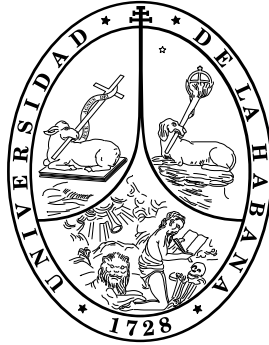


**Universidad de La Habana**  
Facultad de Matemática y Computación



# **Reconocimiento de iris utilizando Análisis de Datos Funcionales**

Autor:  
**Victor Manuel Mendiola Lau**

Tutores:  
**Msc. Francisco J. Silva Mata**  
**Ing. Dania Porro Muñoz**

Tesis presentada en opción al Título de  
Licenciado en Ciencias de la Computación

30 de mayo de 2013

# Dedicatoria

*A mi mamá,  
mi papá,  
mi hermano,  
mi abuela,  
y a toda mi familia.*

# Agradecimientos

*A mi mamá, por ser como es.*

*A mi papá, por siempre querer lo mejor para mí.*

*A mi hermano, por creer siempre en mí.*

*A mi abuela, por inspirarme confianza.*

*A Dania y a Dina, mis tutores, por su inmenso apoyo.*

*A Celia, Anabel, Claudia y Ezequiel por estar siempre ahí.*

*A quienes no mencioné y siempre me han acompañado en las buenas y en las malas.*

# Opinión de los tutores

El reconocimiento de iris es uno de los procesos de identificación biométrica que mayor desarrollo está tomando en la actualidad, debido a las ventajas que posee sobre otros modos de identificación biométrica y a su utilización cada vez más amplia en sistemas de control de las fronteras, sistemas de acceso y otras aplicaciones. El desarrollo de nuevos algoritmos de identificación del iris conlleva a la obtención de soluciones eficaces y eficientes que garanticen resultados competitivos con respecto a las soluciones que se han obtenido a nivel mundial. Algunas de estas soluciones están patentadas o están integradas a sistemas que pertenecen a compañías desarrolladoras de software biométrico que los comercializan a altos precios y los cuales muchas veces no se encuentran a nuestro alcance debido a las restricciones del bloqueo norteamericano. De aquí la importancia que toma la tarea de desarrollar métodos propios de identificación del iris que posteriormente puedan ser incluidos en futuras aplicaciones, teniendo en cuenta además que actualmente hasta donde alcanza nuestro conocimiento no se cuenta en Cuba con ninguna aplicación de este tipo.

Como respuesta a esta necesidad, la investigación desarrollada se basa en la obtención de una representación propia del iris mediante la utilización de funciones, aprovechando las ventajas que brinda este enfoque principalmente en lo referente a la disminución de la dimensionalidad de los datos y la sencillez de la representación.

Durante la primera etapa de la investigación se realizó un estado del arte de los métodos de reconocimiento de iris con el objetivo de valorar objetivamente sus ventajas y desventajas para posteriormente poderlas comparar con la nueva representación pro-

puesta. Además se llevó a cabo un estudio detallado de las técnicas de análisis de datos funcionales y en particular la representación mediante funciones bases, dedicándose especial interés a las bases de Zernike que anteriormente habían sido aplicadas con éxito en la oftalmología para el estudio de enfermedades de la vista.

Bajo estos presupuestos se desarrolló una nueva representación o *codificación* de los patrones del iris mediante los polinomios de Zernike en sus dos versiones básicas, sobre un dominio circular y sobre un dominio anular.

Los experimentos realizados permitieron demostrar que esta representación logra una reducción de la dimensionalidad de los datos notable respecto inclusive a la representación de Daugman, que es la más utilizada en el mundo en este campo y una de las mas compactas, lo que garantiza un ahorro significativo por concepto de espacio de almacenamiento. Simultáneamente como resultado de los experimentos de identificación se determinó que las tasas de errores resultaron comparables con las tasas de errores de los métodos más utilizados en la actualidad.

Otro resultado importante del trabajo desarrollado fue el diseño e implementación de una plataforma de reconocimiento de iris que integra con gran facilidad los diferentes subsistemas de reconocimiento existentes y brinda facilidades para la evaluación del desempeño de los algoritmos y la realización de experimentos de reconocimiento sobre diferentes bases de datos.

Estos resultados son fundamentales para el desarrollo de futuras aplicaciones de reconocimiento de iris con *know how* propio.

Para desarrollar esta investigación, el diplomante ha consultado una abundante y actualizada bibliografía y ha elevado notablemente sus conocimientos sobre el procesamiento de imágenes y el reconocimiento de patrones, el análisis de datos funcionales y los aspectos matemáticos necesarios para la realización y desarrollo de los algoritmos propuestos.

Debe destacarse su independencia durante el desarrollo del trabajo, su disposición para el estudio y el aporte de iniciativas para la solución de los problemas planteados, en un contexto de alta complejidad de los contenidos matemáticos y de programación. Los resultados obtenidos son en gran parte fruto de su dedicación e interés durante el desarrollo de la investigación.

Por todo lo expuesto anteriormente se considera que el diplomante reúne todos los requisitos para enfrentarse a la vida profesional como Licenciado en Ciencias de la Computación y se propone otorgar al Trabajo de Diploma la calificación de EXCELENTE (5 puntos).

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Introducción</b>	<b>2</b>
Reconocimiento biométrico . . . . .	3
Reconocimiento de iris . . . . .	4
Motivación . . . . .	5
Objetivos . . . . .	6
Estructura de la tesis . . . . .	7
<b>1. Sistemas de reconocimiento de iris</b>	<b>8</b>
1.1. ¿Qué es un sistema de reconocimiento de iris? . . . . .	8
1.2. Proceso de reconocimiento de iris . . . . .	9
1.3. Etapas del reconocimiento de iris . . . . .	11
1.3.1. Etapa de segmentación . . . . .	12
1.3.2. Etapa de normalización . . . . .	15
1.3.3. Etapa de representación . . . . .	18
1.3.4. Algoritmos de cotejo . . . . .	20
<b>2. FDA aplicado al reconocimiento de iris</b>	<b>23</b>
2.1. ¿Qué es el Análisis de Datos Funcionales? . . . . .	24
2.2. ¿Qué son los datos funcionales? . . . . .	24

2.3.	Desarrollo del FDA . . . . .	25
2.4.	Objetivos del FDA . . . . .	26
2.5.	Ventajas del FDA . . . . .	27
2.6.	Modelando los datos con FDA . . . . .	28
2.6.1.	Expansión en bases . . . . .	28
2.6.2.	Ajuste por mínimos cuadrados . . . . .	29
2.7.	Representación digital de una imagen . . . . .	31
2.8.	Representación funcional del iris . . . . .	32
2.8.1.	Polinomios Circulares de Zernike . . . . .	32
2.8.2.	Polinomios Anulares de Zernike . . . . .	35
2.8.3.	Método de representación del iris propuesto . . . . .	36
<b>3.</b>	<b>Implementación y resultados</b>	<b>40</b>
3.1.	Diseño e implementación de la plataforma . . . . .	40
3.1.1.	Entorno de desarrollo . . . . .	41
3.1.2.	Módulo de segmentación . . . . .	41
3.1.3.	Módulo de normalización . . . . .	42
3.1.4.	Módulo de representación . . . . .	44
3.1.5.	Módulo de cotejo . . . . .	46
3.2.	Experimentos y resultados . . . . .	46
3.2.1.	Comparación de las tasas de reconocimiento . . . . .	47
3.2.2.	Comparación de las dimensiones de las plantillas . . . . .	48
3.2.3.	Eficiencia de la representación y del cotejo . . . . .	49
	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
	<b>Recomendaciones</b>	<b>52</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>



<b>A. Ejemplos de IRS en explotación</b>	<b>62</b>
<b>B. Polinomios de Zernike</b>	<b>65</b>
B.1. Expresiones para los Polinomios Circulares de Zernike . . . . .	66
B.2. Representación visual de los Polinomios Anulares de Zernike . . . . .	67

# Resumen

Hoy en día resulta de vital importancia el reconocimiento e identificación del individuo en una sociedad que se encuentra en constante crecimiento y desarrollo.

Los sistemas de reconocimiento biométrico permiten la identificación automática del individuo basado en rasgos o características propias del mismo. Entre estos sistemas se destacan los sistemas de reconocimiento de iris como unos de los más precisos y fiables, debido en gran medida, a la gran riqueza de los patrones estructurales del iris.

La representación de los patrones del iris juega un papel decisivo en la eficacia de un sistema basado en este rasgo biométrico. A pesar de que existen varias propuestas para llevar a cabo este proceso, en este trabajo se propone un nuevo método de representación del iris. Esta nueva propuesta está basada en el Análisis de Datos Funcionales, dada la naturaleza continua de las imágenes digitales. La representación de las imágenes del iris mediante este enfoque tiene notables ventajas, entre las que se destaca la apreciable reducción de la dimensión de los datos.

En el presente trabajo se desarrolla una plataforma de reconocimiento de iris con el propósito de verificar la precisión y eficiencia del método propuesto, en la cual se incluyeron implementaciones de algunos métodos clásicos de representación del iris. Los experimentos realizados muestran el buen comportamiento del método propuesto, el cual llega a mostrar ciertas ventajas con respecto a los métodos clásicos implementados.

# Introducción

La necesidad de reconocer a un individuo en la sociedad de la cual es parte, es una tarea desafiante hoy en día. En este contexto han surgido y evolucionado nuevos métodos de reconocimiento de personas, caracterizados por el uso de las más diversas técnicas. Los métodos de identificación de individuos son extremadamente importantes pues son necesarios donde se requiera de autorización para realizar cierta acción, ya sea para abordar una aeronave, cruzar fronteras, etc.

Los distintos métodos existentes de identificación de personas pueden ser agrupados en 3 clases[52]: los basados en posesión (llaves, carnés, placas o insignias), los basados en conocimiento (identificador de usuario-*user ID*-, palabra clave-*password*-) y los métodos biométricos.

Los primeros métodos automatizados de identificación de personas dependían de las posesiones o el conocimiento del individuo, lo cual presenta sus limitantes. Las desventajas más notables de estos métodos son que: las posesiones se pueden perder, ser falsificadas o duplicadas, el conocimiento puede ser olvidado y ambos pueden ser compartidos o robados. Por consiguiente, los métodos mencionados anteriormente no deberían ser utilizados en aplicaciones donde se requiera un alto nivel de seguridad. Sin embargo, los métodos de reconocimiento biométrico[38] constituyen una solución alternativa a los problemas anteriores debido a que *realmente* verifican la identidad del individuo, logrando un alto nivel de confianza.

# Reconocimiento biométrico

La biometría es la ciencia de identificar o verificar la identidad de una persona basándose en características fisiológicas o del comportamiento de dicha persona. Entre las características fisiológicas se encuentran las huellas dactilares, imágenes del rostro, el iris, el ADN, entre otras. Las características basadas en el comportamiento son acciones llevadas a cabo por la persona de una manera peculiar y entre estas se encuentran la voz, la firma, la forma de caminar, etc[62].

El uso de rasgos biométricos con el propósito de identificar a una persona requiere que dicho rasgo sea único para cada individuo, que pueda ser medido fácilmente, y que sea un rasgo invariante en el tiempo. Los sistemas de reconocimiento biométrico primariamente capturan una muestra del rasgo biométrico, puede ser una grabación digital de una señal de sonido en el caso del reconocimiento de voz o tomar una imagen digital para el caso del reconocimiento de rostro. Luego, la muestra tomada es transformada mediante un método matemático o computacional en una plantilla biométrica (o *biometric template*). La plantilla biométrica obtenida proporcionará una representación altamente discriminatoria del rasgo medido, la cual puede ser comparada de manera objetiva con otras plantillas con el objetivo de determinar la identidad de la persona[50].

Los sistemas biométricos tienen muchas aplicaciones hoy en día en diversas áreas de la sociedad como[24]:

- Servicios bancarios, financieros y comerciales.
- Acceso a PCs, redes de computadoras y a locales e instalaciones de diversa índole.
- Viajes y cruce de fronteras.
- Seguridad en prisiones.
- Identificación de personas.

Algunos rasgos biométricos como las firmas, fotos, huellas dactilares, huellas vocales y los patrones de los vasos sanguíneos de la retina tienen sus inconvenientes. Aunque las firmas y las fotos son poco costosas y de fácil obtención, son difíciles de identificar

automáticamente y pueden ser fácilmente falsificadas. Las huellas vocales digitales son susceptibles a cambios en la voz del individuo y pueden ser falsificadas. Por otra parte, las huellas dactilares y de la palma de la mano requieren contacto físico, además de que también pueden ser alteradas o falsificadas. En cambio, el iris posee una serie de características que lo convierten en un rasgo biométrico muy deseable para un sistema de identificación biométrico automático, rápido y fiable[22].

## Reconocimiento de iris

El reconocimiento de iris es el proceso de identificación biométrica de una persona mediante el reconocimiento de los patrones del iris, tecnología[26] patentada por el profesor John Daugman en 1994[39]. Aún cuando esta tecnología es relativamente joven, ha mostrado ser muy estable y precisa[62].

La pupila, el iris y la esclera son las estructuras oculares más visibles de una persona (ver figura 1) a distancia. El iris es la parte coloreada del ojo, un músculo con forma circular (o elíptica) que se encuentra detrás de la córnea. Controla el nivel de iluminación dentro del ojo como si fuera la apertura de una cámara[2]. La apertura redonda (circular o elíptica) en el centro del iris es la pupila.

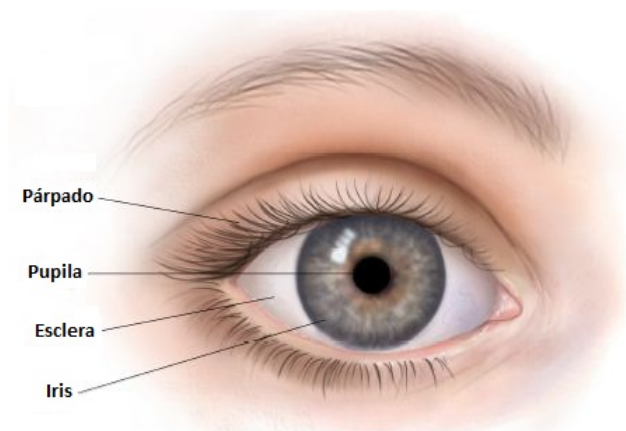


Figura 1: Ojo humano.

Los patrones del iris están formados por capas combinadas de células epiteliales pigmentadas, músculos que controlan la pupila, tejido conectivo y vasos sanguíneos, entre otros componentes[11, 71]. La gran complejidad fisiológica de este órgano trae como consecuencia la gran aleatoriedad de sus patrones, lo cual lo hace muy adecuado para mediciones biométricas[24].

El iris es un órgano interno y por lo tanto está protegido del exterior, además sus patrones son estables en el tiempo y se producen muy pocos cambios a lo largo de la vida de un individuo[34]. Los patrones del iris son únicos, proporcionando de este modo un excelente método para la identificación de individuos con tasas de error tan bajas de 1 en  $10^{15}$  posibilidades<sup>1</sup>[28].

Debido a características del iris como la de estar protegido del ambiente exterior, mantener una gran estabilidad en el tiempo y la gran aleatoriedad de sus patrones, se justifica la gran cantidad de investigaciones e inversiones que se realizan sobre esta tecnología en todo el mundo[12].

## Motivación

El reconocimiento de iris resulta un área de gran interés dentro del cambio de los sistemas de reconocimiento biométrico debido a sus excepcionales características. Muestra del auge que ha tenido esta tecnología de reconocimiento biométrico en las últimas décadas son la gran cantidad de investigaciones realizadas en este sentido. Además de Daugman, otros investigadores han propuesto nuevos algoritmos de reconocimiento de iris como: Wildes en [72], Boles y Boashash en [16], Zhu en [76], Tisse en [69], entre otros[12].

Aunque los algoritmos de reconocimiento de iris propuestos hasta el momento han mostrado ser rápidos y precisos, algunos detalles de sus implementaciones no han sido publicados, pues muchos de estos están patentados y son muy utilizados a nivel

---

<sup>1</sup>Incluso los gemelos idénticamente genéticos tienen patrones distintos del iris[1].

comercial[12].

Hasta nuestro conocimiento, en nuestro país no se reporta la existencia de sistemas de reconocimiento de iris en explotación, pues estos no están a nuestro alcance, y si lo estuvieran crearían una dependencia tecnológica, lo cual traería consigo constantes inversiones para la actualización y mantenimiento de dichos sistemas. Es por eso que resulta de gran importancia desarrollar nuevos algoritmos propios y competitivos en comparación con los ya existentes, pues esto sería un gran paso de avance en la implantación de esta tecnología en el país.

## Objetivos

El rendimiento global de un sistema de reconocimiento de iris depende del rendimiento de cada uno de sus subsistemas. La calidad de la imagen adquirida, su segmentación, su normalización y extracción de rasgos, todos juntos, definen el rendimiento del sistema[12]. Por tanto, al realizar mejoras u optimizaciones a cualquiera de estos subsistemas se estaría realizando mejoras al sistema completo. Uno de los subsistemas de un sistema de reconocimiento de iris que tiene gran importancia es el de extracción de rasgos<sup>2</sup> y es aquí donde se centrará nuestro trabajo.

El objetivo fundamental de este trabajo es diseñar e implementar un nuevo método de representación del iris, que aprovechando las ventajas de la aplicación del Análisis de Datos Funcionales sea eficiente, eficaz y competitivo.

Para poder cumplir con el objetivo fundamental antes propuesto es necesario cumplir con los objetivos secundarios siguientes:

- Realizar implementaciones de algoritmos para la:
  - Segmentación del iris.
  - Normalización del iris.
  - Codificación del iris (entre estos el propuesto).

---

<sup>2</sup>Subsistema encargado de la representación del iris.

- Diseñar e implementar una plataforma de reconocimiento de iris que permita realizar comparaciones objetivas entre los distintos algoritmos de codificación del iris.

## Estructura de la tesis

El resto de este documento se encuentra dividido en 3 capítulos. El **capítulo 1** describe el funcionamiento básico de un sistema de reconocimiento de iris, así como de los distintos subsistemas que lo componen. En este capítulo se analizan brevemente los métodos más conocidos que han sido propuestos en la literatura para la segmentación, la normalización y representación del iris. El **capítulo 2** aborda los fundamentos teóricos del Análisis de Datos Funcionales, en el cual se describe la base matemática necesaria para la comprensión del nuevo método de representación del iris propuesto. Finalmente, se realiza una descripción del nuevo método propuesto de representación del iris. El **capítulo 3** expone los detalles de implementación de la plataforma de reconocimiento de iris. Además, se muestran y discuten los resultados obtenidos, señalando las ventajas y desventajas del método de representación del iris propuesto. Por último, se exponen las conclusiones del trabajo y las recomendaciones a seguir en trabajos futuros.



# Capítulo 1

## Sistemas de reconocimiento de iris

### 1.1. ¿Qué es un sistema de reconocimiento de iris?

Un sistema de reconocimiento de iris es un sistema biométrico automatizado basado en los patrones del iris como indicador biométrico[34].

Cuando se desea evaluar un sistema biométrico es necesario tener en cuenta una variedad de características de los mismos como la *precisión*, *tamaño de la representación*, *escalabilidad*, *invasividad*, *madurez* y *costo*. En la tabla 1.1 se muestran algunos de los sistemas biométricos más utilizados en la actualidad atendiendo a sus características más importantes. Aquí se evalúa el comportamiento de los sistemas de reconocimiento de iris respecto a otros sistemas biométricos, destacando aquellas características donde se evidencian sus mayores ventajas.

La cantidad de información contenida en el iris es tan considerable que permite la identificación de individuos mediante procedimientos no invasivos y sin restricciones ambientales, obteniendo resultados muy confiables, lo cual permite la implementación de estos sistemas de verificación de identidad en condiciones reales[14].

	Huellas	Voz	Rostro	Iris	Palma	Firma
Mejor FAR	$10^{-8}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-10}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
Mejor FRR	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
Tamaño (plantilla)	< 200 bytes	< 2 Kbytes	< 2 Kbytes	256 bytes	< 10 bytes	< 200 bytes
Escalabilidad	Alta	Media	Media	Muy alta	Baja	Media
Sensor (tipo)	Contacto	No intrusivo	No intrusivo	No intrusivo	Contacto	Contacto
Madurez	Muy alta	Alta	Media	Alta	Media	Media
Sensor (Costo)	< \$100	< \$5	< \$50	< \$3000	< \$500	< \$300

Tabla 1.1: Comparación de los sistemas biométricos más comunes. (tomado de [62])

## 1.2. Proceso de reconocimiento de iris

La mayoría de los sistemas de reconocimiento de iris están basados en los principios descritos en las patentes de reconocimiento de iris desarrolladas por John Daugman[23].

El proceso de reconocimiento de iris comienza con la adquisición de la imagen del iris. Comúnmente se captura una imagen del sujeto utilizando iluminación infrarroja (o (NIR), del inglés *Near InfraRed illumination*), descartando de esa manera la utilización del color del iris. Aunque el color del iris constituye una gran fuente de información para el proceso de reconocimiento, la adquisición de la imagen bajo luz natural es frecuentemente evitada debido a que pueden producirse reflexiones especulares en la córnea[36].

La imagen adquirida es sometida a un preprocesamiento (podría pasar por un análisis focal, y si el sujeto está fuera de foco entonces el proceso de reconocimiento comenzaría desde el principio) donde se puede mejorar la calidad de la misma mediante la ecualización del histograma y/o ajustes de brillo o contraste.

A continuación se realiza el proceso de segmentación, cuyo propósito fundamental es el de aislar la región correspondiente al iris. La detección del iris se realiza generalmente mediante la detección de 2 círculos aproximadamente concéntricos: uno que determina la frontera entre el iris y la esclera, y otro que determina la frontera entre la pupila y el iris. El centro y el radio de ambos círculos deben ser localizados, lo cual se logra aplicando algoritmos de detección de círculos.

El proceso de segmentación es favorecido generalmente por el alto contraste existente entre la pupila, el iris y la esclera. Normalmente los párpados cubren el iris, aunque las pestañas y reflexiones especulares también pueden estar presentes en algunas imágenes, por lo que debido a estos factores se pudieran presentar problemas en etapas posteriores de los algoritmos de detección, llegando a provocar errores en muchas situaciones.

Por las razones anteriores, para garantizar el buen desempeño de los algoritmos posteriores de reconocimiento, constituye una buena práctica realizar la detección de párpados, pestañas y reflexiones especulares en esta etapa, agregando estas oclusiones a un mapa de ruidos.

Una vez que la región de interés fue encontrada, el iris es *separado* del resto de las partes del ojo como la pupila, la esclera, los párpados y las pestañas, dejando únicamente la información válida para un posterior procesamiento.

Durante la etapa de normalización, la región aislada del iris es llevada a dimensiones fijas (especificadas por la resolución radial y angular) haciendo uso de una transformación de coordenadas[39]<sup>1</sup>.

En la etapa de representación del iris, la imagen normalizada se codifica para obtener una plantilla biométrica, generalmente extrayendo rasgos característicos de dicha imagen.

Finalmente, en la etapa de cotejo (o de *matching*), la plantilla generada es comparada con otras almacenadas en una base de datos con el objetivo de identificar al sujeto. Una identificación positiva del sujeto se logra cuando el valor de similitud entre 2 plantillas se encuentra por debajo de un umbral prefijado.

---

<sup>1</sup>Proceso conocido como normalización geométrica.

La descripción del proceso de reconocimiento de iris se puede apreciar, con un poco más de detalles, en la figura 1.1.

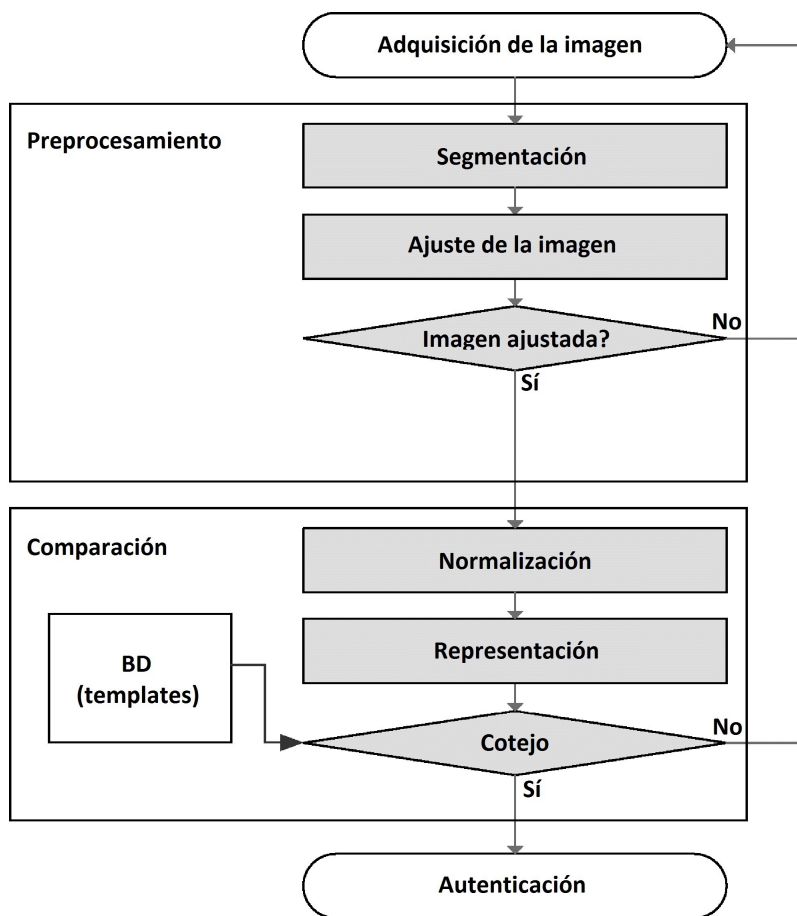


Figura 1.1: Diagrama del proceso de reconocimiento de iris.

### 1.3. Etapas del reconocimiento de iris

Un sistema de reconocimiento de iris está compuesto por varios subsistemas, asociados a cada una de las etapas del reconocimiento de iris. Estas etapas son la segmentación (localizar la región del iris en una imagen del ojo), la normalización (crear una representación dimensionalmente consistente de la región del iris) y la representación del iris (crear una plantilla conteniendo únicamente las características más discriminativas del

iris)[50]. Posteriormente son aplicados los algoritmos de cotejo.

La entrada del sistema es una imagen del ojo y la salida es una plantilla biométrica, proporcionando una representación matemática y computacional del iris[50].

### 1.3.1. Etapa de segmentación

El resultado del proceso de segmentación depende de la calidad de la imagen adquirida. Esta etapa es crítica en el éxito de un sistema de reconocimiento de iris, pues los datos que son falsamente representados como patrones del iris, traen como consecuencia la alteración de las plantillas generadas, teniendo como consecuencia bajas tasas de reconocimiento[50].

Muchos métodos han sido propuestos para la detección del iris, entre los que cabe destacar el Operador Integro-Diferencial de Daugman, la Transformada de Hough, el Modelo de Contornos Activos, etc.

A continuación se describen algunos de estos métodos, señalando sus virtudes y deficiencias.

#### Operador Integro-Diferencial de Daugman

El Operador Integro-Diferencial de Daugman, propuesto en [24], asume que la pupila y el iris son contornos circulares y funciona como un detector de bordes circulares[12].

La detección de los párpados superior e inferior también puede ser llevada a cabo mediante este operador, ajustando la búsqueda de contornos circulares a contornos arqueados[27].

El Operador Integro-Diferencial de Daugman se define de la siguiente manera[26]:

$$\max(r, x_0, y_0) \left| G_\sigma(r) * \frac{\partial}{\partial r} \oint_{(r, x_0, y_0)} \frac{I(x, y)}{2\pi r} \partial_s \right| \quad (1.1)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial r} \oint_{(r, x_0, y_0)} \frac{I(x, y)}{2\pi r} \partial_s$  es el diferencial parcial (respecto a  $r$ ) de la integral de contorno circular normalizada por  $2\pi r$ , con radio  $r$  y centro en  $(x_0, y_0)$  sobre el arco  $\partial_s$ . La

función  $G_\sigma(r)$  es una función de suavizado dependiente del parámetro  $\sigma$  que suaviza la intensidad de la imagen para una búsqueda más precisa.

El operador busca pixel a pixel en la imagen  $I(x, y)$  y obtiene la derivada parcial de la integral sobre los contornos circulares para diferentes radios. El funcionamiento de este operador se basa en que el borde de la pupila y el limbo maximizan el valor del diferencial parcial de la integral de contorno circular, debido a que se produce un cambio repentino en los valores de intensidad sobre los bordes circulares[12].

## Transformada de Hough

La transformada de Hough es un algoritmo del campo de la visión por computadora que puede ser utilizado para determinar los parámetros de objetos geométricos simples como líneas y círculos presentes en una imagen[50].

La Transformada Circular de Hough puede ser utilizada para determinar el radio y las coordenadas del centro de la pupila y el iris. Algunos algoritmos automáticos de segmentación basados en esta transformada son los empleados en sistemas como [72, 40, 69, 45].

Primeramente, se computa un mapa de bordes mediante el cálculo de las primeras derivadas de los valores de intensidad de los píxeles en la imagen y luego se le aplica un *umbral*[20], obteniéndose una imagen binaria. El mapa de bordes se utiliza para realizar un proceso de votación para maximizar la Transformada de Hough para el contorno deseado[12]. Si se denotan a los puntos de borde obtenidos como  $(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, n$  la Transformada de Hough se define como[12]:

$$H(x_c, y_c, r) = \sum_{j=1}^n h(x_j, y_j, x_c, y_c, r), \quad (1.2)$$

donde

$$h(x_j, y_j, x_c, y_c, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x_j, y_j, x_c, y_c, r) = 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (1.3)$$

Tanto la pupila como el limbo son modelados como círculos y es por eso que la función  $g$  en este caso se define como:

$$g(x_j, y_j, x_c, y_c, r) = (x_j - x_c)^2 + (y_j - y_c)^2 - r^2 \quad (1.4)$$

Asumiendo un círculo de centro  $(x_c, y_c)$  y radio  $r$ , los puntos de borde situados sobre dicho círculo tienen una evaluación de 0 en la función  $g$ . El valor de  $g$  para estos puntos es transformado a 1 por la función  $h$ , lo cual representa el patrón local del contorno.

Un punto de máximo en el espacio de Hough corresponderá al radio y coordenadas del centro del círculo mejor definido por los puntos considerados como bordes. En los métodos propuestos por [72, 40] se hace también uso de la Transformada Parabólica de Hough para la detección de párpados, aproximando los párpados superior e inferior mediante arcos parabólicos, los cuales son representados mediante[40]:

$$\left( -(x - h_j)\sin\theta_j + (y - k_j)\cos\theta_j \right)^2 = a_j \left( (x - h_j)\cos\theta_j + (y - k_j)\sin\theta_j \right), \quad (1.5)$$

donde  $a_j$  ( $< 0$ ) controla la curvatura de la parábola,  $(h_j, k_j)$  es el vértice de la parábola y  $\theta_j$  es el ángulo formado entre el eje  $x$  y el eje principal de la parábola<sup>2</sup>.

Existen varias inconvenientes asociadas a los métodos basados en la Transformada de Hough. Primeramente, se requiere de la selección de los umbrales necesarios para el proceso de detección de bordes, lo cual puede traer como consecuencia la pérdida de puntos de borde, y por consiguiente, un fallo en la detección de los círculos o arcos. En segundo lugar, la Transformada de Hough es computacionalmente costosa debido a su aproximación por *fuerza bruta*, lo cual no es deseable en aplicaciones en tiempo real[50].

## Modelo de Contornos Activos

El modelo de contornos activos para la localización de la pupila y el limbo fue propuesto por Ritter en [63].

---

<sup>2</sup>El parámetro  $j = m, n$  donde  $m$  = párpado superior y  $n$  = párpado inferior.

Los contornos activos responden a un conjunto de fuerzas internas y externas pre-determinadas, deformándose o moviéndose por la imagen hasta que un cierto *equilibrio* es alcanzado. El contorno contiene una cantidad finita de vértices, cuyas posiciones son alteradas por 2 fuerzas adversas: la fuerza interna y la fuerza externa.

La fuerza interna es aplicada a cada vértice del contorno y es la responsable de expandir el contorno con el propósito de transformarlo en la región de interés[12]. La fuerza externa generalmente es calculada a partir de la información proveniente de la imagen, generalmente de sus bordes.

Cada vértice del contorno se mueve en el intervalo discreto de tiempo entre  $t$  y  $t + 1$ , donde  $F_i$  es la fuerza interna,  $G_i$  es la fuerza externa y  $V_i$  es la posición del vértice  $i$ [50]:

$$V_i(t + 1) = V_i(t) + F_i(t) + G_i(t) \quad (1.6)$$

### 1.3.2. Etapa de normalización

La normalización es la etapa encargada de *preparar* el iris ya segmentado para la posterior etapa de representación. Las imágenes del iris se ven afectadas por su distancia y posición angular respecto a la cámara. A estas inconsistencias dimensionales se suman las variaciones en los patrones del iris debido a la contracción y dilatación de la pupila (a causa de distintos niveles de iluminación), inclinación de la cabeza y el movimiento del ojo en su cavidad.

Bajo estas circunstancias, es necesaria una técnica de normalización para contrarrestar las variaciones anteriores. Este proceso de normalización producirá regiones del iris con las mismas dimensiones, de manera tal que imágenes del mismo iris tomadas bajo distintas condiciones tengan sus rasgos distintivos en la misma localización espacial[50].

A continuación se describen algunos de estos métodos, señalando sus virtudes y deficiencias.



## Modelo de Rubber Sheet

El Modelo de *Rubber Sheet* fue diseñado por Daugman en [26], el cual intenta compensar las variaciones en el iris producidas a causa de la distancia del ojo a la cámara (escala) y su posición respecto a la cámara (traslación)[12].

Este método transforma la región del iris de coordenadas cartesianas a coordenadas polares[12], asociando cada punto de dicha región a un par de coordenadas polares  $(r, \theta)$  donde el radio  $r$  pertenece al intervalo  $[0, 1]$  y el ángulo  $\theta$  al intervalo  $[0, 2\pi]$  (ver figura 1.2).

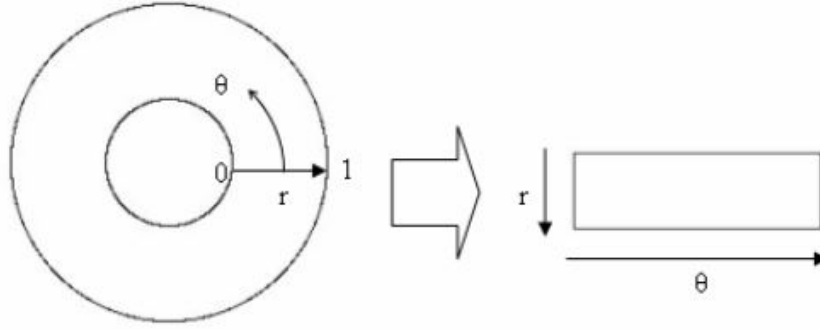


Figura 1.2: Modelo de Rubber Sheet de Daugman.

La transformación de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  a las coordenadas polares no concéntricas es modelada como[50]:

$$I(x(r, \theta), y(r, \theta)) \rightarrow I(r, \theta) \quad (1.7)$$

con

$$x(r, \theta) = (1 - r)x_p(\theta) + rx_i(\theta)$$

$$y(r, \theta) = (1 - r)y_p(\theta) + ry_i(\theta)$$

$$x_p(\theta) = x_{p0}(\theta) + r_p \cos(\theta)$$

$$y_p(\theta) = y_{p0}(\theta) + r_p \sin(\theta)$$

$$x_i(\theta) = x_{i0}(\theta) + r_i \cos(\theta)$$

$$y_i(\theta) = y_{i0}(\theta) + r_i \sin(\theta)$$

donde  $I(x, y)$  es la imagen de la región del iris,  $(x, y)$  son las coordenadas cartesianas originales,  $(r, \theta)$  las correspondientes coordenadas polares normalizadas, y  $(x_p, y_p)$  y  $(x_i, y_i)$  las coordenadas de los puntos frontera de los bordes de la pupila y el iris respectivamente.

Este método tiene en cuenta variaciones como la dilatación y contracción de la pupila, la distancia a la que fue tomada la imagen, etc. Sin embargo, no es capaz de contrarrestar las variaciones producidas por inconsistencias rotacionales, por ejemplo, al inclinar la cabeza hacia un lado. En el sistema de reconocimiento de iris propuesto por Daugman, estas variaciones son tratadas en la fase de cotejo realizando corrimientos a las plantillas en la dirección  $\theta$  hasta que estas queden alineadas[50].

## Registro de la imagen

La técnica de normalización de registro de la imagen (o en inglés *Image Registration*) fue propuesta por Wildes en [71]. En este método, la nueva imagen adquirida  $I_a(x, y)$  es alineada, mediante un proceso de transformación geométrica, con una imagen de la base de datos  $I_d(x, y)$ [50].

En la selección de una función de transformación de coordenadas,  $(U(x, y), V(x, y))$ , se tratan de acercar los valores de intensidad de la nueva imagen a los de la imagen de referencia. La función de transformación debe ser seleccionada de manera que se minimice la expresión[50, 12]:

$$\int_x \int_y \left( I_d(x, y) - I_a(x - u, y - v) \right)^2 dx dy \quad (1.8)$$

El proceso de alineación contrarresta las inconsistencias producidas por variaciones de escala y rotación[12]. Además, la función de transformación está sujeta a la restricción

de realizar una transformación de similaridad de las coordenadas  $(x, y)$  a las coordenadas  $(x', y')$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - sR(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde  $s$  es un factor de escalado y  $R(\theta)$  es una matriz de rotación dependiente de  $\theta$ . En la implementación, dadas las imágenes  $I_a$  y  $I_d$ , los parámetros  $s$  y  $\theta$  son obtenidos mediante un proceso de minimización iterativa[71].

### 1.3.3. Etapa de representación

Con el objetivo de reconocer de manera precisa a un individuo, los rasgos más discriminativos presentes en los patrones del iris deben ser extraídos. Solamente las características más significativas deben ser convertidas en plantillas biométricas para que de esa manera puedan realizarse comparaciones entre ellas.

A continuación se describen algunos de estos métodos, señalando sus virtudes y deficiencias.

#### Filtros de Gabor

Los filtros de Gabor son capaces de obtener una buena representación de una señal tanto en espacio como en frecuencia. Los filtros de Gabor se forman mediante la combinación de una función seno/coseno con una función gaussiana[50].

La descomposición de una señal mediante los filtros de Gabor se realiza sobre un espacio complejo, donde la parte real es especificada por la función coseno en conjunto con la función gaussiana y la parte imaginaria es especificada por la función seno en conjunto con la función gaussiana.

Daugman hace uso de una versión bidimensional de los filtros de Gabor, conocidos como los filtros 2D Gabor (o *2D Gabor Filters*) para representar los patrones del iris[50]. Este filtro sobre el dominio  $(x, y)$  de una imagen se representa como:

$$G(x, y) = e^{-\pi\left(\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}\right)} e^{-2\pi i(u_0(x-x_0) + v_0(y-y_0))} \quad (1.9)$$

donde  $e^{-\pi\left(\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2}\right)}$  es la función gaussiana,  $e^{-2\pi i(u_0(x-x_0) + v_0(y-y_0))}$  es la exponencial compleja<sup>3</sup>,  $(x_0, y_0)$  son las coordenadas en el espacio del centro de la función gaussiana,  $(\alpha, \beta)$  las desviaciones estándares que definen el tamaño de la ventana<sup>4</sup> y  $(u_0, v_0)$  especifican la modulación con una frecuencia espacial  $\omega_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$ .

Daugman *cuantifica* la información de fase obtenida una vez aplicando los filtros 2D Gabor en 4 niveles distintos, uno por cada uno de los cuadrantes en el dominio complejo (ver figura 1.3). Al tomar solamente la información de fase es posible representar los rasgos más distintivos del iris, pues se desecha información redundante como la iluminación, la cual es representada por la amplitud[50, 56].

Los 4 niveles son representados utilizando 2 bits de datos, de manera tal que cada *pixel* en la imagen normalizada del iris genera 2 bits de datos en la plantilla (ver figura 1.3)[50].

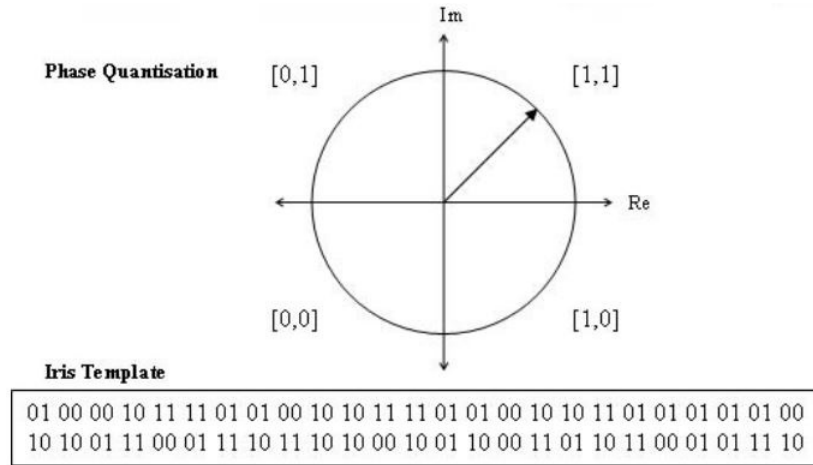


Figura 1.3: Cuantificación de fase propuesta por Daugman.

<sup>3</sup>Si se aplica la fórmula de Euler se obtienen las funciones seno y coseno.

<sup>4</sup>O tamaño del filtro.

La plantilla obtenida tendrá 2,048 bits y también es generada una máscara de igual cantidad de bits para indicar aquellas regiones afectadas por ruido. La plantilla generada tiene una dimensión de 256 bytes, lo cual permite un eficiente almacenamiento y posterior comparación entre ellas.

## Otros métodos de representación

Además del método propuesto por Daugman, muchos otros han sido propuestos para el proceso de representación del iris. Los métodos descritos en [50], [74] y [41] utilizan también filtros de Gabor, pero en este caso son los filtros LoG-Gabor (o *LoG-Gabor Filters*), los cuales son capaces de sobreponerse a algunas limitaciones que presentan los filtros 2D Gabor[74]. Las wavelets también han sido utilizadas en el proceso de representación del iris, ejemplo de ello se evidencia en los métodos propuestos en [15] y [43].

### 1.3.4. Algoritmos de cotejo

La plantilla generada en la etapa de representación debe tener asociada una métrica correspondiente, para poder medir de esa manera la similaridad entre 2 plantillas. Esta métrica debería obtener valores en distintos rangos para plantillas obtenidas de un mismo iris<sup>5</sup> y para plantillas obtenidas de diferentes iris<sup>6</sup>. De esta manera es posible tomar una decisión fiable de si 2 plantillas pertenecen o no al mismo iris.

A continuación se describen algunas de estas distancias, señalando sus virtudes y deficiencias.

#### Distancia de Hamming

La Distancia de Hamming (o HD, del inglés Hamming Distance) mide la cantidad de bits que difieren entre 2 patrones de bits. Haciendo uso de esta distancia se puede

---

<sup>5</sup>Comparaciones intra-clase (menores distancias).

<sup>6</sup>Comparaciones extra-clase (mayores distancias).

determinar si 2 patrones de bits generados en la etapa de representación pertenecen o no al mismo iris.

Dados 2 patrones de bits X e Y, la Distancia de Hamming se define como la cantidad de bits en que difieren ambos patrones (suma de los XOR entre cada bit de X e Y) sobre la cantidad de bits de los patrones (N) y se expresa de la siguiente manera:

$$HD(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \otimes Y_i \quad (1.10)$$

Debido a la gran aleatoriedad de los patrones del iris de un individuo, los patrones de bits generados serán independientes a los generados para otros individuos, mientras que existirá un alto grado de correlación entre los patrones de bits generados a partir de un mismo iris.

Si dos patrones de bits son completamente independientes, la distancia de Hamming entre estos debería ser muy cercana a 0.5. Esto es debido a que la independencia entre los patrones significa que los 2 patrones son aleatorios, por lo cual existe una probabilidad de 0.5 de que sus bits coincidan.

Si 2 patrones son generados a partir del mismo iris, la Distancia de Hamming entre ellos debería ser cercana a 0.0, puesto que existe un alto grado de correlación entre estos.

La distancia de Hamming es la métrica utilizada por Daugman y esta distancia es calculada a partir de los bits pertenecientes a la región del iris (bits no afectados por oclusiones).

## **Distancia Euclideana**

La distancia euclideana es utilizada para comparar 2 plantillas obtenidas en la etapa de representación del iris, especialmente si estas están formadas por valores numéricos.

Esta distancia ofrece una medida de similitud para estos tipos de plantillas y se define como:

$$ED(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2} \quad (1.11)$$

Existen variaciones de esta distancia que también han sido utilizadas en este contexto, ejemplo de esto es la distancia euclideana ponderada (o *Weighted Euclidean Distance*), utilizada en [76].

## Capítulo 2

# FDA aplicado al reconocimiento de iris

La tecnología de recopilación de datos en diversas áreas de investigación ha evolucionado en las últimas 2 décadas<sup>1</sup>, permitiendo que dichas observaciones sean muestreadas densamente en el tiempo, espacio, u otro dominio continuo. A menudo, los datos observados sugieren la presencia de funciones subyacentes, asumiéndose que estas generan dichos datos[42].

Debido a los grandes tamaños que pueden alcanzar los datos y la creciente complejidad de los mismos, se hace necesaria una nueva concepción de estos para su posterior análisis. Los métodos estadísticos multivariados clásicos pudieran ser aplicados en este contexto, pero estos no pueden sacar provecho de la información adicional implícita sugerida por la función subyacente[42].

Los métodos del Análisis de Datos Funcionales, a menudo, son capaces de extraer información adicional contenida en los datos mediante el análisis de las funciones y sus derivadas, lo cual no es normalmente posible mediante métodos tradicionales[42].

---

<sup>1</sup>En gran parte debido a la incorporación de equipos de medición más rápidos y precisos.



## 2.1. ¿Qué es el Análisis de Datos Funcionales?

El Análisis de Datos Funcionales (o FDA, del inglés *Functional Data Analysis*)<sup>2</sup> es una rama de la estadística de rápido crecimiento que estudia y analiza los datos que proveen información acerca de curvas, superficies, o cualquier elemento que varíe sobre un dominio continuo[21]. El dominio continuo es casi siempre el tiempo, pero también pudieran ser atributos como la edad, la temperatura, etc[75].

El Análisis de Datos Funcionales se basa en representar y describir los datos como si estos fueran el resultado de una *función analítica*<sup>3</sup> que los genera, mientras que el Análisis de Datos Multivariados los considera como un conjunto de vectores.

En el FDA se pueden considerar los datos discretos observados sobre un dominio continuo como una función lo suficientemente *suave*<sup>4</sup> que los genera[75].

## 2.2. ¿Qué son los datos funcionales?

Un *dato funcional* no es una simple observación, sino un conjunto de mediciones discretas sobre un espacio continuo que, tomadas juntas, deben ser vistas como una sola entidad, curva o imagen[42].

Los datos funcionales surgen de manera natural en muchas disciplinas[13], por ejemplo, en campos como la espectrometría, donde el resultado de la medición es una curva que representa a la muestra concreta que ha sido evaluada en al menos una centena de puntos. Este tipo de datos también puede ser observado en el estudio de procesos naturales, ejemplo de ello es que se pueden utilizar para analizar la variación de la estatura con respecto a la edad durante el proceso de crecimiento humano[60]. En la figura 2.1 se muestra un ejemplo del registro de la estatura de 10 sujetos para distintas edades, realizado por Tuddenham y Snyder[70].

---

<sup>2</sup>De aquí en adelante se utilizarán ambos términos indistintamente.

<sup>3</sup>Comúnmente llamada objeto funcional.

<sup>4</sup>Cuando se dice suave se piensa que las funciones son diferenciables hasta cierto grado.

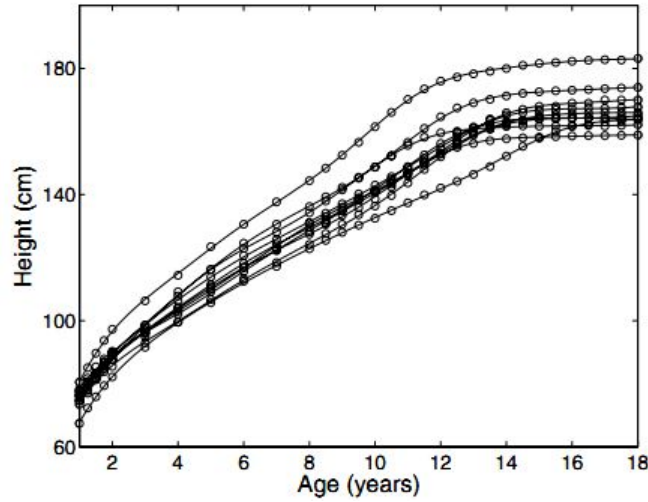


Figura 2.1: Alturas de 10 jóvenes medidas en diversas ocasiones.

Se puede apreciar que aún cuando cada registro involucra exclusivamente valores discretos, se observa una variación *suave* respecto a la estatura, la cual pudiera ser considerada como una *función* que describe el crecimiento. De hecho, los datos en la figura 2.1 consisten de una muestra de 10 observaciones funcionales[60].

## 2.3. Desarrollo del FDA

El origen del Análisis de Datos Funcionales se remonta aproximadamente al año 1800 cuando Gauss y un matemático francés, Legendre, intentaron estimar la trayectoria de un cometa que formaba una curva[75].

El término FDA fue inicialmente desarrollado por Ramsay y Dalzell en 1991[59], y muchos de los métodos utilizados en la estadística clásica tienen su análogo en este análisis[75].

Recientemente, el Análisis de Datos Funcionales ha generado mucho interés, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. Este interés se ha visto reflejado en el creciente número de artículos publicados en años recientes. Mientras que en 1997 fueron publicados solamente 2 artículos, en el año 2011 se publicaron 83[33].

A pesar de que el Análisis de Datos Funcionales es una disciplina joven, se han desarrollado varias aplicaciones en diferentes campos como las ciencias biológicas, específicamente en la genética[64]. En la medicina también ha sido utilizado en estudios relacionados con la cirrosis hepática[44] y en la evaluación de terapias antivirales contra el SIDA[65]. Otras aplicaciones son apreciadas en la geología, la psicología, la economía, etc[60]. A pesar del auge que ha mostrado el FDA en los diversos campos, este no ha sido muy utilizado en el análisis de imágenes.

## 2.4. Objetivos del FDA

El propósito de utilizar como metodología el Análisis de Datos Funcionales es bastante similar al de cualquier otro método convencional de la estadística. Como un primer paso se visualizan los datos haciendo uso de la *estadística descriptiva*<sup>5</sup>, lo cual permite realizar un análisis posterior en busca de patrones o de estructuras notables como *picos* o *valles* en los datos[75].

Los objetivos del Análisis de Datos Funcionales tienen muchos puntos en común con los de cualquier otra rama de la estadística, entre ellos se pueden citar[60]:

- Explorar y describir el conjunto de datos funcionales resaltando sus características más importantes.
- Representar los datos de manera tal que permitan y ayuden a realizar un análisis posterior.
- Estudiar patrones y variaciones en los datos.

Entre las razones prácticas para considerar el análisis de datos desde una perspectiva funcional se encuentran[59]:

- Las observaciones funcionales están presentes a menudo en situaciones reales. Además, los procesos de suavizado e interpolación pueden producir representaciones funcionales de conjuntos finitos de observaciones.

---

<sup>5</sup>Parte de la estadística que se dedica a analizar y representar los datos.

- El uso de representaciones funcionales suavizadas permite el estudio de las propiedades analíticas contenidas en las curvas.

## 2.5. Ventajas del FDA

En muchas situaciones, el FDA permite al investigador realizar preguntas computacionalmente difíciles o que de otra manera no podrían hacerse si se utilizaran métodos estadísticos tradicionales[42].

El hecho de tratar los datos como curvas suaves, permite conocer el valor de los mismos en cualquier instante de tiempo, algo que no es posible cuando se está en presencia de conjuntos de datos discretos.

El FDA permite realizar predicciones a partir de los datos, por ejemplo, las derivadas de la curva de interés, y especialmente las primeras dos: *velocidad* y *aceleración*, frecuentemente representan interpretaciones relevantes para el estudio en cuestión[42]. En la figura 2.2 se muestra la aceleración del crecimiento de los sujetos de la figura 2.1:

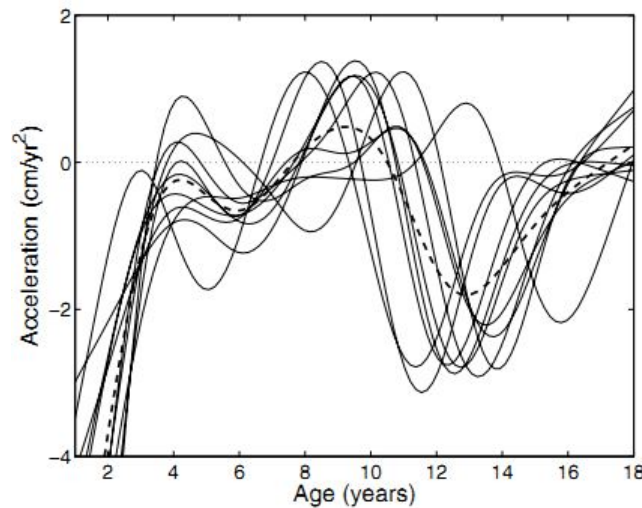


Figura 2.2: Estimación de la aceleración del crecimiento de 10 jóvenes.

Debido a la suavidad de las curvas que constituyen el objeto de estudio, es también posible hacer uso de ecuaciones diferenciales con el propósito de estimar la respuesta del modelo a variaciones en sus parámetros.

Por otra parte, los modelos funcionales facilitan la representación visual de los datos, y por tanto, poseen un gran poder explicativo. Además, mediante la representación funcional de los datos es posible lograr una gran reducción en la dimensión de los mismos, pues lo que antes eran densos conjuntos de observaciones, ahora están representados mediante un objeto funcional.

## 2.6. Modelando los datos con FDA

Una vez que se tiene el conjunto de mediciones de interés, es necesario obtener un modelo que represente dichos datos. Se necesita construir una aproximación a una función desconocida en base a una cantidad finita de datos de dicha función<sup>6</sup>.

Una estrategia muy utilizada para la representación de una función, es la técnica de expansión en bases. Mediante esta aproximación se reduce la dimensión computacional de los datos, además de permitir el uso del álgebra de matrices para el manejo de los modelos<sup>7</sup>[33, 61].

### 2.6.1. Expansión en bases

Las *funciones bases* son un conjunto de funciones  $\phi_k$  matemáticamente independientes unas de otras, con la propiedad de que cualquier función puede ser aproximada, tan bien como se quiera, mediante una *combinación lineal* de  $K$  de ellas[60].

Uno de los conjuntos de funciones bases más conocidos es la colección de monomios utilizados para construir las series de potencias,

$$1, t^2, t^3, \dots, t^k, \dots$$

---

<sup>6</sup>Lo descrito es lo que se conoce como un problema de ajuste o *fitting*.

<sup>7</sup>Funciones que representan a los datos.

otros conjuntos de funciones bases ampliamente conocidas son las *Bases de Fourier*, las *Bases de Wavelet*, los *Splines*, entre otros[60]:

Una función  $f$  se puede expresar como una expansión lineal en términos de  $K$  funciones bases conocidas  $\phi_k$ :

$$f = \sum_{k=1}^K c_k \phi_k \quad (2.1)$$

Si se denota a  $\mathbf{c}$  como el vector de dimensión  $K$  de los coeficientes  $c_k$  y a  $\phi$  como el vector funcional cuyos elementos son las funciones bases  $\phi_k$ , también se puede expresar la ecuación(2.1) en notación matricial[60]:

$$f = \mathbf{c}'\phi = \phi'\mathbf{c} \quad (2.2)$$

La selección de las funciones bases es de vital importancia para la obtención de buenos resultados y lograr una alta eficiencia computacional. Dicha selección está condicionada por muchos criterios como la geometría del dominio (algunos autores lo consideran un factor determinante)[17], la complejidad computacional, la velocidad de convergencia, la completitud<sup>8</sup>, entre otros factores.

El grado con el cual se *suavizan* los datos es determinado por la cantidad  $K$  de funciones bases seleccionadas. Idealmente, las funciones bases deberían tener propiedades que coincidieran con aquellas de la función que se desea estimar. Mientras menor sea  $K$  y mejor reflejen las funciones bases las características de los datos, es más probable que los coeficientes se conviertan en buenos descriptores de los datos y se requiera menos cómputo para su cálculo[60].

### 2.6.2. Ajuste por mínimos cuadrados

Existe la posibilidad de que las observaciones contengan errores en las mediciones o ruido, lo cual puede afectar el proceso de determinar la función que representa a los

---

<sup>8</sup>Habilidad de representar cualquier función de manera precisa con suficientes términos.

datos. En este proceso de ajustar el modelo a los datos una de las técnicas más familiares es el ajuste por mínimos cuadrados.

Cuando se está en presencia de esta situación, el objetivo es ajustar las observaciones discretas  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  mediante el modelo  $y_j = f(x_j) + \epsilon_j$ , donde  $f(x_j)$  son los valores de la función  $f$  en el argumento  $x_j$ , los  $y_j$  corresponden a las observaciones discretas y los  $\epsilon_j$  representan los errores correspondientes.

Como se analizó en el epígrafe (2.6.1), la función  $f$  se considera expresada mediante una base de funciones  $\phi_k$ :

$$f = \sum_{k=1}^K c_k \phi_k = c' \phi$$

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible definir una matriz  $\Phi$  de  $n$  filas y  $K$  columnas, conteniendo como columnas los valores de  $\phi_k(x_j)$ . Entonces es posible determinar los valores  $c_k$  tales que minimizan el criterio de mínimos cuadrados<sup>9</sup>:

$$E(y|c) = \sum_{j=1}^n [y_j - \sum_{k=1}^K c_k \phi_k(x_j)]^2 \quad (2.3)$$

El criterio anterior se puede expresar en términos matriciales<sup>10</sup> como[60]:

$$E(y|c) = (y - \Phi c)'(y - \Phi c) \quad (2.4)$$

Frecuentemente, la parte derecha de la ecuación (2.4) suele expresarse en notación funcional como  $\|y - \Phi c\|^2$ .

La aproximación por mínimos cuadrados abordada es apropiada en situaciones donde se asume que los errores  $\epsilon_j$  son independientes.

---

<sup>9</sup>Conocido en la literatura como *ordinary least squares fit*.

<sup>10</sup>Los vectores  $y$  y  $c$  son vectores filas.

## 2.7. Representación digital de una imagen

Una imagen puede ser definida como una función bidimensional,  $f(x, y)$ , donde  $x$  e  $y$  son *coordenadas espaciales* y la *amplitud* de  $f$  en las coordenadas  $(x, y)$  es llamada la *intensidad* de la imagen en ese punto[35].

Una imagen puede ser continua respecto a las coordenadas  $x$  e  $y$ , y también en amplitud. El proceso de conversión de una imagen a formato digital requiere que tanto las coordenadas, como la amplitud sean digitalizadas.

Al proceso de discretizar los valores de las coordenadas se le llama *muestreo*<sup>11</sup> y al de digitalizar los valores de amplitud se le llama *cuantización*<sup>12</sup>. Entonces, cuando los valores  $x$ ,  $y$  y la *amplitud* de  $f$  han sido discretizados, es decir, son todos finitos, se dice que la imagen es una *imagen digital*.

El resultado del *muestreo* y la *cuantización* es una matriz de números. Si se asume que una imagen  $f(x, y)$  es muestreada de manera tal que la imagen obtenida tiene  $M$  filas y  $N$  columnas, entonces se dice que la imagen es de tamaño  $M \times N$ . Los valores de las coordenadas  $(x, y)$  son cantidades discretas.

A cada elemento de la matriz se le llama comúnmente *pixel* o *pel*. Entonces, una imagen  $f(x, y)$  tendría la representación digital[35]:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \dots & f(0, N - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \dots & f(1, N - 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M - 1, 0) & f(M - 1, 1) & \dots & f(M - 1, N - 1) \end{pmatrix}$$

Si se computa una representación funcional de la imagen, se podrían utilizar la gran cantidad de herramientas existentes para el tratamiento de las funciones continuas.

---

<sup>11</sup>Proceso conocido como *sampling*.

<sup>12</sup>Determinación de los valores no sucesivos de una variable.



## 2.8. Representación funcional del iris

Las imágenes digitales son comúnmente muestreadas en un espacio bidimensional de coordenadas cartesianas  $I(x, y)$ . Como se mencionó en la sección (2.7), estas imágenes digitales pueden ser representadas mediante funciones y una estrategia común para lograr dicha representación es utilizar la técnica de expansión en bases[60].

El iris tiene una geometría circular, lo cual sugiere la expansión en bases sobre un dominio circular. Aunque existen muchas funciones bases sobre el dominio en cuestión[18], las más utilizadas en investigaciones relacionadas con la óptica y la oftalmología son los polinomios de Zernike[73].

### 2.8.1. Polinomios Circulares de Zernike

Los polinomios circulares de Zernike son una secuencia de polinomios ortogonales sobre el *disco unitario*<sup>13</sup> que juegan un papel muy importante en el campo de la óptica. Llamados así en honor al ganador del Premio Nobel de Física Frits Zernike<sup>14</sup>. Estos polinomios son comúnmente utilizados en la expansión en bases en dominios circulares.

Cuando se desea hacer referencia a los polinomios circulares de Zernike, los convenios de notación más conocidos en la literatura son el *esquema de doble indexado* y el *esquema de indexado simple*.

#### Esquema de doble indexado

Los polinomios circulares de Zernike usualmente están definidos en coordenadas polares  $(\rho, \theta)$ . El parámetro  $\rho \in [0, 1]$ , es la coordenada radial y  $\theta \in [0, 2\pi]$ , la componente azimutal.

Cada polinomio de Zernike es un producto tensorial de las bases de Fourier en la dirección angular y un tipo especial de polinomio de Jacobi en la dirección radial[55],

---

<sup>13</sup>Círculo de radio 1.

<sup>14</sup>Físico neerlandés inventor del microscopio de contraste de fases.

y consta de 3 componentes: un factor de normalización, una componente radial y una componente azimutal.

El esquema de doble indexado[66] es útil para describir sin ambigüedad a dichos polinomios, donde el índice  $n$  describe el grado máximo del polinomio radial y el índice  $m$  describe la frecuencia de la componente azimutal. En la figura 2.3 se muestran los primeros polinomios circulares de Zernike.

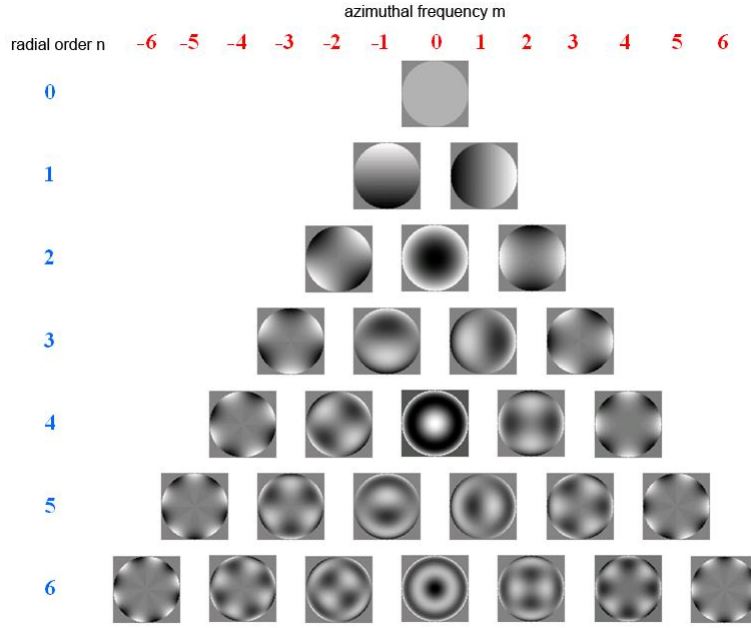


Figura 2.3: Polinomios circulares de Zernike hasta el orden 6. (tomado de [46])

De manera general, según [68] los polinomios circulares de Zernike se definen como:

$$Z_n^m(\rho, \theta) = \begin{cases} N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \cos(m\theta) & \text{si } m \geq 0 \\ -N_n^m R_n^{|m|}(\rho) \sin(m\theta) & \text{si } m < 0 \end{cases}, \quad (2.5)$$

donde  $N_n^m$  es un factor de normalización dado por:

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2(n+1)}{1+\delta_{m0}}}, \quad \text{con } \delta_{m0} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}, \quad (2.6)$$

y  $R_n^m(\rho)$  por:

$$R_n^m(\rho) = \sum_{s=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left[ \frac{1}{2}(n+|m|) - s \right]! \left[ \frac{1}{2}(n-|m|) - s \right]!} \rho^{(n-2s)} \quad (2.7)$$

Es importante destacar que  $n$  es un valor no negativo, es decir,  $n \geq 0$  y  $m$  solo puede tomar los valores  $-n, -n+2, \dots, n-2, n$  para un  $n$  prefijado.

### Esquema de indexado simple

De manera ocasional se pudiera querer utilizar un esquema de indexado simple[66] dependiente solamente de un parámetro. Para obtener el único índice,  $j$ , es conveniente organizar los polinomios en una pirámide con  $n$  como fila y  $m$  como columna. El índice,  $j$ , comienza en el tope de la pirámide y se desplaza primeramente de izquierda a derecha, y luego de arriba hacia abajo (ver figura 2.4).

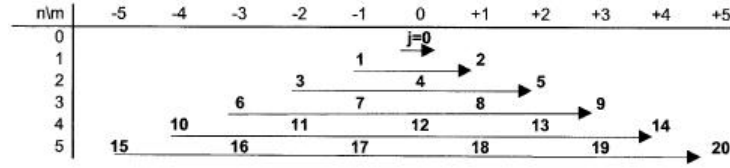


Figura 2.4: Esquema de indexado simple.

Para convertir entre  $j$ , y los valores  $n$  y  $m$ , se pueden utilizar las relaciones:

$$j = \frac{n(n+2) + m}{2} \quad (2.8)$$

$$n = \left\lceil \frac{-3 + \sqrt{9 + 8j}}{2} \right\rceil \quad (2.9)$$

$$m = 2j - n(n+2) \quad (2.10)$$

### 2.8.2. Polinomios Anulares de Zernike

Los polinomios anulares de Zernike son polinomios muy similares a los polinomios circulares de Zernike, excepto que son ortonormales en un anillo en vez de un círculo[47, 49]. Estos polinomios se derivan de los polinomios circulares de Zernike mediante el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt[47].

Los polinomios anulares de Zernike tienen radio interno  $\epsilon$  y radio externo 1, y por tanto la coordenada  $\rho$  está sujeta a la restricción  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Además, estos polinomios tienen la particularidad de que para  $\epsilon = 0$  se reducen a los polinomios circulares de Zernike analizados en la sección (2.8.1).

Los polinomios anulares de Zernike se definen de la siguiente manera[47]:

$$Z_n^m(\rho, \theta, \epsilon) = \begin{cases} N_n^m R_n^{|m|}(\rho, \epsilon) \cos(m\theta) & \text{si } m \geq 0 \\ -N_n^m R_n^{|m|}(\rho, \epsilon) \sin(m\theta) & \text{si } m < 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

La constante de normalización  $N_n^m$  se define como en (2.6), sin embargo,  $R_n^{|m|}(\rho, \epsilon)$  si difiere de  $R_n^{|m|}(\rho)$ .

Si  $\epsilon = 0$ , entonces  $R_n^{|m|}(\rho, \epsilon)$  se reduce a (2.7) y se tiene que[47]:

$$R_n^m(\rho, 0) = R_n^m(\rho) \quad (2.12)$$

Si  $m = 0$  y  $n$  es par, entonces se tiene que[47]:

$$R_{2n}^0(\rho, \epsilon) = R_{2n}^0 \left( \left( \frac{\rho^2 - \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.13)$$

Si  $n = m$ , entonces se tiene que[47]:

$$R_n^n(\rho, \epsilon) = \frac{\rho^n}{\left( \sum_{i=0}^n \epsilon^{2i} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.14)$$

Finalmente, para el caso general se tiene que[47]:

$$R_{2j+m}^m(\rho, \epsilon) = \left[ \frac{1 - \epsilon^2}{2(2j + m + 1)h_j^m} \right]^{\frac{1}{2}} \rho^m Q_j^m(\rho^2) \quad (2.15)$$

donde  $\{Q_j^m(u)\}^{15}$  es un conjunto de polinomios ortogonales obtenidos a partir de la ortogonalización de la secuencia  $1, u, \dots, u^j$  sobre el intervalo  $(\epsilon^2, 1)$ , y se definen como[47]:

$$Q_j^m(u) = \begin{cases} R_{2j}^0(\rho, \epsilon) & \text{si } m = 0 \\ \frac{2(2j+2m-1)}{(j+m)(1-\epsilon^2)} \frac{h_j^{m-1}}{Q_j^{m-1}(0)} \sum_{i=0}^j \frac{Q_i^{m-1}(0)Q_i^{m-1}(u)}{h_i^{m-1}} & e.o.c \end{cases} \quad (2.16)$$

La relación recursiva para las constantes de normalización  $h_j^m$  se define como[47]:

$$h_j^m = -\frac{2(2j + 2m - 1)}{(j + m)(1 - \epsilon^2)} \frac{Q_{j+1}^{m-1}(0)}{Q_j^{m-1}(0)} h_j^{m-1} \quad (2.17)$$

### 2.8.3. Método de representación del iris propuesto

Partiendo de lo propuesto en la sección (2.7) se tomó la decisión de obtener una representación del iris mediante una función matemática. Como técnica de representación funcional se seleccionó la *expansión en bases* descrita en el epígrafe (2.6.1), debido a que es la más utilizada en el contexto del Análisis de Datos Funcionales.

Debido a la semejanza de la región del iris a un círculo, unido a las razones antes mencionadas en la sección (2.8) se seleccionaron los polinomios circulares de Zernike como funciones bases. Sin embargo, mediante experimentos realizados se evidenciaron algunas limitantes que estos presentaban. Los polinomios circulares de Zernike están definidos sobre un disco, esto tiene como inconveniente la inclusión de la pupila en el modelo del iris, lo cual trae como consecuencia la introducción de ruido en el proceso de representación.

---

<sup>15</sup>Notar que  $u = \rho^2$ .

Teniendo en cuenta la verdadera forma de anillo del iris, resulta de vital importancia seleccionar un conjunto de funciones bases definidas sobre ese mismo dominio. En este contexto, resultan muy deseables los polinomios anulares de Zernike, los cuales son capaces de aproximar cualquier función dados suficientes términos[51].

A pesar de que los polinomios anulares de Zernike se ajustan perfectamente a la geometría del iris, todavía resulta necesario manejar el conocido problema de las oclusiones. Aunque con la utilización de estos polinomios no se modela la pupila como parte del iris, todavía se modelan oclusiones resultantes a partir de la presencia de los párpados y las pestañas dentro de la región de interés.

Con el objetivo de poder manejar en un futuro los problemas de oclusiones se hace necesario lograr un entendimiento con los sistemas de reconocimiento de iris ya existentes. Debido a esto se decidió *definir* estos polinomios sobre el dominio rectangular.

La mayoría de los métodos de normalización del iris existentes se basan el modelo de *Rubber Sheet* de Daugman, el cual consiste básicamente en una transformación de coordenadas del dominio anular al dominio rectangular[29].

En nuestro caso se realizó el proceso inverso a lo realizado por el modelo de *Rubber Sheet* de Daugman, una transformación de coordenadas del rectángulo al anillo. En el **Algoritmo 1** se muestra cómo calcular los polinomios anulares de Zernike sobre un dominio rectangular haciendo uso de la transformación de coordenadas mencionada. Primeramente se calcula el radio del iris *iris\_radius* y la frecuencia de muestreo del mismo *radius\_delta*. A continuación, para cada punto perteneciente al rectángulo  $(angle, radius)$  se determinan las coordenadas correspondientes  $(\rho, \theta)$  y se evalúan en los polinomios anulares de Zernike. Finalmente, el algoritmo retorna la evaluación del polinomio anular de Zernike sobre el dominio rectangular.

Como se hizo ver en el epígrafe (2.6.2), es posible la existencia de errores cuando se intenta ajustar los datos (la imagen normalizada del iris) a un modelo (la función matemática que representa a dicho iris). Por lo tanto es necesario minimizar el error, lo cual se logra mediante la minimización de la expresión (2.3).

---

**Algoritmo 1:** FillGridAnnular( $width, height, j, \epsilon_{lb}, \epsilon_{ub}$ )

---

```
iris_radius  $\leftarrow \epsilon_{ub} - \epsilon_{ub}$ 

radius_deltha  $\leftarrow \textit{iris\_radius} / (height - 1)$ 

for angle  $\leftarrow 0$  to width - 1 do
     $\theta \leftarrow (2\pi * \textit{angle}) / \textit{width}$ 
    for radius  $\leftarrow 0$  to height - 1 do
         $\rho \leftarrow \epsilon_{lb} + \textit{radius} * \textit{radius\_deltha}$ 
        rect[ $\rho, \theta$ ]  $\leftarrow \text{ZernikeAnnular}(j, \rho, \theta, \epsilon_{lb}, \epsilon_{ub})$ 
    end
end

return rect
```

---

En el **Algoritmo 2** se muestra cómo calcular la matriz  $\Phi$  (o  $M_f$ ), necesaria para la minimización del error en el proceso de ajuste de los datos descrito en el epígrafe (2.6.2). Primeramente se calcula la dimensión de los datos  $n$ . Luego, por cada uno de los  $K$  primeros polinomios anulares de Zernike, se evalúan sobre el dominio de los datos y se concatenan como vectores columnas para formar la matriz  $\Phi$ . Finalmente, esta es devuelta como resultado del procedimiento.

---

**Algoritmo 2:** ComputeMf( $width, height, K, \epsilon_{lb}, \epsilon_{ub}$ )

---

```
n  $\leftarrow width * height$ 

for j  $\leftarrow 1$  to K do
    Mv  $\leftarrow \text{FillGridAnnular}(width, height, j, \epsilon_{lb}, \epsilon_{ub})$ 
    Vv  $\leftarrow \textit{Mv.Reshape}(n, 1)$ 
    Mf.AppendColumn(Vv)
end

return Mf
```

---

La representación del iris será el vector de coeficientes  $c$  para el cual se minimiza el error en el ajuste de los datos. En este vector se encuentran los coeficientes asociados a cada uno de los polinomios anulares de Zernike utilizados, representando el aporte

individual de cada uno de estos.

En el **Algoritmo 3** se ilustra el proceso anterior. Primeramente se determina la dimensión de los datos  $n$  y la matriz  $\Phi$  (en este caso  $A$ ) descrita en el epígrafe (2.6.2). A continuación se resuelve el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$  mediante mínimos cuadrados y finalmente se devuelve el vector de coeficientes resultante de dicho proceso.

---

**Algoritmo 3:** EncodeIris( $image, K, \epsilon_{lb}, \epsilon_{ub}$ )

---

```

width  $\leftarrow$  image.Width
height  $\leftarrow$  image.Height
n  $\leftarrow$  width * height
A  $\leftarrow$  ComputeMf(width, height, K,  $\epsilon_{lb}$ ,  $\epsilon_{ub}$ )
b  $\leftarrow$  image.Reshape(n, 1)
SolveLeastSquares(A, x, b)
return x

```

---

El proceso de reconocimiento de iris mostrado en la figura 1.1 se muestra en la figura (2.5) haciendo uso del método de representación del iris propuesto. De esta manera se ilustra cómo se integra el método propuesto a los sistemas de reconocimiento de iris tradicionales.

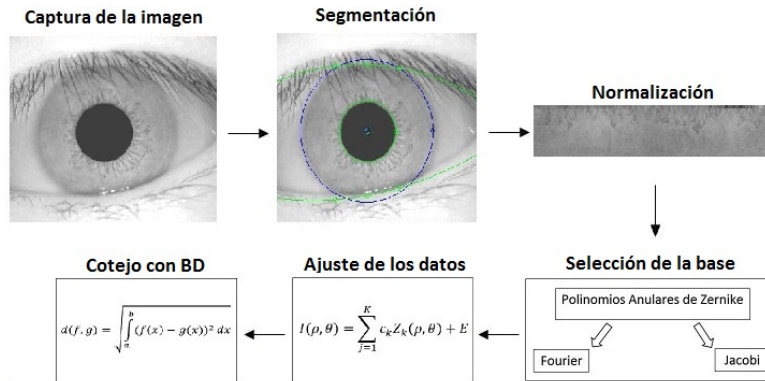


Figura 2.5: Diagrama del proceso de reconocimiento de iris utilizando el método propuesto.



## Capítulo 3

# Implementación y resultados

Con el objetivo de verificar la eficiencia y precisión del método de representación del iris propuesto, se hizo necesario el diseño y desarrollo de una plataforma de reconocimiento de iris.

La plataforma propuesta integra los distintos subsistemas de un sistema de reconocimiento de iris<sup>1</sup>. Debido a su diseño, es posible expandir dicha plataforma con nuevos métodos de segmentación, normalización, codificación y medidas de similaridad para las distintas representaciones del iris.

### 3.1. Diseño e implementación de la plataforma

En el diseño de la plataforma se valoró, desde un inicio, la posibilidad de permitir la integración entre los distintos módulos o subsistemas que componen un sistema de reconocimiento de iris. El objetivo perseguido era lograr una comparación lo más objetiva posible entre los distintos métodos de representación del iris existentes en la actualidad.

---

<sup>1</sup>Generalmente asociados a cada una de las fases de reconocimiento de iris.

### 3.1.1. Entorno de desarrollo

En la selección del entorno de desarrollo jugó un papel primordial el requerimiento de permitir la integración a la plataforma de nuevas funcionalidades y módulos.

Como lenguaje de desarrollo se seleccionó Python 2.7[9, 6] debido a razones de portabilidad, y facilidad y rapidez en el desarrollo. Además, Python trae incorporada una útil y extensa biblioteca de funciones adecuadas para el desarrollo de aplicaciones en gran variedad de dominios. Otro factor a considerar es la facilidad de integración de Python con otros lenguajes y plataformas como C, C++, .NET Framework, etc.

Para el procesamiento de imágenes se utilizó la biblioteca *opensource* OpenCV 2.4[8] desarrollada por Intel. Para los cálculos matriciales se utilizó Numpy 1.6.1[7], un paquete de Python orientado a la computación científica. Finalmente, para la interfaz de usuario se utilizó Qt[10], un kit de desarrollo *opensource* de alta calidad.

### 3.1.2. Módulo de segmentación

El *módulo de segmentación* es el encargado de realizar todo el preprocesamiento de la imagen adquirida y segmentación del iris. Este módulo está diseñado de manera tal que se pueden añadir nuevas funcionalidades<sup>2</sup> a la plataforma.

En este módulo se realizaron implementaciones de 2 algoritmos de segmentación del iris. Uno de los algoritmos fue el propuesto en [19], basado en la aplicación de un umbral binario (o *binary threshold*)[20] a la imagen, para la detección de la pupila y la posterior aplicación de un filtro de suavizado(o *smoothing filter*)[20] en conjunto con la *Transformada de Hough*[20] para la detección del iris. En la figura 3.1 se muestran resultados de la aplicación de este algoritmo de segmentación del iris.

---

<sup>2</sup>Nuevos algoritmos de segmentación del iris.

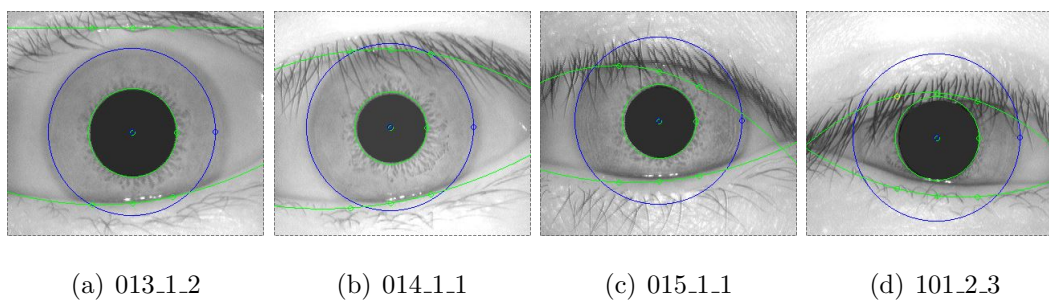


Figura 3.1: Segmentación propuesta en [19].

El otro algoritmo implementado fue el propuesto en [41], basado en la detección de contornos (o *contours*)[20] para la detección de la pupila y la detección de bordes<sup>3</sup>[20] en conjunto con la *Transformada de Hough* para la detección del iris. En la figura 3.2 se muestran resultados de la aplicación de este algoritmo de segmentación del iris.

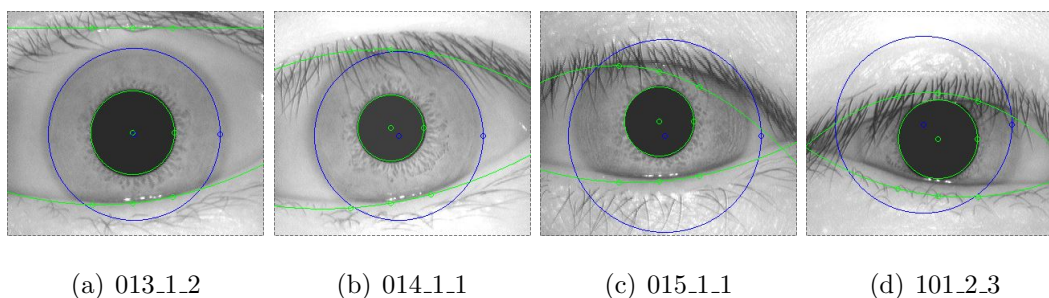


Figura 3.2: Segmentación propuesta en [41].

Como se puede apreciar en las figuras 3.1 y 3.2 pueden ocurrir algunos errores en el proceso de segmentación. Es por esto que la plataforma de reconocimiento de iris permite al usuario realizar la segmentación manual de las imágenes del iris, logrando de esta manera una segmentación perfecta.

### 3.1.3. Módulo de normalización

El *módulo de normalización* es el encargado de realizar la normalización del iris una vez que ha sido correctamente segmentado. Al igual que el *módulo de segmentación*,

---

<sup>3</sup>Específicamente el *canny edge detector*.

está diseñado para permitir la adición de nuevas funcionalidades<sup>4</sup> a la plataforma.

En este módulo se realizaron implementaciones de 2 algoritmos de normalización del iris. Ambos fueron probados sobre varias bases de datos como la CASIA-IrisV1[3], la UPOL[5] y la MMU v1.0[4], demostrando siempre muy buenos resultados.

Uno de los algoritmos de normalización implementados fue el método descrito en [19], a su vez basado en el propuesto en [23], el cual asume que la pupila y el iris son concéntricos. La idea básica de este algoritmo consiste en realizar una transformación de coordenadas entre el anillo y el rectángulo, muestreando  $r$  píxeles a lo largo del radio del iris y  $\theta$  a lo largo de la circunferencia (ver epígrafe 1.3.2). En la figura 3.3 se muestran los resultados de la aplicación de este algoritmo de normalización.

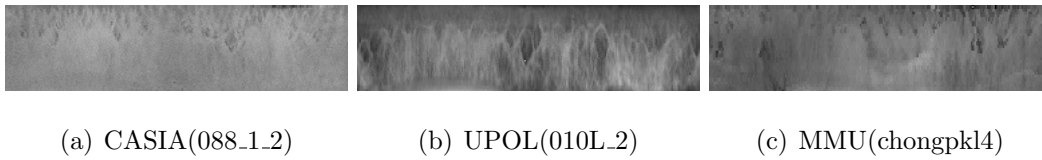


Figura 3.3: Normalización propuesta en [19].

El otro algoritmo implementado es el descrito en [41, 67], el cual es un algoritmo de normalización más robusto, pues a diferencia del anterior no asume que la pupila y el iris son concéntricos. En la figura 3.4 se muestran los resultados de la aplicación de dicho algoritmo de normalización.

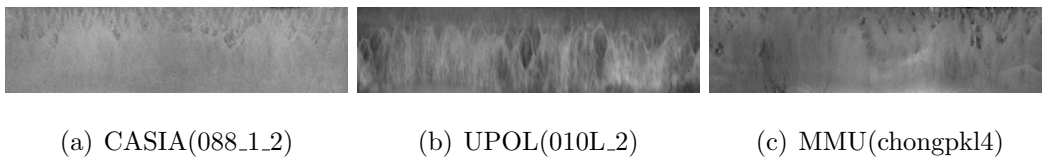


Figura 3.4: Normalización descrita en [41, 67].

---

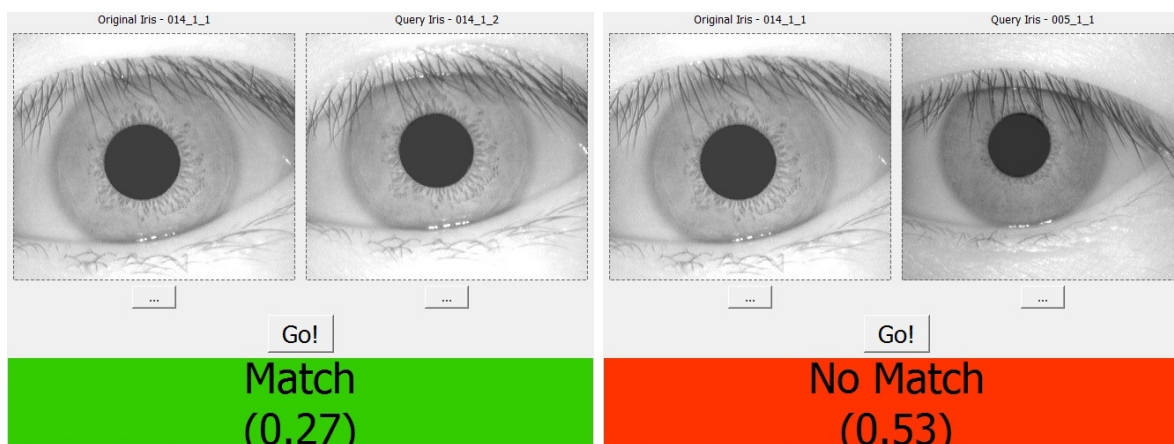
<sup>4</sup>Nuevos algoritmos de normalización del iris.

### 3.1.4. Módulo de representación

El *módulo de representación* es el encargado de realizar el proceso de extracción de características del iris a partir de una imagen normalizada del mismo. Al igual que los módulos anteriores está diseñado para soportar la adición de nuevas funcionalidades<sup>5</sup> a la plataforma.

En este módulo se implementaron 3 algoritmos de representación del iris: la representación mediante los filtros 2D Gabor (como se describió en [19]), la representación mediante los filtros LoG-Gabor (como la descrita en [41]) y el método propuesto.

Los 3 algoritmos de codificación del iris implementados fueron probados en conjunto con el resto de los algoritmos implementados en los distintos módulos que forman parte de la plataforma. En las figuras 3.5, 3.6 y 3.7 se muestran algunos resultados de la aplicación de los mismos



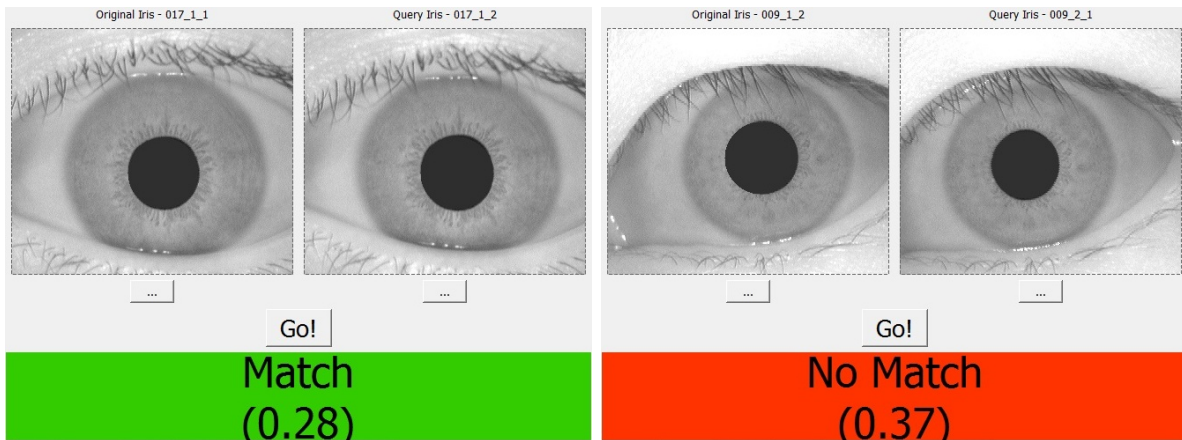
(a) Match

(b) No Match

Figura 3.5: Extracción de rasgos mediante filtros 2D Gabor.

---

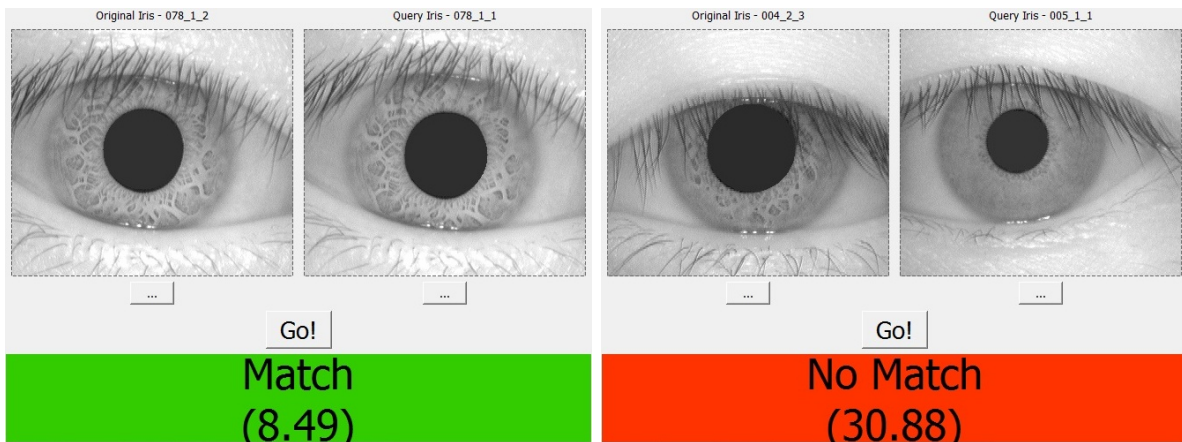
<sup>5</sup>Nuevos algoritmos de representación del iris.



(a) Match

(b) No Match

Figura 3.6: Extracción de rasgos mediante filtros LoG-Gabor.



(a) Match

(b) No Match

Figura 3.7: Extracción de rasgos mediante el método propuesto.

Como se puede apreciar, para todos los métodos se evidenció una variabilidad intra-clase mucho menor que la variabilidad extra-clase, independientemente del tipo de métrica utilizada para la comparación de las plantillas.

### 3.1.5. Módulo de cotejo

El *módulo de cotejo* es el encargado de computar la similitud entre 2 representaciones del iris. Al igual que los módulos anteriores, está diseñado para permitir la incorporación de nuevas funcionalidades<sup>6</sup> a la plataforma.

En este módulo se implementaron 2 algoritmos de cotejo: la distancia de Hamming y la distancia euclideana. La distancia de Hamming se utilizó para medir la similitud de las representaciones basadas en bits, mientras que la distancia euclideana para las representaciones basadas en vectores de rasgos.

## 3.2. Experimentos y resultados

El propósito fundamental de los experimentos realizados es evaluar la factibilidad y el comportamiento del método de representación propuesto. Para lograr esto es necesario realizar comparaciones lo más objetivas posibles entre los distintos métodos de representación del iris implementados.

En este contexto juega un papel primordial la plataforma de reconocimiento de iris desarrollada, pues esta permite establecer distintos tipos de comparaciones entre los métodos implementados. Estos pueden ser probados bajo las mismas condiciones, es decir, haciendo uso de los mismos métodos de segmentación y normalización del iris.

Se exploraron distintas bases de datos de iris para evaluar el funcionamiento del método propuesto. Debido a que este todavía no es capaz de manejar las oclusiones, la base de datos seleccionada fue la UPOL[5], la cual presenta mínimos problemas de oclusión<sup>7</sup>.

---

<sup>6</sup>Nuevos algoritmos de cotejo.

<sup>7</sup>Entiéndase por oclusión párpados, pestañas, reflexiones especulares, etc.

Los experimentos sobre la plataforma fueron realizados en una PC con las siguientes características:

- **Processor:** Pentium(R) Dual-Core CPU E5500 @ 2.80GHz 2.80GHz.
- **RAM:** 2.00 GB.
- **System type:** 32-bit Operative System, x64-based processor.
- **OS:** Microsoft Windows 8 Pro.

### 3.2.1. Comparación de las tasas de reconocimiento

Los sistemas de reconocimiento biométrico<sup>8</sup> generalmente toman decisiones binarias, es decir, dan respuestas de SI o NO. Una vez tomada la decisión de este tipo, existen 4 posibilidades: *False Accept* (FA), *Correct Accept* (CA), *False Reject* (FR) y *Correct Reject* (CR)[25]. La 1<sup>ra</sup> y 3<sup>ra</sup> de estas posibilidades son errores, mientras que la 2<sup>da</sup> y la 4<sup>ta</sup> son aciertos.

Al manipular el criterio de decisión<sup>9</sup>, las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los eventos anteriores varía. En diversas aplicaciones puede tener distinta repercusión la ocurrencia de cada uno de estos errores: mientras que en un contexto comercial un error de tipo FR pudiera ser más deseado que otro de tipo FA, en contextos militares es deseable lo contrario[25].

Cualquier sistema puede lograr una tasa de error de tipo FA de 0 (simplemente rechazando todos los candidatos). De manera similar, también puede lograr una tasa de error de tipo FR de 0 (simplemente aceptando todos los candidatos)[25]. Por tanto, para evaluar la precisión es necesario tener en cuenta el equilibrio de ambos tipos de errores.

Un tipo de prueba que mide las tasas de los errores de tipo FR y FA es la prueba de verificación<sup>10</sup>[25, 62]. En la tabla 3.1 se muestran algunos resultados correspondientes a este tipo de prueba.

---

<sup>8</sup>Y como caso particular el sistema de reconocimiento de iris.

<sup>9</sup>El umbral de decisión.

<sup>10</sup>Comparaciones uno contra uno.



Método	False Acceptance Rate (FAR)	False Reject Rate(FRR)
Filtros 2D Gabor	0.00 %	0.00 %
Propuesto( $K=16$ )	0.09 %	0.09 %
Propuesto( $K=32$ )	0.07 %	0.07 %
Propuesto( $K=48$ )	0.07 %	0.07 %

Tabla 3.1: Prueba de verificación sobre la UPOL.

Otro tipo de prueba comúnmente aplicada a los sistemas de reconocimiento biométrico es la prueba de identificación<sup>11</sup>[25, 62]. En la tabla 3.2 se muestran algunos resultados correspondientes a este tipo de prueba.

Método	Precisión (Accuracy)
Filtros 2D Gabor	100 %
Propuesto( $K=16$ )	98.96 %
Propuesto( $K=32$ )	98.96 %
Propuesto( $K=48$ )	99.22 %

Tabla 3.2: Prueba de identificación sobre la UPOL.

Como se puede observar en las tablas 3.1 y 3.2 los resultados obtenidos del método propuesto no fueron tan buenos como los obtenidos por el método basado en los filtros 2D Gabor. Estos resultados se deben a que el método propuesto todavía no es capaz de manejar las oclusiones<sup>12</sup> (párpados, variaciones en la iluminación, etc.), lo cual produce errores en el reconocimiento como se explicó en el capítulo 1.

### 3.2.2. Comparación de las dimensiones de las plantillas

El tamaño de las plantillas<sup>13</sup> obtenidas por un método de representación del iris juega un papel muy importante para los sistemas de reconocimiento de iris. Estos sistemas requieren de una base de datos para almacenar las plantillas asociadas a los individuos registrados en el sistema. La cantidad de individuos registrados en el sistema puede ser

---

<sup>11</sup>Comparaciones de uno contra muchos.

<sup>12</sup>Esta es una tarea a resolver en trabajos futuros

<sup>13</sup>Representación computacional de la codificación del iris.

bastante alta<sup>14</sup>, por tanto el tamaño de las plantillas incide directamente en el tamaño de la base de datos del sistema.

La plantilla obtenida mediante la representación propuesta en [26, 19] tiene un tamaño de 256 bytes (2048 bits). El método propuesto es capaz de generar plantillas de dimensión variada y en los experimentos realizados fue capaz de generar plantillas de menor dimensión (hasta 3 veces más pequeñas) que el propuesto en [26, 19], sin muchas afectaciones en la calidad de reconocimiento del sistema. En la figura 3.8 se muestra el tamaño que pudiera alcanzar la base de datos del sistema en dependencia de la dimensión de las plantillas. En azul se muestra el crecimiento de una base de datos con las plantillas propuestas en [26, 19], mientras que en verde se muestra el crecimiento para las plantillas de diversos tamaños generadas por el método propuesto.

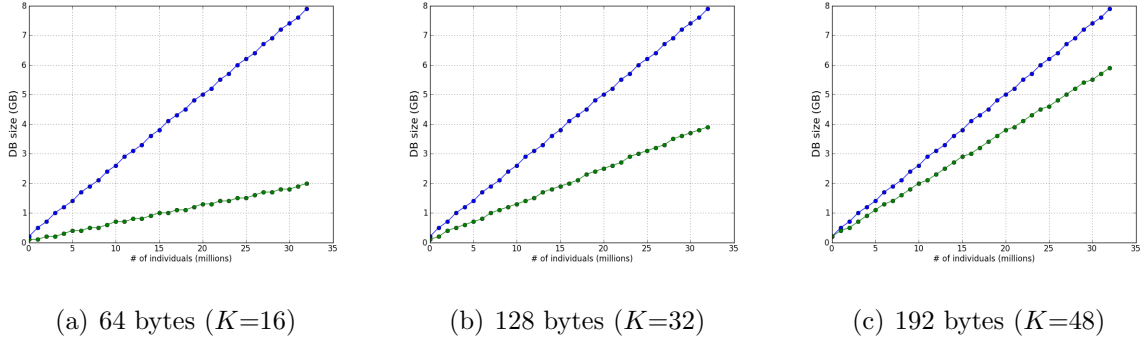


Figura 3.8: Dimensiones de la BD para plantillas de diversos tamaños.

### 3.2.3. Eficiencia de la representación y del cotejo

Los resultados observados en la extracción de rasgos y el cotejo fueron bastante alentadores, demostrando las grandes potencialidades de la tecnología de reconocimiento de iris.

En el proceso de representación nuestro método se comportó bastante bien en comparación con el propuesto en [26, 19]. Es importante destacar que mediante la optimización

---

<sup>14</sup>Generalmente en el orden de los millones de individuos.

de ambos métodos pueden existir cambios en los resultados obtenidos. En la tabla 3.3 se muestran los resultados asociados a estas comparaciones.

Método	Tiempo (ms)	Tasa de velocidad
Filtros 2D Gabor	193	-
Propuesto( $K=16$ )	13	$\approx 14x$
Propuesto( $K=32$ )	128	$\approx 1.5x$
Propuesto( $K=48$ )	476	$\approx 0.4x$

Tabla 3.3: Tiempo promedio de 10 intentos en la representación del iris.

En la tabla 3.4 se muestran resultados asociados a la eficiencia del proceso de cotejo de los distintos métodos analizados.

Método	Tiempo en microsegundos ( $\mu s$ )
Distancia de Hamming (2048 bits)	32
Distancia Euclideana( $K=16$ )	18
Distancia Euclideana( $K=32$ )	21
Distancia Euclideana( $K=48$ )	23

Tabla 3.4: Tiempo promedio de 1000 intentos de cotejo entre 2 plantillas.

Se puede observar que el método es comparable al propuesto en [26, 19] en los procesos de representación y cotejo de las plantillas biométricas, lo que trae como consecuencia un incremento en la eficiencia y rapidez del proceso de reconocimiento de iris.

# Conclusiones

En el marco de este trabajo se pudo constatar la alta eficiencia y precisión de la tecnología de reconocimiento de iris, lo cual evidencia las grandes potencialidades de la misma como método de reconocimiento biométrico.

Se presentó un nuevo método de codificación de los patrones del iris mediante el uso del Análisis de Datos Funcionales. Se evidenció el valor descriptivo de los polinomios de Zernike para la representación del iris, mostrando una reducción significativa respecto a la dimensión de los datos.

Los resultados obtenidos en los experimentos realizados sobre la UPOL[5] mostraron que el método propuesto obtuvo buenos resultados pues sus tasas de errores fueron de 0.07 %.

Las plantillas obtenidas mediante la representación del iris con el método propuesto, mostraron ser de menor dimensión que las obtenidas mediante el método propuesto por Daugman en [26] e implementado en [19], lo cual constituye un factor decisivo en el tamaño de la base de datos de un sistema de reconocimiento de iris.

Se diseñó e implementó una plataforma de reconocimiento de iris capaz de integrar con gran facilidad los distintos subsistemas de un sistema de reconocimiento de iris. Dicha plataforma permite evaluar bajo las mismas condiciones, el desempeño de los distintos métodos de segmentación, normalización y de codificación del iris.

Por otra parte, debido al buen diseño de la plataforma en conjunto con el entorno de desarrollo seleccionado, se evidenció la viabilidad del uso de la tecnología de reconocimiento de iris en nuestro país y su posible puesta en práctica en un futuro.

# Recomendaciones

En este trabajo se propuso un nuevo método de codificación del iris, que aunque mostró buenos resultados, todavía puede ser mejorado en varios sentidos. Se propone realizar estudios relacionados con la selección de nuevas bases de funciones y la cantidad de las mismas utilizadas en el proceso de codificación del iris.

Se recomienda también realizar modificaciones al algoritmo propuesto para que sea capaz de manejar las oclusiones que se pueden presentar en una imagen del iris como las pestañas, los párpados, las reflexiones especulares, entre otras.

En cuanto a la plataforma de reconocimiento de iris, aunque esta resultó ser un ambiente ideal para la comparación y evaluación de los distintos subsistemas de un sistema de reconocimiento de iris, también es posible realizar mejoras.

Se recomienda la adición de nuevos métodos de segmentación, normalización y codificación del iris con el objetivo de evaluar el desempeño de los mismos. También se recomienda agregar un módulo que permita incorporar a la plataforma medidas de calidad de los sistemas de reconocimiento biométrico, y en especial de los sistemas de reconocimiento de iris, entre las que se puede citar la conocida *decidibilidad* ( $d'$ )[25] del sistema biométrico.

Otra extensión al sistema pudiera ser la de interactuar con un dispositivo de adquisición de imágenes del iris, en vez de tomar las imágenes de una base de datos ya prefijada como se propuso en [41].

Finalmente, para evaluar la eficiencia de los algoritmos de reconocimiento de iris en condiciones reales, se aconseja realizar optimizaciones a los algoritmos implementados en

lenguajes más rápidos como C o C++, los cuales pueden ser integrados en la plataforma sin mayores complicaciones.

# Bibliografía

- [1] Biometric solutions. iris recognition. Disponible en la web en:  
[http://www.biometric-solutions.com/solutions/index.php?story=iris\\_recognition](http://www.biometric-solutions.com/solutions/index.php?story=iris_recognition).
- [2] St. lukas cataract and laser institute. eye anatomy. Disponible en la web:  
<http://stlukeseye.com/anatomy/iris.html>.
- [3] Casia iris image database. Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences:  
<http://www.sinobiometrics.com>, 2004.
- [4] Mmu iris image database. Multimedia University: <http://pesona.mmu.edu.my/ccteo/>, 2004.
- [5] Upol iris image database. Dobes and Libor Machala: <http://phoenix.inf.upol.cz/iris>, 2004.
- [6] Acerca de python. <http://www.python.org/about/>, 2013.
- [7] Numpy en pypi. <https://pypi.python.org/pypi/numpy>, 2013.
- [8] Sitio web de opencv. <http://opencv.org/>, 2013.
- [9] Sitio web de python. <http://www.python.org>, 2013.
- [10] Sitio web de qt. <http://qt.nokia.com/>, 2013.
- [11] F. H. Adler. Physiology of the eye. Technical report, St. Louis, MO: Mosby, 1965.

- [12] Ehsan M. Arvacheh. A study of segmentation and normalization for iris recognition systems. Master's thesis, University of Waterloo, 2006.
- [13] Manuel Febrero Bande. A present overview on functional data analysis. 2009.
- [14] Rafael Coomonte Belmonte. Sistema de reconocimiento de personas mediante su patrón de iris basado en la transformada de wavelet. Master's thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 2006.
- [15] W. W. Boles and B. Boashash. A human identification technique using images of the iris and wavelet transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(4), April 1998.
- [16] W.W. Boles. A wavelet transform based technique for the recognition of the human iris. *Proceedings of the International Symposium on Signal Processing and its Application, ISSPA*, pages 25–30, August 1996.
- [17] John P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. DOVER Publications, Inc, second edition, 2000.
- [18] John P. Boyd and Fu Yu. Comparing seven spectral methods for interpolation and for solving the poisson equation in a disk: Zernike polynomials, logan-shepp ridge polynomials, chebyshev-fourier series, cylindrical robert functions, bessel-fourier expansions, square-to-disk conformal mapping and radial basis functions. *Journal of Computational Physics*, 230:1408–1438, 2011.
- [19] Michael Boyd, Dragos Carmaciu, Francis Giannaros, Thomas Payne, and William Snell. Iris recognition. Master's thesis, Imperial College London, 2010.
- [20] Gary Bradski and Adrian Kaehler. *Learning OpenCV*. O'Reilly, 2008.
- [21] Jiguo Cao, Jason Nielsen, James Ramsay, and Fang Yao. The future of functional data analysis. May 2010.



- [22] Franklin Cheung. Iris recognition. Master's thesis, The University of Queensland, 1999.
- [23] J. G. Daugman. Biometric personal identification system based on iris analysis, 2004.
- [24] John Daugman. High confidence visual recognition of persons by a test of statistical independence. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and machine intelligence*, 15(11):1148–1161, 1993.
- [25] John Daugman. Biometric decision landscapes. Technical report, University of Cambridge, 2000.
- [26] John Daugman. How iris recognition works. *International Conference on Image Processing*, 1:I33–I36, 2002.
- [27] John Daugman. The importance of being random: Statistical principles of iris recognition. *Pattern Recognition*, 36(2):279–291, 2003.
- [28] John Daugman. Probing the uniqueness and randomness of iriscodes: Results from 200 billion iris pair comparisons. *Proceedings of the IEEE*, volume 94(11):1927–1935, November 2006.
- [29] John Daugman. Iris recognition. In *International Conference on Biometrics*, 2012.
- [30] Laurent Demaret and A. Iske. Image compression by linear splines over adaptive triangulations.
- [31] Irene Epifanio and Noelia Ventura-Campos. Functional data analysis in shape analysis. *Computational Statistics and Data Analysis*, March 2011.
- [32] M. Escabias, A. M. Aguilera, and M. J. Valderrama. Modelling environmental data by functional principal component logistic regression. *Environmetrics*, 16:95–107, 2005.

- [33] Manuel Escabias, Mariano J. Valderrama, and M. Carmen Aguilera-Morillo. Functional data analysis in biometrics and biostatistics. *JBMBBS*, 3, 2012.
- [34] L. Flom and A. Safir. Iris recognition system, 1987.
- [35] Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods, and Steven L. Eddins. *Digital Image Processing using MATLAB*. Pearson Education, Inc., 2004.
- [36] Mahdi S. Hosseini, Babak N. Araabi, and Hamid Soltanian-Zadeh. Pigment melanin: Pattern for iris recognition. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 59(4):792–804, 2010.
- [37] Lai M. J. and S. L. Spline functions over triangulations. *Cambridge University Press*, 2007.
- [38] Anil K. Jain, Arun Ross, and Salil Prabhakar. An introduction to biometric recognition. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, 14(1), January 2004.
- [39] Todor Kazarov. Iris detection and normalization. Master’s thesis, University of Birmingham, 2011.
- [40] W. K. Kong and D. Zhang. Accurate iris segmentation based on novel reflection and eyelash detection model. *Proceedings of 2001 International Symposium on Intelligent Multimedia, Video and Speech Processing*, 2001.
- [41] Yooyoung Lee, P. Jonathon Phillips, and Ross J. Micheals. An automated video-based system for iris recognition. 2009.
- [42] Daniel J. Levitin, Regina L. Nuzzo, Bradley W. Vines, and J. O. Ramsay. Introduction to functional data analysis. *Canadian Psychological Association*, 48(3):135–155, 2007.

- [43] Shinyoung Lim, Kwanyong Lee, Okhwan Byeon, and Taiyun Kim. Efficient iris recognition through improvement of feature vector and classifier. *ETRI Journal*, 23(2), June 2001.
- [44] James G. M. Generalized linear models with functional predictors. *JRSS*, 64:411–432, 2002.
- [45] Li Ma, Yunhong Wang, and Tieniu Tan. Iris recognition using circular symmetric filters. Technical report, National Laboratory of Pattern Recognition, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, 2002.
- [46] Patrick Y. Maeda. Zernike polynomials and their use in describing the wavefront aberrations of the human eye. Technical report, Stanford University, 2003.
- [47] Virendra N. Mahajan. Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils. *Journal of Optical Society of America*, 71(1):75–85, January 1981.
- [48] Virendra N. Mahajan. Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils. *Journal of Optical Society of America*, 1(6), June 1984.
- [49] Virendra N. Mahajan and Maham Aftab. Systematic comparison of the use of annular and zernike circle polynomials for annular wavefronts. *Journal of Optical Society of America*, 49(33), November 2010.
- [50] Libor Masek. Recognition of human iris patterns for biometric identification. Master’s thesis, The University of Western Australia, 2003.
- [51] Colm McAlinden, Mark McCartney, and Jonathan Moore. Mathematics of zernike polynomials: a review. *Clinical and Experimental Ophthalmology*, 39:820–827, 2011.
- [52] B. Miller. Vital signs of identity. *IEEE Spectrum*, 31(2):22–30, 1994.
- [53] Guang ming Dai and Virendra N. Mahajan. Zernike annular polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of Optical Society of America*, 24(1), 2006.

- [54] Hans-Georg Müller. Functional data analysis. *The Encyclopedia Sponsored by Statistics and Probability Societies.*, 2010.
- [55] R. J. Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *Journal of Optical Society of America*, 3:207, 1976.
- [56] A. Oppenheim and J. Lim. The importance of phase in signals. *Proceedings of the IEEE*, 69:529–541, 1981.
- [57] Delicado P. Dimensionality reduction when data are density functions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55(1):401–420, 2011.
- [58] Brett Patterson. Zernike polynomials for circular and annular domains. March 2002.
- [59] J. O. Ramsay and C. J. Dalzell. Some tools for functional data analysis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 53(3):539–572, 1991.
- [60] J. O. Ramsay and B. W. Silverman. *Functional Data Analysis*. Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- [61] J.O. Ramsay and B. W. Silverman. *Applied Functional Data Analysis*. Springer Verlag, New York, 2002.
- [62] Nalini K. Ratha, Andrew Senior, and Ruud M. Bolle. Automated biometrics. Technical report, IBM Thomas J. Watson Research Center.
- [63] N. Ritter. Location of the pupil-iris border in slit-lamp images of the cornea. *Proceedings of the international Conference on Image Analysis and Processing*, 1999.
- [64] López-Pintado S. and Romo J. A half-region depth for functional data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 55:1679–1695, 2011.
- [65] Wu S. and Müller H. G. Response-adaptive regression for longitudinal data. *Biometrics*, 67:852–860, 2011.

- [66] Jim Schwiegerling. Description of zernike polynomials.
- [67] Mahboubeh Shamsi and Abdolreza Rasouli. A novel approach for iris segmentation and normalization. 2009.
- [68] Larry N. Thibos, Raymond A. Applegate, James T. Schwiegerling, and Robert Webb. Standards for reporting the optical aberrations of eyes. *Journal of Refractive Surgery*, 18, 2002.
- [69] C. Tisse, L. Martin, L. Torres, and M. Robert. Person identification technique using human iris recognition. *Proc. Vision Interface*, pages 294–299, 2002.
- [70] R. D. Tuddenham and M. M. Snyder. Physical growth of california boys and girls from birth to eighteen years. *University of California Publications in Child Development*, 1:183–364., 1954.
- [71] R. Wildes. Iris recognition: an emerging biometric technology. *Proceeding of the IEEE*, 85(9), 1997.
- [72] R. P. Wildes, J. C. Asmuth, G. L. Green, S. C. Hsu, R. J. Kolczynski, J. R. Matey, and S. E. McBride. A system for automated iris recognition. *Proceedings of the IEEE Workshop on Applications of Computer Vision*, pages 121–128, 1994.
- [73] James C. Wyant and Katherine Creath. Basic wavefront aberration theory for optical metrology. *Applied Optics and Optical Engineering*, 1, 1992.
- [74] Peng Yao, Jun Li, Xueyi Ye, Zhenquan Zhuang, and Bin Li. Iris recognition algorithm using modified log-gabor filters. *IEEE*, 2006.
- [75] Kate Yaraee. Functional data analysis with application to ms and cervical vertebrae data. Master’s thesis, University of Alberta, 2011.

- [76] Y. Zhu, T. Tan, and Y. Wang. Biometric personal identification based on iris patterns. *Proceeding of. 15th International Conference on Pattern Recognition*, 2:801–804, 2000.

# Apéndice A

## Ejemplos de IRS en explotación

En este apéndice se muestran las distintas aplicaciones que tienen hoy en día los sistemas de reconocimiento de iris o *Iris Recognition Systems* (IRS). Estos sistemas pueden ser utilizados en diversos contextos entre los que se pueden citar:

- Control en las fronteras y aeropuertos como un sustituto del pasaporte.
- Control de acceso a lugares restringidos.
- Identificación de personas buscadas o perdidas.
- Acceso a PCs y redes de computadoras, sustituyen el uso de los conocidos *login* y *password*.
- Sustitutos de documentos de identidad como carnés, tarjetas de crédito, etc.



Figura A.1: Reconocimiento de iris con la cooperación del individuo.



Figura A.2: Ventajas del reconocimiento de iris sobre el reconocimiento de rostro.





Figura A.3: Reconocimiento de iris como sustituto del pasaporte en los Países Bajos.



Figura A.4: Reconocimiento de iris para el acceso a condominios en Tokio, Japón.

# Apéndice B

## Polinomios de Zernike

En este apéndice se proporciona información adicional respecto a los polinomios de Zernike y los polinomios anulares de Zernike, siendo esta última la base funcional utilizada en la representación del iris en este trabajo.

En B.1 se muestran las expresiones analíticas asociadas a los polinomios de Zernike hasta el orden 6, es decir, los polinomios de Zernike con grados menor o igual que 6.

En B.2 se muestra una visualización de los polinomios anulares de Zernike hasta el orden 6. Aquí se puede observar la similitud del dominio de definición de estos polinomios con el iris. Además, se puede apreciar la similitud entre estos y los polinomios de Zernike, a pesar de estar definidos sobre distintos dominios.

## B.1. Expresiones para los Polinomios Circulares de Zernike

n (orden)	m (frecuencia)	$Z_n^m$	$Z_n^m(\rho, \theta)$	Descripción
0	0	$Z_0^0$	1	Piston
1	-1	$Z_1^{-1}$	$\sqrt{4}\rho \sin \theta$	Tilt (about x-axis)
1	1	$Z_1^1$	$\sqrt{4}\rho \cos \theta$	Tilt (about y-axis)
2	-2	$Z_2^{-2}$	$\sqrt{6}\rho^2 \sin 2\theta$	Astigmatism (axis 45°, 135°)
2	0	$Z_2^0$	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	Spherical defocus
2	2	$Z_2^2$	$\sqrt{6}\rho^2 \cos 2\theta$	Astigmatism (axis 0°, 90°)
3	-3	$Z_3^{-3}$	$\sqrt{8}\rho^3 \sin 3\theta$	Trefoil (base on x-axis)
3	-1	$Z_3^{-1}$	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \sin \theta$	Coma (along x-axis)
3	1	$Z_3^1$	$\sqrt{8}(3\rho^3 - 2\rho) \cos \theta$	Coma (along y-axis)
3	3	$Z_3^3$	$\sqrt{8}\rho^3 \cos 3\theta$	Trefoil (base on y-axis)
4	-4	$Z_4^{-4}$	$\sqrt{10}\rho^4 \sin 4\theta$	Tetrafoil
4	-2	$Z_4^{-2}$	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \sin 2\theta$	Secondary astigmatism
4	0	$Z_4^0$	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	Spherical aberration
4	2	$Z_4^2$	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2) \cos 2\theta$	Secondary astigmatism
4	4	$Z_4^4$	$\sqrt{10}\rho^4 \cos 4\theta$	Tetrafoil
5	-5	$Z_5^{-5}$	$\sqrt{12}\rho^5 \sin 5\theta$	Pentafoil
5	-3	$Z_5^{-3}$	$\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3) \sin 3\theta$	Secondary trefoil
5	-1	$Z_5^{-1}$	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \sin \theta$	Secondary coma
5	1	$Z_5^1$	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho) \cos \theta$	Secondary coma
5	3	$Z_5^3$	$\sqrt{12}(5\rho^5 - 4\rho^3) \cos 3\theta$	Secondary trefoil
5	5	$Z_5^5$	$\sqrt{12}\rho^5 \cos 5\theta$	Pentafoil
6	-6	$Z_6^{-6}$	$\sqrt{14}\rho^6 \sin 6\theta$	Hexafoil
6	-4	$Z_6^{-4}$	$\sqrt{14}(6\rho^6 - 5\rho^4) \sin 4\theta$	Secondary tetrafoil
6	-2	$Z_6^{-2}$	$\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \sin 2\theta$	Tertiary astigmatism
6	0	$Z_6^0$	$\sqrt{7}(20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$	Secondary spherical aberration
6	2	$Z_6^2$	$\sqrt{14}(15\rho^6 - 20\rho^4 + 6\rho^2) \cos 2\theta$	Tertiary astigmatism
6	4	$Z_6^4$	$\sqrt{14}(6\rho^6 - 5\rho^4) \cos 4\theta$	Secondary tetrafoil
6	6	$Z_6^6$	$\sqrt{14}\rho^6 \cos 6\theta$	Hexafoil

Tabla B.1: Expresiones analíticas para los polinomios circulares de Zernike.

## B.2. Representación visual de los Polinomios Anulares de Zernike

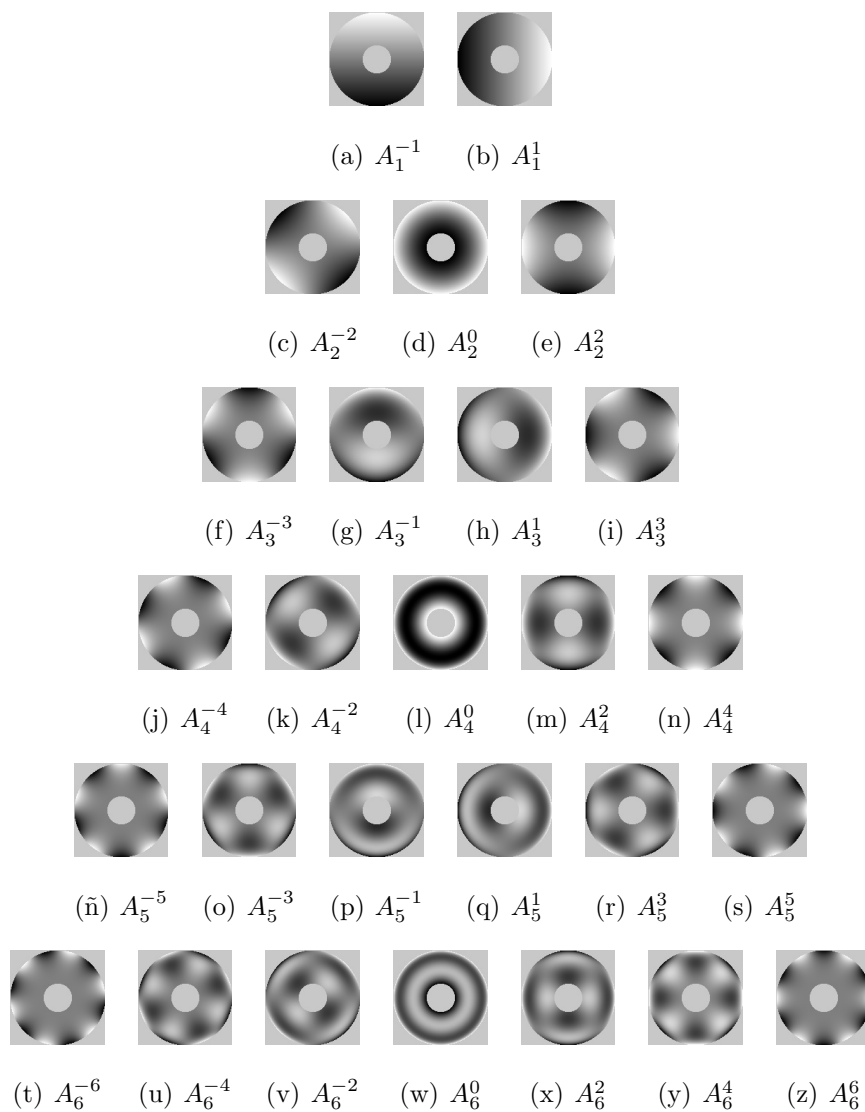


Figura B.1: Polinomios anulares de Zernike.