4) Sea A una matriz triangular inferior de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ & & & 1 & \cdots 0 \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Entonces si $A = \mathbb{D} + \mathbb{R}$, $\mathbb{D} = \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{31} & A_{32} & 0 & \cdots 0 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$

más específicamente, sabemos que
$\mathbb{R}(ij : j \geq i) = 0$. (**)

Además, $\exists \vec{x} : A\vec{x} = \vec{b}$. Entonces

$A\vec{x} = \vec{b} = (D + R)\vec{x}$

$D\vec{x} = -R\vec{x} + \vec{b}$

$\vec{x} = D^{-1}(-\mathbb{R}\vec{x} + \vec{b})$ pero $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$

$\vec{x} = (\mathbb{R}\vec{x} + \vec{b})$

aplicando el tratamiento algebraico del método de Jacobi:

$\vec{X}_i^{*} = \frac{1}{1}\left(b_i - \sum_{i \neq j}^{n} A_{ij} x_j\right)$ ← * se omite la notación de la k-ésima iteración porque se está asumiendo que $\vec{x}$ es el vector solución

pero $\sum_{i \neq j}^{n} A_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j + \sum_{j=i}^{n} A_{ij} x_j$

** aunque las matrices triangulares suelen no ser diagonal dominante, hay que recordar que no se está aplicando el método, solo adaptando el tratamiento algebraico

pero, por construcción de $\mathbb{R}$, el segundo se va a 0 (**).

Así, $X_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} x_j\right)$

↳ QED

5) $A = \mathbb{D} + \mathbb{R}$

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & A_{23} \cdots & A_{2n} \\ \vdots & & A_{34} \cdots & A_{3n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{R}\vec{x} + \vec{b})$$

es el mismo proceder que el punto anterior, solo que $\mathbb{D}^{-1} \neq \mathbb{I}$

aplicando el mismo tratamiento matemático del método de Jacobi:

$$X_i = \boxed{\frac{1}{A_{ii}}}\left(b_i - \sum_{i \neq j}^{n} A_{ij} X_j\right)$$

$\mathbb{D}^{-1}\mathbb{D} = \mathbb{I}$

para i-ésimo término

$Y_i A_{ii} = 1$

$Y_i = \frac{1}{A_{ii}}$

$$\sum_{i \neq j}^{n} A_{ij} X_i = \underbrace{\sum_{j=1}^{i} A_{ij} X_i}_{} + \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} X_i$$

ya que A corresponde a una matriz triangular superior, este término se va a 0

$$X_i = \frac{1}{A_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} X_i\right) \leftarrow QED$$