Universidade Federal de Viçosa
Campus Rio Paranaíba
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas

SIN 343
Desafios de Programação

João Batista Ribeiro

joao42lbatista@gmail.com

Slides baseados no material do prof. Guilherme C. Pena

Universidade Federal de Viçosa
Campus Rio Paranaíba
Instituto de Ciências Exatas e Tecnológicas

Aula de Hoje

Teoria de Grafos

Fluxo Máximo

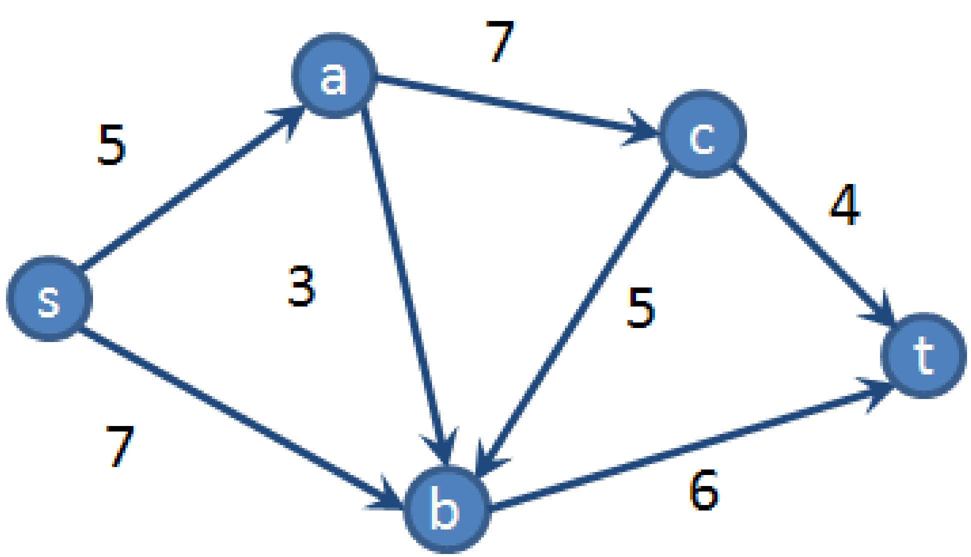
Uma aplicação muito comum de grafos são as “***redes de fluxo***”.

Fluxo em rede pode significar literalmente fluxo de algum líquido (óleo ou água) por uma rede ou sistema de tubulações. Ou também significar:

- Correntes que passam por redes elétricas,
- Informações transmitidas por redes de comunicação,
- Mensagens de e-mail,
- Bens transportados por rotas de veículos,
- Peças que percorrem linhas de montagem ...

Fluxo Máximo (Definições)

Uma ***rede de fluxo*** é um grafo direcionado $G = (V, E)$ no qual cada aresta (u, v) tem uma capacidade ***não-negativa*** $c(u, v) >= 0$.

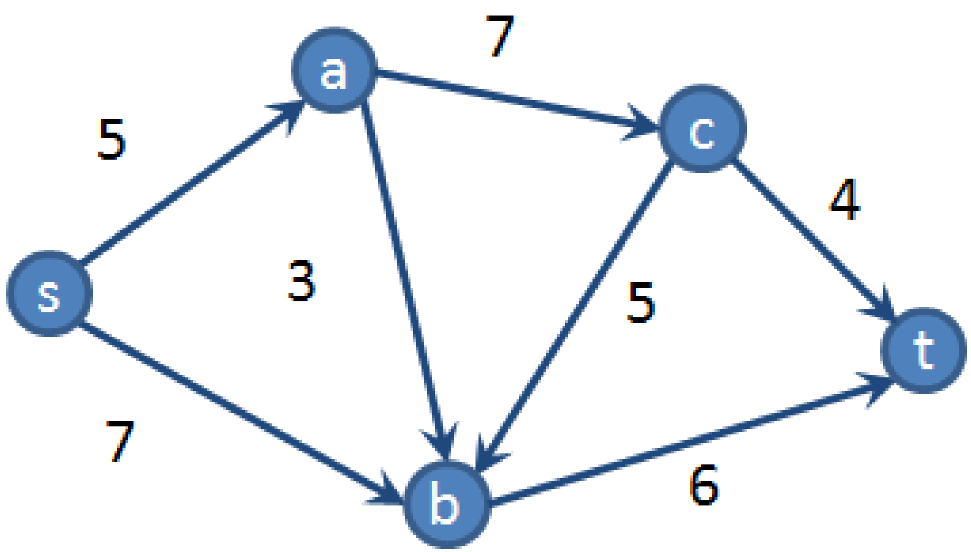


s – origem (fonte)

t – destino (sorvedouro)

Fluxo Máximo (Definições)

Por conveniência, considera-se que cada vértice da rede se encontra em um caminho da origem ao destino ***s* ~> *v* ~> *t*** , logo, o grafo é conexo.



s – origem (fonte)

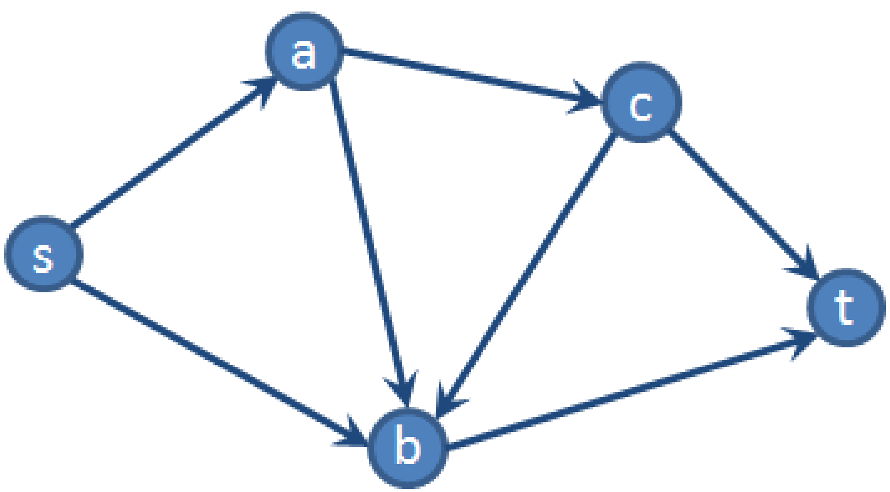
t – destino (sorvedouro)

Fluxo Máximo (Definições)

Notação:

Seja *v* um vértice qualquer de uma rede N:

- *Out(v)* é o conjunto de arcos que saem de v
- *In(v)* é o conjunto de arcos que chegam em v



$Out(s) = \{(s, a), (s, b)\}$
$In(s) = \emptyset$

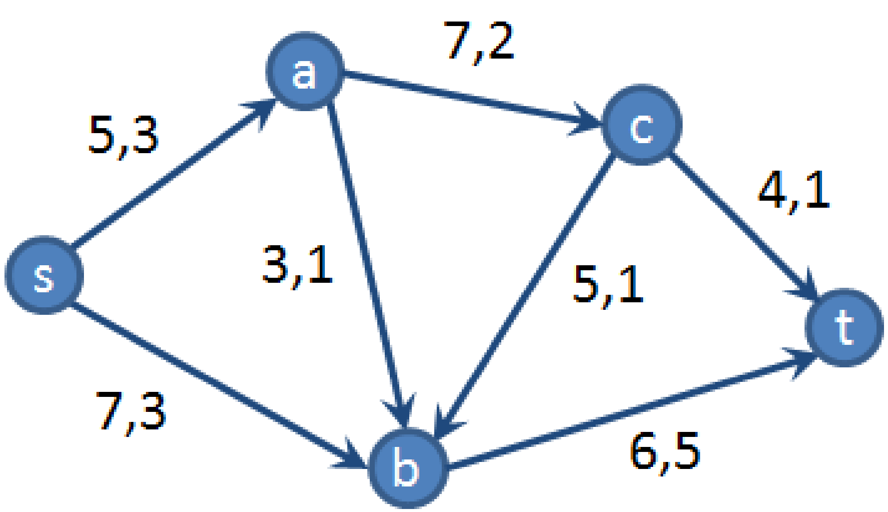
$Out(b) = \{(b, t)\}$
$In(b) = \{(s, b), (a, b), (c, b)\}$

Fluxo Máximo (Definições)

Um ***fluxo (viável)*** numa rede capacitada *N* é uma função f : $A_N \rightarrow R^+$ que associa a cada arco *a* um valor não negativo *f(a)* tal que:

- ***(capacidade)*** $0 \leq f(a) \leq c(a)$, para todo arco ***a*** de N
- ***(conservação do fluxo)*** Exceto a fonte e sorvedouro, a taxa pela qual o fluxo entra num vértice deve ser igual à taxa pela qual ele sai do vértice.

$$\sum_{a \in In(v)} f(a) = \sum_{a \in Out(v)} f(a), \text{ para todo } a \neq s, t$$



- São indicados *c(a), f(a)*

- *arco (s, a):*
  c(s, a) = 5, f (s, a) = 3

- *arco (a, b):*
  c(a, b) = 3, f (a, b) = 1

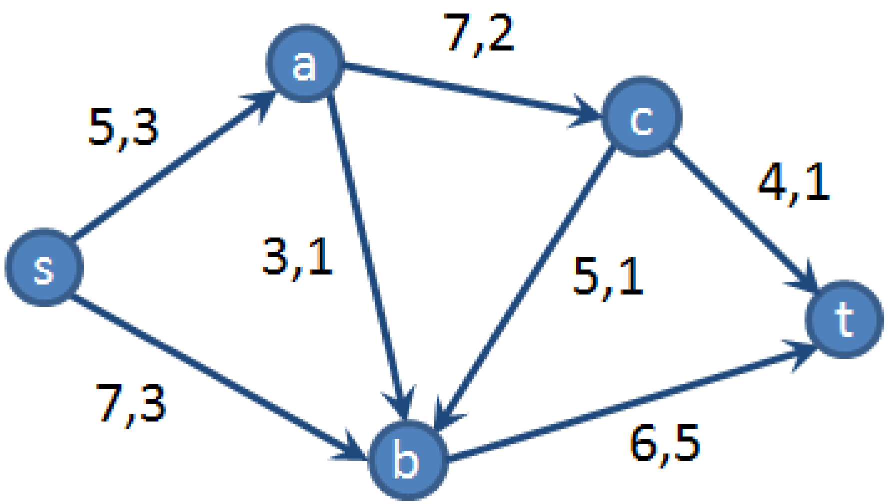
Fluxo Máximo (Definições)

Considere uma rede de distribuição de água

- a restrição de capacidade estabelece que o fluxo numa tubulação não pode ultrapassar sua capacidade
- a restrição de conservação estabelece que o fluxo total que chega em uma junção (vértice) deve ser igual ao fluxo que sai dessa junção.
- Em outras palavras, o fluxo deve fluir pela rede, da origem ao destino, ele não é produzido nem consumido pela rede (a não ser nos vértices origem e destino)

Fluxo Máximo (Definições)

O ***valor do fluxo*** *f* em uma rede capacitada N, denotado por *val(f)*, é o total de fluxo que sai da origem, ou seja, $val(f) = \sum_{a \in Out(s)} f(a)$

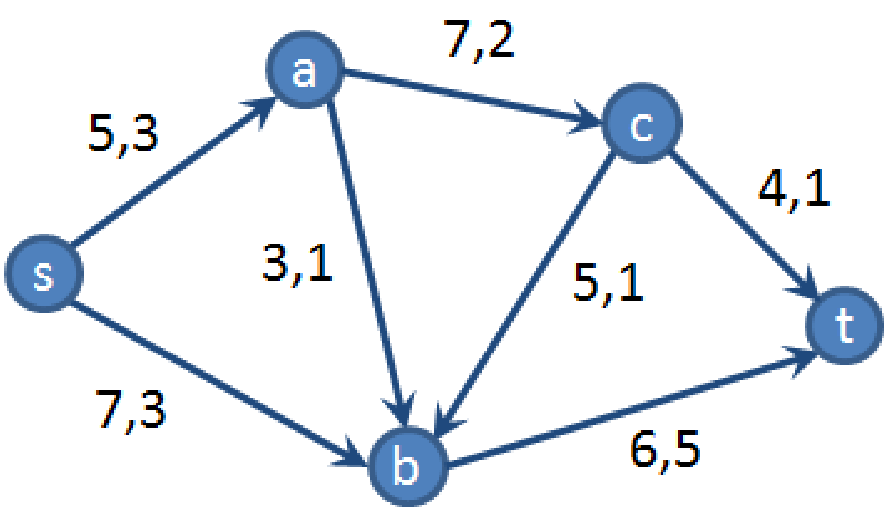


$val(f) = 6$

Por causa da ***conservação de fluxo***, esse é exatamente o mesmo valor que chega no destino, $val(f) = \sum_{a \in In(t)} f(a)$

Fluxo Máximo (Definições)

O ***fluxo máximo f**** em uma rede capacitada *N* é o fluxo viável de maior valor, ou seja, tal que *val(f*)* ≥ *val(f)* para todo fluxo viável *f* em *N*.



val(f) = *6* não é o fluxo máximo

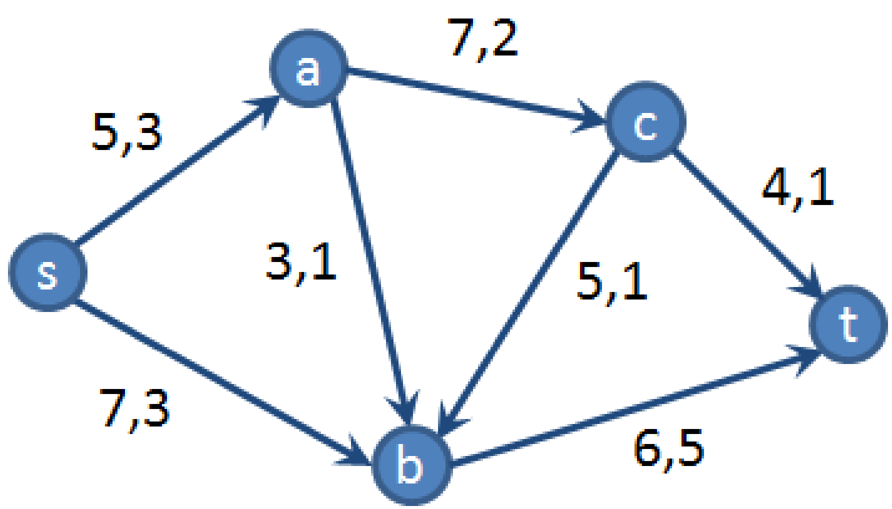
Considere *f(s,b)* = *4* e *f(b,t)* = *6*

Esse novo fluxo tem *val(f)* = *7*, maior que o mostrado

Fluxo Máximo (Algoritmo)

Caminhos Direcionados:

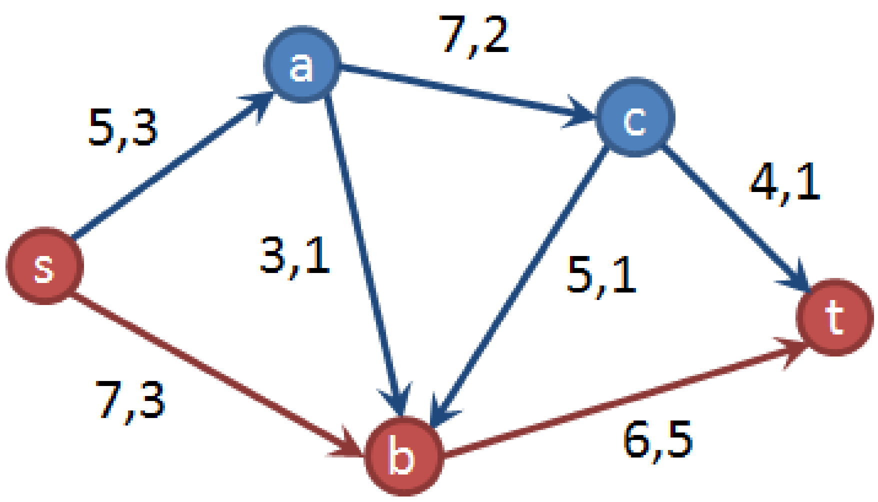
- *Considere um fluxo f numa rede N*



Fluxo Máximo (Algoritmo)

Caminhos Direcionados:

- *Suponha um caminho direcionado s-t em N:*
  $P = s, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, t$, *tal que* $f(a_i) < c(a_i), \forall i = 1, \ldots, k$

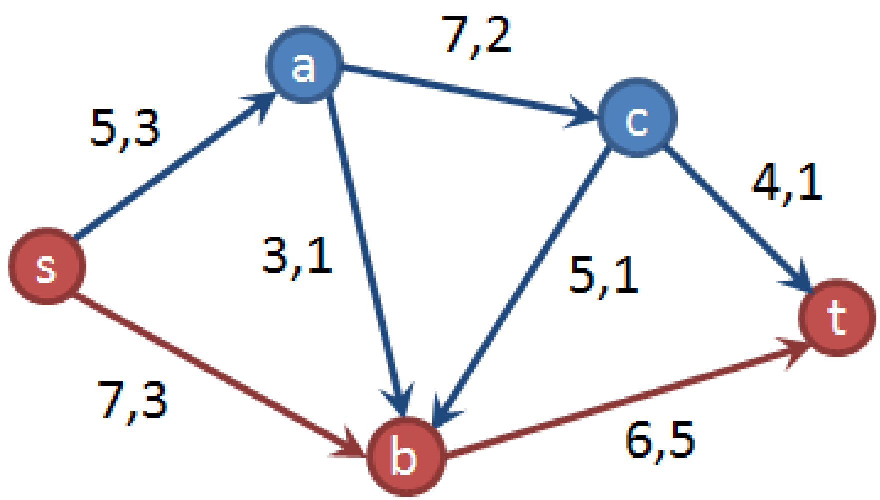


$P = s, (s, b), b, (b, t), t$

Fluxo Máximo (Algoritmo)

Caminhos Direcionados:

- *Considerando cada arco isoladamente, pode-se aumentar $c(a_i) - f(a_i)$ no fluxo de a_i*

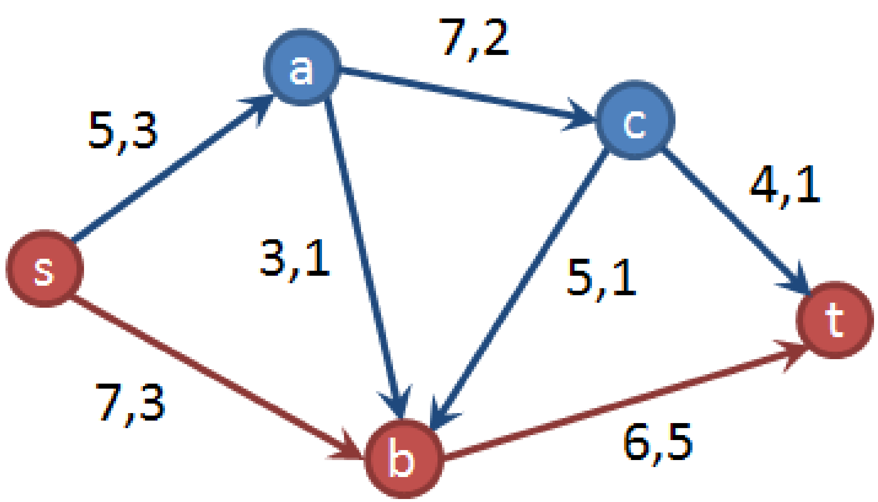


pode-se aumentar 4 em (s,b) e 1 em (b,t)

Fluxo Máximo (Algoritmo)

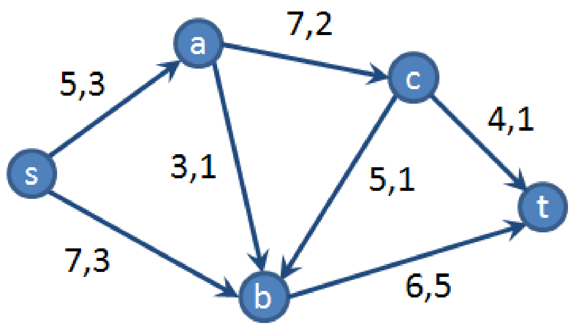
Caminhos Direcionados:

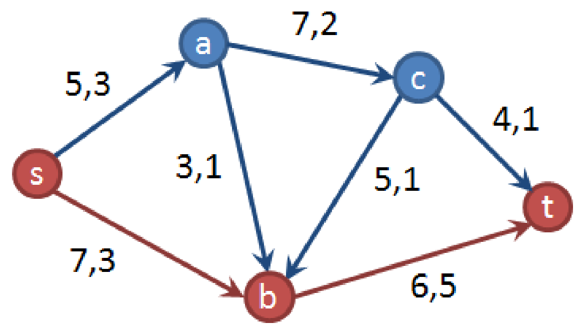
- *Mas, para manter a conservação de fluxo nos vértices, o aumento em cada arco deve ser igual*
- *Para atender a restrição de capacidade, tal valor deve ser* $\Delta_P = min\{c(a_i) - f(a_i)\}$



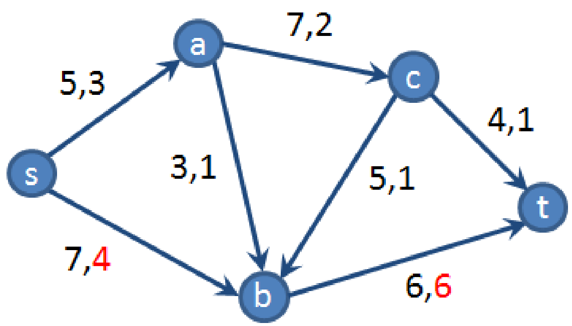
$\Delta_P = min\{4, 1\} = 1$

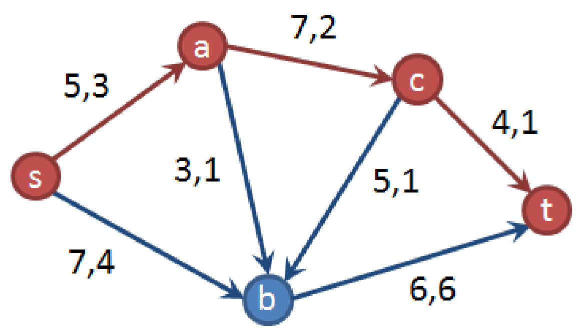
Fluxo Máximo (Algoritmo)



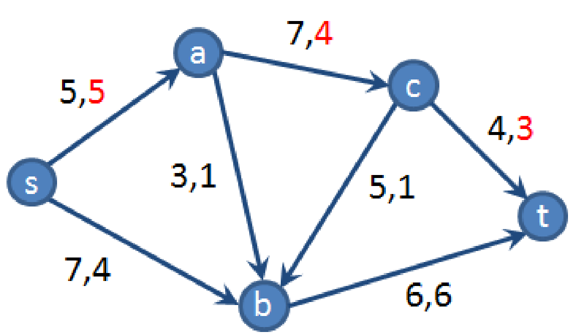


Δ_P = 1





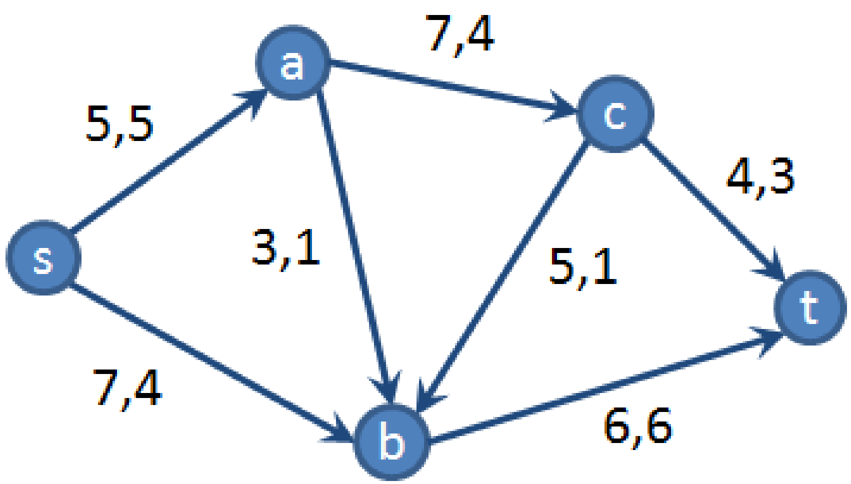
Δ_P = 2



Não há caminho direcionado com $\Delta_P > 0$

Fluxo Máximo (Algoritmo)

Caminhos Direcionados:

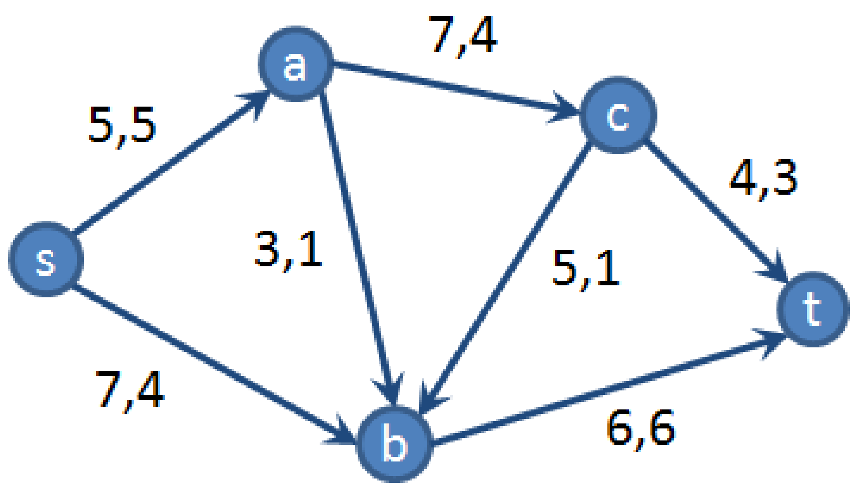


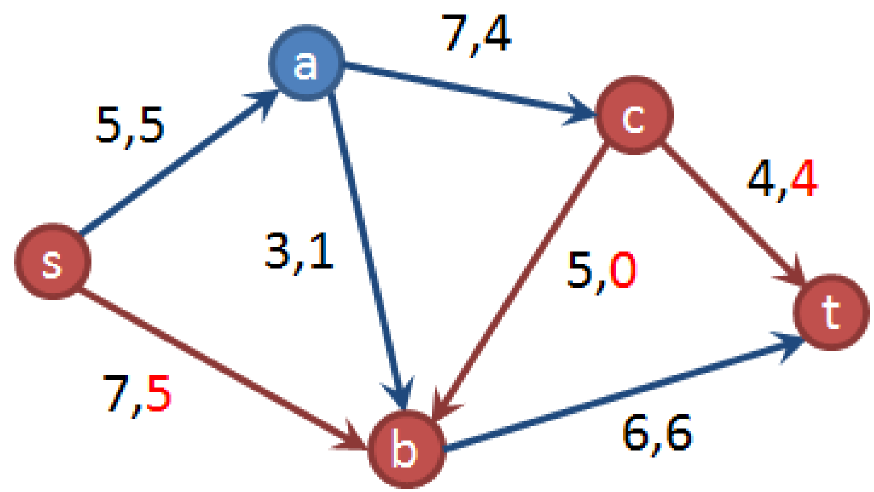
val(f) = 9

- *Não há mais caminho direcionado que aumente o fluxo*
- *Mas o fluxo ainda pode ser aumentado!*

Fluxo Máximo (Algoritmo)

Caminhos de aumento:





- *+1 no arco (s, b)*
- *-1 no arco (c, b)*
- *+1 no arco (c, t)*

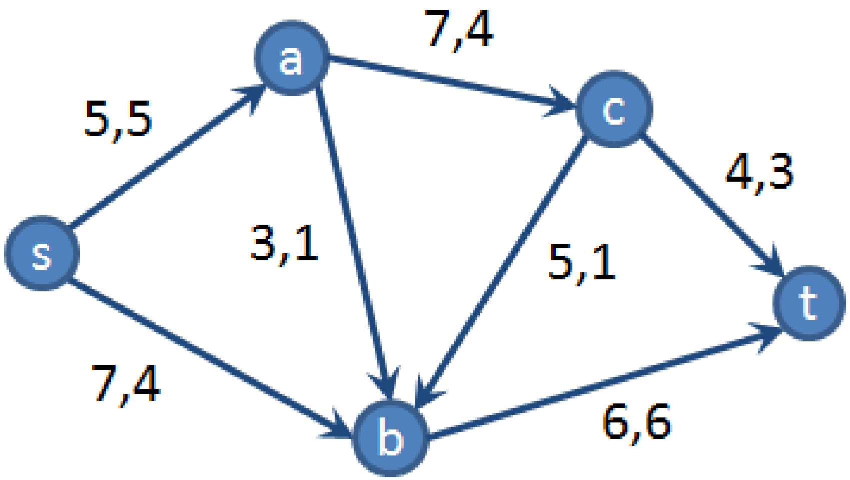
Note que esses arcos formam um caminho s-t (não direcionado)

- *o efeito é redirecionar o fluxo que chega em c*

Fluxo Máximo (Algoritmo)

Caminhos de Aumento:

- *Considere um fluxo f numa rede N*



Fluxo Máximo (Algoritmo)

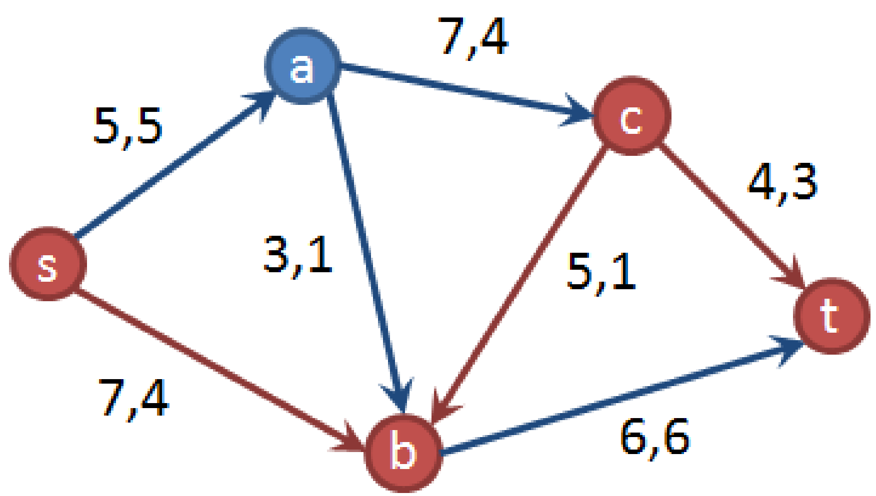
Caminhos de Aumento:

- *Suponha um caminho (possivelmente não direcionado) s-t*

  $Q = s, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, t$, tal que:

  $f(a_i) < c(a_i)$, se a_i está no mesmo sentido do caminho

  $f(a_i) > 0$, se a_i está no sentido contrário ao do caminho



Q = s, (s, b), b, (b, c), c, (c, t), t

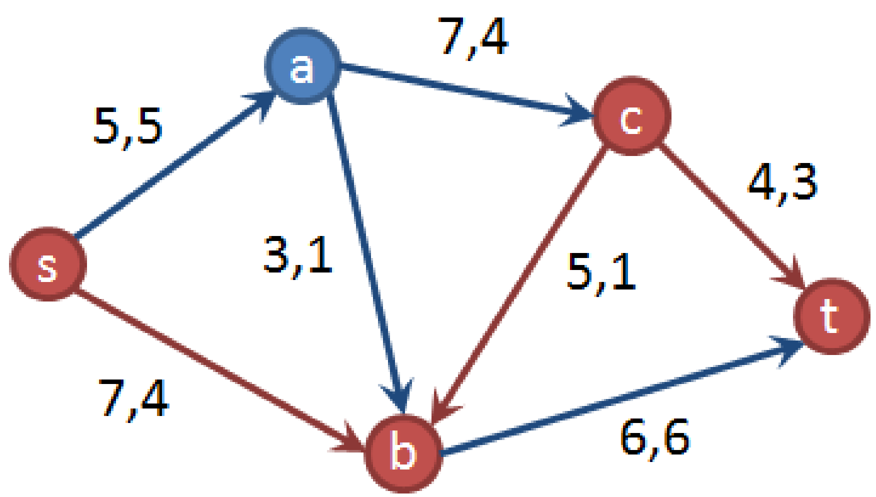
Fluxo Máximo (Algoritmo)

Caminhos de Aumento:

- *Considerando cada arco isoladamente, seja*

  $\Delta_a = c(a_i) - f(a_i)$, *se* a_i *está no mesmo sentido*

  $\Delta_a = f(a_i)$, *se* a_i *está no sentido contrário*



$\Delta(s, b) = 3,$

$\Delta(b, c) = 1,$

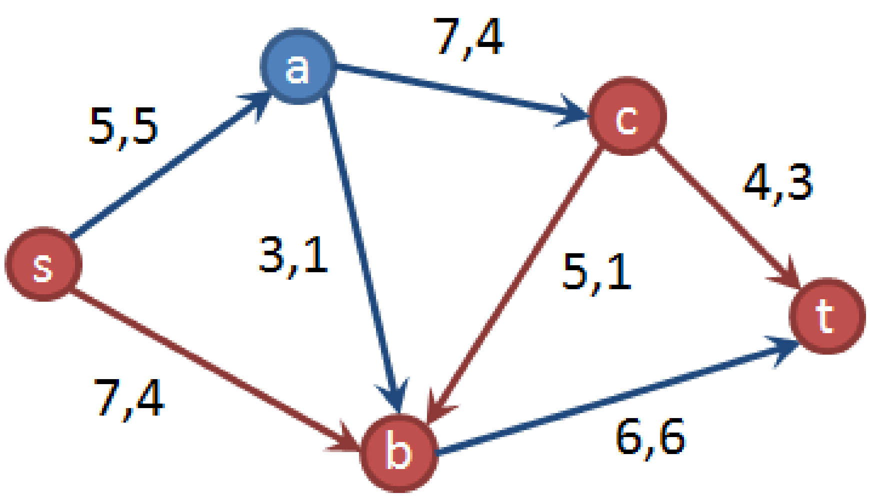
$\Delta(c, t) = 1$

Fluxo Máximo (Algoritmo)

Caminhos de Aumento:

- *Para manter* **conservação de fluxo** *e* **capacidade**,

$\Delta_Q = min\{\Delta_a\}$



$\Delta_Q = 1$

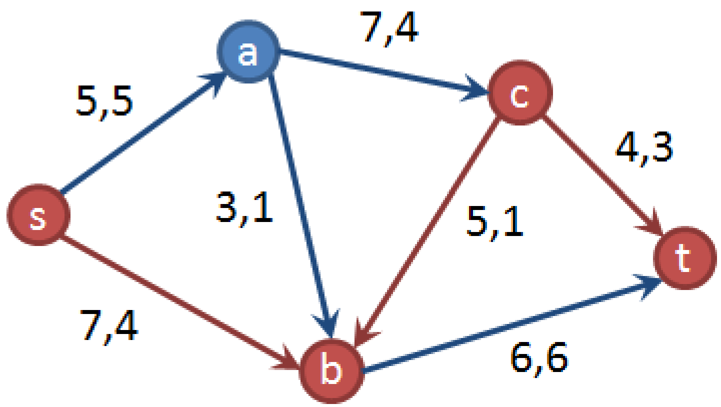
Fluxo Máximo (Algoritmo)

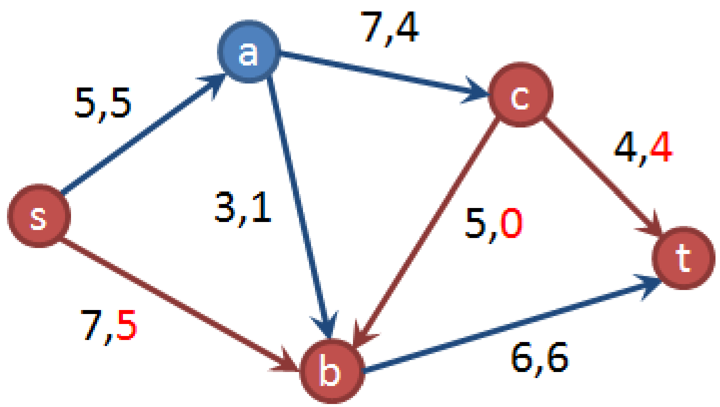
Caminhos de Aumento:

- *Para arco do caminho Q*

  $f(a_i) = f(a_i) + \Delta_Q$, *se* a_i *está no mesmo sentido*

  $f(a_i) = f(a_i) - \Delta_Q$, *se* a_i *está no sentido contrário*





val(f) = 10

Tal caminho é chamado ***caminho de aumento*** *(de fluxo).*

Fluxo Máximo (Algoritmo)

Augmenting Path Algorithm - FFEK

Para cada arco a de N, faça f(a) = 0

Enquanto houver caminho de aumento em N

Seja Q um caminho de aumento qualquer em N

Calcule $\Delta_Q = min_{a \in Q} \{\Delta_a\}$

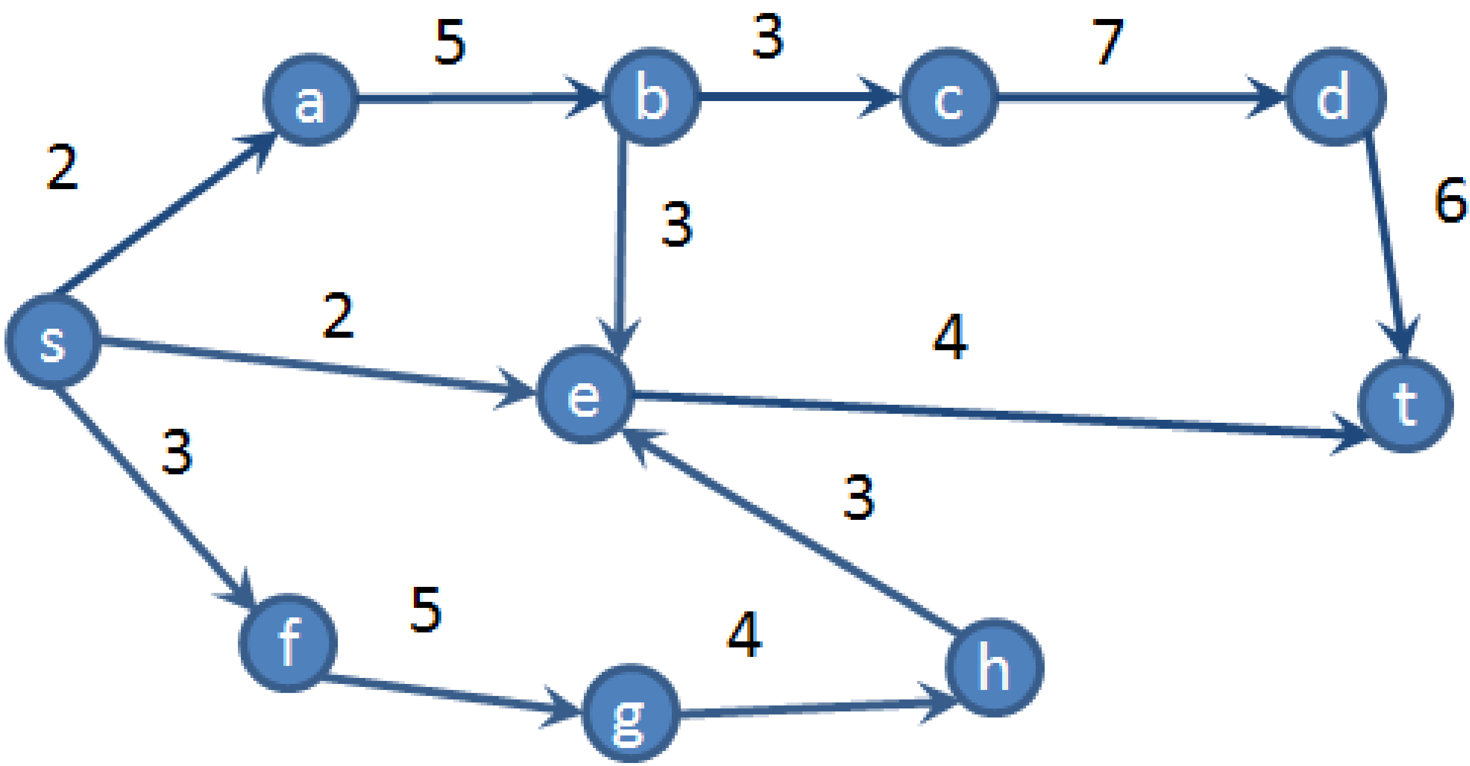
Para cada arco a de Q

Se a está no sentido de Q, faça $f(a) \mathrel{+}= \Delta_Q$

Se a está no contrário de Q, faça $f(a) \mathrel{-}= \Delta_Q$

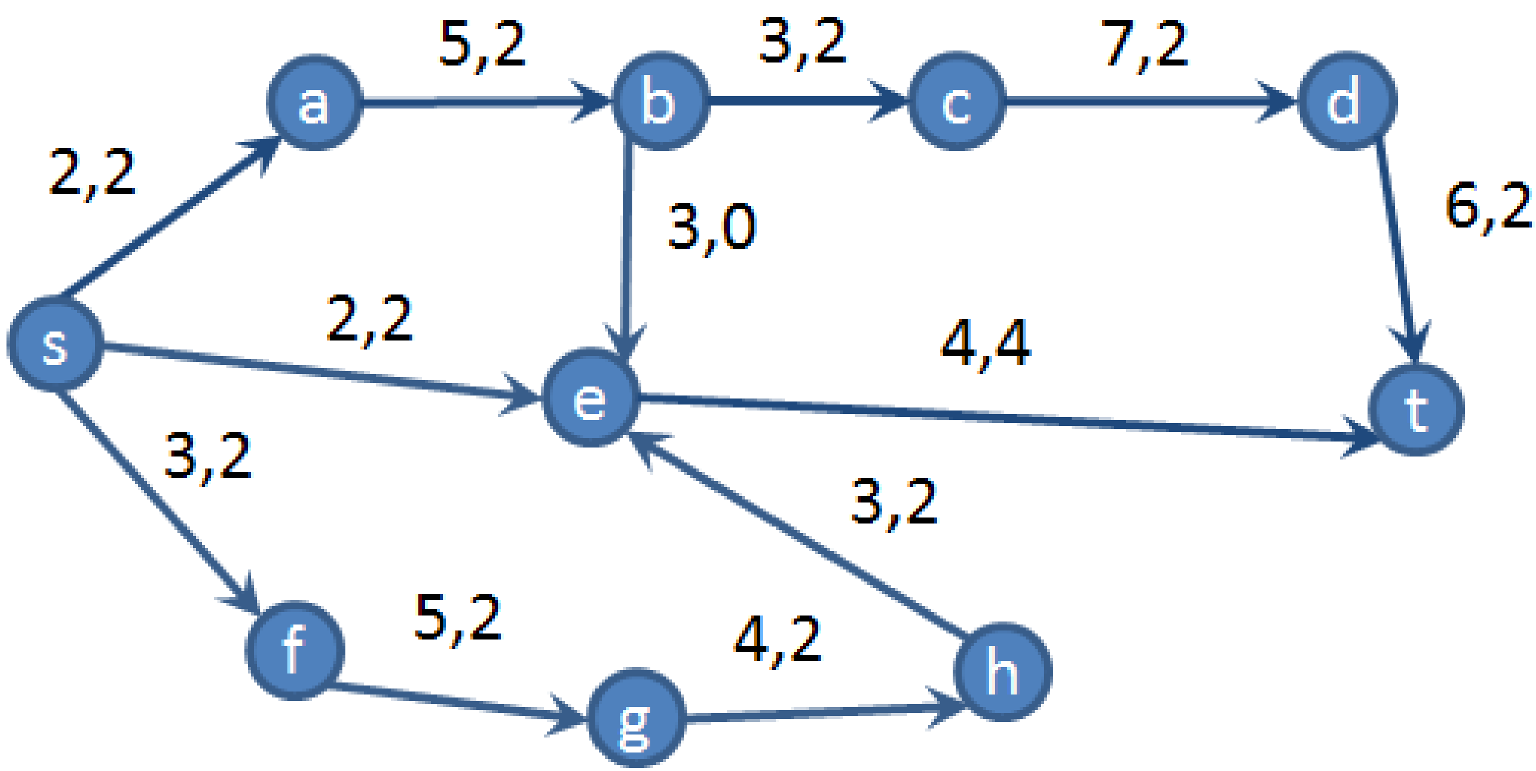
Fluxo Máximo (Algoritmo)

Augmenting Path Algorithm – FFEK (Exemplo)



Fluxo Máximo (Algoritmo)

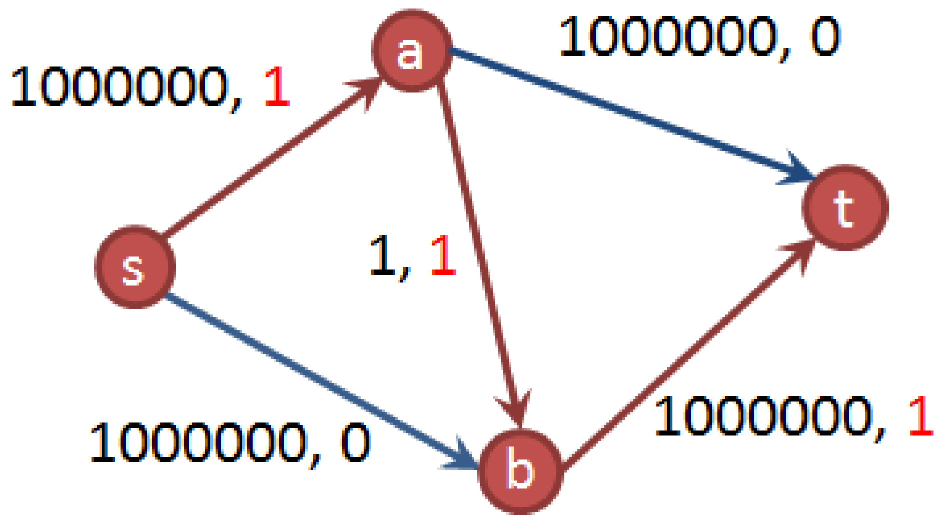
Augmenting Path Algorithm – FFEK (Exemplo)

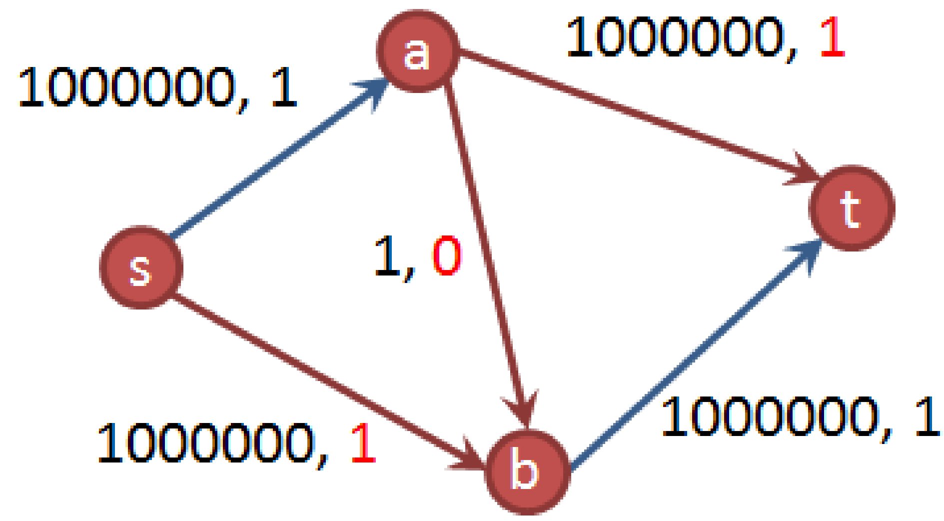


Fluxo Máximo (Algoritmo)

Augmenting Path Algorithm – FFEK

Sem um bom método para encontrar caminho de aumento o algoritmo poderá ficar muito lento

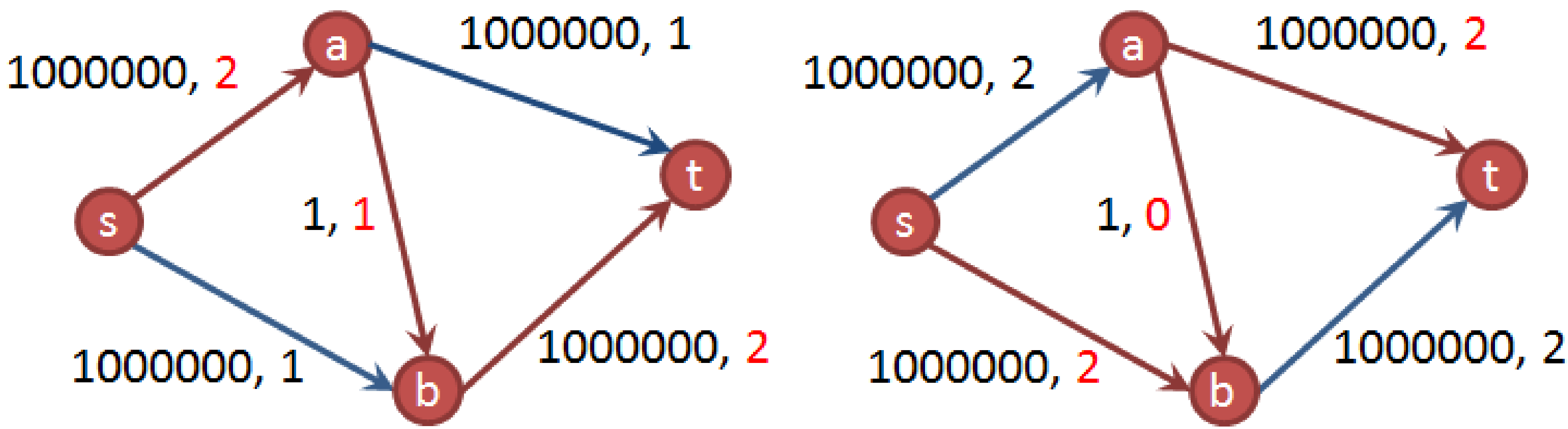




Fluxo Máximo (Algoritmo)

Augmenting Path Algorithm – FFEK

Sem um bom método para encontrar caminho de aumento o algoritmo poderá ficar muito lento

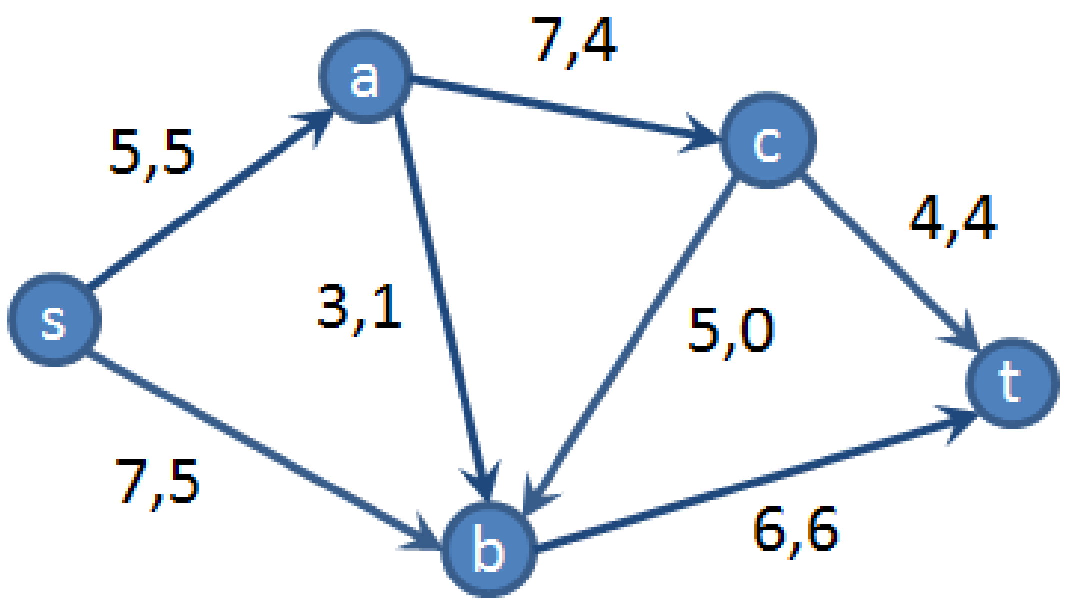


Nesse exemplo, a complexidade seria $O(|A|f^*)$ no pior caso

Fluxo Máximo (Max-Flow-Min-Cut)

O fluxo encontrado tem valor val(f) = 10

Esse é o fluxo máximo na rede

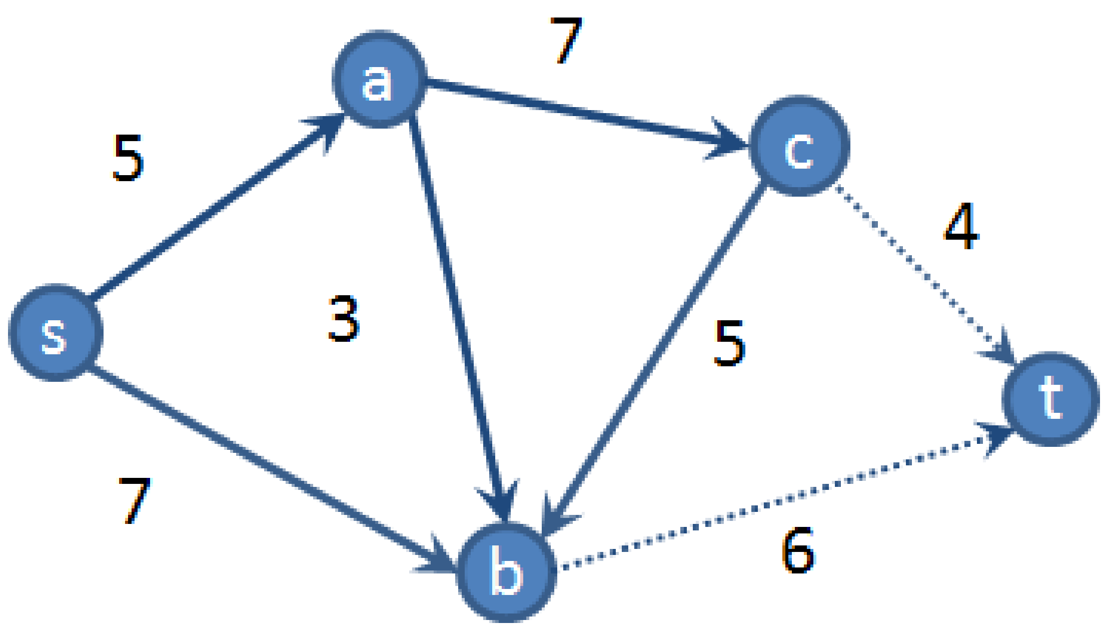


Fluxo Máximo (Max-Flow-Min-Cut)

Para comprovar isto, considere as partições

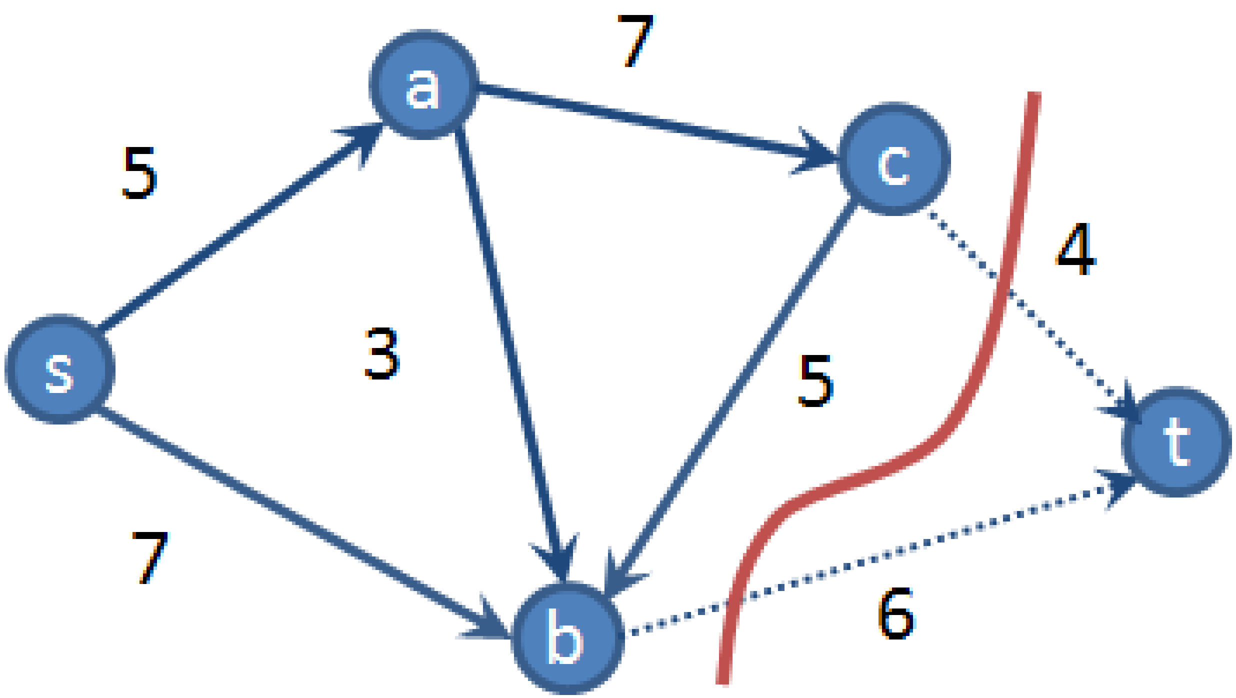
X = {s, a, b, c} e Y = {t}

Os arcos de X a Y não permitem fluxo > 10



Fluxo Máximo (Max-Flow-Min-Cut)

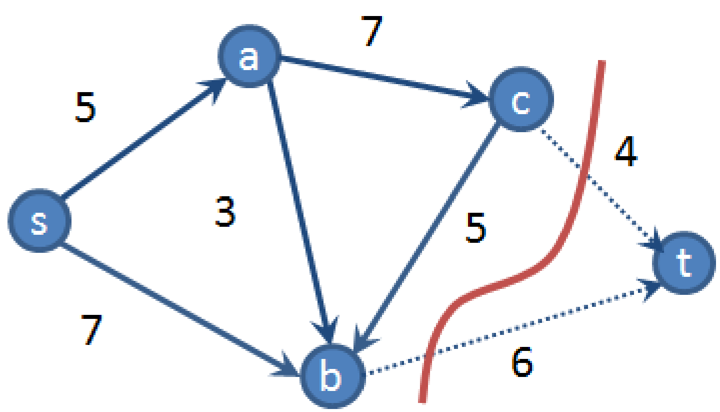
Esse conjunto de arcos é um ***corte*** *s-t na rede*



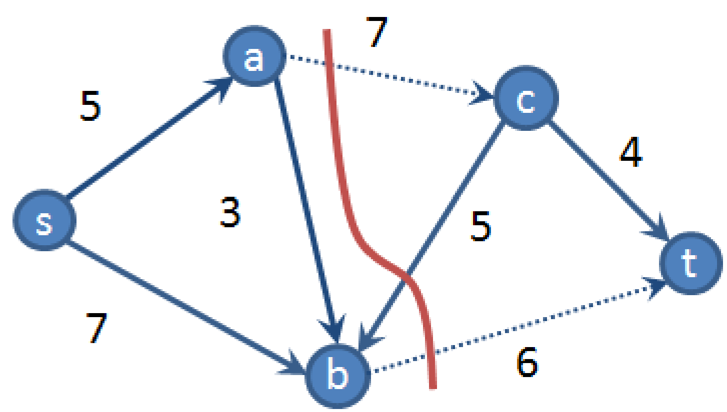
Fluxo Máximo (Max-Flow-Min-Cut)

Definição:

Seja N uma rede e V_S e V_T partição de V_N tal que s ∈ V_S e t ∈ V_T. O conjunto de arcos direcionados de vértices de V_S a vértices de V_N é um ***corte s-t***.



Corte de valor 10.

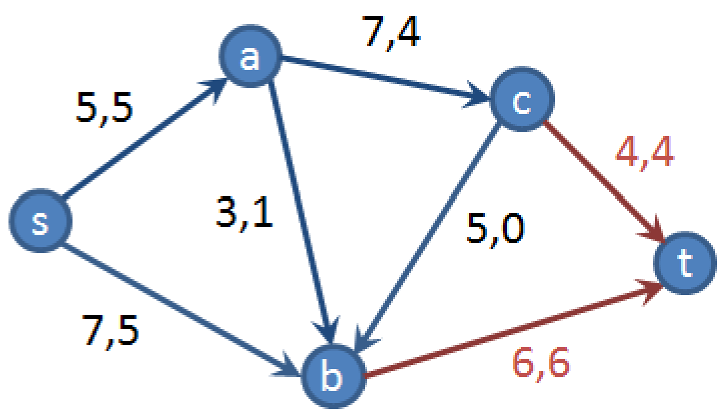


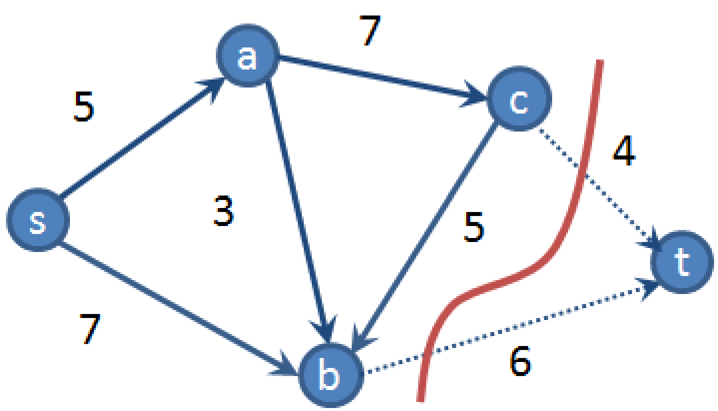
Corte de valor 13.

Fluxo Máximo (Max-Flow-Min-Cut)

Teorema max-flow min-cut:

O fluxo máximo numa rede s-t é igual ao corte mínimo s-t





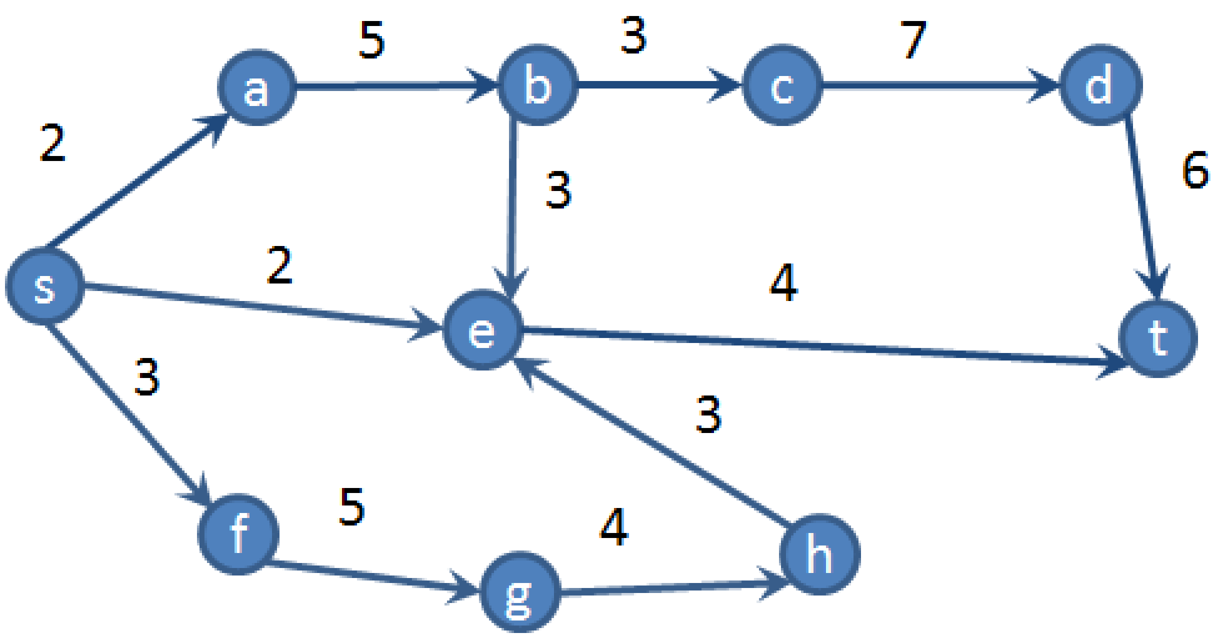
No fluxo máximo, os fluxos nos arcos do corte mínimo correspondem à capacidade desses arcos.

E o fluxo nos arcos contrários ao corte é 0.

Fluxo Máximo (Max-Flow-Min-Cut)

Teorema max-flow min-cut (Exemplo):

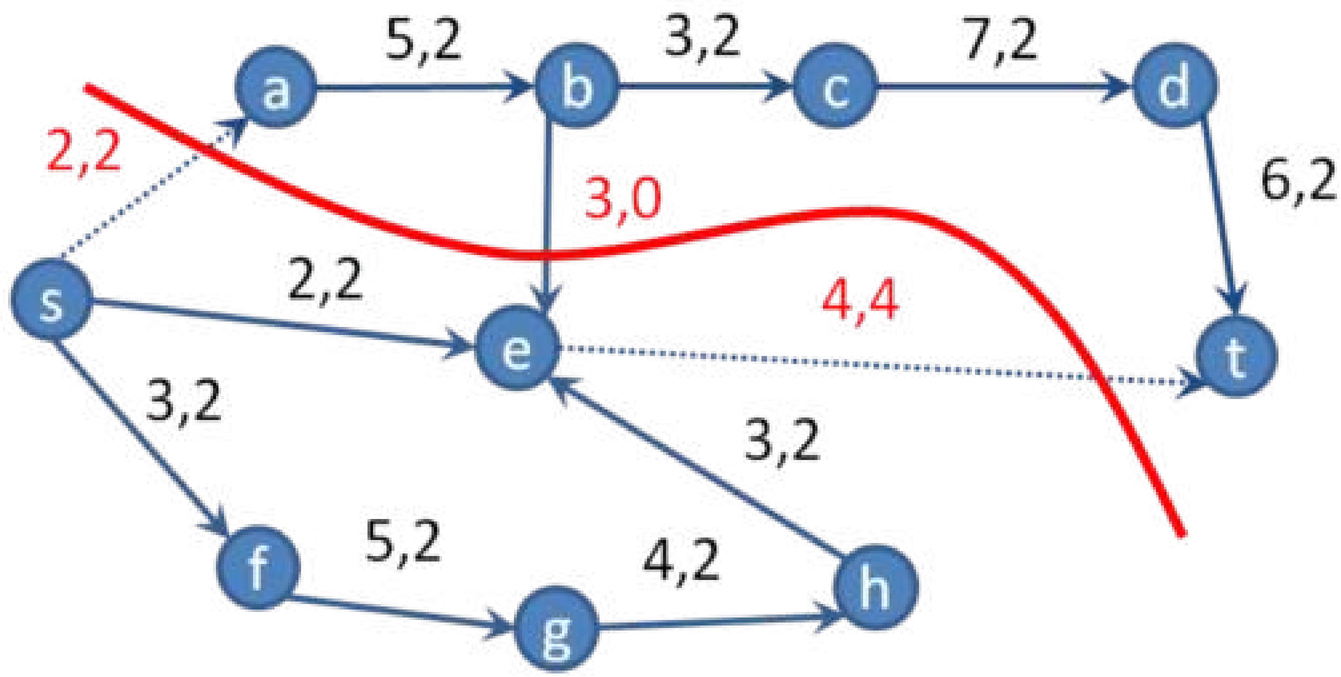
O fluxo máximo numa rede s-t é igual ao corte mínimo s-t



Fluxo Máximo (Max-Flow-Min-Cut)

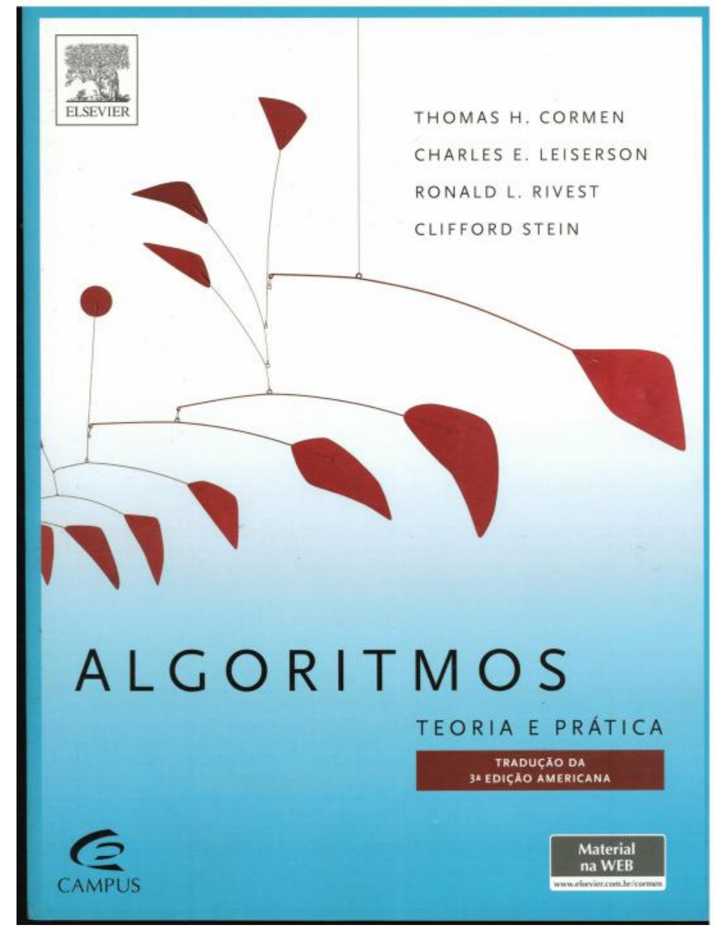
Teorema max-flow min-cut (Exemplo):

O fluxo máximo numa rede s-t é igual ao corte mínimo s-t



Referência Bibliográfica

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; STEIN, C. Algoritmos: teoria e prática. Tradução da 2. ed. Americana. Rio de Janeiro: Campus, 2002.



SIN343 - Desafios de Programação

Referência Bibliográfica

- SKIENA, S.S. REVILLA, M. A. Programming challenges: the programming contest training manual. Springer, 2003.