時は解の L^{-a} ノルム $\|\omega\|_{L^{-a}}$ が保存することも知られており，$a = -2$ ではエンストロフィーに対応する量が保存される．なお，この保存量の存在を軸にして，gCLMDG 方程式に粘性項 $\nu\partial_{xx}\omega$ とランダム外力 f を付け加えると，$a = -2$ でこの保存量がカスケードするエネルギースペクトルを持つ乱流モデルとなる．このモデルを用いて乱流現象と特徴付ける粘性ゼロ極限における非粘性保存量の特異散逸と保存量カスケード，非粘性方程式の有限時間爆発解との関係などが明らかになっている[10)]．

また，他の一次元偏微分方程式として Proudmann–Johnson 方程式とその一般化[14)]がある．これは $a \in \mathbf{R}$ をパラメータ，$\nu \geqq 0$ を粘性係数とするとき，一次元関数 $f(t, x)$ に対して以下のように与えられる．

$$f_{txx} + f f_{xxx} - a f_x f_{xx} = \nu f_{xxxx}, \qquad f(0, x) = f_0(x).$$

この一般化方程式は $a = 1$ の場合は二次元非圧縮 Navier–Stokes 方程式の流れに対して $u = f(x, y)$, $v = -y f_x(x, y)$ と仮定して得られる Proudman–Johnson (PJ) 方程式[15)]として知られている．Burgers 方程式や CLM 方程式と違い，この PJ 方程式の解は Navier–Stokes 方程式の厳密解を与えていることは重要な事実である．また，パラメータ a の導入により，この方程式も多くの一次元モデル方程式を包含する．$a = -3$ は Burgers 方程式を二回空間について微分した方程式，$a = -2$, $\nu = 0$ の場合はネマチック液晶の運動を記述する Hunter–Saxton 方程式[8)]，$a = -(m-3)/(m-1)$, $m \geqq 2$ は $\mathbf{R}^m$ 上の軸対称 Navier–Stokes 方程式の自己相似解の運動[14)]を表している．非粘性 $\nu = 0$ の場合については，任意の a に対して局所時間解の存在することが示されている[13)]．さらに，$a \in (-\infty, -1)$ に対しては適当な関数空間で有限時間で爆発する一方で，$a \in [-1, 1)$ では時間大域解が存在することが示されている．

文　　献

1) J. M. Burgers. 1974 *The nonlinear diffusion equation: asymptotic solutions and statistical problems*, Springer, Dordrecht.
2) J. P. Boyd. 1992 *The energy spectrum of fronts: time evolution of shocks in Burgers' equation*, J. Atmos. Phys., **49**(2) 128–139..
3) P. Constantin, P. D. Lax, A. Majda. 1985 *A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation*, Comm. Pure Appl. Math., **38** 715–724.
4) A. Córdoba, D. Córdoba and M. A. Fontelos. 2005 *Formation of singularities for a transport equation with nonlocal velocity*, Ann. of Math., **2** 1377–1389.
5) A. Córdoba, D. Córdoba and M. A. Fontelos. 2006 *Integral inequalities for the Hilbert transform applied to a nonlocal transport equation*, J. Math. Pures Appl. **6** 529–540.
6) S. De Gregorio. 1990 *On a one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation*, J. Stat. Phys., **59** 1251–1263.
7) J. D. Fournier and U. Frisch. 1983 *The deterministic and statistical Burgers equation*, J. Mecanique Theo. Appl., **2** 699-750 (in French).
8) J. K. Hunter and R. Saxton. 1991 *Dynamics of director fields*, SIAM J. Appl. Math., **51**(6) 1498–1521.
9) S. Kida. 1979 *Asymptotic properties of Burgers turbulence. Journal of Fluid mechanics*, **93**(2) 337–377.
10) T. Matsumoto and T. Sakajo. 2016 *One-dimensional hydrodynamic model generating turbulent cascade*, Phys. Rev. E, **93** 053101 (doi: 10.1103/PhysRevE.93.053101).
11) H. Okamoto, T. Sakajo and M. Wunsch. 2008 *On a generalization of the Constantin-Lax-Majda equation*, Nonlinearity, **21** 2447–2461.
12) H. Okamoto, T. Sakajo and M. Wunsch. 2014 *Steady-states and traveling-wave solutions of the generalized Constantin-Lax-Majda equation*, Disc. Cont. Dyn. Sys. Ser. A, **34** 3155–3170.
13) H. Okamoto. 2009 *Well-posedness of the generalized Proudman-Johnson equation without viscosity*, J. Math. Fluid Mech., **11** 46–59.
14) H. Okamoto and J. Zhu. 2000 *Some similarity of the Navier-Stokes equations and related topics*, Proc. 1999 Int. conf. nonlinear analysis, Taiwan J. Math., **4**(1) 65–103.
15) I. Proudman and K. Johnson. 1962 *Boundary-layer growth near a rear stagnation point*, J. Fluid Mech., **12** 161–168.
16) S. Schochet. 1986 *Explicit solutions of the viscous model vorticity equation*, Comm. Pure Appl. Math., **39** 531–537.
17) T. Sakajo. 2003 *Blow-up solutions of the Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **10** 187–203.
18) T. Sakajo. 2003 *On global solutions for the Constantin-Lax-Majda equation with a generalized viscosity term*, Nonlinearity, **16** 1319–1328.
19) T. Tatsumi and S. Kida. 1972 *Statistical mechanics of the Burgers model of turbulence*, J. Fluid Mech., **55**(4) 659–675.
20) M. Wunsch. 2010 *On the geodesic flow on the group of diffeomorphism on the circle with a fractional Sobolev right-invariant metric*, J. Nonl. Math. Phys., **17** 7–11.