

Definition 0.1. $f \in L^1(\Omega)$ とする

$$\int_{\Omega} |Df| := \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g dx \mid g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in C_c^1(\Omega : \mathbb{R}^n), |g(x)| \leq 1 \text{ for } x \in \Omega \right\}$$

と定める $\int_{\Omega} |Df| < \infty$ の時, f は有界変動であるという.

$f \in L^1(\Omega)$ で有界変動であるもの全体の集合を $BV(\Omega)$ とかく.

Proposition 0.2. $f \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ のとき

$$\int_{\Omega} |Df| = \int_{\Omega} |Df| dx$$

ここで右辺の Df は弱微分の意味での f の gradient を指す.

特に $f \in C^1(\Omega)$ の時に上式が成り立つ.

Remark 0.3. a

μ