37–1–2　Euler 方程式の弱解と Onsager 予想

流体の運動を考察する際には理想化を行うことが多い。理論的な代表例としては、せん断流を理想化して不連続な速度変化を持たせたもの (厚さゼロの渦層) が挙げられる。他にも渦糸や点渦がある。

当然、この種の不連続的な構造はそのままでは流体方程式で扱うことはできないが、解の概念を拡張した弱解を使うことで、方程式と関連づけて解析することが可能となる †。

ここで述べる Euler 方程式の弱解が扱う不連続な構造は、乱流速度場の慣性領域のスケーリング則である。このスケーリング則を Euler 方程式に関連付けて、乱流の統計則を理論的に扱うことが目的となる。もちろん、弱解は、方程式の解の存在や一意性を証明するための数学的に重要な道具であるが、ここではそれにとどまらない価値について述べる。

乱流の速度は慣性領域で、統計的な意味で Kolmogorov スケーリング

$$u_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)-u_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{x},t)\propto r^{1/3} \tag{37.1}$$

を持つと考えられている (間欠性はしばらく無視する)。ここで $r=|\boldsymbol{r}|$ で、u_{L} は縦速度成分 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}/r$ をあらわす。このスケーリング則は、速度場が微分不可能であることを示唆する。もちろん、さらに小さい r ではエネルギー散逸領域があり、そこでは速度は滑らかであって、速度差は r に比例すると考えられる。このため、この微分不可能性は理論的な理想化がもたらした見かけのものと考えられる。

しかし、その一方で、この微分不可能性を積極的に認めて、散逸領域がない、あるいは慣性領域が無限にひろがっていると理想化をした速度場を Euler 方程式あるいは Navier-Stokes 方程式と関連づけることは果たして可能だろうか？

このような Kolmogorov 的なスケーリング則だけをもつ速度場を、Euler 方程式に適当に関係づけて解析すると、エネルギー散逸が生じうることを指摘したのが L. Onsager である。ここでは、この微分不可能性を乗り越えるために Euler 方程式の弱解を用いることが重要となる。

A.　Euler 方程式の弱解

偏微分方程式の弱解 (weak solution) を考える際には、方程式の両辺に試験関数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$(test function) を乗じる。次に、部分積分により時間と空間の微分演算子を試験関数に演算する。この試験関数は時間、空間について無限回微分可能であり、時間、空間についてコンパクトな台 (support) をもつ関数である (つまり、この台の外ではゼロで、内部ではゼロでない)。この操作によって微分不可能な関数を広義の解として扱うことが可能になる。3 次元非圧縮 Euler 方程式についてこの操作を行うと次のような弱形式の Euler 方程式が得られる

$$\int dt'\int d\boldsymbol{x}'\left[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}',t')\partial_{t'}\varphi(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x},t'-t)+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}',t')(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}',t')\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}'})\varphi(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x},t'-t)\right]$$

† しかし、渦糸や点渦は Euler 方程式の弱解ではない[1b)]

$$= -\int dt' \int d\boldsymbol{x}'\ p(\boldsymbol{x}', t') \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}'} \varphi(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}, t' - t), \tag{37.2}$$

$$\int dt' \int d\boldsymbol{x}'\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}', t') \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}'} \varphi(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}, t' - t) = 0. \tag{37.3}$$

任意の試験関数について上式が成立するとき、$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ を Euler 方程式の弱解であるという[1a)1b)]。また、Schwartz の超関数 (distribution) の意味で Euler 方程式を満たすと言うこともある。

このような Euler 方程式の弱解の最も簡単な例には 3 次元中の定常せん断流 $(u(y), 0, 0)$ がある。特に、関数 $u(y)$ が微分できない場合でも、弱解として Euler 方程式に関連付けられることが重要である[1c)]。

さて、Euler 方程式の弱解に関する 1 つの問題意識は、Navier-Stokes 方程式に従う乱流解のうち、動粘性率のゼロ極限 $(\nu \to 0)$ での解が Euler 方程式の弱解に含まれるか否かである。

Kolmogorov の現象論にあるように乱流を支配するものがエネルギー散逸率であるとすれば、次に述べる Onsager 予想は Euler 方程式の弱解のなかに乱流として望ましい性質を持つものがあることを示唆する。

B. Onsager 予想

Onsager は 1949 年の論文[2)]の末尾に次のように記述している。「乱流のエネルギー散逸は、原理的には、粘性がなくても生じうる。このような非粘性流体の乱流 (“ideal” turbulence) があるとすれば、その速度場は問題箇所

$$|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)| < (\text{const.})\ r^h \tag{37.4}$$

で $h > 1/3$ ではありえないことが示せる。なぜなら、この場合にはエネルギーは保存するからである。特に、このような微分不可能な速度場については、通常の Euler 方程式は成立しないのでもっと一般的なものにしなければならない。」

ここで、Onsager の言う指数 h の臨界値 1/3 は式 (37.1) にある Kolmogorov 指数 1/3 と関係している。さらに、式 (37.4) のように一般の指数 h を考える形は、乱流速度場の間欠性についてのマルチフラクタルモデル (文献 6) を参照) の描像とほぼ共通のものである。

この Onsager の謎めいた記述は長いこと関心を集めなかったが、1990 年代にはいって Euler 方程式の弱解を用いることで正確に問題設定できることがわかった[3)]。その後、この問題は Onsager 予想 (Onsager's conjecture) と呼ばれるようになった。Onsager 予想には 2 面あることがわかる : (イ) Euler 方程式の弱解で、指数 $h > 1/3$ の場合にエネルギーは必ず保存する。(ロ) Euler 方程式の弱解で、指数 $0 < h \leq 1/3$ の場合にエネルギーが散逸するものがある。この予想 (イ) が正しいことは 1994 年に Eyink, Constantin-E-Titi によって数学的に証明された[4)5)]。

a) Onsager 予想と 4/5 則　次に、予想 (ロ) をめぐって、Euler 方程式の弱解にエネルギー散逸があるとすれば、Kolmogorov の 4/5 則と本質的に同一の関係式が、統計平均をとらなくても局所的、瞬時に成立することが Duchon と Robert によって 2000 年

に示されている[7]。この結果は、予想 (ロ) をみたす Euler 方程式の弱解が発達した乱流と関係があることのひとつの根拠となる。

この文献 7) での「4/5 則」の議論を以下に簡単に示す。試験関数が空間にだけ依存するとして、台の幅が ϵ である等方的な関数であるとする。この試験関数と Euler 方程式にしたがう速度場 $\boldsymbol{u}$ との空間畳込みを $\boldsymbol{u}^\epsilon$ と書くことにする (圧力 p についても同様にする)。この畳込みを使って、形式的に Euler 方程式から局所的なエネルギー等式に相当する式

$$\partial_t(u_i u_i^\epsilon) + \partial_i(u_i p^\epsilon + u_i^\epsilon p + u_j u_j^\epsilon u_i) = -D^\epsilon(\boldsymbol{u}) = -u_i \partial_j (u_i u_j)^\epsilon + u_i u_j \partial_j u_i^\epsilon \quad (37.5)$$

が得られる。ここで $D^\epsilon(\boldsymbol{u}) > 0$ であれば局所的にエネルギー散逸が生じていることになる。この散逸は、グリッドスケール ϵ から、より小さいスケールへ輸送される局所的なエネルギー流束に相当する。さらに、極限 $\epsilon \to 0$ で、$D^\epsilon(\boldsymbol{u}) \to D(\boldsymbol{u})$ になるとして、

$$\overline{\delta u_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t)|\delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t)|^2} = -\frac{4}{3} D(\boldsymbol{u}) r \quad (37.6)$$

が超関数の意味で成立することが示されている[7]。ここで $\delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, $\delta u_L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t) = \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ であり、$\overline{X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t)}$ は点 $\boldsymbol{x}$ を中心とした半径 $|\boldsymbol{r}|$ の球面上での関数 $X(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}, t)$ の立体角平均を表す。

b) Onsager 予想: 指数 $0 < h < 1/3$ で散逸のある弱解の構成 Onsager 予想 (ロ) の証明は前者よりも難しく、2010 年代になって De Lellis と Székelyhidi によって行われ始めた[8]。その後、彼らの方法を基礎として、指数 $0 < h \leq 1/3 - \epsilon$ (ϵ は任意に小さい正の数) でエネルギーを散逸する解の存在が示された[9][10]。

これらの証明は全て弱解を実際に構成することでなされた。これは予想 (イ) の証明が局所的なエネルギー収支式にもとづいて行われたことと対照的である。他方で、これより以前の 1990 年代に、予想 (ロ) の証明を直接めざしたものではないが、エネルギー散逸のある Euler 方程式の弱解が Scheffer や Shnirelman によって複数構成されている[1b][11a]。つまり、様々な技術を使って弱解を構成する伝統がすでにあったと見ることもできる。実際に De Lellis と Székelyhidi の方法は、Scheffer や Shnirelman の構成解を見通しよく整理し、拡張することから出発している。

De Lellis らの解を例外として、このように構成された弱解の大半は、ある時刻までゼロだったものから突然ゼロでない速度場が生まれてきて、後の時刻にはまたゼロに戻っていくという、時間に関してコンパクトな台をなすものである[†]。この減衰する時間帯に注目すれば、エネルギー散逸がある弱解ということになる。初めて $h = 1/3 - \epsilon$ に到達した Isett の構成した弱解[9]はこの時間コンパクト性を持つ。この性質を持たないように、Isett の構成法も一部利用しつつ、構成されたものが Buckmaster らの弱解[10]である。以下ではこの解の構成方法の概要を述べる。

† 弱解は古典解よりも方程式からの制限が緩くなっているため、こうした非物理的な振舞いを持つものが多く含まれ得る。弱解からこの種の振舞いを除くためには、どのような条件をさらに課すべきかが重要な問題と考えられている。他にも、弱解は一般に一意 (unique) ではないが、一意にするための条件はなにかという問題もある (例えば文献 11b) 参照)。

c) Buckmaster らの弱解構成法[10)]　この構成法では、De Lellis と Székelyhidi による凸積分法[8)](convex integration method) を核として 3 次元周期境界条件下で弱解を反復的に構成する。つまり、反復回数無限大の極限で、構成した速度場が Euler 方程式の弱解へと収束するように設計されている。この反復法は時間と空間の両方にわたって構成した速度場を更新していく (初期値問題を解くことには相当しない)。

さらに、目的とする弱解について 2 つの量を事前に指定することができる : (ア) 運動エネルギー $e(t) = \int |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)|^2 d\boldsymbol{x}$ を時間 t の連続関数として $0 \leq t \leq T$ で指定することができる (T は適当な大きい値で良い)。(イ) 式 (37.4) にあるヘルダー指数 h を $0 < h < 1/3$ の範囲からひとつ指定できる。このような過剰とも思える事前指定が行える点が、この構成法の特徴である。特に、$e(t)$ が指定できることによって、弱解の時間コンパクト性を回避することが可能である。また、$e(t)$ の増減は自由に選ぶことが出来る。減衰するように選べばエネルギー散逸のある解が構成できる。

解の構成の核となっている凸積分法を概説する。反復的回数 q で構成できた速度場を $\boldsymbol{v}_q$ とおく。この $\boldsymbol{v}_q$ は目的とする弱解 $\boldsymbol{v}$ より "小さい" ように時刻 $0 \leq t \leq T$ 全体でつくられる (subsolution と呼ばれる[10)])。この "小さい' は、大雑把に言えば、$\boldsymbol{v}_q$ のエネルギーが $e(t)$ よりも小さいことに相当する。また、$\boldsymbol{v}_q$ は特徴的な波数 k_q を持ち (k_q 以上の波数成分は十分に早く減衰している)、2 点速度差は $|\delta \boldsymbol{v}_q| < k_q^{-h}$ を満たす (2 点間の距離が $1/k_q$ 程度であるとする)。ここで波数 k_q は q について指数関数よりもやや早く増大するように設定されている。

次に、この速度場を目的の $\boldsymbol{v}$ に近づけるように高波数成分からなる流れ場 $\boldsymbol{w}_{q+1}$(perturbation [10)]) を $0 \leq t \leq T$ で考えて、$\boldsymbol{v}_{q+1} = \boldsymbol{v}_q + \boldsymbol{w}_{q+1}$ として反復を繰り返す。この $\boldsymbol{w}_{q+1}$ は、周期境界条件下で 6 本の空間的にコンパクトな台をもつ互いに交差しない軸対称流から成る流れ (古典 Euler 方程式の定常解で Mikado flow と呼ばれる[10)]) を自己相似変換したものから構成される。この $\boldsymbol{w}_{q+1}$ は波数 k_{q+1} 程度のフーリエモードから成り、非圧縮条件を満たすように作られる。

この $\boldsymbol{w}_{q+1}$ を用いて $\boldsymbol{v}_{q+1}$ を目的の $\boldsymbol{v}$ に近づける操作は、次のように行われる。まず、構成された速度場 $\boldsymbol{v}_{q+1}$ は、Euler 方程式の解ではない。このため、Euler 方程式からのずれを 3×3 対称テンソル R_{q+1} で表現して、$\boldsymbol{v}_{q+1}$ の満たす方程式が

$$\partial_t \boldsymbol{v}_{q+1} + \boldsymbol{v}_{q+1} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_{q+1} + \nabla p_{q+1} = \mathrm{div} \mathsf{R}_{q+1}, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_{q+1} = 0 \tag{37.7}$$

となることが示される (Euler–Reynolds system[10)] と呼ばれる)。この R_q を $\boldsymbol{v}_q$ から具体的に計算する際に、Isett の手法 (glueing [9)]) が使われる。この glueing では、時間 $0 \leq t \leq T$ を細かく区切って、各区間で $\boldsymbol{v}_q$ を初期値として古典 Euler 方程式の時間前進解と後退解を求める。これらの重ね合わせから R_q を計算する。

さて、ここで $\boldsymbol{v}_{q+1} = \boldsymbol{v}_q + \boldsymbol{w}_{q+1}$ を用いて式 (37.7) から、

$$\partial_t \boldsymbol{w}_{q+1} + \boldsymbol{v}_q \cdot \nabla \boldsymbol{w}_{q+1} + \boldsymbol{w}_{q+1} \cdot \nabla \boldsymbol{v}_q + \nabla (p_{q+1} - p_q) - \mathrm{div} \mathsf{R}_q + \boldsymbol{w}_{q+1} \cdot \nabla \boldsymbol{w}_{q+1} = \mathrm{div} R_{q+1} \tag{37.8}$$

が得られる。従って、ずれを表す $\mathrm{div} R_{q+1}$ が小さくなるようにするには、この左辺が小さくなるように $\boldsymbol{w}_{q+1}$ を作ればよいことになる。特に、左辺第 5 項と 6 項が大スケールでつりあう、$(\mathsf{R}_q)_{ij} = (\boldsymbol{w}_{q+1})_i(\boldsymbol{w}_{q+1})_j$ となるように軸対称流 (Mikado flow) が取れることが示されている。また同時に、$\boldsymbol{v}_{q+1}$ のエネルギーを $e(t)$ に近づけるようにとることもできる。この $\boldsymbol{w}_{q+1}$ の選び方は一意ではない (例えば軸対称流の軸の方向を変えても良い)。

上記の一連の操作は結果的に $q \to \infty$ で R_q の全ての成分がゼロになるようにデザインされている。つまり、式 (37.7) の滑らかな解が Euler 方程式の弱解に収束することになる。このようにエネルギーを散逸する解を実際に構成することによって、Onsager 予想 (ロ) が肯定的に証明されたことになる (ただし、臨界値 $h = 1/3$ については余地がある)。

この Onsager 予想 (ロ) の証明で構成された解は、乱流の統計則と共通のスケーリング則を持つ点が著しい。特に、$0 < h < 1/3$ の範囲で任意の指数 h を弱形式 Euler 方程式が許容することは、乱流速度場の間欠性について示唆的でもある。さらに、De Lellis と Székelyhidi による弱解の構成方法は柔軟であり、Euler 方程式だけでなく、Navier-Stokes 方程式を始めとして他の流体方程式へ応用されている (この概説として 12) がある)。

文　　献

1) 岡本　久 (2009)，ナヴィエ–ストークス方程式の数理，東京大学出版会，(a) 4 章，(b) 7 章，(c) 143 頁.
2) L. Onsager (1949), Statistical Hydrodynamics, *Nuovo Cimento Supp.* **6**, 279-287.
3) G.L. Eyink and K.R. Sreenivasan (2006), Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 87-135，103 頁.
4) G.L. Eyink (1994), Energy dissipation without viscosity in ideal hydrodynamics I. Fourier analysis and local energy transfer, *Physica D* **78**, 222-240.
5) P. Constantin , W. E, and E.S. Titi (1994), Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation, *Commun. Math. Phys.* **165**, 207-209.
6) 木田重雄、柳瀬眞一郎 (1999), 乱流力学, 朝倉書店，126 頁.
7) J. Duchon and R. Robert (2000), Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier–Stokes equations, *Nonlinearity* **13**, 249-255.
8) C. De Lellis and L. Székelyhidi Jr. (2013), Dissipative continuous Euler flows, *Invent. Math.* **193** 377-407.
9) P. Isett (2018), A proof of Onsager's conjecture, *Ann. Math.* **188**, 871-963.
10) T. Buckmaster, C. De Lellis, L. Székelyhidi Jr., and V. Vicol (2019), Onsager's conjecture for admissible weak solutions, *Comm. Pure App. Math.* **72**, 229-274.
11) A. Shnirelman (2003), Weak Solutions of Incompressible Euler Equations, *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, vol. II, 87-116, edited by S.J. Friedlander and D. Serre, Elsevier Science B.V.，(a) 全頁，(b) 92 頁.
12) T. Buckmaster and V. Vicol (2019), Convex integration and phenomenologies in turbulence arXiv:1901.09023 [math.AP].