

倒立振子の安定化制御

渡部僚太

2018 年 7 月 2 日

目次

第 1 章	報告書を書く上で（後で消す）	1
1.1	注意点	1
1.2	倒立振子の全体の流れ	1
1.3	疑問	2
1.4	トラブルシューティング	2
1.5	TODO	3
第 2 章	はじめに	5
2.1	背景	5
2.2	実験目的	5
2.3	制御対象	6
2.3.1	倒立振子系	6
2.3.2	観測出力と操作入力	7
第 3 章	モデリング	9
3.1	倒立振子のモデリング	9
3.1.1	状態方程式	9
3.1.2	観測方程式	14
3.2	倒立振子のパラメータの同定	14
3.2.1	m と l の測定	14
3.2.2	a の測定	15
3.2.3	J と c の測定	15
3.2.4	M と f の測定	17
3.2.5	c_1 と c_2 の測定	21
3.2.6	同定結果	21
3.3	パラメータの検証	22
3.3.1	振子の自由振動シミュレーション	22
3.3.2	台車のステップ応答による方法のシミュレーション	23
3.3.3	台車のフィードバック応答シミュレーション	23
3.4	設計（線形）モデルの決定	24

第 4 章	制御系設計	25
4.1	システム解析	25
4.1.1	安定性	25
4.1.2	可制御性	25
4.1.3	可制御性	26
4.2	状態フィードバックの設計	26
4.3	最小次元オブザーバの設計	27
4.4	コントローラの離散化	28
4.5	振り上げ制御及び安定化の実現	29
第 5 章	シミュレーション	31
5.1	重み行列の変更による制御性能評価	31
5.2	オブザーバの極の変更による制御性能評価	32
5.3	サンプリング周期の変更による制御性能評価	32
5.4	振り上げ制御及び安定化に対する制御性能評価	33
第 6 章	実験	35
6.1	安定化制御実験	35
6.2	目標値の変更実験	35
6.3	振り上げ制御及び安定化実験	35
第 7 章	おわりに	37
付 録 A	プログラム	39
A.1	非線形モデル	39
A.2	線形モデル	39
A.3	システム解析	39
A.4	状態フィードバック	39
A.5	最小次元オブザーバ	39
A.6	コントローラの離散化	39
A.7	振り上げ及び安定化	39
A.8	安定化制御実験	39
A.9	目標値変更実験	39
A.10	振り上げ制御及び安定化実験	39

図目次

1.1	数式モデル導出のための参考図	3
2.1	倒立振子系	6
3.1	数式モデル導出のための参考図	9
3.2	パラメータ a の決定	15
3.3	J と c の測定	16
3.4	台車のステップ応答	18
3.5	台車のフィードバック応答	19
3.6	フィードバック制御系のブロック線図	20
3.7	飽和器の有無によるフィードバック入力と比較	21
3.8	振子の自由振動シミュレーション	22
3.9	台車のステップ応答シミュレーションと実験結果の比較	23
3.10	フィードバックによる方法のシミュレーションと実験結果の比較	24
4.1	状態フィードバックを含めたブロック線図	27
4.2	最小次元オブザーバーを含めたブロック線図	28
4.3	離散器 (0 次ホールド) を含めたブロック線図	28
4.4	振り上げ制御及び安定化制御を行うためのブロック線図	30
5.1	重み行列での比較 (振子の角度)	32

表 目 次

3.1 同定したパラメータの一覧	22
5.1 重み行列の変更	31

第1章 報告書を書く上で（後で消す）

1.1 注意点

完成したら必ずこの部分は main から削ってください

1.2 倒立振子の全体の流れ

以下に今回行った倒立振子に関する実験及びシミュレーションなどの流れを示す

1. 倒立振子のモデリングと自由応答シミュレーション（B. 倒立振子の安定化制御、制御工学実験第3 倒立振子の安定化制御の資料も含む）
2. 倒立振子のパラメータ同定と検証
3. 設計（線形）モデルの決定とシステム解析
4. 制御系の設計1（状態フィードバック）と制御性能評価
5. 制御系の設計2（最小次元オブザーバ）と制御性能評価
6. 制御系の設計3（コントローラの離散化）と制御性能評価
7. 制御系の設計4（振り上げ制御・安定化）と制御性能評価
8. 倒立振子の制御実験（安定化制御）
9. 倒立振子の制御実験（目標値の変更）
10. 倒立振子の制御実験（振り上げ制御・安定化）
11. 教育機関報告書作成（その1）

以上を分割を以下のグループに分けることで今までしてきたことがどのチャプターにかかれるかを示す

A:はじめに この実験を行う背景とか

B:モデリング 1, 2, 3,

C:制御系設計 4, 5, 6, 7

D:シミュレーション 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

E:実験 8, 9, 10

F:おわりに 学んだこととか

G:プログラム

1.3 疑問

質問コーナー

・シミュレーションの部分は今までやってきたシミュレーションすべてを書かなければならないか

→最低限実験と比較したシミュレーションは必要。それ以外は任意でよい。必要最低限のせればよい

・制御系の設計などで MaTX, Java, JaMOX の 3 通りからアプローチをかけたが報告書にはそのすべてを記載末うべきか

→任意でよい。でも jamox のブロック線図は乗せたほうが良い

・付録のプログラムについても同様に 3 通りのプログラムやブロック線図を貼り付けるべきか

→任意でよい

・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・
・

1.4 トラブルシューティング

トラブルシューティング！困ったときはここを見てね

- ・図において label と ref を対応させるときには label を caption の下に置く必要がある
- ・改ページを行うには newpage を用いる
- ・改段落には par を用いる
- ・gnuplot で eps を出力するには set terminal postscript eps を実行し、plot を実行すれ

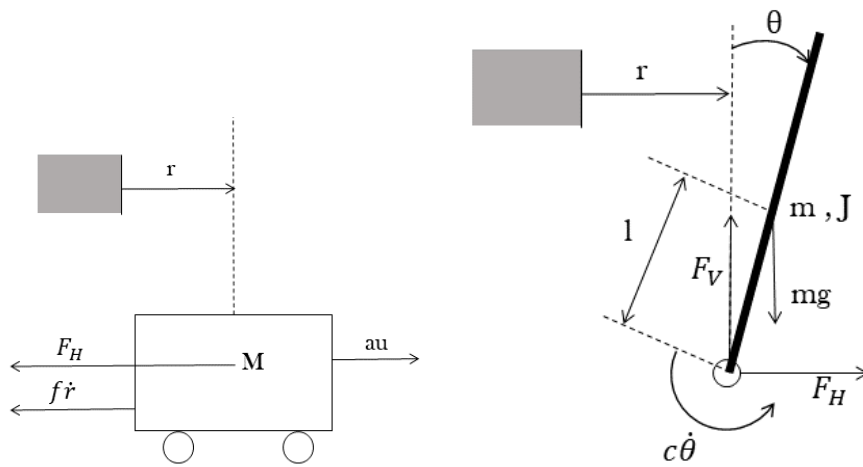


図 1.1: 数式モデル導出のための参考図

ばよい

- ・ 報告書に使っている図と使っていない図を分ける

・
・
・
・
・

1.5 TODO

- ・ 図の矢印の線を 4pt にする
- ・ 矢じりを塗りつぶす
- ・ 半角、全角を整える
- ・ 不要な式番号を排除する
- ・ グラフの画像を見やすいように修正する

・
・

第2章 はじめに

2.1 背景

TODO

2.2 実験目的

本実験の目的は、倒立振子の安定化制御の制御系の設計を状態空間法を用いて行うことにより、線形時不変システムを設計することである。具体的には以下の

- 振子を垂直上向きに配置した状態から実験を開始し、安定化制御を行う。また、このとき十数度角度を傾けても安定化制御を行えるようにする。(不安定平衡点の安定化)
- 安定化制御を行っている状態でパルス入力を加え、台車の位置が変わっても安定化制御を行えるようにする。
- 振子を下向きに配置した状態から振り上げ、安定化制御を行えるようにする。

を達成することが目的である。

不安定平衡点とは、倒立振子系における平衡点の1つである。今回実験で使用する倒立振子系には平衡点が2つ存在する。1つは棒が鉛直線に沿って垂れ下がった状態、もう1つは棒が鉛直線に沿って倒立した状態である。前者は振子を揺らした場合、時間が立てば止まる安定平衡点である。後者は振子を揺らした場合、そのまま振子が真っ逆さまに落ちていく不安定平衡点である。

2.3 制御対象

2.3.1 倒立振り子系

本実験で用いる倒立振り子系を以下に載せる。

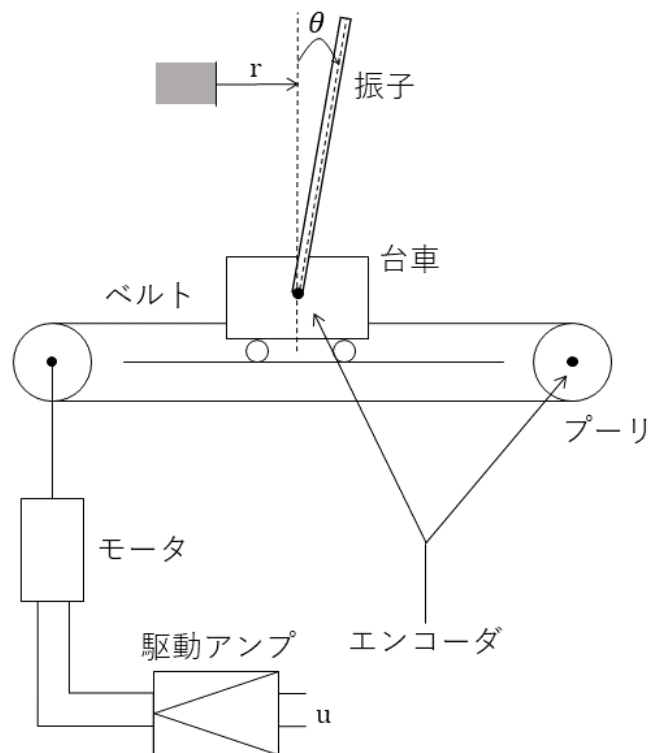


図 2.1: 倒立振り子系

図 2.1 は倒立振り子系を表す図である。モノレールの上に台車が置かれ、台車上のモノレールと直角な軸に一本の棒が取り付けられ、棒はその軸まわりに自由に回転できる。台車はベルトとプーリを介して、モータにより駆動され、モノレール上を走行できる。すなわち、棒（振り子）は鉛直線とモノレールにより定まる平面に拘束されて、台車によって動かされるようになっている。

2.3.2 観測出力と操作入力

倒立振り子の観測出力として、エンコーダにより、つぎの2つが測定できる。

- 台車の基準位置から変位 r に比例する電圧 y_1
- 棒の鉛直線となす角度 θ に比例する電圧 y_2

一方、操作入力は、つぎのものである。

- モータの駆動アンプの入力電圧 u

ここで、モータにより駆動される台車には、 u に比例した駆動力が働くものとする。

第3章 モデリング

3.1 倒立振子のモデリング

実験目的を達成する制御システムを設計するためにまず、倒立振子系について、状態方程式と観測方程式から成る数式モデルを導出する。

3.1.1 状態方程式

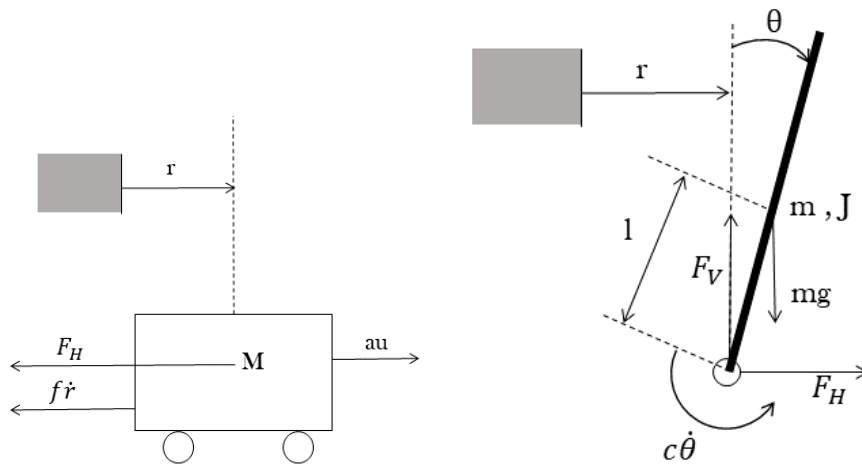


図 3.1: 数式モデル導出のための参考図

図 3.1 を参考に各運動方程式を導出すると、
台車の運動方程式は

$$M\ddot{r} = au - F_H - f\dot{r} \quad (3.1)$$

倒立振子の回転の運動方程式は

$$J\ddot{\theta} = lF_V \sin \theta - lF_H \cos \theta - c\dot{\theta} \quad (3.2)$$

倒立振子の水平方向の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2}(r + l \sin \theta) = F_H \quad (3.3)$$

倒立振子の垂直方向の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) = F_V - mg \quad (3.4)$$

となる。

ここで各式の導出過程を述べる。図 3.1 より台車の運動方程式は、振り子からの水平抗力 F_H を考慮してニュートンの第二法則より (3.1) 式を導くことができる。ただし、 M は台車の質量、 f は台車の摩擦係数、 a は駆動アンプへの入力電圧から台車への駆動までのゲイン、 u はモータの駆動アンプへの入力電圧、 r は台車の基準位置からの変位である。同様にニュートンの第二法則を用いることで (3.3), (3.4) 式の運動方程式を導くことができる。ただし、 m は振り子の質量、 l は回転軸・重心間の距離、 g は重力加速度、 F_V は振り子が台車から受ける垂直抗力である。また、 θ は鉛直上向きを $\theta = 0$ としたときの角度である。最後に (3.2) 式は回転に対する運動方程式を考えることで上記と同様に求めることができる。ただし、 J は重心回りの慣性モーメント、 c は回転軸摩擦係数である。

いま、4つの状態変数から成るベクトル、すなわち状態 x を

$$x = \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

のように定義し、(3.1),(3.2), (3.3),(3.4) 式から倒立振子系の非線形状態方程式を求める。

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

ここで (3.3) 式より F_H を、(3.4) 式より F_V を求めると

$$\begin{aligned} F_H &= m \frac{d^2}{dt^2} r + ml \frac{d^2}{dt^2} \sin \theta \\ &= m \ddot{r} + ml(-\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
F_V &= mg + m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \\
&= mg + ml(-\dot{\theta}^2 \cos \theta - \ddot{\theta} \sin \theta)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

である。

(3.7) 式を (3.1) 式に代入すると

$$(M + m)\ddot{r} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + f\dot{r} = au \tag{3.9}$$

である。

(3.7) 式、(3.8) 式を (3.2) 式に代入すると

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{r} \cos \theta - mgl \sin \theta + c\dot{\theta} = 0 \tag{3.10}$$

である。

(3.9) 式、(3.16) 式を行列表現すると

$$\begin{bmatrix} (M + m)\ddot{r} + (ml \cos \theta)\ddot{\theta} + (-ml \sin \theta) + f\dot{r} = au \\ (ml \cos \theta)\ddot{r} + (J + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + c\dot{\theta} = 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & J + ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + f\dot{r} \\ mgl \sin \theta + c\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$\begin{pmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & J + ml^2 \end{pmatrix}$ を K と置いて右辺に逆行列としてかけると

$$\begin{bmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = K^{-1} \begin{bmatrix} au - f\dot{r} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \\ mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

よって以上から (3.6) 式は

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ K^{-1} \begin{bmatrix} -f\dot{r} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + au \\ mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

となる。ただし、 K は

$$K = \begin{bmatrix} M + m & ml \cos \theta \\ ml \cos \theta & J + ml^2 \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

である。

よって倒立振子系の非線形状態方程式は 3.14 のように得られる。

ところで、倒立振子系については、その制御目的から、不安定平衡点 $x = 0$ の近傍での挙動を表す状態方程式を知れば十分である。そこで、この基準状態まわりで一時近似された状態方程式を求めることを考える。

(3.14) 式に一次近似のテイラー展開を施すと、

$$f(x, u) = f(0, 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0} (x - 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0} (u - 0) \quad (3.16)$$

となる。

また、 $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, u=0}$, $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x=0, u=0}$ とする。

ここで、一時近似を施したので、 θ を微小範囲と考えることができ、 $\sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1$, $\dot{\theta}^2 \simeq 0$ のように近似できる。

以上の近似から (3.14), (3.15) 式は

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ K'^{-1} \begin{bmatrix} au - f\dot{r} \\ mlg\theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$K' = \begin{bmatrix} M + m & ml \\ ml & J + ml^2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

となる。

(3.17)、(3.18) 式を用いて A、B を計算する

ここで、(3.17) 式の 3 行目を a_1 と置き、4 行目を a_2 と置く。

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial a_1}{\partial r} & \frac{\partial a_1}{\partial \theta} & \frac{\partial a_1}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial a_1}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial a_2}{\partial r} & \frac{\partial a_2}{\partial \theta} & \frac{\partial a_2}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial a_2}{\partial \dot{\theta}} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & K'^{-1}(-f) & 0 \\ 0 & K'^{-1}(mgl) & 0 & K'^{-1}(-c) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial u} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial u} \\ \frac{\partial a_1}{\partial u} \\ \frac{\partial a_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K'^{-1}a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

以上から線形状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & K'^{-1}(-f) & 0 \\ 0 & K'^{-1}(mgl) & 0 & K'^{-1}(-c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K'^{-1}au \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる。また、鉛直下向きを $\theta = 0$ としたときの非線形状態方程式は (3.15) 式の三角関数内の θ に $+\pi$ すればよいので

$$\dot{x} = f(x, u) = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ K^{-1} \begin{bmatrix} -f\dot{r} - ml\ddot{\theta} \sin \theta + au \\ -mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

となる。ただし、 K は

$$K = \begin{bmatrix} M + m & -ml \cos \theta \\ -ml \cos \theta & J + ml^2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

である。

振子の角度を鉛直上向きを $\theta = 0$ としたときの状態方程式を線形化したときと同様に (3.23), (3.24) 式を線形化すると線形状態方程式は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & K'^{-1}(-f) & 0 \\ 0 & K'^{-1}(-mgl) & 0 & K'^{-1}(-c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K'^{-1}au \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。ただし、 K は、

$$K = \begin{bmatrix} M + m & -ml \\ -ml & J + ml^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

である。

今後、(3.22) 式を鉛直上向き基準の線形状態方程式とし、(3.25) 式を鉛直下向き基準の線形状態方程式とする。

3.1.2 観測方程式

2つの観測出力は

$$y_1 = c_1 r \quad (3.27)$$

$$y_2 = c_2 \theta \quad (3.28)$$

のように表される。ここで、 c_1 は変位・電圧変換係数、 c_2 は角度・電圧変換係数である。これから成るベクトル出力 y を

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

のように定義すると、倒立振子系に対する観測方程式として

$$y = Cx \quad (3.30)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

を得ることができる。

なお、鉛直上向きを基準とした場合でも鉛直下向きを基準とした場合でも出力方程式は変化しない。

3.2 倒立振子のパラメータの同定

数式モデル (3.18), (3.21) に含まれる物理パラメータを実際の倒立振子系で実験を行い同定する。

3.2.1 m と l の測定

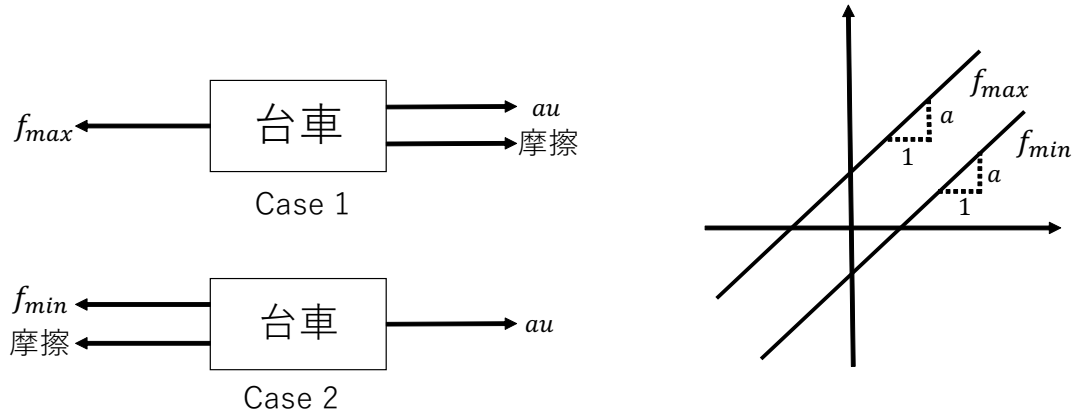
倒立振子系から振子を取り外し、バネ秤で振子の質量 m を測定する。つぎに、振子を鋼尺のエッジ上でバランスさせて、重心の位置を定め、 l を測定する。以下に測定した結果を示す。

$$m = 0.031[\text{kg}]$$

$$l = 0.15[\text{m}]$$

3.2.2 a の測定

モータに一定電圧を加え、ばねばかりで台車を引き、台車が正の方向に動き出すときの力 ($au + \text{摩擦}$) を f_{max} 、負の方向に動き出すときの力 ($au - \text{摩擦}$) を f_{min} とする。図 3.2 に示すように u と f_{max}, f_{min} の関係をいくつかの電圧について調べ、最小 2 乗法によって 1 次関数を求め、この傾きを a とする。

図 3.2: パラメータ a の決定

以下に測定した結果を示す。

$$a = 0.062[\text{Kg/V}] = 6.1 \times 10^{-1}[\text{N/V}]$$

3.2.3 J と c の測定

振子を自由振動させることにより、 J と c を測定できる。その数式モデルは鉛直下向きを基準として

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta + c\dot{\theta} = 0 \quad (3.32)$$

$$y_2 = c_2 \theta \quad (3.33)$$

で与えられる。 θ を微小範囲で考えると、(3.32), (3.33) 式は

$$\ddot{y}_2 + 2\zeta\omega_n\dot{y}_2 + \omega_n^2 y_2 = 0 \quad (3.34)$$

ただし、

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mgl(J + ml^2)}}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{J + ml^2}} \quad (3.35)$$

のように書くことができる。この解は

$$0 < \zeta < 1$$

のとき、減衰振動となり

$$y_2(t) = \frac{y_2(0)}{\sqrt{1-\zeta^2}} \exp(-\omega_n \zeta t) \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$$

ただし

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

で与えられる。

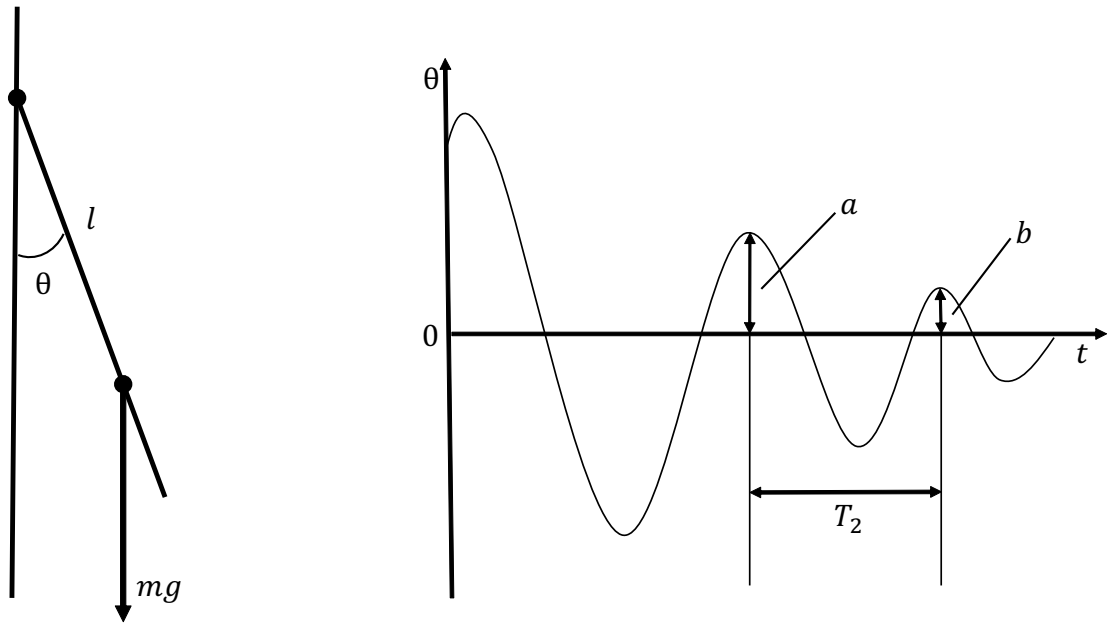


図 3.3: J と c の測定

いま、減衰振動の周期を T_2 とし、時刻 t_1 と時刻 $t_2 = t_1 + T_2$ において波形 $y_2(t)$ の山が隣合うものとする。このときの振幅の減衰比は

$$\frac{|y_2(t_2)|}{|y_2(t_1)|} = \exp(-\lambda)$$

ただし

$$\lambda = \frac{2\pi\zeta}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.36)$$

となる。この λ は対数減衰比と呼ばれる。また

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

が成り立つ。したがって、 J と c は

$$J = \frac{mglT_2^2}{4\pi^2 + \lambda^2} - ml^2, \quad c = \frac{2\lambda(J + ml^2)}{T_2} \quad (3.37)$$

のように与えられる。

以下に測定した結果を示す。

$$J = 2.5E - 4[\text{khm}^2]$$

$$c = 5.4E - 5[\text{kgm}^2/\text{s}]$$

3.2.4 M と f の測定

M と f の測定方法には二通りがある。

ステップ応答による測定法

ここでは、台車をアンプ・モータプーリ・ベルト・台車系の等価質量と等価摩擦係数とし、台車のステップ応答を測定することで M と f を決定する。ただし、振り子は台車から取り外した状態で測定を行う。このときの運動方程式は

$$M\ddot{r} = au - f\dot{r}$$

であり、 u から r までの伝達関数 G は

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

となる。ただし、

$$K = \frac{a}{f}, \quad T = \frac{M}{f} \quad (3.38)$$

である。初期状態を 0 とするとき、このシステムのステップ応答は

$$r(t) = KU_0 \left(Te^{\frac{-t}{T} + t - T} \right) \quad (3.39)$$

である。

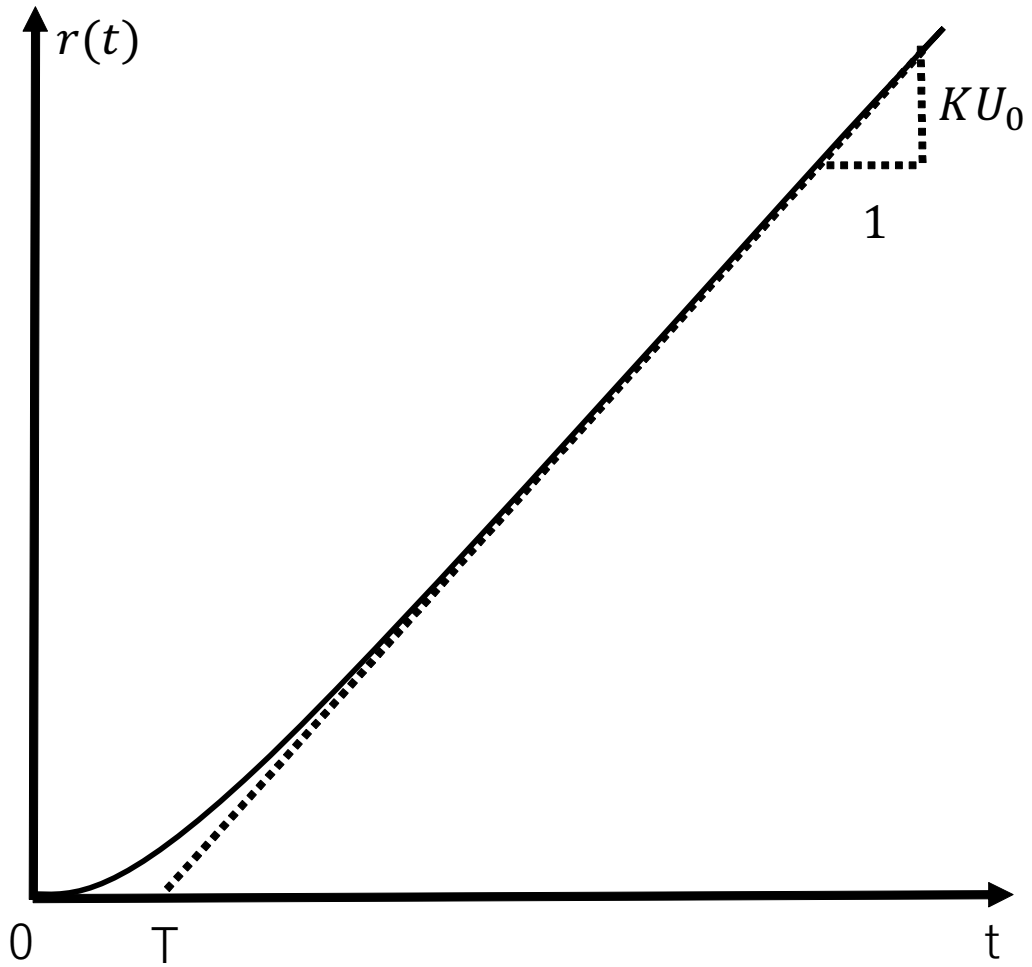


図 3.4: 台車のステップ応答

ただし、 U_0 はステップの高さである。(3.39) において $t \rightarrow \infty$ とすれば

$$r(t) = KU_0(t - T)$$

となり、図 3.4 を参考に T と K をもとめ、(3.38) 式より M と f を決定することができる。以下にこの方法を用いて同定したパラメータを示す。

$$M = 6.9E - 1(\text{kg})$$

$$f = 7.6(\text{kg/s})$$

フィードバック入力による測定法

ここでは、入力にステップ応答ではなく、以下に示すようなフィードバック入力を加える。

$$u = k_c(y_c - y) \quad (3.40)$$

ただし、 y_c は目標値、 y は出力、 k_c はフィードバックゲインである。このようにすることで不足制動の2次系 ($\zeta < 1$) を実現させる。

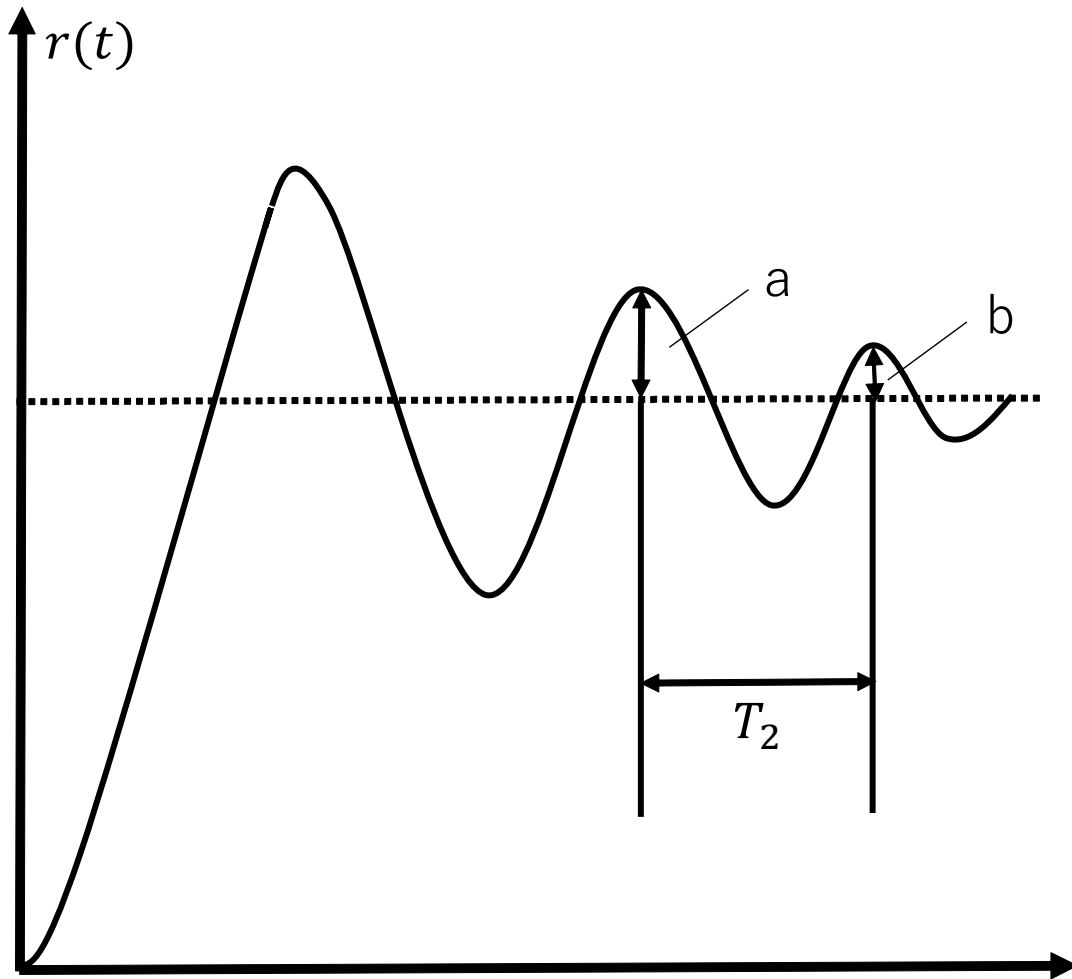


図 3.5: 台車のフィードバック応答

図 (3.5) を参考にして M と f を同定する。この方法は J と c の同定の際に用いた方法とほぼ同じであるため、詳しい説明はそちらに譲る。

同定した J と c から以下の式を用いて ζ と ω_n を計算し求める。

$$\lambda = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.41)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.42)$$

上の式を式変形して ζ と ω_n イコールの式にすると

$$\zeta = \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \lambda^2}} \quad (3.43)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_2 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.44)$$

以上の式から求めた ζ と ω_n は以下の二次系の伝達関数の基本形に代入することで実験で得られたデータから伝達関数を求めることができる

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.45)$$

また、今回のフィードバック制御系におけるブロック線図は以下のようになる。

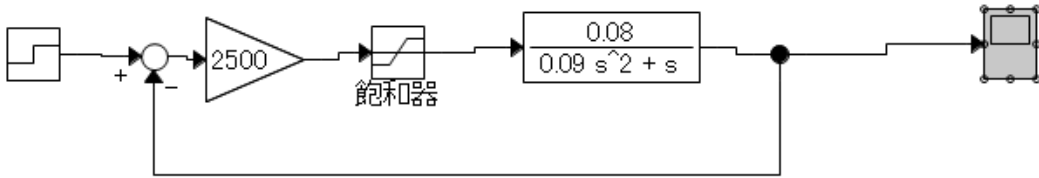


図 3.6: フィードバック制御系のブロック線図

ここで、台車の伝達関数は以下の式である。

$$P(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)} \quad (3.46)$$

ただし、 T は M/f 、 K は a/f である。上のブロック線図から伝達関数を求める。しかし、飽和システムを含んでいると伝達関数を求めることができないので、ここでは飽和システムがなくても台車は問題なく動作するものとして仮定する。以上の仮定から伝達関数は

$$G(s) = \frac{AK/T}{s^2 + (1/T)s + (AK/T)} \quad (3.47)$$

となる。ただし A はゲインである。(3.46) 式と (3.47) 式を係数比較し、 $M, f =$ の式にすると以下のようになる。

$$\begin{cases} M = \frac{aA}{\omega_n^2} \\ f = 2\zeta\omega_n^2 M \end{cases} \quad (3.48)$$

よって、(3.48) 式から M と f は以下のように求まる。

$$M = 1.59(\text{kg})$$

$$f = 13.2(\text{kg/s})$$

M と f の決定

パラメータ M と f についてはステップ応答による方法とフィードバックによる方法の2通りから同定を行った。しかし、それぞれの方法で求めたパラメータを比較するとまるで違うことがわかる。これはフィードバックによる方法では飽和システムを含めずに考えたことが原因であるといえる。シミュレーションにおいては入力にどのような値を加えても倒立振子系に何ら影響はないが実際の倒立振子においてはその入力できる値には制限がある。この制限を考えるか否かで結果が変わってくるということである。

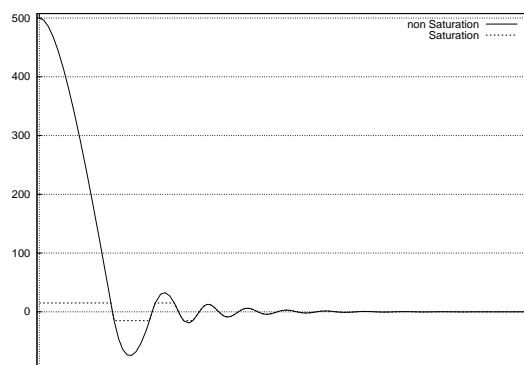


図3.7: 飽和器の有無によるフィードバック入力の比較

図 (3.7) より飽和器がない場合 (non saturation)、入力は最大 500(V) まで加えられることがわかる。本実験で用いる倒立振子系の入力限界は $-15 < u < 15$ であるので、その範囲を大きく超えてしまっている。つまり、フィードバックによる方法で同定したパラメータは現実に即していないといえる。以上から本実験においてフィードバックを行う場合必ず飽和システムが必要であるといえる。なので、飽和システムが存在する限り伝達関数を求めることができないので、正確なパラメータの計算を行うことができないといえる。以降、パラメータ M, f はステップ応答による方法で同定した値を用いる。

3.2.5 c_1 と c_2 の測定

c_1 と c_2 に関しては

$$c_1 = 1.0[\text{V/m}]$$

$$c_2 = 1.0[\text{V/rad}]$$

というようにソフトウェアに設定してあるものを用いた。

3.2.6 同定結果

同定実験において同定したパラメータを表にまとめる。

表 3.1: 同定したパラメータの一覧

パラメータ	同定した値
$m[\text{kg}]$	0.031
$l[\text{m}]$	0.15
$M[\text{kg}]$	0.69
$f[\text{kg/s}]$	7.6
$J[\text{kgm}^2]$	2.5E-4
$c[\text{kgm}^2/\text{s}]$	5.4E-5
$a[\text{N/V}]$	0.61
$c_1[\text{V/m}]$	1.0
$c_2[\text{V/m}]$	1.0

3.3 パラメータの検証

前節では、実験によって倒立振子のパラメータを同定した。しかし、その同定したパラメータがどれほど有効性があるか現時点では全く分からない状況である。そこで、本節では同定したパラメータの有効性をがどれほどなのかシミュレーションを用いて検証を行う。シミュレーションに用いたツールは `MATLAB` である。ただし、直接同定を行った m, l や最初から設定してあった c_1, c_2 については検証は行わない。

3.3.1 振子の自由振動シミュレーション

ここでは、 J, c の検証を行う。以下にシミュレーションと実験データを描画したグラフを示す。

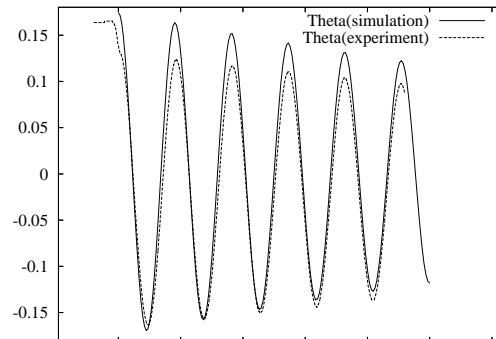


図 3.8: 振子の自由振動シミュレーション

図 (3.8) よりシミュレーションと実験結果に少し差異はあるが大きな違いはないといえる。よって同定したパラメータ J, c は有効な値であるといえる。

3.3.2 台車のステップ応答による方法のシミュレーション

ここでは、 M, f, a の検証を行う。 M, f はステップ応答による方法で求めた値を用いる。以下にシミュレーションと実験データを描画したグラフを示す。

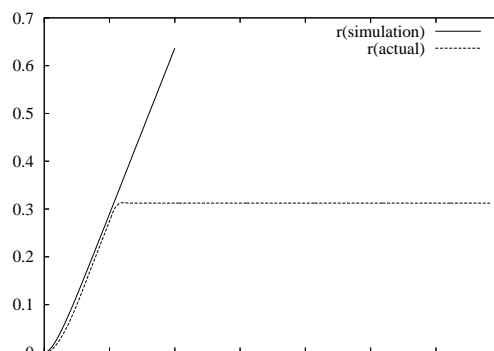


図 3.9: 台車のステップ応答シミュレーションと実験結果の比較

図 (3.9) よりシミュレーションと実験結果に少し差異はあるが大きな違いはないといえる。0.5 秒以降のグラフが大幅に異なっているが、これはシミュレーションの場合は台車の可動範囲に制限がないためずっと台車が移動し続けるが、実験の場合は台車の可動範囲に制限があるため、ある時間を境に移動が止まっている。また、このときの入力電圧は 8[V] である。以上から同定したパラメータ M, f, a は有効な値といえる。

3.3.3 台車のフィードバック応答シミュレーション

ここでは、 M, f, a の検証を行う。 M, f はフィードバックによる方法で求めた値を用いる。以下にシミュレーションと実験データを描画したグラフを示す。

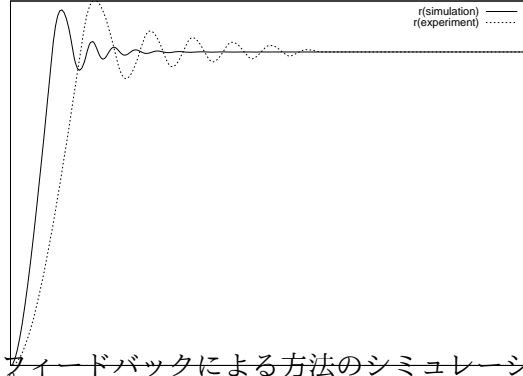


図 3.10: フィードバックによる方法のシミュレーションと実験結果の比較

図 (3.10) よりシミュレーションと実験結果には大きな差異があることが確認できる。上述した通りこの方法で同定したパラメータは現実に即しておらず、結果飽和器を加えたシミュレーションとの比較において大きな違いが出てきてしまう。よってこの方法で同定したパラメータ M, f には有効性がないといえる。

3.4 設計（線形）モデルの決定

ここまでで、パラメータを同定し、その有効性についても確かめた。よって、同定すべきパラメータを決定できたのでシステム行列 A 、入力行列 B 、出力行列 C を MATX を用いて計算し、倒立振子の線形モデルを確定する。 MATX で計算した各行列を以下に示す。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.32 & -10.9 & 0.00038 \\ 0 & 50 & 53 & -0.059 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.87 \\ -4.3 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

ただし、倒立振子を立たせることを目的とするので、上向きを基準としたときの線形状態方程式である。

第4章 制御系設計

4.1 システム解析

前章で確定した線形モデルについてシステム解析を行う。これにより今回用いるモデルが安定化制御可能か判定することができる。具体的には可制御性と可観測性を調べ、それらが存在すれば安定化制御可能であるといえる。以下で行う計算はすべて `MATX` を用いた。

4.1.1 安定性

システムの極（ A の固有値）を計算した結果 D を以下に示す。

$$D = \begin{bmatrix} 7.0 + 0i \\ 0 + 0i \\ -6.8 - 0i \\ -11 + 0i \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

(4.1) 式より 1 行目が不安定であり、2 行目が安定限界であるので、今回用いるモデルは不安定であるといえる。

4.1.2 可制御性

可制御性行列は以下のようなになる。

$$N_c = \begin{bmatrix} C & CA & CA^2 & CA^3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

上の行列よりランクは 4 になれば可制御性があるといえる。ランクを計算したところ

$$rank = 4 \quad (4.3)$$

となった。よって可制御性を確認できる。

4.1.3 可制御性

可観測性行列は以下のようになる。

$$N_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

上の行列よりランクは4になれば可観測性があるといえる。ランクを計算したところ

$$rank = 4 \quad (4.5)$$

となった。よって、可観測性を確認できる。

以上から倒立振り子系の上向き基準の線形モデルは不安定なシステムであるが、4つの状態を観測することができ、制御することが可能なシステムといえる。次の節では倒立振り子を立たせるための制御器を設計していく。その際にここで計算したシステム行列 A と入力行列 B を用いる。

4.2 状態フィードバックの設計

制御器を設計していく第一段階として、状態フィードバック F の設計を行う。 F は、システムを安定化する状態フィードバック

$$u = -Fx$$

として求めればよい。また、本実験においては台車が目標値へ移動を行う場合があるので、目標値 x_{ref} として以下を設計することになる。

$$u(t) = F(x_{ref} - x) \quad (4.6)$$

この状態フィードバックの設計法には、極配置に基づく状態フィードバック測と LQ 最適制御に基づく状態フィードバック測の2通りがあるが今回は後者の方法を用いて設計を行う。

さて、(4.6) 式を LQ 問題の解として得るために、2次形式評価関数

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + R u^2) dt \quad (4.7)$$

$$Q = \text{diag}(q_1^2, q_2^2, q_3^2, q_4^2), \quad R = 1 \quad (4.8)$$

を考える。ただし、 $\text{diag}(\dots)$ は、対角行列を表す。これは

$$J = \int_0^\infty (q_1^2 r^2 + q_2^2 \theta^2 + q_3^2 \dot{r}^2 + q_4^2 \dot{\theta}^2) dt \quad (4.9)$$

のように表されることから、 q_1, q_2, q_3, q_4 は台車位置 r 、振り子角度 θ 、台車速度 $\dot{\theta}$ 、振り子角速度 $\dot{\theta}$ の間のバランスをとる重み係数である。

(4.7)、(4.8) 式を最小にする (4.6) 式における F は、リカッチの方程式

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

の解 $P > 0$ を求めて

$$F = R^{-1}B^T P$$

のように与えられる。

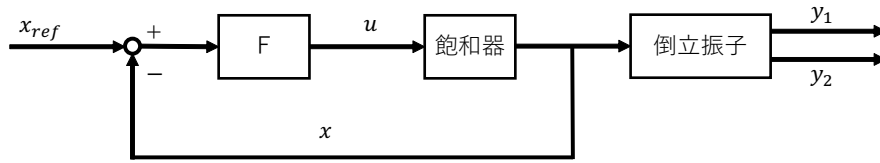


図 4.1: 状態フィードバックを含めたブロック線図

4.3 最小次元オブザーバの設計

第二段階として、

$$\hat{x} \rightarrow x \quad (t \rightarrow \infty) \quad (4.10)$$

を満足させる状態を推定する状態観測器（最小次元オブザーバ）

$$\dot{\hat{z}}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}y(t) + \hat{J}u(t) \quad (4.11)$$

$$\hat{x}(t) = \hat{C}z(t) + \hat{D}y(t) \quad (4.12)$$

をゴピナスの方法で設計する。この方法は、ある行列 $U(1 \times 4)$ が存在して

$$\begin{aligned} UA &= \hat{A}U + \hat{B}C \\ UB &= \hat{J}I = \hat{C}U + \hat{D}C \end{aligned}$$

かつ \hat{A} が安定行列であることを満足する方法であり、オブザーバ (4.11)、(4.12) が (4.10) 式を満足するための十分条件でもある。なお、本実験で用いる倒立振り子系は r, θ はセンサーを用いて計測できるが、 $\dot{r}, \dot{\theta}$ においては計測するためのセンサーが存在しないため、推測でしかこれらを得ることができない。その推測を行うのに、最小次元オブザーバーを用いる。

具体的には、オブザーバの係数行列 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{J}, \hat{C}, \hat{D}$ を設計する。これらはオブザーバの極ともいえるので、以下これらの係数行列をオブザーバの極と呼ぶ。また、オブザーバの極を決める際に、状態フィードバック制御

$$u(t) = F(x_{ref}(t) - x(t))$$

による閉ループ系

$$\dot{x}(t) = (A - BF)x(t) + BFx_{ref}(t)$$

の極との位置関係を考慮する必要がある。

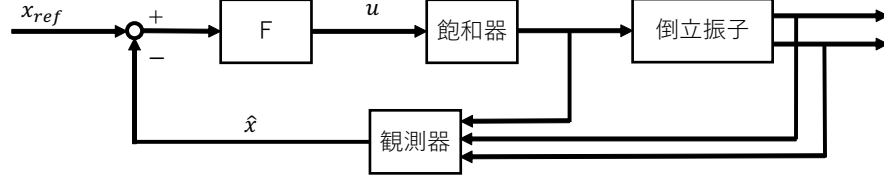


図 4.2: 最小次元オブザーバーを含めたブロック線図

4.4 コントローラの離散化

コントローラは連続時間で記述された (4.6)、(4.11)、(4.12) 式で与えられるが、計算機制御のためにはこれらを離散時間で記述しなければならない。これらを離散化したものを離散時間コントローラと呼ぶ。離散時間コントローラはサンプリング周期を Δ とすると、以下の式で与えられる。

$$z[k+1] = \hat{A}_d z[k] + \hat{B}_d y[k] + \hat{J}_d u[k] \quad (4.13)$$

$$\hat{x}[k] = \hat{C}_d z[k] + \hat{D}_d y[k] \quad (4.14)$$

$$u[k] = F(x_{ref}[k] - \hat{x}[k]) \quad (4.15)$$

ただし、 $k = 0, 1, \dots$ であり

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_d & [\hat{B}_d \ \hat{J}_d] \\ 0_{3 \times 2} & I_3 \end{pmatrix} = \exp \left(\Delta \begin{pmatrix} \hat{A} & [\hat{B} \ \hat{J}] \\ 0_{3 \times 2} & I_3 \end{pmatrix} \right)$$

である。具体的には、サンプリング周期を Δ を調整する。

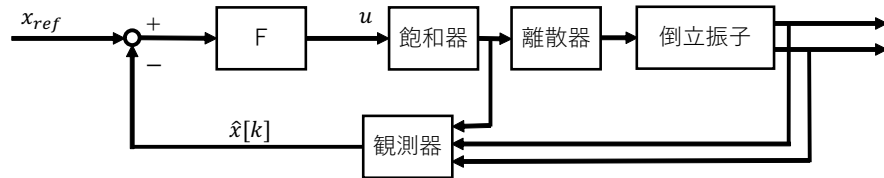


図 4.3: 離散器 (0 次ホールド) を含めたブロック線図

4.5 振り上げ制御及び安定化の実現

ここでは振り子の振り上げ制御を行うためのコントローラを設計する。振り上げ制御とは、振り子を下向きにしたままで台車を動かすことで振り子を上向きに立たせようという制御のことである。この制御には振り子を振り上げる制御と振り子の安定化制御を使い分けることで実現させる。具体的には下向きの振り子を振り上げ制御により徐々に上に持っていく（ θ を 0 に近づけていく）このときある一定の角度を境界値と定め、その境界値まで振り子の角度がちいさくなったところで制御を安定化制御に切り替えるというものである。振り子の安定化制御についてはこれまでのコントローラを用いるので、ここでは振り子の振り上げ制御の理論とその実現方法について述べる

台車と振り子の運動方程式は

$$(M + m)\ddot{r} + ml \cos \theta \ddot{\theta} = -f\dot{r} + ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + au \quad (4.16)$$

$$ml \cos \theta \ddot{r} + (J + ml^2)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - c\dot{\theta} \quad (4.17)$$

で与えられる。振り子が垂直上向きのときを基準とする振り子の力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}(J + ml^2)\dot{\theta}^2 + mgl(\cos \theta - 1) \quad (4.18)$$

で与えられる。第一項が回転に関するエネルギーであり、第二項が傾きを考慮した位置エネルギーである。なお、基準において静止しているとき、力学的エネルギーは $E=0$ である。このとき、力学的エネルギーの時間微分は

$$\frac{dE}{dt} = (J + ml)\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgl\dot{\theta} \sin \theta \quad (4.19)$$

となる。振り上げ制御のために、次の制御則を用いる。

$$u = \frac{1}{a} \left(f\dot{r} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} + (M + m)v \right) \quad (4.20)$$

$$v = -\frac{c\dot{\theta}}{ml \cos \theta} + k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta) \quad (4.21)$$

ただし、 sign は符号関数であり、引数の値が負のとき -1 、正のとき 1 、0 のとき 0 となる。(4.20) 式を (4.16) 式に代入すると、

$$\ddot{r} = v \quad (4.22)$$

を得る。(4.22) 式と (4.21) 式を (4.17) 式に代入すると

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} = mgl \sin \theta - ml \cos \theta (k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)) \quad (4.23)$$

を得る。この式を (4.19) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -ml\dot{\theta}(k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)) \\ &= -mlk(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)(\dot{\theta} \cos \theta) \end{aligned} \quad (4.24)$$

となる。リアプノフ関数の候補として、

$$V = \frac{(E - E_0)^2}{2} \geq 0 \quad (4.25)$$

を考える。V の時間微分を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (E - E_0) \frac{dE}{dt} \\ &= -mlk(E - E_0)^2 \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)(\dot{\theta} \cos \theta) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

これより、 $\dot{\theta} \cos \theta \neq 0$ のとき、 $\dot{V} < 0$ であるので V は減少して 0 に収束し、 E は E_0 に収束する。なお、 k を大きくすると、早く E が E_0 に収束する。実際の制御では、台車の加速度目標 v を制限し、

$$\begin{cases} u = \frac{1}{a} \left(f\ddot{r} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} + (M + m)v \right) \\ v = -\frac{c\dot{\theta}}{ml \cos \theta} + \text{sat}_{ng}(k(E - E_0) \text{sign}(\dot{\theta} \cos \theta)) \end{cases} \quad (4.27)$$

とする。ただし、 sat は最小値が $-ng$ 、最大値が ng の飽和関数である。 n は、重力加速度（鉛直下向き）と台車の加速度（水平方向）の比である。

具体的には、 k と重力加速度と台車の加速度の比である n を調整し、振り上げ制御を実現させる。

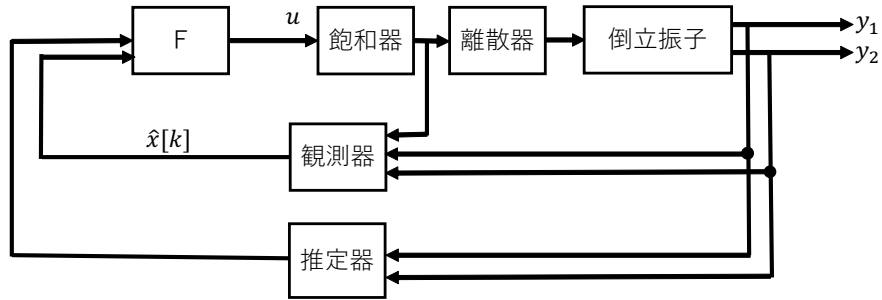


図 4.4: 振り上げ制御及び安定化制御を行うためのブロック線図

第5章 シミュレーション

目標値変更のシミュレーションによって制御器に関する各パラメータの有効な値を探索する。シミュレーションには JAMOX を用いた。

5.1 重み行列の変更による制御性能評価

LQ 最適制御に基づく状態フィードバック F を設計するために連続時間線形二次レギュレーターを用いる。この時、連続時間線形二次レギュレーターにはシステム行列 A と入力行列 B と重み行列 Q, R が必要である。重み行列は、(4.6) 式で与え、この重み行列を調整することで倒立振子の安定化制御の性能を高めることができる。そこで、シミュレーションを用いて重み行列を変更させたときの制御性能について考察していく。

今回は行列 R の値は変更しないので、行列 Q のみ値を変更してシミュレーション結果を考察する。以下にシミュレーションを行った異なるパターンのパラメータをまとめた表とその時のシミュレーション結果を示す。

表 5.1: 重み行列の変更

	重み行列 Q	オブザーバの極 P	サンプリング周期 $\Delta[s]$
パターン 1	$Q_1: \text{diag}(1E5, 1E5, 1, 1)$	$P_1: ((-20, 0), (-20, 0))'$	$\Delta_1: 0.005$
パターン 2	$Q_2: \text{diag}(1E6, 1E5, 1, 1)$	$P_2: ((-20, 0), (-20, 0))'$	$\Delta_2: 0.005$
パターン 3	$Q_3: \text{diag}(1E5, 1E6, 1, 1)$	$P_3: ((-20, 0), (-20, 0))'$	$\Delta_3: 0.005$

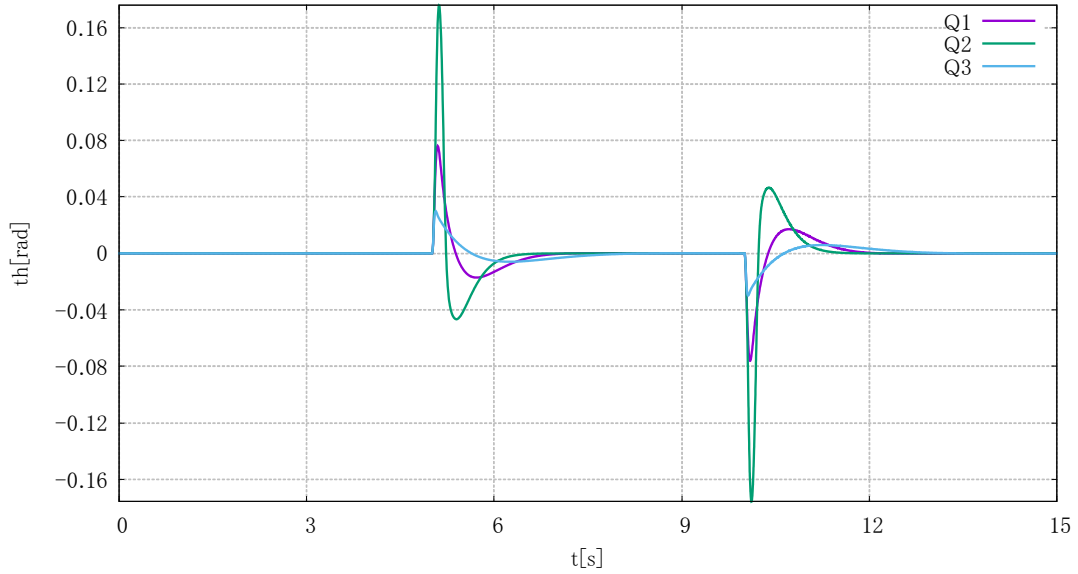


図 5.1: 重み行列での比較 (振子の角度)

5.2 オブザーバの極の変更による制御性能評価

前章で述べたように、最小次元オブザーバを設計するためにゴピナスの方法を用いる。この時、システム行列 A 、入力行列 B 、出力行列 C 、オブザーバの極 P が必要である。オブザーバの極 P を調整することで倒立振子の安定化制御の性能を高めることができる。同様にシミュレーションによって制御性能を考察していく。

1つ考慮しなければならないのは、オブザーバの極と閉ループ系の極（つまり、 $(A-BF)$ の固有値）との位置関係である。閉ループ系の極のうち虚軸に最も近い極を λ_{max} としたとき、オブザーバの極 P は

$$\text{Re}(P) < 5\text{Re}(\lambda_{max})$$

を満たす考慮して設定する必要がある。本実験における閉ループ系の極は

5.3 サンプリング周期の変更による制御性能評価

離散化を行うサンプリング周期 Δ を調整することで倒立振子の安定化制御の性能を高めることができる。同様にシミュレーションによって制御性能を考察していく。ただし、サンプリング周期が短すぎると実験で用いる倒立振子系においてシステム全体がハングアップする恐れがあるため、そのような値においてはシミュレーションを行わない。

5.4 振り上げ制御及び安定化に対する制御性能評価

前節までにおいて、安定化制御における有効なパラメータを考察してきた。ここでは、振り上げ制御における有効なパラメータを考察する。 k, n を調整することで振り上げ制御の制御性能を考察する。

第6章 実験

6.1 安定化制御実験

6.2 目標値の変更実験

6.3 振り上げ制御及び安定化実験

第7章 おわりに

付 録 A プログラム

- A.1 非線形モデル
- A.2 線形モデル
- A.3 システム解析
- A.4 状態フィードバック
- A.5 最小次元オブザーバ
- A.6 コントローラの離散化
- A.7 振り上げ及び安定化
- A.8 安定化制御実験
- A.9 目標値変更実験
- A.10 振り上げ制御及び安定化実験