37　数学的補足と公式

37–1　流体力学と変分公式

37–1–1　Euler 方程式の変分原理的定式化

A.　Arnold-Ebin-Marsden の理論

古典力学の運動方程式が、Hamilton 力学系として書き表せる時、その理解に幾何学的考察を加えることが可能になり、問題の解析・解釈にしばしば新たな知見を与えることが知られている。力学を幾何学的に解釈しようとする試みは、Hertz によっても試みられていた。彼は、ポテンシャル力は、我々の物理学上の無知に由来するものと嫌悪し、それを対象が内在する空間の幾何学的性質に転換することで、表面から消し去ろうとした。このような見方を、流体力学にも拡張しようとする試みは Boltzmann 指導下の、Ehrenfest の学位論文となった研究[1)2)] に端緒が見られる。

この立場を、確固たる数学として定式化したのが　3) や 4) の研究である。5), 6), 7), 8) も参照。そこでは、ハミルトニアンは流体の全運動エネルギーで与えられ、付随する汎関数

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \inf_{\boldsymbol{a}} \int_0^1 \sqrt{\int_{\mathbb{T}^3} \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)}{\partial t} \right|^2 d\boldsymbol{a}dt} \tag{37.1}$$

は、Arnold 距離と呼ばれる。ここで、$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)$ は flow map で、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},0)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},1)$ とした。また、$\frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t)}{\partial t} = \frac{D\boldsymbol{x}}{Dt} = \dot{\boldsymbol{x}}$ である。

上記の研究をきちんと理解するには、相当程度の高い数学の知識（微分幾何、トポロジー）が必要である。ここでは、9)10) による比較的取り付きやすい定式化を用いて、その概略を説明し安定性理論への応用に触れる。そくちせん@測地線 **測地線**の方程式は、物質表示 (Lagrange 表示) における完全流体の方程式（Euler 方程式）

$$\frac{D^2\boldsymbol{x}}{Dt^2} = -\nabla p(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a},t),t) \tag{37.2}$$

に一致する。測地線の変分を $\boldsymbol{\xi}$ と書くと、その方程式 (Jacobi 方程式) は

$$\frac{D^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\xi}, \dot{\boldsymbol{x}}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}} = 0 \tag{37.3}$$

となる。ここで $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ は Riemann 曲率を表す演算子である。また、共変微分 $\frac{D}{\partial t}$ は、Lagrange 微分を施した後に、非圧縮場へ射影することと同じである：

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{\partial t} = \frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} + \nabla\alpha_{\boldsymbol{\xi}}. \tag{37.4}$$

但し、 α は、射影に必要なポテンシャルで、

$$\nabla^2\alpha_{\boldsymbol{\xi}} = -\nabla \cdot ((\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}) \tag{37.5}$$

によって定められる。

曲率項の表現を得るために、時間 2 階の測地線の変分方程式 (37.3) を、2 つの 1 階方程式の連立系とみなす。粒子の位置の変分を $\boldsymbol{\xi}$、対応する速度の変分を $\boldsymbol{f} = \delta\boldsymbol{u}$ と書くことにする。出発点は、Euler 方程式

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla\boldsymbol{u} = -\nabla p, \tag{37.6}$$

および、流体粒子の軌道の方程式

$$\frac{D\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t; s)}{Dt} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t; s), t; s). \tag{37.7}$$

である。ここで s は、変分を特徴付けるパラメターで、 $s = 0$ が測地線に対応する。(37.7) を s で、微分して (37.8) が、また (37.6) の変分 $\boldsymbol{f} = \delta\boldsymbol{u}$ をとることで (37.9) が得られる。

$$\frac{D\boldsymbol{\xi}}{Dt} = (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}, \tag{37.8}$$

$$\frac{D\boldsymbol{f}}{Dt} = -(\boldsymbol{f} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} - \nabla q. \tag{37.9}$$

ここで、$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = \nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0$ また、$q = \delta p$ は圧力の変分である。(37.8, 37.8) をまとめて

$$\frac{D^2\boldsymbol{\xi}}{Dt^2} = -\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\xi} - \nabla q \tag{37.10}$$

が得られる。

B. 断面曲率と安定性理論への応用

きょうへんびぶん@共変微分

(37.10) の右辺は、このままでは非圧縮にならないので、**共変微分**を用いて書き直すと、測地線の変分方程式は

$$\frac{D^2\boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{37.11}$$

となる。ここで $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}) \equiv \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\xi} - (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\nabla\alpha_{\boldsymbol{\xi}} + \nabla\gamma$ である。$\int \frac{D\boldsymbol{\xi}_1}{\partial t} \cdot \nabla\alpha_{\boldsymbol{\xi}_2} d\boldsymbol{x} = 0$ に注意すれば、$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}$ は次の対称性を満たす

$$\langle \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}_2) \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}_1) \rangle = \int (\boldsymbol{\xi}_1 \cdot \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\xi}_2 - \nabla\alpha_{\boldsymbol{\xi}_1} \cdot \nabla\alpha_{\boldsymbol{\xi}_2})\, d\boldsymbol{x}. \tag{37.12}$$

ここで、$\langle f, g \rangle = \int f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ は内積を表す。粒子の軌道に沿う変分に関しては、中

立安定なので、$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}$ には $\boldsymbol{\xi}$ の $\boldsymbol{u}$ に平行な成分 $\boldsymbol{\xi}^{\parallel}$ は寄与せず $\frac{D^2\boldsymbol{\xi}^{\parallel}}{\partial t^2}=0$、直交成分 $\boldsymbol{\xi}^{\perp}\equiv\boldsymbol{\xi}-\frac{\langle\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{u}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}$ のみが問題になる

$$\frac{D^2\boldsymbol{\xi}^{\perp}}{\partial t^2}+\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}^{\perp})=0. \tag{37.13}$$

さらに"ポテンシャル力" $U_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}^{\perp})=\frac{1}{2}\left\langle\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}^{\perp}),\boldsymbol{\xi}^{\perp}\right\rangle$ を用いて書き換えれば

$$\frac{D^2\boldsymbol{\xi}^{\perp}}{\partial t^2}=-\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\xi}^{\perp}}U_{\boldsymbol{u}}. \tag{37.14}$$

だんめんきょくりつ@断面曲率

となる。この式と Newton 力学との類推から、断面曲率

$$K(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})=\frac{2U_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}^{\perp})}{\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{\xi}^{\perp}\|^2}. \tag{37.15}$$

が安定性の判定に重要であることが分かる。即ち、基本的には負の断面曲率は不安定性を意味する。ただし、負曲率の場合でも、攪乱が指数関数ではなく、たかだか多項式でしか成長しない例 (Couette 流) も知られている[11)]。これは、無限次元力学系の特有の現象で、領域が少なくとも 1 方向に非有界な場合に連続スペクトルが励起されることに関連する。有限次元力学系ではこのような事は起き得ない。

結局、断面曲率の計算は、速度場、および攪乱が与えられた時、2 つのポテンシャル問題

$$\nabla\cdot((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})+\nabla^2 p=0, \tag{37.16}$$

$$\nabla\cdot((\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla)\boldsymbol{u})+\nabla^2\alpha_{\boldsymbol{\xi}}=0 \tag{37.17}$$

を解くことに帰着する。後は $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{u}}$ の定積分を実行する。Aronold の原論文では Fourier 級数で評価しているが物理空間で計算する方が見通しがよい。断面曲率の具体的な計算例は、12), 13) を参照。

C.　Clebsch 変数

渦線が 2 枚の曲面群の交線として表せる条件を考える。

$$\text{渦線の式}\quad \frac{dx}{\omega_1}=\frac{dy}{\omega_2}=\frac{dz}{\omega_3} \tag{37.18}$$

は、任意の関数 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ を用いて、加比の理により

$$=\frac{\gamma_1dx+\gamma_2dy+\gamma_3dz}{\gamma_1\omega_1+\gamma_2\omega_2+\gamma_3\omega_3} \tag{37.19}$$

と書ける。ここで $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\omega}\equiv 0$ と取れば

$$\text{全微分式}\quad \boldsymbol{\gamma}\cdot d\boldsymbol{x}=0 \tag{37.20}$$

に帰着する。

そこで、全微分式が可積分になる条件を考える。特に、$\nabla\times\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\omega}$ なる $\boldsymbol{\gamma}$ を選べば、ヘリシティー $\boldsymbol{\gamma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\gamma})$ は、$\boldsymbol{\gamma}$-面要素を閉曲線に沿って延長する時の「捻れ」を表す。ゆえに、この時 $\boldsymbol{\gamma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\gamma})\equiv 0$ は、' 捻れなしの' 可積分条件となり、全微分式は 2 つの解 $f(\boldsymbol{x})=c_1, g(\boldsymbol{x})=c_2$ を持ち、$\boldsymbol{\gamma}\cdot d\boldsymbol{x}=fdg$ となる。(c_1,c_2 は定数。) このとき、f,g を

くれぶしゅぽてんしゃる@Clebsch ポテンシャル
Clebsch ポテンシャルと呼ぶ。14),15) 非圧縮速度場 $\boldsymbol{u}$ は、さらにポテンシャル ϕ を用い、一般に $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\gamma} - \nabla\phi = f\nabla g - \nabla\phi$ となる。

Clebsch 変数を用いる定式化[16)]

Clebsch 変数で $\frac{Df}{Dt} = \frac{Dg}{Dt} = 0$ を仮定しない場合、 Hamilton の正準方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{Df}{Dt} = \dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial g}, \\ \dfrac{Dg}{Dt} = -\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial f}. \end{cases} \tag{37.21}$$

である。これは $\boldsymbol{u} = f\nabla g - \nabla\phi$ を $\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p$ に代入して得られる表式

$$\frac{Dg}{Dt}\nabla f - \frac{Df}{Dt}\nabla g = \nabla \underbrace{\left(\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + p - \frac{\partial\phi}{\partial t} + f\frac{\partial g}{\partial t}\right)}_{\equiv -\mathcal{H}} \tag{37.22}$$

から得られる。定常 $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial t} = 0$ で、かつ、 $\mathcal{H}$ が時間 t に陽に依存しない場合には、

$$\frac{D\mathcal{H}}{Dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial f}\frac{Df}{Dt} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial g}\frac{Dg}{Dt} = 0 \tag{37.23}$$

となる。

くれぶしゅへんかん@Clebsch 変換
Clebsch 変換 (Bernoulli の定理の一種)

$$\frac{|\boldsymbol{u}|^2}{2} + p - \frac{\partial\phi}{\partial t} + f\frac{\partial g}{\partial t} = C(t). \tag{37.24}$$

を用いれば、$\frac{Df}{Dt} = \frac{Dg}{Dt} = 0$ なる選択が可能なことが分かる。実際、$\nabla\mathcal{H} = 0$ なので

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\delta H}{\delta g}, \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = -\dfrac{\delta H}{\delta f}, \end{cases} \tag{37.25}$$

が得られる[17)]。ここで

$$H = -\frac{1}{2}\int |f\nabla g - \nabla\phi|^2 d\boldsymbol{x} \tag{37.26}$$

である。(37.21) と、その特殊な場合の (37.25) を混同しないことが大事である。

Clebsch 変数を用いないハミルトン定式化[18)]

非圧縮流体 (Lagrange 表示)

正準変数は $(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{a}))$ である。Poisson 括弧

$$\{A, B\} = \int \left(\frac{\delta A}{\delta x_i(\boldsymbol{a})}\frac{\delta B}{\gamma_i(\boldsymbol{a})} - \frac{\delta A}{\delta\gamma_i(\boldsymbol{a})}\frac{\delta B}{x_i(\boldsymbol{a})}\right) d\boldsymbol{a} \tag{37.27}$$

を用いて、運動方程式は一般的に

$$\frac{Df}{Dt} = \{f, H\} \tag{37.28}$$

と書ける。特に、

$$\left\{\begin{aligned} \frac{Dx_i(\boldsymbol{a},t)}{Dt} &= \frac{\delta H}{\delta \gamma_i(\boldsymbol{a},t)}, \\ \frac{D\gamma_i(\boldsymbol{a},t)}{Dt} &= -\frac{\delta H}{\delta x_i(\boldsymbol{a},t)}. \end{aligned}\right. \tag{37.29}$$

が成り立つ。ハミルトニアン H は、全運動エネルギーで

$$H = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{u}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{a})d\boldsymbol{a} \tag{37.30}$$

いんぱるす@インパルス

の形を用いると、幾何ゲージによる**インパルス**方程式が得られる。

さらに、Lagrange 表示による非圧縮流の取扱いでは、変分を取る際、非圧縮性（即ち、ヤコビアン=定数）を拘束条件として要求しない流儀もある[19)]。

非圧縮流体 (Euler 表示)

運動方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} \tag{37.31}$$

で、Poisson 括弧

$$\{A,B\} = -\int \gamma_i(\boldsymbol{x})\left(\frac{\delta A}{\delta x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\delta B}{\gamma_i(\boldsymbol{x})} - \frac{\delta B}{\delta x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\delta A}{\gamma_i(\boldsymbol{x})}\right)d\boldsymbol{x} \tag{37.32}$$

は、一般に特異となる †。ハミルトニアンは

$$H = \int \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{37.33}$$

である。$f=\gamma_i$ は、幾何ゲージのインパルス方程式と一致する。

圧縮流体 (Lagrange 表示)

正準変数は、 $(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{a}))$ で、運動方程式

$$\frac{Df}{Dt} = \{f, H\} \tag{37.34}$$

の Poisson 括弧は、

$$\{A,B\} = \int\left(\frac{\delta A}{\delta x_i(\boldsymbol{a})}\frac{\delta B}{u_i(\boldsymbol{a})} - \frac{\delta A}{\delta u_i(\boldsymbol{a})}\frac{\delta B}{x_i(\boldsymbol{a})}\right)d\boldsymbol{a} \tag{37.35}$$

と書ける。ハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}\int\left\{|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{a})|^2 + E\left(\frac{\partial(\boldsymbol{x})}{\partial(\boldsymbol{a})}, S(\boldsymbol{a})\right)\right\}d\boldsymbol{a} \tag{37.36}$$

で、E は内部エネルギー、 $\frac{\partial(\boldsymbol{x})}{\partial(\boldsymbol{a})} = 1/\rho$ は比体積、 S はエントロピーである。

圧縮流体 (Euler 表示)

従属変数は、$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \rho(\boldsymbol{x}), S(\boldsymbol{x})$ でハミルトニアン H、および、 Possion 括弧は

$$H = \frac{1}{2}\int\left\{|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2 + E\left(\frac{1}{\rho(\boldsymbol{x})}, S(\boldsymbol{x})\right)\right\}\rho(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \tag{37.37}$$

カシミール@Casimir

† つまり、$\{\forall A, C\} = 0$ でも　$C \neq 0$ なる C が存在する。これは、**Casimir** と呼ばれ、2 次元 Euler 方程式のスカラー渦度が、例としてよく知られている。

$$\{A, B\} = -\int \left[\frac{\delta B}{\delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})} \cdot \nabla \frac{\delta A}{\delta \rho(\boldsymbol{x})} - \frac{\delta A}{\delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})} \cdot \nabla \frac{\delta B}{\delta \rho(\boldsymbol{x})} + \frac{\nabla S}{\rho} \cdot \left(\frac{\delta A}{\delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})} \frac{\delta B}{\delta S} - \frac{\delta B}{\delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})} \frac{\delta A}{\delta S} \right) d\boldsymbol{x} \right]. \tag{37.38}$$

となる[20)21)]。

37–2 Laplacian の性質と公式

37–2–1 流体力学的ポテンシャル論

A. Newton ポテンシャル

Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \tag{37.39}$$

の解 $\phi(\boldsymbol{x})$ は、

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{4\pi} \int \frac{f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \tag{37.40}$$

と書ける。これを、逐次空間変数で微分することで

$$\frac{\partial \phi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^3} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \tag{37.41}$$

および

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{f(\boldsymbol{x})}{3} \delta_{ij} + T_{ij}[f](\boldsymbol{x}) \tag{37.42}$$

が得られる。ここで

$$T_{ij}[f](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{P.V.} \int \left(\frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^3} - \frac{3(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^5} \right) f(\boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{37.43}$$

は、双極子積分核で、P.V. は主値を表す。$(i, j = 1, 2, 3)$

要点は、次の公式

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\boldsymbol{x}|} = -\mathrm{P.V.} \left(\frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}|^3} - \frac{3 x_i x_j}{|\boldsymbol{x}|^5} \right) - \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \delta(\boldsymbol{x}), \tag{37.44}$$

が、任意のテスト関数について成り立つことである。

速度 $\boldsymbol{u}$ をベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ で表せば、$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{A}$。ここで $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ と仮定した。このとき $\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\omega}$ であるので、(37.40) から

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|} \mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{37.45}$$

となる。

B. Biot-Savart 公式

速度を渦度で表すには、(37.41) を用いて、

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{y}|^3} \mathrm{d}\boldsymbol{y}. \tag{37.46}$$

となり、電磁気学とのアナロジーから Biot-Savart 公式と呼ばれる。

C. **渦伸長率の公式**

速度勾配を渦度で表すには、(37.42) を用いて、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\epsilon_{ijk}}{3}\omega_k - \frac{1}{4\pi}\mathrm{P.V.}\int\left(\frac{\epsilon_{ijk}\omega_k(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^3} - \frac{3\epsilon_{ilk}(x_l-y_l)\omega_k(\boldsymbol{y})(x_j-y_j)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^5}\right)d\boldsymbol{y}. \tag{37.47}$$

ひずみそくどてんそる@歪み速度テンソル

特に、**歪み速度テンソル** $\boldsymbol{s} = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T)$ は

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \frac{3}{8\pi}\mathrm{P.V.}\int[\hat{\boldsymbol{y}}\otimes\{\hat{\boldsymbol{y}}\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\} + \{\hat{\boldsymbol{y}}\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\}\otimes\hat{\boldsymbol{y}}]\frac{d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^3}, \tag{37.48}$$

渦伸長率 $\alpha(\boldsymbol{x})$ は、

$$\begin{aligned}\alpha(\boldsymbol{x}) &= \frac{\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} \\ &= \tfrac{3}{4\pi}\mathrm{P.V.}\textstyle\int(\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}))(\hat{\boldsymbol{y}}\times\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}))\cdot\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x})\dfrac{d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^3}\end{aligned} \tag{37.49}$$

となる。

D. **2 次元の場合**

2 次元のポアソン方程式

$$\nabla^2\phi(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \tag{37.50}$$

の解 $\phi(\boldsymbol{x})$ は

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int f(\boldsymbol{y})\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|d\boldsymbol{y} \tag{37.51}$$

と書ける。その空間微分は

$$\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi}\int\frac{x_i-y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \tag{37.52}$$

および

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{f(\boldsymbol{x})}{2}\delta_{ij} + T_{ij}[f](\boldsymbol{x}) \tag{37.53}$$

となる。ここで

$$T_{ij}[f](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{P.V.}\int\left(\frac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2} - \frac{2(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^4}\right)f(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{37.54}$$

である。$(i,j=1,2)$

37–2–2 熱方程式

A. **熱核による解法**

ねつほうていしき@熱方程式

1 次元**熱方程式**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{37.55}$$

の解は

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}T_0(y)dy \tag{37.56}$$

と書ける。ここで、積分核

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}} \tag{37.57}$$

ねつかく@熱核
は、**熱核**と呼ばれる。

多次元の場合、例えば、3 次元熱方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nu\nabla^2 T \tag{37.58}$$

を扱うには、熱核の直積

$$T(\boldsymbol{x},t) = e^{\nu t\triangle}T_0(\boldsymbol{x}) = e^{\nu t(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)}T_0(\boldsymbol{x}) \tag{37.59}$$

を考える。その結果、解は

$$T(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(4\pi\nu t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4\nu t}\right)T_0(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \tag{37.60}$$

と書ける。

B. Navi-er-Srokes 方程式の積分方程式への書き換え

Navier-Stokes 方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\nabla^2\right)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}\nabla\cdot(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}) \tag{37.61}$$

と書ける。ここで、$\otimes$ はテンソル積、また、$\boldsymbol{P}$ はソレノイダル射影子 (Leray-Hodge 射影子とも言う) である。
でゅあめるげんり@Duhamel 原理
Duhamel 原理を適用することで、積分方程式に書き換えることができる。

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = e^{t\nu\nabla^2}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},0) + \int_0^t e^{(t-s)\nu\nabla^2}\boldsymbol{P}\nabla\cdot(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s)\otimes\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},s))ds. \tag{37.62}$$

この形によれば、熱方程式の解を元手に、反復解法を行うことで逐次近似解を導入することが可能となる。その結果、初期のレイノルズ数が小さいと条件の下で、短時間の解の存在を証明することができる。

37–2–3 複素関数論

A. Cauchy の積分公式

こーしーのせきぶんていり@Cauchy の積分定理
複素関数 $f(z)$ が、複素平面の領域 D で正則ならば、**Cauchy の積分定理**

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

が成り立つ。ここで ∂D は、D の境界を表す。

こーしーのせきぶんこうしき@Cauchy の積分公式
また、点 z が D に含まれるなら、**Cauchy の積分公式**

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

が成り立つ。

B. Hilbert 変換

関数 $f(x)$ に対して、積分

$$H[f] = \frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{x-y}dy$$

ひるべるとへんかん@Hilbert 変換

が存在するとき、これを f の**Hilbert 変換**と呼ぶ。Hilbert 変換は、上半面で正則な複素関数の、実軸上の境界値の実部と虚部を結びつける。Hilbert 変換のいくつかの重要な性質は次の通りである:

1.$H[H[f]] = -f$,

2.$H[fg] = H[f]g + fH[g] + H[H[f]H[g]]$,

3.Fourier 変換は $\widetilde{H}[f] = -i\,\mathrm{sgn}(k)\tilde{f}(k)$.

文　献

1) Ehrenfest, P. (1904) Die bewegung starrer körper in Flüssigkeiten und die Mechanik von Hertz, in *Collected Scientific Papers*(1959), ed. Klein, M.J., *et al.* North Holland.
2) Klein, M.J. (1970), Paul Ehrenfest: The Making of a Theoretical Physicist v.1, North-Holland.
3) Arnold, V. (1966), Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Ann. l'Inst. Fourier* **16**, 319–361.
4) Ebin, D. and Marsden, J.(1970), Groups of diffeomorphism and the motion of an incompressible fluid, *Ann. of Math,* **92**, 102-163.
5) 砂田利一 (2004), 数学から見た連続体の力学と相対論, 岩波書店，10 頁.
6) Marsden, J., Ebin, D. and Fischer, A. (1972), Diffeomorphism groups, hydrodynamics and relativity, In Proc. 13th Biennial Seminar of Canadian Math. Congress (J.R. Vanstone, ed.), 135-279.
7) Arnold, V.I. (1978), Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer.
8) Arnold, V.I. and Khesin, B. (1998) Topological methods in hydrodynamics, Springer.
9) Rouchon, P. (1992), Jacobi equation, Riemannian curvature and the motion of a perfect incompressible fluid, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **11**, 317-336.
10) Rouchon, P. (1991), Dynamique des Fluides Parfaits Principe de Moindre Action Stabilite Lagranienne, http://cas.ensmp.fr/ rouchon/publications/PR1991/onera1.pdf.
11) Preston, S.C. (2004), For Ideal Fluids, Eulerian and Lagrangian Instabilities are Equivalent, *Geom. Funct. Anal.* **14**, 1044-1062.
12) Nakamura, F., Hattori, Y. and Kambe, T. (1992), Geodesics and curvature of a group of diffeomorphisms and motion of an ideal fluid, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, L45-50.
13) Ohkitani, K. (2010), Numerical study on the incompressible Euler equations as Hamiltonian systems: sectional curvature and Jacobi field, (2010), *Phys Fluids* **22** 057101-1–11.
14) Ohkitani, K. (2008), A Geometrical Study of 3D Incompressible Euler Flows with Clebsch potentials, *Physica D* **237**, 2020–2027.
15) Ohkitani, K. (2018), Study of the Euler equations by Clebsch potentials, *Nonlinearity* **31**, R25-R51.
16) Serrin, J. (1959), Mathematical principles of classical fluid mechanics, in "Fluid Dynamics I", Springer, 125–263,.

17) Kuznetsov, E.A. and Mikhailov, A.V. (1980), On the topological meaning of canonical Clebsch variables, *Phys. Lett. A* **77**, 37–38.
18) Salmon, R. (1998) Lectures on Geophysical Fluid Dynamics, Oxford University Press, 295 頁.
19) Maddocks, J.H. and Pego, R.L. (1995), An unconstrained Hamiltonian formulation for incompressible fluid flows, *Commun. Math. Phys.* **170**, 207–217.
20) Morrison, P.J. and Greene, J.M. (1980), Noncanonical Hamiltonian density formulation of hydrodynamics and ideal magnetohydrodynamics, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 790-794.
21) Morrison, P.J. (1998), Hamiltonian description of the ideal fluid, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 467-521.