

海洋声学基础——水声学原理

绪论

各种能量形式中，声传播性能最好。在海水中，电磁波衰减极大，传播距离有限，无法满足海洋活动中的水下目标探测、通讯、导航等需要。

声传播性能最好，水声声道可以传播上千公里，使其在人类海洋活动中广泛应用，随海洋需求增大，应用会更广。

§ 0-1 节 水声学简史

- 0 1490 年，意大利达芬奇利用插入水中长管而听到航船声记载。
- 1 1827 年，瑞士物理学家 D.colladon 法国数学家 c.starm 于日内瓦湖测声速为 1435 米每秒。
- 2 1840 年焦耳发现磁致伸缩效应
1880 年居里发现压电效应
- 3 1912 年泰坦尼克号事件后，L.F.Richardson 提出回声探测方案。
- 4 第一次世界大战，郎之万等利用真空管放大，首次实现了回波探测，表示换能器和弱信号放大电子技术是水声学发展成为可能。（200 米外装甲板，1500 米远潜艇）
- 5 第二次世界大战主被动声呐，水声制导鱼雷，音响水雷，扫描声呐等出现，对目标强度、辐射噪声级、混响级有初步认识。（二战中被击沉潜艇，60% 靠的是声呐设备）
- 6 二、三十年代——午后效应，强迫人们对声音在海洋中的传播规律进行了大量研究，并建立起相关理论。对海中声传播机理的认识是二次大战间取得的最大成就。
- 7 二战后随着信息科学发展，声呐设备向低频、大功率、大基阵及综合信号处理方向发展，同时逐步形成了声在海洋中传播规律研究的理论体系。
- 8 1、1945 年，Ewing 发现声道现象，使远程传播成为可能，建立了一些介质影响声传播的介质模型。
2、1946 年，Bergman 提出声场求解的射线理论。
3、1948 年，Perkeris 应用简正波理论解声波导传播问题。

4、50-60 年代，完善了上述模型（利用计算技术）。

5、1966 年，Tolstor 和 Clay 提出声场计算中在确定性背景结构中应计入随机海洋介质的必要性。

§ 0-2 节 水声学的研究对象及任务

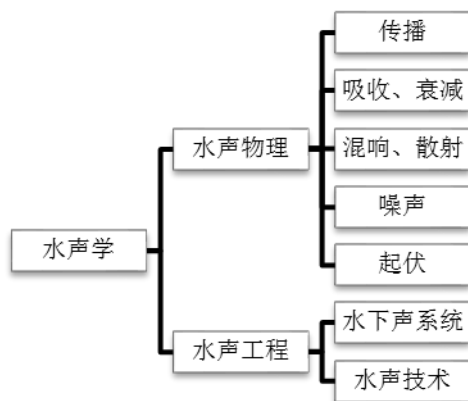
1、水声学：它是声学的一个重要分支，它基于四十年代反潜战争的需要，在经典声学的基础上吸收雷达技术及其它科学成就而发展起来的综合性尖端科学技术。它包括水声物理和水声工程两方面内容。

① 声物理：是研究声波在水介质中辐射、传播和接收时的各种现象和规律。其任务是为水下探测技术服务的。

② 水声工程：根据已探知的现象和规律，运用无线电电子学、电声学、统计学、计算数学、仪表技术、自动控制、信息论、海洋学及物理学其它分支的新成就，研制国防，航海，渔业，海洋开发等应用中的水声仪器设备，它包括水下声系统和水声技术两方面。

a：水下声系统：实现电、力、声转换，换能器，基阵等材料、结构、辐射、接收特征等。

b：水声技术：指水声信号处理、显示技术。



2、二者关系：水声物理是基础，提供依据；水声工程丰富了水声物理内容，促进其发展，二者相互促进，相辅相成，不可分开。

3、内容安排：

① 海水介质及边界声特性

② 声在海洋中的传播规律理论

③ 典型水文条件下的声传播

④ 水下目标的声反射、散射

⑤ 海中混响

⑥ 海洋噪声

⑦ 声传播起伏

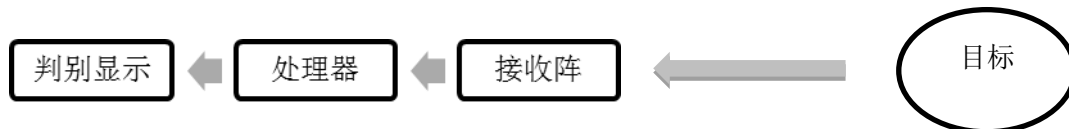
§ 0-3 节 声呐方程

一 声呐及其工作方式

1、主动声呐



2、被动声纳



二 声呐参数

1、声源级:

$$SL = 10 \log \frac{I}{I_0} \Big|_{r=1}$$

其中 I 为发射换能器或发射阵声轴方向 1 米处声强，

$$I_0 = 0.67 \times 10^{-22} W/cm^2 \quad (\text{参考 } 1 \text{ 微帕均方根声压})$$

① 指向性指数:

$$DI_r = 10 \log_{10} \frac{I_D}{I_{ND}}$$

它表征在相同距离上，指向性发射器声轴上声级高出无指向性发射

器声场声级的分贝值。

② 声源级与声功率：

$$SL = 10 \log_{10} p_a + 170.77 + DI_r$$

目前：

$$DI_r = 10 \sim 30 \text{ dB} \quad p_a \approx \text{几百} \sim \text{几十千瓦} \quad SL = 210 \sim 240 \text{ dB}$$

2、传播损失：表征声传播一定距离后强度的衰减变化。

$$TL = 10 \log_{10} \frac{I_1}{I_r}$$

I_1 为离声源声中心 1 米处的声强； I_r 为离声源 r 米处声强

3、目标强度：反映目标反射本领

$$T_s = 10 \log_{10} \frac{I_r}{I_i} \Big|_{r=1}$$

$I_r|_{r=1}$ 为在入射波反向离目标声中心 1 米处回波强度。

I_i 为目标入射声波的强度。

4、海洋环境噪声级：度量环境噪声强弱的量

$$NL = 10 \log_{10} \frac{I_N}{I_0}$$

I_N 为测量带宽内(或 1Hz 频带内)噪声强度

I_0 为参考声强

5、等效平面波混响级：（主动声纳）

若强度为 I 平面波入射到接收阵，其输出与阵对准目标时混响输出相等，则混响级为：

$$RL = \frac{I_R}{I_0}$$

其中 I_R 为平面波声强； I_0 为参考声强。

6、接收指向性指数：

$$DI = 10 \log_{10} \frac{\text{(无指向性水听器产生的噪声功率)}}{\text{指向性水听器产生的噪声功率}}$$

$$DI = 10 \lg \frac{R_N}{R_D} = 10 \lg \left[\frac{4\pi}{\int_{4\pi} b(\theta, \varphi) d\Omega} \right]$$

7、阵增益：

$$AG = 10 \lg \frac{(S/N)_{\text{阵}}}{(S/N)_{\text{阵元}}}$$

分子为阵输出信噪比，分母为单阵元输出信噪比，当噪声源各项同性时，由DI描述

8、检测阈：

$$DI = 10 \lg \frac{\text{刚好完成某职能时信号功率}}{\text{水听器输出端上的噪声功率}}$$

检测阈小，设备处理能力强，性能好。

四、声呐方程：

1、主动声呐方程：

基本考虑：

$$\text{信号级} - \text{背景干扰级} = \text{检测阈}$$

主动声呐方程：（收发合置）

① 噪声干扰为主：

$$(SL - 2TL + TS) - (NL - DI) = DT$$

② 混响干扰为主：

$$(SL - 2TL + TS) - (kL) = DT$$

2、被动声呐方程：

$$SL - TL - (NL - DI) = DT$$

3、组合声呐参数：

名称	表达式	物理意义
回声信号级	$SL - 2TL + TS$	加到主动声呐接收器（阵）上回声信号级
噪声掩蔽级	$NL - DI + DT$	在噪声干扰中声呐正常工作最低信号级
混响掩蔽级	$RL + DT$	在混响中声呐正常工作最低信号级
回声余量	$SL - 2TL + TS - (NL - DI + DT)$	主动声呐回声级超过噪声掩蔽级数量
优质因数	$SL - (NL - DI + DT)$	主动声呐允许最大单程损失 主动声呐（ $TS=0$ 时）允许最大双程损失
品质因数	$SL - (NL - DI)$	接收端声源级与噪声级之差

4、声呐方程应用及限制

应用：

- ① 对已有正在设计中，研制声呐设备进行性能预报。
- ② 用于声呐设计

例如：DI——频率高好
TL——频率低好

主动声呐背景干扰确定：如右图：

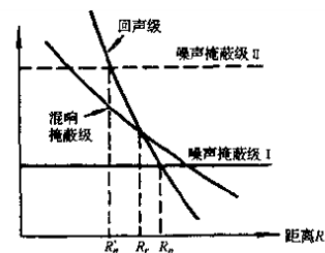


图0-5 回声级、混响掩蔽级、噪声掩蔽级随距离的变化曲线

对噪声级I: $R_r < R_n$

当 $R > R_r$ 时声呐由于混响而不能正常工作。

对噪声级II: $R_r > R_n'$ 则声呐受噪声级控制。

第一章 海洋的声学特性

§ 1-1 海水中的声速：

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\frac{1}{\rho K_s}}$$

ρ 为海水密度, $K_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$ 绝热压缩系数。

由于海中的温度、盐度、静压力随时间地点而异, 因为 ρ , K_s 为温度盐度静压力的函数, 故声速与介质特性关系为:

声速	增大	温度	增大	ρ 不变 K_s 减小
	增大	盐度	增大	ρ 增大 K_s 减小
	增大	压力	增大	ρ 不变 K_s 减小

实验表明, c 在 1420~1520 米/秒内变化

经验公式:

威尔逊:

$$c = 1449.22 + \Delta C_T + \Delta C_s + \Delta C_{STP}$$

乌德公式:

$$c = 1450 + 4.21T - 0.037T^2 + 1.14(S - 35) + 0.175p$$

$$p \text{ 单位为大气压 } 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ 帕}$$

(一) 海洋中声速的垂直分层性质和声速梯度

影响声速的三要素: T , S 和 d 都接近水平分层变化,

故
$$c(x, y, z) = c(z)$$

则声速梯度为:

$$g_c = \frac{dc}{dz}$$

$$\text{而 } c = c(T, S, p)$$

$$\text{所以 } g_c = a_T g_T + a_s g_s + a_p g_p$$

$$\text{其中 } g_T = \frac{dT}{dz} \quad g_s = \frac{ds}{dz} \quad g_p = \frac{dp}{dz}$$

若 c 由乌德公式给出, 则:

$$\alpha_T = \frac{\partial c}{\partial T} = 4.21 - 0.0074T \quad (m/s)/^{\circ}C$$

$$\alpha_s = \frac{\partial c}{\partial s} = 1.14 \quad (m/s)/\text{‰}$$

$$\alpha_p = \frac{\partial c}{\partial p} = 0.175 \quad (m/s)/atm$$

T 增加 $1^{\circ}C$, c 增加约 4m/s。

S 增加 1‰ , c 增加约 1.14m/s。

P 增加 $1atm$, c 增加约 0.175m/s。

(二) 海洋中声速的基本结构

1、 典型深海声速剖面：

三层结构：

- ① 表面混合层（高温，搅拌）
- ② 深海等温层
- ③ 过渡跃变层

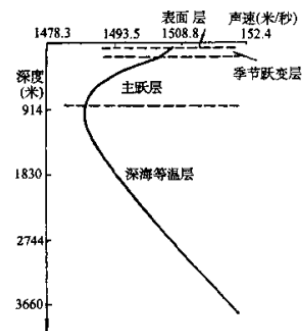
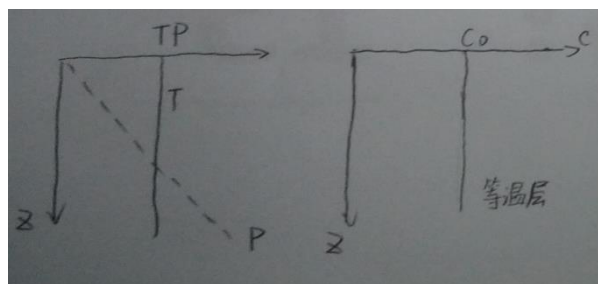


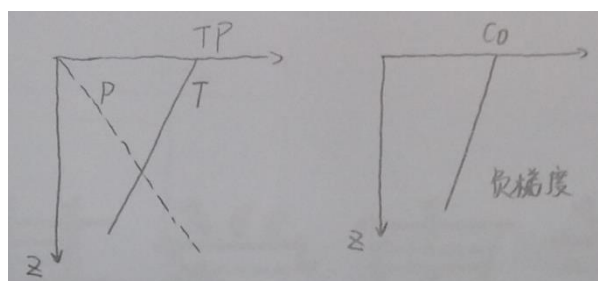
图2-3 深海典型声速分层剖面图

2、 常见海洋声速分布：

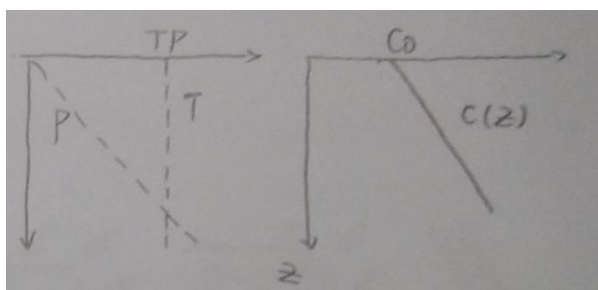


浅海秋冬季

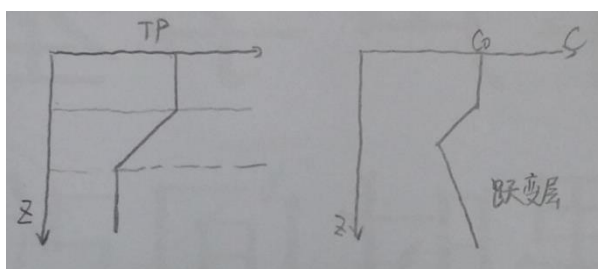
混合等温层



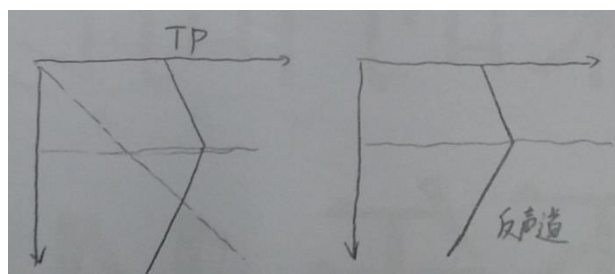
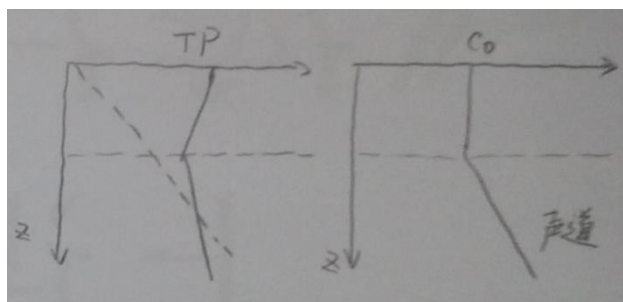
浅海夏季



高纬度秋冬季



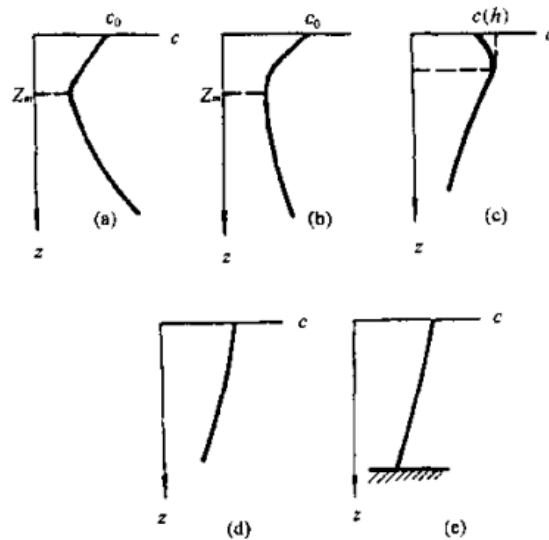
深海



3、 声速分布分类：

① 深海声道的声速分布

- ② 表面声道声速分布
- ③ 反声道声速分布
- ④ 浅海常见的声速分布



§ 1-2 海水中的声吸收

一、 传播衰减

扩展损失：由于声波波阵面在传播过程中不断扩展而引起的声衰减，亦称几何衰减。

吸收损失：由于介质热传导、粘滞及弛豫过程引起的声强衰减。

散射衰减损失：由介质中泥沙、气泡、生物悬浮粒子及介质不均匀性和介面不均匀引起散射损失。

（一）扩散损失

$$TL = n \cdot 10 \lg r \quad (\text{dB})$$

$n=0$: 平面波

$n=1$: 柱面波：全反射海底海面波导中声传播

$n=3/2$: 计海底吸收的浅海声传播。（修正柱面波）

$n=2$: 球面波传播

$n=3$: 声波通过浅海负跃变层后声传播损失

$n=4$: 计海面反射干涉效应在费朗和费区内的声传播

（二）吸收系数

当平面波传播 dx 后由吸收引起的声强降低为 dI

$$dI = -2\beta I dx$$

则
$$I(x) = I_0 e^{-2\beta x}$$

I_0 为起始声强。

$$\beta = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{I_0}{I(x)}\right) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{p_0}{p(x)}\right)$$

$\ln\left(\frac{p_0}{p(x)}\right)$ 为无量纲量称为夸培。

β 单位为夸培/米

若取 10 为底形式:

$$I(x) = I_0 \cdot 10^{-\alpha x / 10}$$

则,
$$\alpha = \frac{10}{x} \lg\left(\frac{I_0}{I(x)}\right) = \frac{20}{x} \lg\left(\frac{p_0}{p(x)}\right)$$

$\lg\left(\frac{I_0}{I(x)}\right)$ 单位为贝尔, $10 \lg\left(\frac{I_0}{I(x)}\right)$ 单位称分贝 dB

$$\alpha = \frac{20}{x} \lg\left(\frac{p_0}{p(x)}\right) = \frac{20}{x} \lg e \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p(x)}\right) = 20\beta \lg e$$

$$\therefore \alpha = 8.68\beta$$

考虑吸收后的传播衰减为:

$$TL = n \cdot 10 \lg r + \alpha r$$

二、 纯水与海水的超吸收 (略)

§ 1-3 海底

海底粗糙度有很宽的谱, 约从几厘米到几十公里或几百公里。

由散射理论可导出瑞利参数

$$p = 2k\delta \cos\theta_0 \quad \theta_0 \text{为入射角}$$

δ 为均方根位移

$p \ll 1$ 时，粗糙度小，为相干镜反射

$p \gg 1$ 时，粗糙度大，为漫散射

一、海底沉积层

(一) 密度

$$\rho = n\rho_w + (1-n)\rho_s$$

n 为孔隙度：指沉积物体积中含水分体积的百分数。

ρ_w 为孔隙水密度：一般与海底水密度相等 $\approx 1.024\text{g/cm}^3$

ρ_s 为无机物固体密度

(二) 声速

压缩波声速：
$$c^2 = \frac{E + \frac{4}{3}G}{\rho}$$

切变波速度：
$$c_s^2 = \frac{G}{\rho}$$

E 为沉积层弹性模量

G 为沉积层刚性模量

(三) 衰减损失

$$\alpha = Kf^m$$

K 为常数， f 为频率 (KHz)， m 为指数

二、海底反射损失

海底反射损失：
$$BT_L = 10\lg \frac{I_r}{I_i} = 20\lg |V|$$

由声学基础可知：
$$V = \frac{m\cos\theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}{m\cos\theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2\theta_i}}$$

若以掠角表示则为：
$$V = \frac{m\sin\varphi - \sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}{m\sin\varphi + \sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}} \quad m = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad n = \frac{c_1}{c_2}$$

1、几种特殊情况

① 垂直入射： $\varphi = 90^\circ$ 时

$$V_n = \frac{m-n}{m+n}$$

若 $m \gg n$ ($\rho_2 c_2 \gg \rho_1 c_1$)

$$V_n \approx 1 \text{ 全反射且相移 } \varepsilon = 0$$

$$m \ll n$$

$$V_n \approx -1 \text{ 全反射且相移 } \varepsilon = 180^\circ$$

② 掠入射： $\varphi = 0$

$$V_g = \frac{-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-1}} = -1$$

即任何 m, n 都且有相移 $\varepsilon = 180^\circ$ 全反射

③ 临界角

由 $\cos \varphi_0 = n$ 定义的角度 φ_0 称为临界角 ($n \ll 1$ 时有)

此时 $V_0 = 1$ 表无相移全反射

④ 全透射角

由 $m \sin \varphi_I = \sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi_I}$ 定义角为全透射角。

$$\text{则 } \cos \varphi_I = \left(\frac{m^2 - n^2}{m^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

此时 $V_I = 0$

全入射角存在条件

$$m > n > 1 \text{ 或 } m < n < 1$$

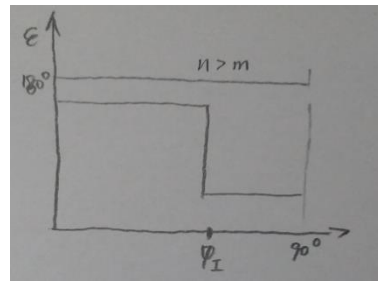
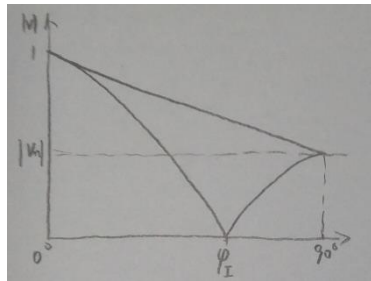
2、低声速海底 ($n>1$)

当 φ 由 $0^\circ - 90^\circ$ 时, V 由 $V_g = -1$ 到 $V_n = \frac{m-n}{m+n}$

$n>m$ 时, $|r|$ 由 1 到 $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, $\varepsilon = 180^\circ$

当 $n<m$ 时, φ 由 0° 到 φ_I 到 90° , 则

$|V|$ 由 1 到 0 到 $\frac{m-n}{m+n}$ 相移 φ 在 $\varphi = \varphi_I$ 由 180° 到 0° 。



3、高声速海底 ($n<1$)

垂直入射时 $|V_n| = \left|\frac{m-n}{m+n}\right|$ $n < m$ 时 $\varepsilon = 0$ $n > m$ 时 $\varepsilon = 180^\circ$

掠入射时: $\varphi = 0^\circ$ $|V_g| = 1$ $\varepsilon = 180^\circ$

临界角入射: $\varphi_0 = \cos^{-1}n$ $|V| = 1$ $\varepsilon = 0$

对 $\varphi > \varphi_0$ 时, V 为实数

$n<m$ 时, V 从 1 均匀减小到 $V_n = \left|\frac{m-n}{m+n}\right|$

$n>m$ 时, 在全透射角, $V=0$, 则 V 由 1 减小到 0, 再减小到

$$-V_n = -\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$$

对 $\varphi < \varphi_0$ 时, V 是复数

$$\text{则 } V = \frac{m \sin \varphi + j \sqrt{\cos^2 \varphi - n^2}}{m \sin \varphi - j \sqrt{\cos^2 \varphi - n^2}} = \frac{a+bj}{a-bj} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + j \left(\frac{2ab}{a^2+b^2} \right)$$

$$|V| = 1, \quad V = |V|e^{j\varepsilon} = e^{j\varepsilon}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2b/a}{1 - (b/a)^2} \quad \text{令 } \operatorname{tg} \delta = \frac{b}{a}$$

$$\text{则有 } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2 \operatorname{tg} \delta}{1 - \operatorname{tg}^2 \delta} = \operatorname{tg} 2\delta \quad \text{即 } 2\delta = \varepsilon$$

$$\therefore \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - n^2}}{m \sin \varphi}$$

则，掠入射时 $\varepsilon = 180^\circ$ ，而临界入射时 $\varepsilon = 0$ 。

4、海底损失的三参数模型

实验表明：海底沉积层反射损失随掠角 φ 变化特征为：

① 在分界掠角 φ^* 当 $\varphi < \varphi^*$ 时，反射损失较小

当 $\varphi > \varphi^*$ 时，反射损失较大

② 小掠角 $\varphi < \varphi^*$ 范围内，反射损失随 φ 而增加

③ 在大掠角 $\varphi > \varphi^*$ 范围内，反射损失与 φ 无明显关系

由上三特征引入三参数模型：

$$-\ln|V(\varphi)| = \begin{cases} Q\varphi & 0 < \varphi < \varphi^* \\ -\ln|V_0| = \text{const} & \varphi^* < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

三个参数：

$$Q = \frac{\partial}{\partial \varphi} [-\ln|V(\varphi)|]_{\varphi=0} \text{ 为 } -\ln|V| \text{ 斜率}$$

φ^* 为分界掠角，即为全内反射角

$$-\ln|V_0|$$

§ 1-4 海面

一、 波浪的基本特征：

(一) 重力表面波

$$c^2 = \frac{g}{h} \tanh(kh)$$

(二) 表面张力波

$$c^2 = \frac{g}{k} + \frac{T_f k}{\rho} \quad T_f \text{ 为表面张力}$$

二、 波浪的统计特性

(一) 概率密度

$$p(\xi) = (2\pi \langle \xi^2 \rangle)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{\xi^2}{2\langle \xi^2 \rangle} \right]$$

(二) 海浪谱

P-M 谱

$$S(\omega) = \frac{ag^2}{\omega^5} \exp \left[-\beta \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^4 \right]$$

$$a = 8.1 \times 10^{-3} \quad \beta = 0.74 \quad \omega_0 = g / \mu_{19.5}$$

$\mu_{19.5}$ 为海面 19.5 米处风速, m/s。

§ 1-5 海洋内部的不均匀性

一、 湍流与微结构

湍流形成 T, S 的细微结构, 从而引起声场的细微结构。跃变层中湍流与内波不稳定性有关。

二、 内波

内波引起等温线随海洋的变化, 从而对声传播信号起伏带来影响 (低频、远距离更明显)。

三、 海流与锋区

海流边缘形成锋区, 造成 T, S 水平变化, 声穿过时将引起强烈起伏。

四、 中尺度涡旋

五、 深水散射层 (DSL)

第二章 海洋中的声传播理论

一、 声波在海洋中的传播是一个非常复杂的问题，原因：

- 1、 引起衰减和折射的海水物理化学性质
- 2、 不平整表面产生的复杂反射、散射
- 3、 自然噪声和混响背景的存在及引起声场变化的海洋易变性

以上因素引起声传播过程中的延迟、失真、损耗和起伏等变化，形成水声物理的基本研究课题。

二、 海洋中声传播的理论方法

- 1、 简正波理论：用常规方法寻求波动方程和一组定解条件的线性级数解，即用简正波的特征函数来描述声场。每个特征函数都是方程的解，所有简正波的线性迭加构成了一般解，但须满足边条件和初条件。

优点：此方法精确、细致描述声场，尤其是可解决射线声学不适用的声影区、会聚区、焦散区声场。

缺点：求解困难，最简单条件下，求解过程也十分繁杂。物理图像不直观。为简化求解而简化模型，造成理论与实际不符而精度较差。

适用：低频、远场、浅海

- 2、 射线理论（几何声学）：射线声学完全抛开声传播过程中的波动性质，而将其理解为声波的能量沿一定路径通过一定形状几何面向外传播。

优点：概念方法直观，计算简便，物理图像清晰

缺点：在声影区、焦散区，介质在一个声波波长范围内变化较大区域不适用，存在局限性。

适用：高频，近场，深海

§ 2-1 波动方程和定解条件

一、 波动方程

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad 2-1$$

小振幅情况下， $(\nabla \cdot u)u$ 可忽略，则有：

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\nabla \cdot u)u \approx \frac{\partial u}{\partial t} \quad 2-2$$

则小振幅条件下运动方程为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad 2-3$$

由质量守恒定律得连续性方程为：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot u = 0 \quad 2-4$$

声振动为等熵过程，其状态方程为：

$$dP = c^2 d\rho \quad 2-5$$

$$c^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad 2-6$$

或

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad 2-7$$

由 2-3、2-4、2-7 消去 u 后，得到：

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \nabla \rho = 0 \quad 2-8$$

做变量代换， $\Psi = \frac{p}{\sqrt{\rho}}$ 得

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \left[\frac{\nabla^2 \rho}{2\rho} - \frac{3(\nabla \rho)^2}{4\rho^2} \right] \Psi = 0 \quad 2-9$$

对简谐波： $\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2$ 则 2-9 式变为：

$$\nabla^2 \Psi + K^2(x, y, z) \Psi = 0 \quad 2-10$$

式中：

$$K^2(x, y, z) = k^2 + \frac{\nabla^2 \rho}{2\rho} - \frac{3(\nabla \rho)^2}{4\rho^2} \quad 2-11$$

若忽略海洋中密度的空间变化，则有：

$$\rho \text{ 为常数 } K(x, y, z) = k = \omega/c(x, y, z)$$

则波动方程变为：

$$\nabla^2 \Psi + k^2(x, y, z) \Psi = 0 \quad 2-12$$

ρ 为常数，则 $p = \sqrt{\rho} \Psi$ 也满足上述方程

$$\nabla^2 p + k^2(x, y, z) p = 0 \quad 2-13$$

当介质中存在外力作用时（如声源），则波动方程变为：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{F}{\rho} \quad 2-14$$

F 为作用于单位介质体元上的外力，经类似推导可得

$$\nabla^2 \Psi + K^2(x, y, z) \Psi = \frac{\nabla \cdot F}{\sqrt{\rho}} \quad 2-15$$

当 p 为常数时有：

$$\nabla^2 \Psi + k^2(x, y, z) \Psi = \frac{\nabla \cdot F}{\sqrt{\rho}}$$

或

$$\nabla^2 p + k^2(x, y, z) p = \nabla \cdot F \quad 2-16$$

非齐次亥姆霍茨方程 3-15，3-16 给出了物理量随时间随空间变化所满足的普遍规律，即范定方程。

二、定解条件

（一）边界条件（物理量在边界上满足的条件）

1、绝对软边界：

边界上的压力等于零，若边界是 $z=0$ 平面，则有

$$p(x, y, 0, t) = 0 \quad 2-17$$

若边界为 $z = \eta(x, y, t)$ 的自由表面（如不平整海面）则

$$p(x, y, \eta, t) = 0 \quad 2-18$$

此为第一类齐次边界条件

若已知界面上的压力满足一定分布 p_s ，则边界条件应写为：

$$p(x,y,\eta,t) = p_s \quad 2-19$$

此为第一类非齐次边界条件。

2、绝对硬边界：

边界上的质点法向速度为零，若边界为 $z=0$ 平面，有

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \quad 2-20$$

若边界为 $z = \eta(x,y,t)$ （如不平整海面），则

$$(\vec{n} \cdot \vec{u})_\eta = 0$$

其中 \vec{n} 为边界法向单位矢量， $\vec{n} = \frac{\partial \eta}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}$ ，质点速度矢

量为 $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ ，边界条件写为：

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} u_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} u_y + u_z = 0 \quad 2-21$$

此为第二类齐次边界条件。

若已知边界法向振速分布 u_s ，则边界条件为

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} u_x + \frac{\partial \eta}{\partial y} u_y + u_z = u_s \quad 2-22$$

此为第二类非齐次边界条件。

3、混合边界

压力和振速在界面上组合成线性关系的边界条件。

$$\left(\frac{\partial p}{\partial n} + \alpha p\right)|_s = f(s) \quad 2-23$$

其中 α 为常数，此为第三类边界条件。当 $f(s) = 0$ 时，为阻抗

边界条件，也可写为：

$$Z = -\frac{p}{u_n} \quad 2-24$$

4、边界上 ρ 或 c 的有限间断（连续边界条件）

边界上 ρ 或 c 有限间断时，边界上应满足压力连续和法向速度连续：

$$p|_{s-0} = p|_{s+0}$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}\right)_{s-0} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}\right)_{s+0} \quad 2-25$$

压力连续才不会出现质量、加速度趋向无穷的不合理现象，法向速度连续则不会出现使边界上介质“真空”或“聚积”情况。

（二）辐射条件（熄灭条件）

1、平面波：（推导略）

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad 2-26$$

$$\text{简谐波 } \frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

$$\therefore \frac{\partial \psi}{\partial x} \pm jk\psi = 0 \quad 2-27$$

2、柱面波

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \pm jk\psi \right) = 0 \quad 2-28$$

3、球面波

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \pm jk\psi \right) = 0 \quad 2-29$$

4、熄灭条件

$$P|_{r \rightarrow \infty} = 0$$

（三）奇性条件（声源条件）

均匀发散球面波解为：

$$p = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

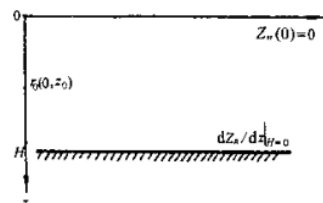
当 $r \rightarrow 0$ 时, $p \rightarrow \infty$ 在声源处构成奇性条件

则波动方程应改为

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -4\pi \delta(r) A e^{j\omega t} \quad 2-30$$

(四) 初始条件

求稳态解时不考虑初始条件



§ 2-2 波动声学基础

一、 分离变量法 (硬底的浅海)

(一) 简正波

声速 $c = c_0$ 水深 $z=H$, 均匀层海面为自由平整界面, 海底为刚性平整界面。

则非齐次范定方程为:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 p = -4\pi A \delta(r - r_0) \quad 2-31$$

将 $\delta(r - r_0)$ 改为柱面波形式

$$\delta(r - r_0) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r) \cdot \delta(z - z_0) \quad 2-32$$

选 $A=1$, 则 2-31 式改写为:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 p = -\frac{2}{r} \delta(r) \cdot \delta(z - z_0) \quad 2-33$$

分离变量, 令 $p(r, z) = \sum_n R_n(r) Z_n(z)$ 代入 2-33 式有

$$\sum_n \left[Z_n \left(\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} \right) + R_n \left(\frac{d^2 Z_n}{dz^2} + k_0^2 Z_n \right) \right] = -\frac{2}{r} \delta(r) \delta(z - z_0) \quad 2-34$$

若 $Z_n(z)$ 满足:

$\frac{1}{Z_n} \frac{d^2 Z_n}{dz^2} + k_0^2 = \xi_n^2 = \text{常数}$ ，则有：

$$k_0 = \frac{w}{c_0}$$

$$\frac{d^2 Z_n}{dz^2} + \left(\frac{w^2}{c_0^2} - \xi_n^2\right) Z_n = 0 \quad 2-35$$

Z_n 满足正交归一化条件

$$\int_0^H Z_n(z) Z_m(z) dz = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad 2-36$$

Z_n 解为：

$$Z_n(z) = A_n \sin(k_{zn} z) + B_n \cos(k_{zn} z) \quad 0 \leq z \leq H$$

式中 $k_{zn}^2 = \left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \xi_n^2$ ， A_n, B_n 为待定常数。

代入边条件： $Z_n(0) = 0$ 和 $\left(\frac{dZ_n}{dz}\right)_H = 0$ 则得到

$$B_n = 0 \quad k_{zn} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{H} \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad 2-37$$

k_{zn}, Z_n 分别为本征值与本征函数。

由上解得，

$$Z_n(z) = A_n \sin(k_{zn} z) \quad 0 \leq z \leq H$$

将 $Z_n(z)$ 代入 2-36 得 $A_n = \sqrt{\frac{2}{H}}$ 于是

$$Z_n(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin(k_{zn} z) \quad 2-38$$

由 $\xi_n^2 = \left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - k_{zn}^2$ 可得，

$$\xi_n = \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{H}\right]^2} \quad 2-39$$

由上可以看出， ξ_n ， k_{zn} 分别为波数 $\frac{\omega}{c_0}$ 的水平分量和垂直分量。

将 2-35 代入 2-34 得 R_n 满足方程

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{R_n}{r} \frac{dR_n}{dr} + \xi_n R_n = -\frac{R}{r Z_n(z)} \delta(r) \delta(z - z_0)$$

其为零阶贝塞尔方程，其解为

$$\begin{aligned} R_n(r) &= -j\pi Z_n(z_0) H_0^{(2)}(\xi_n r) \\ &= -j\pi \sqrt{\frac{2}{H}} \sin(k_{zn} z_0) H_0^{(2)}(\xi_n r) \end{aligned} \quad 2-40$$

其中 $H_0^{(2)} = J_0 - jN_0$ J_0, N_0 分别为贝塞尔函数和纽曼函数。

最终得解：

$$\begin{aligned} p(r, z) &= -j\pi \sum_n Z_n(z) Z_0(z) H_0^{(2)}(\xi_n r) = \\ &= -\frac{2\pi}{H} j \sum \sin(k_{zn} z) \sin(k_{zn} z_0) H_0^{(2)}(\xi_n r) \end{aligned} \quad 2-41$$

在远距离上， $\xi_n r \gg 1$ 时有

$$H_0^{(2)}(\xi_n r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \xi_n r}} \cdot e^{-j(\xi_n r - \frac{\pi}{4})}$$

则声场解为：

$$p(r, z) = -\frac{2}{H} j \sum_n \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_n r}} \sin(k_{zn} z) \sin(k_{zn} z_0) e^{-j(\xi_n r - \frac{\pi}{4})} \quad 2-42$$

n 号简正波：

$$p_n(r, z) = -\frac{2}{H} j \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_n r}} \sin(k_n z) \sin(k_n z_0) e^{-j(\xi_n r - \frac{\pi}{4})} \quad 2-43$$

(二) 截止频率

由 2-39 可知

$$\xi_n = \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{H}\right]^2}$$

若 w 给定，保证 ξ_n 为实数， n 取最大 N 条件为：

$$N = \left(\frac{Hw}{\pi c_0} + \frac{1}{2}\right)$$

当 $n > N$, ξ_n 为虚数，对远场无贡献。

声场在远场解为：

$$p(r, z, t) = -\frac{2}{H} j \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_n r}} \sin(k_{zn} z) \sin(k_{zn} z_0) e^{-j(\xi_n r - \frac{\pi}{4})} \quad 2-44$$

最高阶简正波的传播频率为临界频率

$$w_N = \left(N - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c_0}{H} \quad f_N = \left(N - \frac{1}{2}\right) \frac{c_0}{2H} \quad 2-45$$

当 $w < w_N$ 时， N 阶以上简正波不存在。

当 $N=1$ 时，得截止频率

$$w_1 = \frac{\pi c_0}{2H} \quad f_1 = \frac{c_0}{4H} \quad 2-46$$

当 $f < f_1$ 时，远场声场接近 0。

（三）相速和群速

相速是等相位面的传播速度。

$$c_{pn} = \frac{w}{\xi_n} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - (w_n/w)^2}} \quad 2-47$$

相速与频率有关，为频散波。

群速是波包（能量）的传播速度

$$c_{gn} = \frac{dw}{d\xi_n}$$

$$\text{而 } c_{pn} = \frac{w}{\xi_n}$$

$$\therefore c_{gn} = c_{pn} + \xi_n \frac{dc_{pn}}{d\xi_n}$$

$$\frac{dc_{pn}}{d\xi_n} < 0 \quad \text{故} \quad c_{gn} < c_{pn}$$

$$c_{gn} = \frac{dw}{d\xi_n} = c_0 \sqrt{1 - (w_n/w)^2} \quad 2-48$$

$$\text{则} \quad c_{gn} c_{pn} = c_0^2 \quad 2-49$$

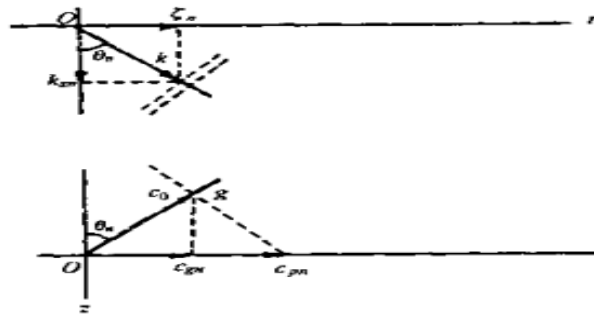


图3-4 每一阶简正波可分解成两个平面波

(四) 传播损失

$$\therefore p(r, z) = -j \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_n r}} Z_n(z_0) Z_n(z) e^{-j(\xi_n r - \frac{\pi}{4})} \quad r \gg 1 \quad 2-50$$

若设单位距离处声压振幅为 1，则有传播损失为

$$TL = -10 \lg \left| \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_n r}} Z_n(z_0) Z_n(z) e^{-j\xi_n r} \right|^2 \quad 2-51$$

上式展开得：

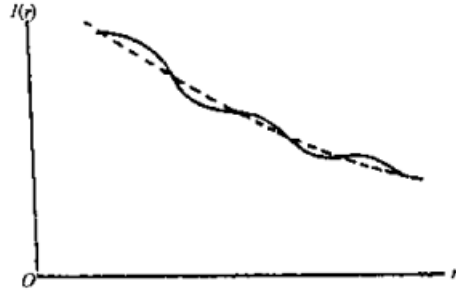
$$TL = -10 \lg \sum_{n=1}^N \frac{2\pi}{\xi_n r} \cdot Z_n^2(z_0) Z_n^2(z) -$$

$$10 \lg \sum_{n \neq m}^N \frac{4\pi}{\sqrt{\xi_n \xi_m}} Z_n(z_0) Z_n(z) Z_m(z_0) Z_m(z) e^{-j(\xi_n - \xi_m)r}$$

2-52

第一项与简正波间相关无关，单调下降

第二项与简正波间相关有关，为起伏干涉项



若忽略交叉项有：

$$TL = -10\lg \sum_{n=1}^N \frac{4}{H^2} \frac{2\pi}{\xi_n r} \sin^2 k_{2n} z_0 \sin^2 k_{2n} z \quad 2-53$$

设 $\sin^2 k_{2n} z_0$ 和 $\sin^2 k_{2n} z$ 随机取 $0 \sim 1$ 值

近似用 $\int \sin^2 x dx \approx \frac{1}{2}$ ，则有

$$TL = -10\lg \left[\frac{2\pi}{H^2 r} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\xi_n} \right] \quad 2-54$$

若 N 较大，有 $N = \left(\frac{Hw}{\pi c_0} + \frac{1}{2} \right) \approx \frac{Hw}{\pi c_0}$

(2-39)式近似为 $\xi_n \approx \frac{w}{c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n}{N} \right)^2}$

令 $\frac{n}{N} = x$ 将 2-54 式改为积分，即

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\xi_n} = \frac{c_0}{w} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{N} \right)^2}} = \frac{c_0}{w} \int_0^1 \frac{N dx}{\sqrt{1 - (x)^2}}$$

令 $x = \sin\theta$ ，上式变为：

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\xi_n} = \frac{c_0 N}{w} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{H}{2}$$

最后代入 2-54 得：

$$TL = -10\lg \frac{\pi}{Hr} = 10\lg r + 10\lg \frac{H}{\pi} \quad 2-55$$

对深度平均后得 2-55，更一般可表示为

$$TL = 10 \lg r + 10 \lg \frac{H}{2\varphi_c}$$

其中 φ_c 为临界掠射角。

绝对硬海底 $\varphi_c = \frac{\pi}{2}$

当 $\varphi < \varphi_c$ 时全反射 $\varphi > \varphi_c$ 时衰减

φ_c 越小，TL 越大。

二、格林函数法

分离变量法仅在几种坐标系中有效，边界形式复杂时可由格林函数法求解波动方程：

$$\nabla^2 \varphi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2} = -4\pi \Psi' \quad 2-56$$

考虑简谐波则 2-56 化为

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -4\pi \Psi \quad k = \frac{\omega}{c} \quad 2-57$$

格林函数 $G(r_1, r_0)$ 表示处于 r_0 的一个点源在一定边界条件和初始条件下所产生的场，因此它满足：

$$\nabla^2 G + k^2 G = -4\pi \delta(r - r_0) \quad 2-58$$

由 G 乘式 2-57 减去 φ 乘 2-58 得

$$G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G = -4\pi G \Psi + 4\pi \varphi \delta(r - r_0) \quad 2-59$$

将上式对包含 r_0 体积积分，并利用 σ 函数性质得：

$$\iiint (G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G) dV = -4\pi \iiint G(r, r_0) \varphi(r) dV + 4\pi \varphi(r_0) \quad 2-60$$

由奥-高定理有：

$$\iiint (G \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 G) dV = \iint_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds$$

式中 s 是体积 V 的界面， $\frac{\partial}{\partial n}$ 为界面外法向微商。

代入 2-60 式后解出 $\varphi(r_0)$ 并利用格林函数的对称性可得：

$$r_0 \rightarrow r \quad r \rightarrow r'$$

$$\varphi(r) = \iiint_V G(r, r') \varphi(r') dr' + \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n'} \right) ds \quad 2-61$$

当 V 内无源时，第一项体积积分为零。

若无边界时，则第二项面积积分为零。

格林函数解析解难于获得（简单几何边界如球面可得），在三维空间情形可证明格林函数可为下形式：

$$G(r, r') = \frac{\exp[jk|r-r'|]}{|r-r'|} = \frac{e^{jkR}}{k}$$

代入 2-61 得：

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{e^{jkR}}{k} \frac{\partial \varphi(r')}{\partial n'} - \varphi(r') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{e^{jkR}}{k} \right) \right] ds' + \iiint_V \varphi(r') \frac{e^{jkR}}{k} dr' \quad 2-62$$

若 V 内无源得：

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{e^{jkR}}{k} \frac{\partial \varphi(r')}{\partial n'} - \varphi(r') \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{e^{jkR}}{k} \right) \right] ds' \quad 2-63$$

当 φ 及其微商在包围 V 的界面上值已知时，求声场。2-63 式即为亥姆霍兹积分公式。

§ 2-3 射线声学基础

基本思想： 声波的能量沿着一定的路径通过一定形状的几何面向外传播。只要按一定规定确定射线空间走向及其截面变化，便可完全确定声传播规律。

（一） 射线声学基本方程：

对沿任意方向传播的平面波

$$\Psi = A e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad 2-64$$

波矢量 \vec{k} 为波传播方向

$$\vec{k} = k_x \vec{i} + k_y \vec{j} + k_z \vec{k}$$

空间位置矢量

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

矢量 \vec{k} 以其方向余弦来表示

$$\frac{k_x}{k} = \cos\alpha \quad \frac{k_y}{k} = \cos\beta \quad \frac{k_z}{k} = \cos\gamma \quad 2-65$$

若考虑下列波动方程：

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

该方程解有如下形式解：

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= A(x, y, z) e^{j[\omega t - k(x, y, z) \varphi_1(x, y, z)]} \\ &= A(x, y, z) e^{j[\omega t - k_0 \varphi(x, y, z)]} \end{aligned} \quad 2-66$$

A 为声压振幅 k 为波数

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{c_0} \cdot \frac{c_0}{c} = k_0 n(x, y, z)$$

c_0 为参考点声速，n 为折射率， $k_0 \varphi$ 为相位值。

$\varphi(x, y, z) = n(x, y, z) \cdot \varphi_1(x, y, z)$ 量纲为长度，称为程函。

将形式解代入 2-66 方程得：

$$\frac{\nabla^2 A}{A} - \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - j \frac{\omega}{c_0} \left(\frac{2 \nabla A}{A} \cdot \nabla \varphi + \nabla^2 \varphi\right) = 0 \quad 2-67$$

其实、虚部分别为零得：

$$\frac{\nabla^2 A}{A} - (k_0)^2 \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + (k)^2 = 0 \quad 2-68$$

$$\frac{2 \nabla A}{A} \cdot \nabla \varphi + \nabla^2 \varphi = 0 \quad 2-69$$

当 $\frac{\nabla^2 A}{A} \ll k^2$ 时，2-68 式化为：

$$(\nabla\varphi)^2 = \left(\frac{c_0}{c}\right)^2 = n^2(x, y, z) \quad 2-70$$

2-70 和 2-69 分别为程函方程和强度方程。

（二）程函方程

1、程函方程的其他形式

由矢量分析有，等位相面 $\varphi(x, y, z)$ 在任意方向 \vec{l} 的变化率为：

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{d\vec{l}} = \nabla\varphi \cdot \vec{l}_0 \quad 2-71$$

\vec{l}_0 为 \vec{l} 的单位矢量。

设声线方向为 \vec{s} ，此即 φ 面的法线方向。

则单位矢量 $\vec{s}_0 = \vec{k}/|k|$ 就是 $\nabla\varphi$ 的方向。

$$\therefore \frac{d\varphi(x, y, z)}{ds} = |\nabla\varphi| \quad 2-72$$

$$\nabla\varphi = |\nabla\varphi|\vec{s}_0 = |\nabla\varphi|(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}) \quad 2-73$$

将程函方程 $(\nabla\varphi)^2 = n^2$ ，或 $|\nabla\varphi| = n$ 代入得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = n(\cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}) \quad 2-74$$

即

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = n\cos\alpha \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = n\cos\beta \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = n\cos\gamma \end{cases} \quad 2-75$$

由 2-70 程函方程还可得：

$$n = \sqrt{(\nabla\varphi)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \quad 2-76$$

代入 2-75 得声线方向余弦：

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos\beta = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}} \\ \cos\gamma = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}} \end{cases} \quad 2-77$$

2-77 式可确定声线走向。

声线的方向余弦为：

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds} \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds} \quad 2-78$$

将 2-75 式对 s 求导得关于 x 方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(n\cos^2\alpha + n\cos^2\beta + n\cos^2\gamma) \\ &= \frac{\partial n}{\partial x} \end{aligned} \quad 2-79$$

对 y, z 类似推导后得：

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(n\cos\alpha) = \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{d}{ds}(n\cos\beta) = \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{d}{ds}(n\cos\gamma) = \frac{\partial n}{\partial z} \end{cases} \quad 2-80$$

其矢量形式为：

$$\frac{d}{ds}(\nabla\varphi) = \nabla n \quad 2-81$$

2-75,2-77,2-80 或 2-81 为程函方程 2-70 的其他形式。

2、应用举例

(1) 声速 c 为常数:

$\because c = \text{常数}$

$$\therefore n = \frac{c_0}{c} = 1$$

由 2-80 可得:

$$\cos\alpha = \cos\alpha_0 \quad \cos\beta = \cos\beta_0 \quad \cos\gamma = \cos\gamma_0$$

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ 为声线起始出射方向角 程函方程表明声线为直线。

(2) 声速 c 只与坐标 z 有关

考虑声线位于 XOZ 平面内, $c = c(z), n = n(z)$

由 2-80 可得:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{c_0}{c} \cos\alpha \right) = 0 \quad 2-82$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{c_0}{c} \cos\gamma \right) = -\frac{c_0}{c^2} \frac{dc}{dz}$$

由 2-82 第一式可得: $\frac{\cos\alpha}{c(z)} = \text{常数}$

$$\text{当起始值 } c = c_0, \alpha = \alpha_0 \text{ 时有 } \frac{\cos\alpha}{c(z)} = \frac{\cos\alpha_0}{c_0} \quad 2-83$$

此即菲涅尔定律(折射定律),它是射线声学的基本定律。

由 2-82 或左端可得

$$\frac{d}{ds} (n \cos\gamma) = -n \sin\gamma \frac{d\gamma}{ds} + \cos^2\gamma \frac{dn}{dz}$$

由 2-82 式左端可得:

$$-\frac{c_0}{c^2} \frac{dc}{dz} = -\frac{n}{c} \frac{dc}{dz} = \frac{dn}{dz}$$

$$\frac{dy}{ds} = -\frac{\sin \gamma}{n} \cdot \frac{dn}{dz} = \frac{\sin \gamma}{c} \frac{dc}{dz}$$

2-84

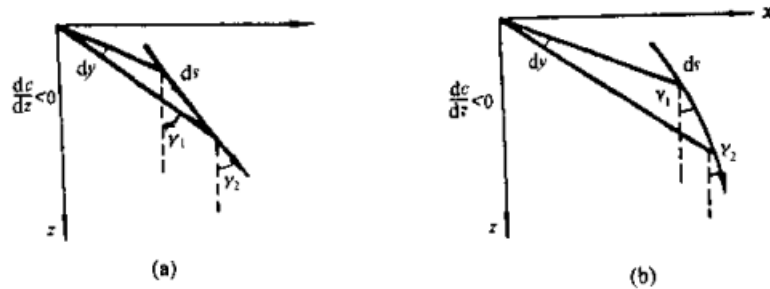


图3-12

(a) $\frac{dc}{dz} > 0, \gamma_2 > \gamma_1$, 声线弯向上方; (b) $\frac{dc}{dz} < 0, \gamma_2 < \gamma_1$, 声线弯向下方

(a) $\frac{dc}{dz} > 0, \gamma_2 > \gamma_1$ 声线弯向上

$\frac{dc}{dz} > 0$, 则 $\frac{dy}{ds} > 0, \gamma_2 > \gamma_1$ 声线 s 向上弯曲

(b) $\frac{dc}{dz} < 0, \gamma_2 < \gamma_1$ 声线弯向下

$\frac{dc}{dz} < 0$, 则 $\frac{dy}{ds} < 0, \gamma_2 < \gamma_1$ 声线 s 向下弯曲

∴ 声线总是弯向声速小的方向。

(3) 求解 $\varphi(x, y, z)$ 显式

设 φ 可表示成 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(z)$ 的线性迭加

$$\varphi(x, z) = \varphi_1(x) + \varphi_2(z)$$

由 2-75 式可得

$$\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} = n(z) \cos \alpha$$

2-85

$$\frac{\partial \varphi_2(z)}{\partial z} = n(z) \cos \gamma$$

由 2-85 式第一式有：

$$\frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} = n(z) \cos \alpha = \frac{c_0}{c} \cos \alpha \xrightarrow{\text{Snell定律}} c_0 \cdot \frac{\cos \alpha_0}{c_0} = \cos \alpha_0$$

$$\therefore \varphi_1(x) = \cos \alpha_0 \cdot x + c_1$$

由 2-85 式第二式有：

$$\frac{\partial \varphi_2(z)}{\partial z} = n(z) \cos \gamma = n(z) \sin \alpha \xrightarrow{\text{Snell定律}} \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0}$$

$$\therefore \varphi_2(z) = \int_0^z \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0} dz + c_2$$

则得程函：

$$\varphi = x \cos \alpha_0 + \int_0^z \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0} dz + C \quad 2-86$$

代入 2-66 式得射线声学近似下，平面问题的声压表示

$$p(x, z, t) = A(x, z) \exp[j(\omega t - x k_0 \cos \alpha_0 - k_0 \int_0^z \sqrt{n^2 - \cos^2 \alpha_0} dz)] \quad 2-87$$

(三) 强度方程：

1、方程的意义

$$\text{强度方程:} \quad \nabla^2 \varphi + \frac{2}{A} \nabla A \cdot \nabla \varphi = 0$$

$$\text{可写为:} \quad 2A \nabla A \cdot \nabla \varphi + A^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\text{矢量分析知: } \nabla \cdot (a \nabla b) = \nabla a \cdot \nabla b + a \nabla^2 b \quad 2-88$$

则强度方程等于：

$$\nabla \cdot (A^2 \nabla \varphi) = 0$$

$$\text{可以证明} \quad \vec{I} \propto A^2 \nabla \varphi \quad 2-89$$

$$\therefore \nabla \cdot \vec{I} = 0 \quad 2-90$$

由矢量场论知识可知，散度为零的矢量场为管量场，由奥—高定

理可知：

$$\iiint_V \nabla \cdot I dV = \oint_S I \cdot dS$$

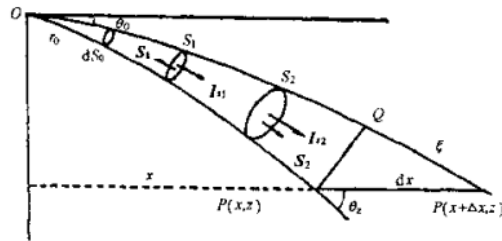


图3-13 声能沿射线管束的传播

S 为声线管侧面及声线管两端截面 S_1 , S_2 。因 I 与声线管侧面法向垂直，故侧面积分为 0，则有

$$\iint_{S_1} I \cdot dS + \iint_{S_2} I \cdot dS = 0$$

若 I 在各截面均匀分布，则有

$$-I_{S1}S_1 + I_{S2}S_2 = 0$$

$$\therefore I_{S1}S_1 = I_{S2}S_2 = \dots = \text{常数} \quad 2-91$$

表声能沿声线管束传播，端面大，声能分散声强值减小，端面小，声能集中，声强值增加，即 I 与 S 成反比。

2、声强基本公式

2-91 式中常数由声源辐射功率确定。令 w 代表单位立体角内的辐射声功率，若单位立体角 $d\Omega$ 所张的截面积微元为 dS ，则声强为：

$$I(x, z) = \frac{W d\Omega}{dS} \quad 2-92$$

考虑声源轴对称发射，在掠角 α_0 到 $\alpha_0 + d\alpha_0$ 内所有立体角内的声线管束，则有

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r_0^2} = 2\pi \cos\alpha_0 d\alpha_0 \quad 2-93$$

dS_0 为单位距离 r_0 处立体角 $d\Omega$ 所张微元面积，当声线到达 p 点时， $d\Omega$ 对应截面积 $dS = 2\pi x \cdot \sin\alpha_z dx$

起始掠角 α_0 对应声线轨迹方程为 $x = x(\alpha_0, z)$

$$\therefore dx = \frac{\partial x}{\partial \alpha_0} d\alpha_0$$

$$\text{则 } dS = 2\pi x \frac{\partial x}{\partial \alpha_0} \sin\alpha_z d\alpha_0 \quad 2-94$$

将 2-93 2-94 代入 2-92 得：

$$I(x, z) = \frac{W \cos\alpha_0}{x \frac{\partial x}{\partial \alpha_0} \sin\alpha_z} \quad 2-95$$

以 r 表示水平距离，有

$$I(x, z) = \frac{W \cos\alpha_0}{r \frac{\partial r}{\partial \alpha_0} \sin\alpha_z} \quad 2-96$$

这是计算声强的基本公式。

振幅：

$$A(r, z) = |I|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{W \cos\alpha_0}{r \frac{\partial r}{\partial \alpha_0} \sin\alpha_z}} \quad 2-97$$

$$\therefore p(r, z) = A(r, z) e^{-jk_0 \varphi(r, z)} \quad 2-98$$

(四) 射线声学的应用条件

程函方程 2-70 是在 $\nabla A/A \ll k^2$ 条件下导出的，这说明射线理论为波动理论一级近似。

对一维情况，不等式等效于

$$\frac{\lambda^2}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) \ll 1 \quad 2-99$$

由 2-65（强度方程）有 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$

∴ 2-99 式写为：

$$\lambda^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \ll 1 \quad 2-100$$

而 $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \sim n$

$$\therefore \lambda^2 \frac{\partial n}{\partial x} \ll 1 \quad 2-101$$

$$\text{或} \quad \lambda^2 \frac{\partial c}{\partial x} \ll 1 \quad 2-102$$

由 2-99, 2-101, 2-102 可知，射线理论适用条件，

- （1） 在一个波长 λ_0 范围内，声波振幅相对变化很小（声影区，焦散区）
- （2） 在一个波长 λ_0 范围内，介质的折射率梯度不大（跃弯层）
- （3） 在一个波长 λ_0 范围内，介质的声速梯度不大。

射线声学忽略了 $\frac{1}{k}$ 的高次项，故适用于高频。

§ 2-4 分层介质中的射线声学

声线轨迹

对分层介质

$$c(x, y, z) = c(z)$$

$$n(x, y, z) = n(z)$$

（一） 声线轨迹

1、 Snell 定律和声线弯曲

由程函方程导出 2-83 的 Snell 定律为

$$\frac{\cos \alpha}{c} = \frac{\cos \alpha_0}{c_0} = \text{常数} \quad 2-103$$

已知 α_0 , c_0 则对任意对应 c 可求得 α , 即确定了声线传播方向。

2、 声线轨迹:

由 2-84 可得声线曲率的表达式:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{\sin \theta}{c} \frac{dc}{dz} = \frac{\cos \alpha}{c} \frac{dc}{dz} \quad \theta \text{ 为入射角 } \alpha \text{ 为掠角}$$

当声速梯度为常数时

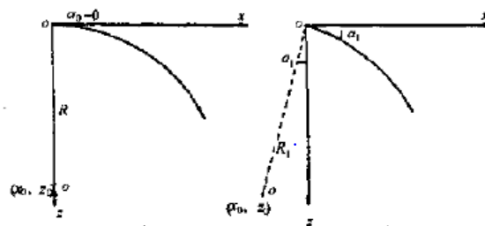
$$\frac{dc}{dz} = \text{常数}, \text{ 而由 Shell 定律 (2-103 式) 知 } \frac{\cos \alpha}{c} = \text{常数}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{ds} = \text{常数}$$

此时, 声线轨迹为圆弧。

3、 声线轨迹方程

$$\text{对恒定声速梯度有: } c = c_0(1 + az) \quad a = \frac{1}{c_0} \frac{dc}{dz}$$



负梯度声线轨迹

若声线在海面以掠角 $\alpha_0 = 0$ 出射, 则该声线曲率半径为 $R = \left| \frac{ds}{d\theta} \right| = \left| \frac{1}{a} \right|$ 。

由图可看出, 圆弧圆心 O' 坐标为: $x_0 = 0$, $z_0 = -\frac{1}{a}$ 。代入圆方程

$$(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \text{ 得声线轨迹方程: } x^2 + (z + \frac{1}{a})^2 = (\frac{1}{a})^2$$

对于声源在海面上以任意掠角 α_1 出射声线，同样可得其轨迹方程为：

$$\left(x - \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{a}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{1}{a \cos \alpha_1}\right)^2$$

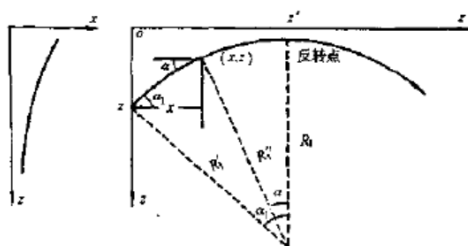
(二) 声线经过的水平距离

设声源位于 $x = 0$ ， $z = z_1$ 处，接收点位于 (x, z) 处，则

$$x = \int dx = \int_{z_1}^z \frac{dz}{\operatorname{tg} \alpha(z)} \quad 2-104$$

由 snell 定律可得： $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{(n^2(z) - \cos^2 \alpha_1)^2 / \cos^2 \alpha_1}$ ，其中， $n = \frac{c(z_1)}{c(z)}$ 。则水平距离为：

$$x = \cos \alpha_1 \int_{z_1}^z \frac{dz}{n^2(z) - \cos^2 \alpha_1} \quad 2-105$$



当声线经过反转点 z' 之后 z 将是 x 的多值函数

$$\therefore x = \cos \alpha_1 \left| \int_{z_1}^{z'} \frac{dz}{n^2(z) - \cos^2 \alpha_1} \right| + \cos \alpha' \left| \int_{z'}^z \frac{dz}{n^2(z) - \cos^2 \alpha'} \right| \quad 2-106$$

$\because z'$ 处， $\alpha' = 0$

$$\therefore x = \cos \alpha_1 \left| \int_{z_1}^{z'} \frac{dz}{n^2(z) - \cos^2 \alpha_1} \right| + \left| \int_{z'}^z \frac{dz}{n^2(z) - 1} \right| \quad 2-107$$

2-107 或即在 $c = c(z)$ 下声线水平距离公式。对恒定声速梯度，轨迹为圆弧，由图可看出：

$$x = R_1 |\sin \alpha_1 - \sin \alpha(z)| = \frac{c(z_1)}{\cos \alpha_1 \cdot g} |\sin \alpha_1 - \sin \alpha(z)| \quad 2-108$$

声线经过的垂直距离为 $z_1 - z = R_1 |\sin \alpha - \sin \alpha(z)|$ 代入 2-108 式得水平距离另

一表达式:

$$x = \frac{z_1 - z}{tg[\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha(z))]} \quad 2-109$$

当声线经过 z' 后, 水平距离分段相加; 经化简得:

$$x = \frac{c(z_1)}{cos\alpha_1 \cdot g} |sin\alpha_1 + sin\alpha(z)| \quad 2-110$$

式中 $g = \frac{dc}{dz} = ac_0$ 。

(三) 声线传播时间

声线经微元 ds 所需时间为 $dt = \frac{ds}{c}$, 所以声线从 z_1 深度传播到 z 深度时间为:

$$t = \int \frac{ds}{c} = \int_{z_1}^z \frac{dz}{c(z)sin\alpha(z)} \quad 2-111$$

由 **snell** 定律有 $c sin\alpha = \frac{c_1}{n^2} \sqrt{n^2 - cos^2\alpha_1}$, $n = \frac{c_1}{c}$ 则

$$t = \frac{1}{c} \int_{z_1}^z \frac{n^2(z) dz}{\sqrt{n^2(z) - cos^2\alpha_1}} \quad 2-112$$

2-112 即为计算声传播时间的一般表达式。

对恒定声速梯度, 由 **snell** 定律有:

$dz = -\frac{c_1 sin\alpha}{g cos\alpha_1} d\alpha$ 代入 2-112 式有:

$$t = \frac{1}{g} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{cos\alpha} \quad 2-113$$

$$t = \frac{1}{2g} \ln \left(\frac{1 + sin\alpha}{1 - sin\alpha} \right) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha}$$

$$= \left| \frac{1}{g} \ln \left[\frac{tg(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})}{tg(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\pi}{4})} \right] \right| \quad 2-114$$

(四) 线性分层介质中的声线图: (声速 $c(z)$ 复杂, 无解析表达式, 以分层析线代替)

将 $c(z)$ 看成多层构成，每层为 $\frac{dc}{dz}$ 恒定，则第三层有

$$\Delta x_i = \frac{z_i - z_{i+1}}{tg[\frac{1}{2}(\alpha_i - \alpha_{i+1})]} \quad 2-115$$

$$\text{或} \Delta x_i = \frac{c_i}{\cos \alpha_i g_i} |\sin \alpha_i - \sin \alpha_{i+1}|$$

对 N 个分层声线总水平距离为：

$$X = \frac{c_0}{\cos \alpha_0} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{\sin \alpha_i - \sin \alpha_{i+1}}{g_i} \right| \quad 2-116$$

此模型由于各层交界处 $\frac{dc}{dz}$ 不连续，出现虚假声线会聚现象。可采用多项式声速分布逼近真实声速分布，折线分段法较简单。

二、声强度和聚焦因子

（一）声强度：

由 2-108 式有（若为任意 $c(z)$ 由 2-107 式给出 X ）：

$$X = \frac{c(z_0)}{\cos \alpha_0 g} |\sin \alpha_0 - \sin \alpha(z)|$$

$$-\frac{\partial X}{\partial \alpha_0} = \frac{c_0}{g \cos^2 \alpha_0} (1 - \sin \alpha_0 \sin \alpha - \cos \alpha_0 \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0})$$

由 snell 定律可得：

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha_0}{\cos \alpha_0 \sin \alpha}$$

代入上式后得

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha_0} = \frac{X}{\cos \alpha_0 \sin \alpha}$$

对单层介质，可得声强为：

$$I = \frac{w \cos^2 \alpha}{x^2} \quad 2-117$$

同理对多层线性分层介质， $x = \sum_{i=0}^{N-1} \Delta x_i$ 可得：

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha_0} \right) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial (\Delta x_i)}{\partial \alpha_0} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{c_i [(1 - \sin \alpha_i \sin \alpha_{i+1}) \frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_0} - \cos \alpha_i \cos \alpha_{i+1} \frac{\partial \alpha_{i+1}}{\partial \alpha_0}]}{\cos^2 \alpha_i}$$

由 snell 定律有: $\frac{\partial \alpha_i}{\partial \alpha_0} = \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_i}{\cos \alpha_0 \sin \alpha_i}$, 再利用式 2-115 式

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_0} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \frac{\Delta x_i}{\sin \alpha_i \sin \alpha_{i+1}}$$

$$\therefore I(x, z) = \frac{W \cos \alpha_0}{x \sin \alpha \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta x_i}{\sin \alpha_i \sin \alpha_{i+1}}} \quad 2-118$$

声源均匀发射 $W = \frac{W_0}{4\pi} \quad 2-119$

计声强辐射指向性函数 $D(\alpha, \varphi)$, 且 D 与 φ 无关时,

单层: $I(x, z) = \frac{W_0 D(\alpha_0) \cos \alpha_0}{x \frac{\partial x}{\partial \alpha_0} \sin \alpha} \quad 2-120$

多层: $I(x, z) = \frac{W_0 D(\alpha_0) \cos \alpha_0}{x \sin \alpha \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta x_i}{\sin \alpha_i \sin \alpha_{i+1}}} \quad 2-121$

(二) 聚焦因子

聚焦因子是不均匀介质中的声强 $I(x, z)$ 与均匀介质中的声强 I_0 之比。

$$F(x, z) = \frac{I(x, z)}{I_0} \quad 2-122$$

均匀介质中 $I_0 = \frac{W_0}{R^2}$

$$\therefore F(x, z) = \frac{R^2 \cos \alpha_0}{x \frac{\partial x}{\partial \alpha_0} \sin \alpha} \quad 2-123$$

当远场时, $R \approx x$

$$\therefore F(x, z) = \frac{x \cos \alpha_0}{\frac{\partial x}{\partial \alpha_0} \sin \alpha} \quad 2-124$$

$F(x, z) < 1$ 射线管发射程度大于球面波;

$F(x, z) > 1$ 射线管发射程度小于球面波;

$\frac{\partial x}{\partial \alpha_0} = 0$, $F = \infty$ 。焦散区, 射线声学不适用。

多层介质：（用到 $R \cos \alpha \approx x$ 近似）

$$F(x, z) = \frac{x}{\sin \alpha_0 \sin \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta x_i}{\sin \alpha_i \sin \alpha_{i+1}}} \quad 2-125$$

一般 α_i 较小 $\therefore \sin \alpha = \alpha$ 有：

$$F(x, z) = \frac{x}{\alpha_0 \alpha \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta x_i}{\alpha_i \alpha_{i+1}}} \quad 2-126$$

焦散区： $F \rightarrow \infty$ 的点为焦散点。

射线族上满足 $\frac{\partial x}{\partial \alpha_0} = 0$ 的点的包络线为焦散线。

第三章 典型传播条件下的声场

§3-1 邻近海面的水下点源声场（洛埃镜效应）

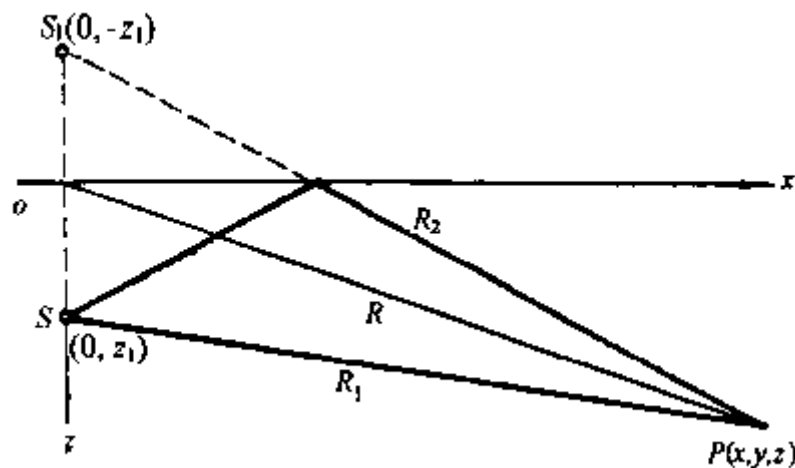
1. 声场分布

无限均匀海水中点源声场为：

$$p = \frac{1}{R_1} e^{-jkR_1} \quad 3-1$$

该方程满足波动方程，当存在海面边界时（自由平面）：

$$p = 0 \quad (z = 0 \text{ 时}) \quad 3-2$$



则 3-1 不满足 3-2 式，引入一虚源 $S_1(0, -z_1)$, 则总声压为:

$$p = \frac{1}{R_1} e^{-jkR_1} - \frac{1}{R_2} e^{-jkR_2} \quad 3-3$$

式中: $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_1)^2}$, $R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_1)^2}$

当 R 远大于 z_1 (源) 和 z (收) 情况下,

$$R_1 = \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2} = R_0 \sqrt{1 - \frac{2zz_1}{R_0^2}} \approx R_0 - \frac{zz_1}{R_0},$$

$$R_2 = \sqrt{r^2 + (z + z_1)^2} = R_0 \sqrt{1 + \frac{2zz_1}{R_0^2}} \approx R_0 + \frac{zz_1}{R_0}$$

将 R_1 、 R_2 代入 3-3 得:

$$p = \frac{e^{-jk(R_0 - \frac{zz_1}{R_0})}}{R_0 - \frac{zz_1}{R_0}} - \frac{e^{-jk(R_0 + \frac{zz_1}{R_0})}}{R_0 + \frac{zz_1}{R_0}}$$

$$\approx 2 \left[\frac{zz_1}{R_0^3} \cos\left(k \frac{zz_1}{R_0}\right) + \frac{j}{R_0} \sin\left(k \frac{zz_1}{R_0}\right) \right] e^{-jkR_0}$$

对远场 $R^2 = r^2 + z^2$, $R_0^2 = r^2 + z^2 + z_1^2$, 得

$$p = 2 \left[\frac{zz_1}{R^3} \cos\left(k \frac{zz_1}{R}\right) + \frac{j}{R} \sin\left(k \frac{zz_1}{R}\right) \right] e^{-jkR} \quad 3-4$$

一般 $zz_1/R^2 \ll 1$, 当 $\sin\left(k \frac{zz_1}{R_0}\right)$ 不取零附近处, p 的虚部远大于实部, 则

$$p = \frac{2}{R} \left| \sin\left(k \frac{zz_1}{R}\right) \right| \quad 3-5$$

$|p|$ 取最大值有:

$$R = R_N = \frac{kzz_1}{\pi(N+1/2)} \quad N = 0, 1, 2 \dots \quad 3-6$$

最大值为:

$$|p| = \frac{2}{R_N} \quad 3-7$$

此为近场菲涅尔区内干涉结果，声压最后一个极大值距离（N 最小，取 0）为：

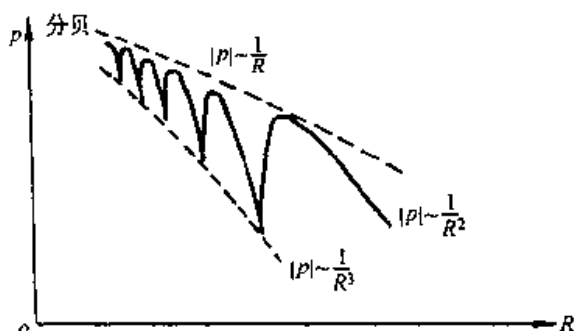
$$R_{N=0} = \frac{2kzz_1}{\pi}, \quad \text{当 } R > \frac{2kzz_1}{\pi} \text{ 时到达弗朗和费区}$$

$$|p| \approx \frac{2kzz_1}{R^2} \approx \frac{2kzz_1}{r^2} \quad (R \gg \frac{2kzz_1}{\pi}) \quad 3-8$$

在菲涅尔区内，当 $\sin\left(k \frac{zz_1}{R}\right) = 0$ 时，p 取 3-4 式实部有：

$$p = \frac{2zz_1}{k_m^3} \quad R_m = \frac{kzz_1}{m\pi} \quad m = 1, 2, 3 \quad 3-9$$

可见菲涅尔区内，极大值按 $\frac{1}{R}$ 衰减，极小值按 $\frac{1}{R^3}$ 衰减，而弗朗和费区内 $|p|$ 按 $\frac{1}{R^2}$ 衰减。



2. 传播损失

菲涅尔区内：

$$TL = 20 \lg R - 20 \lg \left[\sin \left(k \frac{zz_1}{R} \right) \right] \quad 3-10$$

弗朗和费区：

$$TL = 40 \lg R \quad 3-11$$

3. 非绝对反射海面下的传播损失

平均反射系数：

$$\langle V \rangle = \mu \quad 3-12$$

略推导得:

$$TL = 20lgR - 20lg \left[1 + \mu^2 - 2\mu \cos\left(\frac{2kzz_1}{R}\right) \right] \quad 3-13$$

§3-2 表面声道

一、声速剖面简化为线性正梯度分布:

$$c(z) = c_s(1 + az) \quad 0 < z < H \quad 3-14$$

(一)声线和参数

在海面, 声源, 接收点, 海面混合层深度处声速分别为 c_s 、 c_0 、 c 、 c_H , 掠角

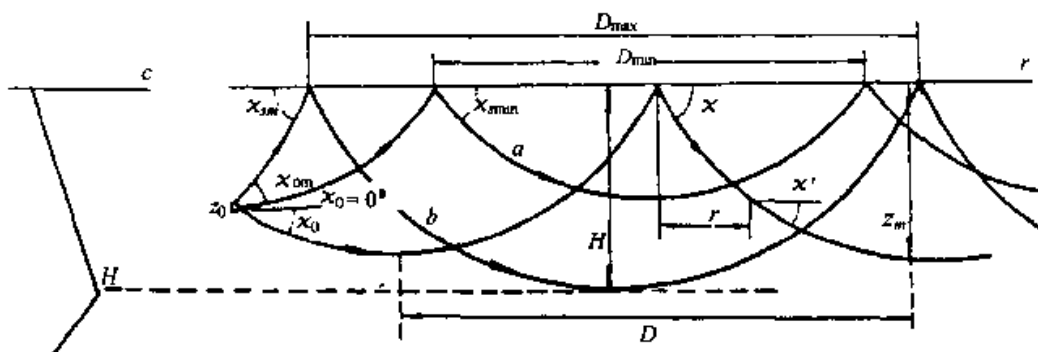
为 α_s 、 α_0 、 α 、 α_H ，则有：

$$c_0 = c_s(1 + az_0) \quad 0 < z < H \quad 3-15$$

$$c = c_s(1 + az) \quad 0 < z < H \quad 3-16$$

$$c_H = c_s(1 + aH) \quad 0 < z < H \quad 3-17$$

$$\frac{\cos(\alpha_0)}{c_0} = \frac{\cos(\alpha_s)}{c_s} = \frac{\cos(\alpha)}{c} = \frac{\cos(\alpha_H)}{c_H} \quad 3-18$$



1、 反转深度和临界声线：

在反转深度 z_m 处掠角 $\alpha = 0$ ，由 3-16 式有：

$$\frac{\cos \alpha_0}{1+az_0} = \frac{1}{1+az_m}$$

$$\therefore z_m = \frac{az_0 + 2\sin^2(\frac{\alpha_0}{2})}{a \cos \alpha_0} \quad 3-19$$

若以海面掠角 α_s 表示则将上式中 α_0 换为 α_s ， z_0 换为 z_s 即可：

$$z_m = \frac{2\sin^2(\frac{\alpha_s}{2})}{a \cos \alpha_s} \quad 3-20$$

一般掠角都为小量， $\sin \alpha$ 用 α 代替，有：

$$z_m \approx z_0 + \frac{\alpha_0^2}{2a} \quad 3-21$$

$$z_m \approx \frac{\alpha_s^2}{2a}$$

当 $z_m = H$ 时可得最大掠射角（临界角），由 3-19 得：

$$\alpha_{0m} = \sqrt{2a(H - z_0)} \quad \alpha_{sm} = \sqrt{2aH} \quad 3-22$$

沿临界角传播声线为表面声道临界声线，当 $\alpha_0 > \alpha_{0m}$ 或 $\alpha_s > \alpha_{sm}$ 时，声线

将进入 $z > H$ 水中。

2、 跨度：

定义：声线连续两次发生海面反射，在海面两相邻反射点之间的水平距离。

c 的梯度为常数，由 2-108 式有声线水平距离：

$$r = \frac{|\sin \alpha_s - \sin \alpha'|}{a \cos \alpha_s}$$

当 $\alpha' = 0$ 时，可得声线反转点处水平距离，则跨度为：

$$D = 2r = \frac{2 \tan \alpha_s}{a} \quad 3-23$$

将 3-20 中解得 a 代入上式有（与反转深度 z_m 关系）：

$$D = 2z_m \cot \frac{\alpha_s}{2} \quad 3-24$$

当海面掠角 α_s 取临界掠角 $\alpha_{sm} = \sqrt{2aH}$ ，得最大跨度（代入 3-23 且

$\tan \alpha_s = \alpha_s$ ）：

$$D_{max} \approx \sqrt{\frac{8H}{a}} \quad 3-25$$

当声源掠角 $\alpha_0 = 0$ 时，该声线的海面掠角为最小 $\alpha_s = \alpha_{smin}$ ，此时反转深度 $z_m = z_0$ ，由 3-21 式可得：

$$\alpha_{smin} = \sqrt{2az_0} \quad 3-26$$

代入 3-23 式得最小跨度：

$$D_{min} \approx \sqrt{\frac{8z_0}{a}} \quad 3-27$$

3、循环数 N 和声能沿深度分布

接近水面的源、接收器，当 N 取整数且满足 $N = \frac{r}{D(\alpha_{sN})}$ 的各条声线均可到达接收点， N 为循环数。 $N=1$ 为经一个跨度传来的声线，其他类推。

由 3-23 式有：

$$N = \frac{ar}{a \tan \alpha_{sN}} \quad N = 1, 2, 3 \dots \dots \infty$$

则：

$$\alpha_{sN} = \arctan\left(\frac{ar}{2N}\right) \quad N = 1, 2, 3 \dots \dots \infty \quad 3-28$$

N 越大，声线越接近海面，当 $N \rightarrow \infty$ 时，声线沿海面传来。反转点最深或最大跨度声线对应 N 为 N 能取的最小值。N 和 N+1 代入相邻掠角 α_{sN} ， α_{sN+1} 。

由 3-28 式可看出，N 越大， α_{sN} 与 α_{sN+1} 相差越小，声线越密；反之 N 小，声线疏散，表面声能集中于海面，由 3-21 可知： z_m 与 α_s^2 成正比，在均匀辐射时，声能与 α_s 成正比，即 $W \sim \alpha_s$ ，层内声能 W 与 α_s 一次方减小，但层厚 z_m 与 α_s 平方减小： $\frac{W}{z_m} \sim \frac{1}{\alpha_s}$ ，即声能与层厚之比与 α_s 成反比，声能集中于海面。

(二)传播时间

由 2-113 式可得传播时间为：

$$t = \frac{1}{ac_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \quad 3-29$$

t 为声线从深度 z_1 传到 z_2 的时间。

$$t = \frac{1}{ac_0} \left[\ln \frac{1+\sin \alpha_1}{1-\sin \alpha_1} - \ln \frac{1+\sin \alpha_2}{1-\sin \alpha_2} \right] \quad 3-30$$

令 $\alpha_1 =$ 海面掠角， $\alpha_2 = 0$ ，则得一个跨度传播时间

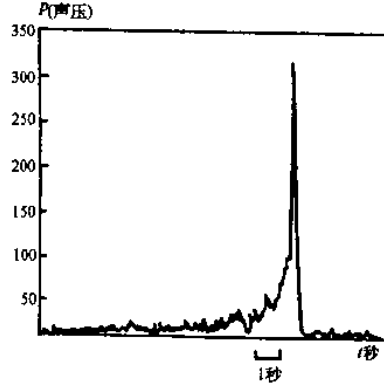
$$\Delta t = 2 \frac{1}{2ac_0} \ln \frac{1+\sin \alpha_s}{1-\sin \alpha_s} = \frac{2\alpha_s}{ac_0} \left(1 + \frac{1}{6}\alpha_s^2 + \frac{1}{24}\alpha_s^4 \right)。若信号经 N 个跨度到接收点，则有：$$

$$t_N = \frac{2N\alpha_s}{ac_0} \left(1 + \frac{1}{6}\alpha_s^2 \right) \quad 3-31$$

$\because \chi_{sN} = \arctan \frac{ar}{2N}$ ，代入上式并利用 $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots$ ，有：

$$t_N = \frac{r}{c_0} \left(1 - \frac{a^2 r^2}{24N^2} \right) \quad 3-32$$

N 最小最接近海底声线，传播时间最短，最先到，N 最大，最近海面声线最后到。随 N 增加，相邻到达声线时间间隔不断减小，即单位时间到达声线数随 N 增大而加大。则信号到达为由弱到强，最后尖锐截止。



若 N_{min} 和 N_{max} 表到接收点声线最小和最大循环数，对应信号持续时间为：

$$T = t_{N_{max}} - t_{N_{min}} = \frac{a^2 r^3}{24 c_0} \left(\frac{1}{N_{min}^2} - \frac{1}{N_{max}^2} \right). \text{ 当 } N_{max} \gg N_{min} \text{ 时,}$$

$$t_N = \frac{a^2 r^3}{24 c_0} \frac{1}{N_{min}^2} \quad 3-33$$

由 3-28 可知： $\chi_{sN} = \arctan \frac{ar}{2N}$ ，与 N_{min} 对应的是最大海面掠角 α_{min} ，

$$\therefore N_{min} \approx \frac{ar}{2\alpha_{max}}, \text{ 而 } \alpha_{max} = \sqrt{2aH},$$

$$\therefore T = \frac{aHr}{3c} \quad 3-34$$

信号持续时间 T 与 r 成正比，r 大，T 大。

二、 表面声道的截止频率

设表面声道厚为 H，在一个跨度内的声线可以看做由海面向下传的入射波和经反转点返回海面的反射波组成，忽略吸收并设 $|V| = 1$ ，则计入反转点附加相移 $\frac{\pi}{2}$ 后有：

$$V = \exp \left[j \left(2 \int_0^H k_z dz - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad 3-35$$

利用海面处边界条件有：

$$V = \exp[j\pi]$$

$$\therefore 2 \int_0^H k_z dz - \frac{\pi}{2} = \pi + 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 3-36$$

式中 $k_z = k \sin \alpha$

$\because c(z) = c_s(1 + aH)$, $c(H) = c_s(1 + aH)$, 由 snell 定律有：

$$\cos(\alpha) = \frac{c_s}{c(H)}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2 \int_0^H k_z dz &= 2\omega \int_0^H \sqrt{\left[\frac{1}{c(z)} \right]^2 - \left[\frac{1}{c(H)} \right]^2} dz \\ &\approx \frac{2\omega}{c_s^2} \int_0^H \sqrt{c(H)^2 - c(z)^2} dz \end{aligned}$$

$$c(H) c(z) \approx c_s^2$$

$$\approx \frac{2\sqrt{2a}\omega}{c_s} \int_0^H \sqrt{H - z} dz \quad \text{略 } a^2 \text{ 项}$$

$$= \frac{4\sqrt{2a}}{3c_s} \omega H^{3/2}$$

代入 3-36 式得：

$$\frac{4\sqrt{2a}}{3c_s} \omega_n H^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f_n = \left(\frac{3}{2} + 2n \right) \frac{3c_s}{8\sqrt{2a}} H^{-\frac{3}{2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad 3-37$$

当 $n=0$ 时得表面声道截止频率

$$f_k = \frac{9c_s}{8H\sqrt{8aH}} \quad 3-38$$

波动理论由频散方程（极点方程）的根给出截止频率，此处由不均匀反射系数应满足边界条件给出截止频率，均匀层同理可算。

三、平滑平均声强

在不关心声场细微结构时，由射线声学理论及概率平滑概念可导出平滑平均声强。

（一）射线声学下的平滑平均声强

$$F(r, z) = \frac{r \cos \alpha}{\frac{\partial r}{\partial \alpha_0} \sin \alpha}$$

均匀介质中声强 $I_0 = \frac{\omega_0}{r^2}$, 设 $\omega_0=1$, 有

$$I(r, z) = F(r, z) \cdot I_0 = \frac{\cos \alpha_0}{r \left(\frac{\partial \rho}{\partial d_0} \right)} \quad 3-39$$

起始掠角为 α_0 的声线跨度为 $D(\alpha_0)$ ，由图可见，有四处声场声强取 $I(r, z)$ 值，

每一处声线在水平方向的波束宽度为：

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \alpha_0} d\alpha_0 \quad 3-40$$

在一个跨度为 $D(\alpha_0)$ 距离内，取同一个声强值水平波束宽度之和为

$$4dr = 4 \frac{\partial r}{\partial \alpha_0} d\alpha_0$$

若同意深度 z 的各点取相同权重，则声强为 I 在一个跨度内的取值概念为（忽略简正波交叉项）：

$$H \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha_0} \right) \frac{d\alpha_0}{D(\alpha_0)} \quad 3-41$$

对可到达深度 z 对应的起始掠角 α_0 所有声线积分得：

$$I(r, z) = 4 \int \frac{I(r, z) \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0} d\alpha_0}{D(\alpha_0)} \quad 3-42$$

计入海底，海面反射及海水吸收得平均声强为：

$$I(r, z) = \frac{4}{r} e^{-2\beta\gamma} \int \frac{[|V_1(\alpha_h)| |V_2(\alpha_s)|]^{\frac{2r}{D}} \cos \alpha_0 d\alpha_0}{D(\alpha_0) \sin \alpha} \quad 3-43$$

$$\because [|V_1| |V_2|]^{\frac{2r}{D}} = \exp \left\{ \frac{2r}{D} \ln |V_1| + \ln |V_2| \right\}$$

$$\therefore I(r, z) = \frac{4}{r} e^{-2\beta\gamma} \int \frac{\exp \left\{ \frac{2r}{D} [\ln |V_1| + \ln |V_2|] \right\}}{D(\alpha_0) \sin \alpha} \cos \alpha_0 d\alpha_0 \quad 3-44$$

($z = z_0$ 即 $\alpha = \alpha_0$ 不适用)

由折射定律有：

$$\frac{\cos \alpha}{c} = \frac{\cos \alpha_h}{c_h} = \frac{\cos \alpha_s}{c_s} = \frac{\cos \alpha_0}{c_0}$$

(二) 表面声道中的平均声强

当海面平静时， $|V_2| = 1$ ，声线反转 $|V_1| = 1$ (未遇海底)，表面声道内声线最大掠角为 α_m 则有：

$$I(r, z) = \frac{4}{r} e^{-2\beta\gamma} \int \frac{\cos \alpha_0}{D(\alpha_0) \sin \alpha} d\alpha_0 \quad 3-45$$

对海面不整时由 3-44 及 snell 定律可得：

$$I(r, z) = \frac{2cc_0}{rc_s^2} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{\exp \left[\frac{2r}{D} \ln |V_2| \right] \sin(2\alpha_s)}{D(\alpha_s) \sin \alpha_0 \sin \alpha} d\alpha_s \quad 3-46$$

V_2 可由海浪谱给出。

3-46 解析解求解困难，可数值求解。

(三) 传播损失

3-47 求解困难，设 $|V_2| = 1$ ， $\alpha_0 = \alpha = \alpha_s = \text{常数}$ ，由 3-23 式有

$$\text{跨度: } D(\alpha_0) = 2H \operatorname{ctg} \alpha_0 \quad 3-47$$

代入 3-45 式得：

$$I(r, z) = \frac{4}{r} e^{-2\beta\gamma} \int_0^{\alpha_m} \frac{d\alpha_0}{2H} d\alpha_0 = \frac{2\alpha_m}{rH} e^{-2\beta\gamma} \quad 3-48$$

传播损失:

$$TL = 10 \log \left[\frac{I(1)}{I(r)} \right] = 10 \lg(r) + 10 \lg \left(\frac{H}{2\alpha} \right) + 20\beta_\alpha \lg(e) \quad 3-49$$

若忽略吸收系数:

$$TL = 10 \lg(r) + 10 \lg \left(\frac{H}{2\alpha} \right) \quad 3-50$$

$$\text{另 } r_0 = \frac{H}{2\alpha}, \text{ 则有} \quad TL = 10 \lg(r) + 10 \lg(r_0) \quad 3-51$$

当 $r < r_0$ 时, 球面扩散; $r > r_0$ 时, 柱面扩散; r_0 称为过渡距离

当考虑吸收及声漏时有:

$$TL = 10 \lg(r) + 10 \lg(r_0) + 20 \lg(\beta + \beta_L) r \quad 3-52$$

$$\beta \text{ 为介质吸收系数 } \frac{Np}{m} \quad \beta_L \text{ 为声漏系数 } \frac{Np}{m}$$

3-3 深海声道

一、声道信号的基本特征

一) 声线和信号波形

与声道表面类似, 离声道轴远的声线路程长, 先到达, 声线密度小, 能量小; 沿声道轴传播声线路程最短, 到达最迟, 声线最密, 能量大, 接收信号由小到大直至峰值后突然截止。

二)、汇聚区和声影区

会聚区: 当声源位于海面或海底附件时, 由临近声线交聚点(面)所形成的包络线(面)为焦散线(面), 在海底, 海面附件形成的高声强焦散区域成为会聚区

声影区：汇聚区之间，只存在海面，海底反射声线而声强明显的小于汇聚区声强，为声影区。

声强异常：汇聚区声强 I 与球面扩散声强之比称为汇聚增益

$$G = \frac{I_0}{I} \approx \frac{4r}{\Delta r} \quad 3-53$$

会聚增益 G 的分贝值称为声强异常： $A = 10 \lg G$ 3-54

二、深海声道中的平均场和传播损失

一）最简单声道的平均场

线性声速分布模型： $C = C_0 (-H \leq Z < H)$

$$C = C_0(1 + a_2(Z - H)) \quad (Z > H)$$

$$C = C_0(1 - a_2(Z + H)) \quad (Z < -H)$$

经推导可得：

$$I = \frac{\pi g}{2r(1-gH)} \left[\frac{C_1}{C_0 \sqrt{\left(\frac{C_1}{C_0}\right)^2 + gH - 1}} - 1 \right] \quad 3-55$$

当声源位于均匀层内：

$$I = \frac{\pi g}{2r(1-gH)} \left(\frac{1}{\sqrt{gH}} - 1 \right) \quad 3-56$$

一般 $gH \ll 1$, 所以

$$I = \frac{\pi}{2r} \sqrt{\frac{g}{H}} \quad 3-57$$

由 $I = \frac{1}{r_0 r}$ 可得， $r_0 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{H}{g}}$ 为过渡距离 3-58

二）深海声道的传播损失

$$TL = 10 \lg r + 10 \lg r_0 + \alpha r 10^{-3} \quad 3-59$$

α 为吸收系数 $\frac{dB}{Km}$

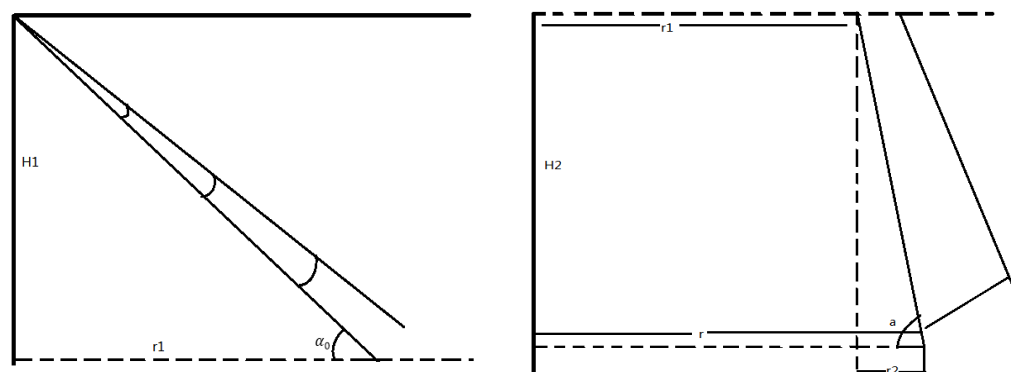
3-4 深海负梯度与深海负跃层

一) 深海负梯度 (与声道相反, 称反波导传播)

负梯度下声线向下弯曲, 与海面相切的极限声线以内是声亮区, 以外为直线声无法到达的声影区。由声源到观察点深度影区边沿的水平距离为:

$$D = r_1 + r_2 \quad \text{其中 } r_1 = \sqrt{R^2 - (R - Z_1)^2} \quad r_2 = \sqrt{R^2 - (R - Z)^2}$$

R 为 C 梯度恒定时极限声线的曲率半径, $R = \frac{1}{a}$, a 为相对声速梯度



$$\text{因为 } R \gg Z_1, \text{ 故 } r_1 \approx \sqrt{2RZ_1} = \sqrt{\frac{2Z_1}{a}} \quad r_2 \approx \sqrt{2RZ} = \sqrt{\frac{2Z}{a}}$$

$$\therefore D = \frac{\sqrt{2Z_1} + \sqrt{2Z}}{\sqrt{a}}$$

3-60

声速梯度不为常数时, 可按声速梯度特点, 由与海面相切声线确定几何作用距离

二) 深海负跃层

负跃层上下声线近似为直线, 跃层上为 C_1 , 下为 C_2

$$r = \frac{H_1}{\tan \alpha_0} + \frac{H_2}{\tan \alpha}$$

3-61

由 Snell 可得:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0} = \frac{C_2 \sin \alpha_0}{C_1 \sin \alpha} \quad \text{则} \quad \frac{\partial r}{\partial \alpha_0} = - \left(\frac{H_1}{\sin \alpha_0^2} + \frac{H_2 C_2 \sin \alpha_0}{C_1 \sin \alpha^2} \right) \quad 3-62$$

带入声强公式

$$I = \frac{W \cos \alpha_0}{r \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha_0} \right) \sin \alpha} \quad \text{得} \quad I = \frac{W \cos \alpha_0}{r^2 \left[\left(\frac{r_1 \sin \alpha}{r \sin \alpha_0} \right) + \left(\frac{r_2 \sin \alpha_0}{r \sin \alpha} \right) \right]} \quad 3-63$$

当接收点位于负跃层下附近有, $r_2 \approx 0$, $r \approx r_1$

$$\text{于是} \quad I_{\text{下}} = \frac{W \cos^2 \alpha_0}{r^2} \cdot \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha} \quad 3-64$$

当接收点位于负跃层上附近有, $r_2 = 0$, $r = r_1$, $\alpha = \alpha_0$

$$\text{于是} \quad I_{\text{上}} = \frac{W \cos^2 \alpha_0}{r^2}$$

则穿过负跃层后引起声能损失为:

$$TL = 10 \lg \left(\frac{I_{\text{up}}}{I_{\text{down}}} \right) = 10 \log \left(\frac{\sin \chi}{\sin \chi_0} \right).$$

3-5 浅海声场的虚源表示

绝对软海面, 绝对硬海底: 由虚源原理得总声场为

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\exp(jkR_{n1})}{R_{n1}} + \frac{\exp(jkR_{n2})}{R_{n2}} - \frac{\exp(jkR_{n3})}{R_{n3}} - \frac{\exp(jkR_{n4})}{R_{n4}} \right] \quad 3-64$$

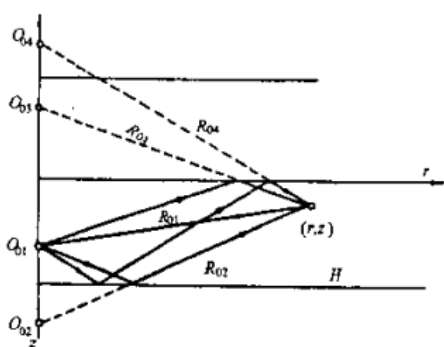
$$\text{式中:} \quad R_{ni} = \sqrt{r^2 + z_{ni}^2}, n=0,1,2,3,\dots; \quad i=1,2,3,\dots$$

$$z_{n1} = 2H \times n + z_0 - z$$

$$z_{n2} = 2H \times (n+1) + z_0 - z$$

$$z_{n3} = 2H \times n + z_0 + z$$

$$z_{n4} = 2H \times (n+1) - z_0 - z \quad 3-65$$



对一般界面则总声场为:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} (V_1 V_2)^n \sum \left[\frac{\exp(jkR_{n1})}{R_{n1}} + V_1 \frac{\exp(jkR_{n2})}{R_{n2}} + V_2 \frac{\exp(jkR_{n3})}{R_{n3}} + V_1 V_2 \frac{\exp(jkR_{n4})}{R_{n4}} \right]$$

3-66

高速海底传播损失: $TL = 10\log r + 10\log\left(\frac{H}{2\chi_c}\right)$. χ_c 为临界掠角 3-67

低速海底 (有吸收)

$$TL = 15\log r + 5\log\left(\frac{\gamma H}{\pi}\right) \quad (3/2 \text{ 次衰减率}) \quad 3-68$$

$$\gamma = -\frac{\partial}{\partial \chi} [\ln|V_1(\chi)| + \ln|V_2(\chi)|]_{\chi=0}$$

3-6 浅海表面声道

混合声道考虑海底反射

$$I_1(r, z) = \frac{2c_0 c}{\gamma c_s^2} \int_{\chi_{\min}}^{\chi_{sh}} \frac{\exp\left(\frac{2\gamma}{D} \ln|V_2|\right) \sin(2\chi_s)}{D(\chi_s) \sin\chi_0 \sin\chi} d\chi_s \quad 3-69$$

$$I_2(r, z) = \frac{2c_0 c}{\gamma c_s^2} \int_{\chi_{sh}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp\left(\frac{2\gamma}{D} (\ln|V_2| + \ln|V_1|)\right) \sin(2\chi_s)}{D(\chi_s) \sin\chi_0 \sin\chi} d\chi_s \quad 3-70$$

χ_{sh} 为对应在海底反转声线对应海面最大掠射角

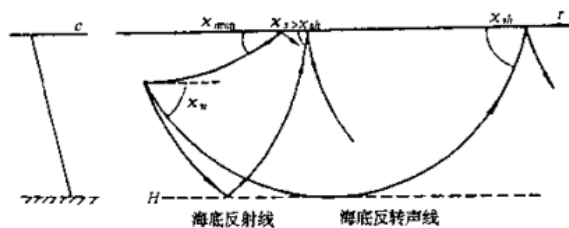


图4-31 浅海表面声道中的两类声线

3-7 浅海简正波与侧面波

(一). 分层介质中点源声场的积分表示.

下面讨论如图分层介质中单位点源激发的声场.

主解问题:

$$(1) \Delta \Phi + k^2(z) \Phi = -4\pi \delta(r - r_0), \quad 0 < z < H$$

$$(2) \Delta \Phi + k^2(z) \Phi = 0, \quad z > H$$

$$(3) \Phi|_{z=0} = 0 \text{ 自由表面}$$

$$(4) \sqrt{\rho} \Phi|_{H-0}^{H+0} = 0. \text{ 声压连续}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\Phi}{2\rho^{3/2}} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] \Big|_{H-0}^{H+0} = 0 \text{ 法向速度连续}$$

$$(5) \text{ 熄灭条件 } \Phi|_{z \rightarrow \infty} = 0$$

3-71

同样考虑柱坐标系

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

引入波函数 $\Phi(r, z)$ 的零阶汉克尔变换.

$$\tilde{\Phi}(r, z) = \int_0^\infty r J_0(\lambda r) \Phi(r, z) dr.$$

3-72

则波函数 $\Phi(r, z)$ 可表示为

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \lambda J_0(\lambda r) \tilde{\Phi}(\lambda, z) dr.$$

3-73

将 3-73 代入 3-71 得:

$$(1). \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} + [k_0^2(z) - \lambda^2] \tilde{\Phi} = 0. \quad 0 \leq z \leq H$$

$$(2). \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} + [k_1^2(z) - \lambda^2] \tilde{\Phi} = 0. \quad z > H$$

$$(3). \tilde{\Phi}|_{z=0} = 0$$

$$(4). \tilde{\Phi}|_{z_0-0}^{z_0+0} = 0$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dz}|_{z_0-0}^{z_0+0} = -2 \quad \text{奇性条件}$$

$$(5). \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tilde{\Phi}|_{H_0^-}^{H_0^+} = 0$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{d\tilde{\Phi}}{dz} + \frac{\tilde{\Phi}}{2\rho} \frac{d\rho}{dz} \right] \Big|_{H_0^-}^{H_0^+} = 0$$

$$(6). \lim_{z \rightarrow \infty} |\tilde{\Phi}| = 0$$

3-74

3-74 式中(1)(2)的解为:

$$(1) \tilde{\Phi}(\lambda, z) = A_1 F_1(\lambda, z) + B_1 F_2(\lambda, z). \quad 0 \leq z \leq z_0$$

$$(2) \tilde{\Phi}(\lambda, z) = A_2 F_2(\lambda, z) + B_2 F_2(\lambda, z). \quad z_0 \leq z \leq H$$

$$(3) \tilde{\Phi}(\lambda, z) = C G(\lambda, z) + D G_2(\lambda, z). \quad z > H$$

由定解条件可得:

$$A_1 = 2 \frac{F_1(z_0) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0)}{\bar{W}(F_1, F_2) \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right)}$$

$$A_2 = 2 \frac{F_1(z_0) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z_0)}{\bar{W}(F_1, F_2) \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right)}$$

$$\frac{B_1}{A_1} = -\frac{F_1(0)}{F_2(0)}$$

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{\left[\frac{F_1(H)}{F_1(H)+\rho_0} - \left[\frac{G_1(H)}{F_1(H)+\rho_1}\right]\right]}{\left[\frac{G_2(H)}{F_2(H)+\rho_1} - \left[\frac{F_2(H)}{F_2(H)+\rho_0}\right]\right]} \times \frac{F_1(H)}{F_2(H)} \quad 3-75$$

其中 $\bar{W}(F_1, F_2) = [F_1(z)\dot{F}_2(z) - F_2(z)\dot{F}_1(z)]$. 即 F_1, F_2 的郎斯基行列式

将 3-75 代入 3-73 得到场积分形式

$$\Phi(r, z) = 2 \int_0^\infty \frac{\left[F_1(z, \lambda) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z, \lambda)\right] \left[F_1(z_0, \lambda) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0, \lambda)\right]}{\bar{W}(F_1, F_2) \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2}\right)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda.$$

$$0 < z < z_0$$

$$\Phi(r, z) = 2 \int_0^\infty \frac{\left[F_1(z, \lambda) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z, \lambda)\right] \left[F_1(z_0, \lambda) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z_0, \lambda)\right]}{\bar{W}(F_1, F_2) \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2}\right)} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda.$$

$$z_0 < z < H$$

3-76

$\frac{B_2}{A_2}$ 与海底反射系数 V_H 有关, $\frac{B_1}{A_1}$ 与海面反射系数 V_S 有关.

(二). 简正波与侧面波

场的积分表示难于看出场的具体特征, 利用复变函数处理方法进一步加以变换处理:

$$J_0 = \frac{1}{2} [H_0^1(x) + H_0^2(x)]$$

$$H_0^2(x) = -H_0^1(x)e^{jx}$$

经变量代换有:

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \frac{\left[F_1(z, \lambda) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z, \lambda) \right] \left[F_1(z_0, \lambda) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0, \lambda) \right]}{\bar{W}(F_1, F_2) \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right)} H_0^1(\lambda r) \lambda d\lambda.$$

$$0 \leq z \leq z_0$$

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \frac{\left[F_1(z, \lambda) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z, \lambda) \right] \left[F_1(z_0, \lambda) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z_0, \lambda) \right]}{\bar{W}(F_1, F_2) \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right)} H_0^1(\lambda r) \lambda d\lambda.$$

$$z_0 \leq z \leq H \quad 3-77$$

由复变函数理论可以把上述积分变为对上半平面的围线积分, 则被积函数中极点方程(频散方程):

$$\left[\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right] \bigg|_{\lambda_n} = 0 \quad 3-78$$

同时被积函数中含有多值函数, 由柯西定理有:

$$\Phi(r, z) = 2\pi j \sum \text{留数} + \int [F^L(z, z_0, \lambda) + F^R(z, z_0, \lambda) H_0^1(\lambda r)] \lambda d\lambda$$

$$\text{其中: } F(z, z_0, \lambda) = \frac{\left[F_1(z, \lambda) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z, \lambda) \right] \left[F_1(z_0, \lambda) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0, \lambda) \right]}{\bar{W}(F_1, F_2) \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right)} \quad 3-79$$

F^L 和 F^R 分别表示被积函数沿分支线左岸和右岸的值

$$\sum \text{留数} = \sum_n \text{Res} \left[\frac{\left[F_1(z, \lambda) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z, \lambda) \right] \left[F_1(z_0, \lambda) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0, \lambda) \right]}{\bar{W}(F_1, F_2) \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right)} H_0^1(\lambda r) \lambda \right] \quad 3-80$$

上面留数和部分即位简正波, 而沿分支线的积分即为侧面波, 通常简正波是远场的主要贡献者, 旁侧波衰减快, 只对近场有贡献(采用越过路径法求解)

若 3-78 式的极点为一阶极点, 则简正波场为:

$$\Phi(r, z) = 2\pi j \sum \left[\frac{\left[F_1(z, \lambda_n) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z, \lambda_n) \right] \left[F_1(z_0, \lambda_n) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0, \lambda_n) \right]}{\bar{W}(F_1, F_2) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right) \bigg|_{\lambda_n}} H_0^1(\lambda_n r) \lambda_n \right] \quad 3-81$$

$$\text{对远场: } H_0^1(\lambda r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda r}} e^{j(\lambda r - \pi/4)}$$

则有:

$$\Phi(r, z) = 2\pi j \sum_n \left[\frac{\left[F_1(z, \lambda_n) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z, \lambda_n) \right] \left[F_1(z_0, \lambda_n) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0, \lambda_n) \right]}{\bar{W}(F_1, F_2) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right) \Big|_{\lambda_n}} \sqrt{\frac{2\lambda_n}{\pi r}} e^{j(\lambda_n r - \pi/4)} \right] \quad 3-82$$

因为: $\frac{B_1}{A_1} \Big|_{\lambda_n} = \frac{B_2}{A_2} \Big|_{\lambda_n}$

$$\text{所以: } \Phi(r, z) = \frac{\Phi}{\sqrt{r}} \sum_n \sqrt{\lambda_n} \Phi_n(z_0) \Phi_n(z) e^{j\lambda_n r} \quad 3-83$$

$$\text{其中: } \Phi(r, z) = 2\pi i \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Phi_n(r, z) = \frac{F_1(z) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z)}{\bar{W}(F_1, F_2) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right) \Big|_{\lambda_n}}$$

可见 3-83 式物理意义:

简正波沿水平方向为行波, 振幅按 $1/\sqrt{r}$ 衰减 (柱面波) 沿垂直方向为驻波, 振幅由 Φ_n 给出。总声场由所有简正波叠加而成。

3-8 波动方程的 WKB 近似解

由 3-74 式有波动方程

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + [k^2(z) - \lambda^2] \Phi = 0 \quad 3-84$$

其解形式为:

$$\Phi(z) = A(z) e^{j\Phi(z)}$$

代入 83 式得:

$$\ddot{A} + 2j\dot{\Phi}\dot{A} + j\ddot{\Phi}A + [k^2(z) - \lambda^2 + (\dot{\Phi})^2] A = 0$$

则有:

$$\begin{cases} \ddot{A} + [k^2(z) - \lambda^2 + (\dot{\Phi})^2]A = 0 \\ 2\dot{\Phi}\dot{A} + \ddot{\Phi}A = 0 \end{cases} \quad 3-85$$

因为: $\frac{d}{dz}(\ln A) = \frac{\dot{A}}{A}$

所以由 85 式有 $A = C(\dot{\Phi})^{-\frac{1}{2}}$

其中 C 为任意常数。对缓变介质有:

$$\left| \frac{\dot{A}}{A} \frac{1}{k^2(z) - \lambda^2} \right| \ll 1$$

由 3-85 有

$$k^2(z) - \lambda^2 + (\dot{\Phi})^2 = 0 \quad 3-86$$

$$\text{所以 } \Phi = \pm \int_{z_0}^z \sqrt{k^2(z) - \lambda^2} dz \quad 3-87$$

由此得波动方程的近似解为 (缓变介质):

$$\Phi(z) = \frac{d_1}{(k^2(z) - \lambda^2)^{\frac{1}{4}}} e^{j \int_{z_0}^z \sqrt{k^2(z) - \lambda^2} dz} + \frac{d_2}{(k^2(z) - \lambda^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-j \int_{z_0}^z \sqrt{k^2(z) - \lambda^2} dz} \quad 3-88$$

这就是 WKB 近似 (两项分别表示沿 z 轴正负方向传播的波)

第四章 散射目标反射

水下探测的主要目标是水面舰艇、潜艇、鱼雷、水雷等。这些目标相对表面平滑、坚硬, 尺寸大于入射声波波长。其反射特性在战术上具有重要意义。如潜艇舷侧反射强度远大于首尾方向反射强度。所以应避免敌人从侧面进攻。了解目标的反射特性可指导我们正确使用各种水声设备。

4-1 目标强度与反向散射截面

目标强度和反向散射截面是描写目标反射特性的两个重要的物理量。

(1) 目标强度

目标强度是将距离目标的“声学中心”一米处由目标反射回来的声强与在同方向上由远处入射到目标上的声强之比取 10 为底的对数再乘以 10.即:

$$T_s = 10lg \frac{I_r}{I_{io}} \quad 4-1$$

I_r 为距离目标声学中心 1 米处的反射声强 I_{io} 为入射声强

所谓“声学中心”是指在目标体上选择一参考点，看起来反射波好像从这一点发出一样。

一刚性球为例：假定球体是一个各向同性的反射体，它被一声强为 I_{io} 的平面波照射，则入射声功率为：

$$P_i = \pi a^2 I_{io}$$

若球体将声能均匀的反射到各个方向，则有反射声强为：

$$I_r = \frac{P_i}{4\pi r^2} = \frac{a^2}{4r^2} I_{io}$$

所以其目标强度为：

$$T_s = 10lg \frac{I_r}{I_{io}} \Big|_{r=1} = 10lg \frac{a^2}{4} \quad 4-2$$

当目标球半径为 2 米时，其目标强度刚好为零分贝。实际工作中常取半径为 2 米的理想球体作为参考目标。

（2）反向散射截面

当散射体（障碍物）的尺寸较入射声波波长大很多时，散射声能主要集中在散射体的入射方向上，这种散射称为反向散射。

反向散射截面：目标散射的声功率 W_s 与作用到散射体上的入射声强 I_{io} 之比叫做“反向散射截面”。

即：

$$\sigma_s = W_s / I_{io} \quad 4-3$$

反向散射截面是描写散射体散射能力的物理量。其物理意义：散射体散射的声功率刚好等于入射波在面积 σ_s 上投射的声功率。

反向散射截面与目标强度的关系：

在距离足够远的 r 处，散射体可看做点源（二次辐射），所以散射声强为：

$$I_r = \frac{W_s}{4\pi r^2} = \frac{\sigma_s I_{i0}}{4\pi r^2} \quad 4-4$$

而目标强度为：

$$T_s = 10 \lg \frac{I_r}{I_{i0}} \big|_{r=1m} = 10 \lg \frac{\sigma_s}{4\pi} \quad 4-5$$

反之有：

$$\sigma_s = 4\pi * 10^{\frac{T_s}{10}} \quad 4-6$$

二者知道其一可求另一个量。

例：半径为 a 的刚性球有：

$$T_s = 10 \lg \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore \sigma_s = \pi a^2$$

即半径为 a 的刚性球的反向散射截面为 πa^2 。

4-2 海中声散射的基本概念

海中的气泡悬浮颗粒、生物、不均匀性等形成了介质物理性质上（特性阻抗 ρc ）的不连续性。因而阻挡照射到它上面的一部分声能沿原方向传播而把这部分声能再辐射出去，这种声的再辐射被称为散射。

一、散射截面：

$$\sigma_s = W_s / I_{i0}$$

它描述了单个散射体的散射能力，当散射体的尺寸远大于入射波波长时称为反向散射截面。

二、散射系数

单位体积内介质散射功率 P_s 与入射波声强 I_{io} 之比称为散射系数。它描述了介质散射区域的散射能力。

$$\alpha_v = \frac{P_s}{I_{io}} \text{ 或 } P_s = \alpha_v * I_{io} \quad 4-7$$

三、散射强度

单位体积或面积的散射体在单位距离处的散射声强与入射平面波声强 I_{io} 的比值取分别即为散射强度：

$$S = 10 \lg \frac{I_s}{I_{io}}$$

当散射声均匀分布在一球面半球面上时有：

$$S_v = 10 \lg \frac{P_s}{4\pi r^2 I_{io}} \Big|_{r=1m} = 10 \lg \frac{P_s}{4\pi I_{io}} \quad 4-8$$

$$S_o = 10 \lg \frac{P_s}{2\pi r^2 I_{io}} \Big|_{r=1m} = 10 \lg \frac{P_s}{2\pi I_{io}} \quad 4-9$$

4-3 散射的基本理论

一、刚性球体的散射声场

设有一平面波 $P_0 e^{i(kx - \omega t)}$ 入射到半径为 a 的表面光滑的刚性不动球，取球心为坐标原点的球坐标系，则入射平面波可表示为（省略时间因子 $e^{-i\omega t}$ ）：

$$P = P_0 e^{i(kr \cos \theta)} \quad 4-10$$

散射声场满足波动方程：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_s}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 P_s}{\partial \phi^2} + k^2 P_s = 0 \quad 4-11$$

声场对 x 轴对称，所以散射场与 ϕ 无关，上式简化为：

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P_s}{\partial r} \right) + \frac{1}{x^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_s}{\partial \theta} \right) + k^2 P_s = 0 \quad 4-12$$

用分离变量法求解设：

$$P_s = R(r)\Theta(\theta) \quad 4-13$$

代入方程可得：

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = -m \quad 4-14$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + k^2 r^2 - m = 0 \quad 4-15$$

4-14 式为勒让德方程，所以其解为：

$$\Theta_m(\theta) = a'_m P_m(\cos \theta) \quad m=0,1,2,\dots \quad 4-16$$

4-15 式为球贝塞尔方程，所以其解为：

$$R_m(r) = b'_m h_m^{(1)}(kr) + c'_m h_m^{(2)}(kr) \quad m=0,1,2,\dots \quad 4-17$$

则散射场解为（由熄灭条件 c'_m 为零）

$$P_s = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(\cos \theta) h_m^{(1)}(kr) \quad 4-18$$

刚性球边界条件

$$u_r|_{r=a} = \frac{i}{\rho_0 W} \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0 \quad 4-19$$

式中 u_r 和 P 为总声场的质点径向速度和声压。

$$\text{所以, } \begin{cases} P = P_i + P_s \\ u_r = u_{ir} + u_{sr} \end{cases} \quad 4-20$$

为了应用边界条件来确定待定系数 a_m ，要将入射波表示为无穷多球面波的和：

$$e^{i(kr \cos \theta)} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^m J_m(kr) P_m(\cos \theta) \quad 4-21$$

代入 4-20 和 4-19 可得：

$$a_m = \left[\frac{j^m (2m+1) \rho_0 \frac{\partial}{\partial r} J_m(kr)}{\frac{\partial}{\partial r} h_m^{(1)}(kr)} \right] \Big|_{r=a} \quad 4-22$$

所以，散射场的最终表达式：

$$P_s = \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{j^m(2m+1)P_0\frac{d}{dr}J_m(kr)}{\frac{d}{dr}h_m^{(1)}(kr)}\Big|_{r=a} * P_m(\cos\theta)h_m^{(1)}(kr)e^{-i\omega t} \quad 4-23$$

对于远场, $kr \gg 1$

$$\text{所以, } h_m^{(1)}(kr) \approx \frac{1}{kr} e^{j(kr - \frac{m+1}{2}\pi)} \quad 4-24$$

则:

$$P_s = -\frac{P_0}{kr} e^{j(kr - \omega t)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m(2m+1)\frac{d}{dr}J_m(kr)}{\frac{d}{dr}h_m^{(1)}(kr)}\Big|_{r=a} * P_m(\cos\theta) e^{-i\frac{m+1}{2}\pi} \quad 4-25$$

$kr \gg 1$

记:

$$b_m = j^m(2m+1) \frac{\frac{d}{dr}J_m(kr)}{\frac{d}{dr}h_m^{(1)}(kr)}\Big|_{r=a}$$

$$D(\theta) = \frac{1}{ka} \sum_{m=0}^{\infty} b_m P_m(\cos\theta) e^{-i\frac{m+1}{2}\pi}$$

则散射场声压为:

$$P(r, \theta) = -P_0 a \frac{1}{r} D(\theta) e^{-j(kr - \omega t)} \quad 4-26$$

散射场具有指向性 $D(\theta)$, 按球面波扩展衰减。

对微小球: $ka \ll 1$, 取前两项可得:

$$P_s = \frac{P_0}{kr} e^{j(kr - \omega t)} \frac{(ka)^3}{3} (1 - \frac{3}{2}\cos\theta) \quad 4-27$$

对应声强为:

$$I_r(r, \theta) = \frac{I_i}{r^2} \cdot \frac{k^4 a^6}{9} (1 - \frac{2}{3}\cos\theta)^2 \quad 4-28$$

二、 基于惠更斯原理的亥姆霍兹-基尔霍夫积分方法

惠更斯原理指出散射波的本质是声波的二次辐射, 设 V 为一散射体, 其表面

积为 S_1 , 在 P 点有一辅助点源 Q , 其辐射场势函数为 $\Psi = \frac{e^{-jkr}}{r}$, Σ 为波函数 Ψ 的波

振面，在 P 点 $\Psi \rightarrow \infty$ ，用一无穷小球面 S_0 包围点源 Q，则在 Σ 内， S_1 ， S_0 外的区域有：

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad 4-29$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0 \quad 4-30$$

由 4-29 式乘 φ 减去 4-30 式乘 Ψ 得：

$$\varphi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \varphi = 0$$

对上式在曲面 Σ 和 S_1 ， S_0 之间区域做体积分并利用格林定理有：

$$\iiint_V [\varphi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \varphi] dV = \iint_{S_0 + S_1 + \Sigma} (\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n}) dS = 0 \quad 4-31$$

由熄灭条件有对 Ψ 的积分为零，则上式变为：

$$\iint_{S_0} (\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n}) dS = - \iint_{S_1} (\Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n}) dS$$

等式左侧积分为 $ds_0 = a^2 d\Omega$

Ω 为 ds_0 所张立体角，将 $\Psi = \frac{e^{-jka}}{r}$ 代入后得左侧积分 ($a \rightarrow 0$) 为： $-4\pi\varphi(P)$

因此得：

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{e^{-jkr}}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_s - (\varphi)_s \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right] dS \quad 4-32$$

这就是简谐点源的亥姆霍兹-基尔霍夫积分定理，它给出了惠更斯原理的数学描述，物理意义明确：声源作用于散射体界面，界面上每一小面元都成为惠更斯子波源，这些子波按球面波扩展并达到 P 点，P 点的散射场是所有子波的积分。

三、修正的惠更斯积分

4-32 式中 $(\varphi)_s$ 及 $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_s$ 均为未知量，应用边界条件可将上述未知量变为已知量。

设物体表面 S 为刚性，则有：

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_s}{\partial n}\right)_S = 0 \quad 4-33$$

若入射波为平面波，有：

$$\varphi_i = \frac{A}{r_1} e^{-jk r_1} \quad 4-34$$

于是：

$$\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial n}\right)_S = -\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right)_S = \frac{jkA}{r_1} \left(1 + \frac{1}{jk r_1}\right) \cos(\vec{r_1}, \vec{n}) e^{-jk r_1} \quad 4-35$$

对远场 $kr_1 \gg 1$ 时有：

$$\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial n}\right)_S = \frac{jkA}{r_1} \cos(\vec{r_1}, \vec{n}) e^{-jk r_1} \quad 4-36$$

$$\frac{\partial \vec{r_1}}{\partial n} = \cos(\vec{r_1}, \vec{n})$$

同理有

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jk r_2}}{r_2}\right) \approx \frac{jkA}{r_2} \cos(\vec{r_2}, \vec{n}) e^{-jk r_2} \quad 4-37$$

对于完全刚性的物体，可认为其表面的反射波等于入射波，所以：

$$\varphi_s = \varphi_i = \frac{A}{r_1} e^{-jk r_1} \quad 4-38$$

将 4-35，4-36，4-37，4-38 代入 4-32 得：

$$\varphi_s = \iint_S \frac{jA}{2\lambda r_1 r_1} e^{-jk(r_1+r_2)} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) dS \quad 4-39$$

θ_1 与 θ_2 分别为矢径 r_1 ， r_2 与 dS 表面法线 \vec{n} 的来角，当收发合置时有：

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \cos\theta \quad r_1 = r_2 = r$$

因此（改以声压表示）

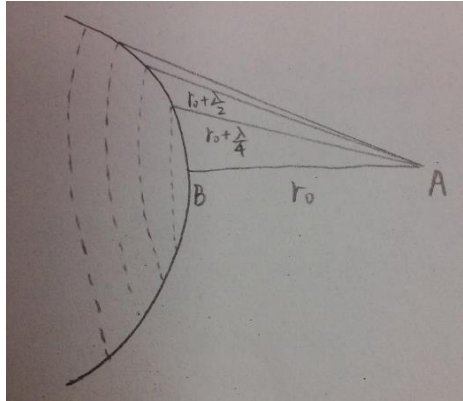
$$P_s = \iint_S \frac{jA}{\lambda r^2} \cos\theta e^{-jkr} dS \quad 4-40$$

上式是建立在修正的惠更斯-菲尼尔原理上的，称为修正惠更斯积分，它描述了刚性散射体散射场的积分解。

四、菲涅尔半波带法

假设目标表面是刚性平滑，目标半径比入射波波长大得多，并假设目标有简单几何形状，一般是呈凸形的，没有明显的突出和深凹部分。曲面方程已知则直接求 4-40 式积分可得散射场，但通常积分困难。

对收发合置采用菲涅尔半波带法：在目标体上找到距 A 点最近的点 B 距离为 r_0 ，以 A 点为圆心， r_0 为半径作球面与目标体在 B 点相切，接着跳跃式增加球面半径，每次增加 $1/4$ 波长，即 $r_0 + \frac{\lambda}{4}, r_0 + \frac{\lambda}{2}, r_0 + \frac{3}{4}\lambda, \dots$ 这些不同半径的球面把目标表面分割成许多环带 S_1, S_2, \dots (菲涅尔波带)，这样相邻波带到 A 点的声程差为 $\frac{\lambda}{2}$ ，即相位差为 π 。若目标表面共有 N 个波带，则总散射声压为：



$$P_s = P_1 - P_2 + \dots + (-1)^{N-1} P_N \quad 4-41$$

面任一波带的散射声压为：

$$P_n = \iint_{S_n} \frac{jA}{\lambda r^2} \cos(\vec{r}, \vec{n}) e^{-2jkr} ds \quad 4-42$$

考虑目标体比波长大得多，其表面不太弯曲，表面可划分出许多菲涅尔波带，相邻波带的 $\cos\theta$ 变化不大，波带面积也很接近，这样可认为第 n 个波带产生的反射声压的绝对值等于相邻两个波带反射声压绝对值的平均值，即：

$$P_n = \frac{1}{2} (P_{n-1} + P_{n+1}) \quad 4-43$$

将 4-43 代入 4-41 式有：

$$\begin{aligned}
P_s &= P_1 - \frac{1}{2}(P_1 + P_3) + P_3 - \frac{1}{2}(P_3 + P_5) + P_5 - \dots \\
&= \frac{1}{2}[P_1 + (-1)^{N-1}P_N]
\end{aligned}
\tag{4-44}$$

总反射声压为：

$$P_s = \iint_{S_1+S_2+\dots+S_n} \frac{jA}{\lambda r^2} \cos(\vec{r}, \vec{n}) e^{-2jkr} ds \tag{4-45}$$

由 4-44 式可知反射声压为第一个和最后一个菲涅尔波带产生的反射声压之和的一半，而最后一个波带有 $\vec{r} \cdot \vec{n} \rightarrow \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = 0$ ，第一个波带有 $\vec{r} \cdot \vec{n} = 0$ ，所以 $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = 0$ 。因此，4-45 式变为：

$$P_s = \frac{1}{2} \iint_{S_1+S_2+\dots+S_n} \frac{jA}{\lambda r^2} e^{j(\omega t - 2kr)} ds \tag{4-46}$$

被积函数中的 r 近似为 r_0 ，因为 $r - r_0 \leq \frac{\lambda}{4}$ ，所以

$$P_s = \frac{jA}{2\lambda r_0^2} \iint_{S_1} e^{j(\omega t - 2kr)} ds \tag{4-47}$$

入射到第一菲涅尔波带的入射波为： $P_i = \frac{A}{r} e^{-jkr}$ ，如果设 ds 上的散射波位相取 B 点为参考则有：

$$\left| \frac{P_r}{P_i} \right| = \frac{1}{2\lambda r_0} \left| \iint_{S_1} e^{-2jk\Delta r} ds \right| \quad \Delta r = r - r_0 \tag{4-48}$$

则目标强度为：

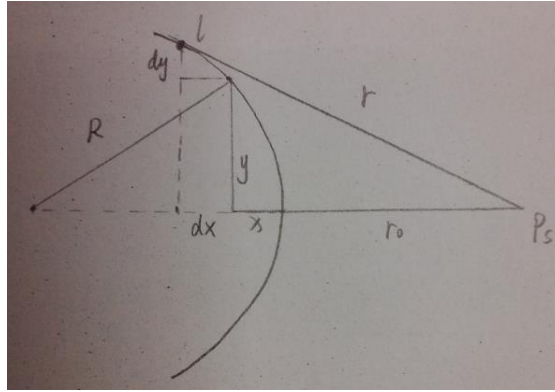
$$TS = 10 \lg \frac{I_r}{I_i} \Big|_{r=1} = 20 \lg \left| \frac{P_r}{P_i} \right| \Big|_{r=1} = 20 \lg \frac{1}{2\lambda} \left| \iint_{S_1} e^{-2jk\Delta r} ds \right| \tag{4-49}$$

五、简单几何体的目标强度

取第一菲涅尔波带上的面元 ds ，则有：

$$ds = l dx d\phi$$

4-50



因为 $r^2 = (r_0 + x)^2 + y^2$ ，两边微分得 $dx = \frac{r dr}{r_0 + x + y \frac{dy}{dx}}$ 。

由几何关系有 $r_0 + x + y \frac{dy}{dx} = R_\phi + r_0$

R_ϕ 是第一菲涅尔波带与 r_0 为半径的波阵面相切点的曲率半径，所以

$$ds = \frac{r dr d\phi}{1 + \frac{r_0}{R_\phi}} \quad 4-51$$

因为第一菲涅尔波带很小，所以 $r \approx r_0$ ， $l = R_\phi$ ，则目标强度为：

$$TS = 20 \lg \left[\frac{r_0}{2\lambda} \left| \int_0^{\frac{\lambda}{4}} e^{-2jk\Delta r} d(\Delta r) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 + \frac{r_0}{R_\phi}} \right| \right] \quad 4-52$$

R_ϕ 与 ϕ 有关，若曲面的主曲率半径为 R_1, R_2 ，则微分几何学关系有：

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \phi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \phi \quad 4-53$$

主曲率半径：设 O 点为目标表面上某点，OC 为表面 O 点处的法线，经过 OC 的某一平面与目标表面相交于曲线 MN，曲线 MN 在 O 点处的曲率半径为 R，当以 OC 为轴转动平面时，平面与目标表面相交曲线在 O 点的曲率半径将连续变化，其中有一个极大值 R_1 和一个极小值 R_2 。根据微分几何学可知：与曲率半径 R_1, R_2 对应的两个平面互相垂直（正交），则称 R_1, R_2 为主曲率半径，这两

个平面为主曲率半径平面。

将 4-53 式代入 4-52 式有：

$$TS = 20 \lg \left[\frac{r_0}{2\lambda} \left| \int_0^{\frac{\lambda}{4}} e^{-2jk\Delta r} d(\Delta r) \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 + r_0 \left(\frac{1}{R_1} \cos^2 \phi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \phi \right)} \right| \right] \quad 4-54$$

$$\text{对 } \Delta r \text{ 积分得: } \frac{r_0}{2\lambda} \left| \int_0^{\frac{\lambda}{4}} e^{-2jk\Delta r} d(\Delta r) \right| = \frac{r_0}{4\pi}。$$

对 ϕ 积分得：

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 + r_0 \left(\frac{1}{R_1} \cos^2 \phi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \phi \right)} \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{A} d(\lg \phi)}{1 + B \lg 2\phi} \right| = \frac{2\pi}{\sqrt{(1 + \frac{r_0}{R_1})(1 + \frac{r_0}{R_2})}}$$

$$\text{式中: } A = 1 + \frac{r_0}{R_1}, \quad B = (1 + \frac{r_0}{R_2}) / (1 + \frac{r_0}{R_1})。$$

将上述结果代入 4-54 可得：

$$\begin{aligned} TS &= 20 \lg \frac{r_0}{2} \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{r_0}{R_1})(1 + \frac{r_0}{R_2})}} \\ &= 10 \lg \frac{r_0^2}{4} \frac{1}{(1 + \frac{r_0}{R_1})(1 + \frac{r_0}{R_2})} \\ &= 10 \lg \frac{1}{4} \frac{R_1 R_2}{(1 + \frac{R_1}{r_0})(1 + \frac{R_2}{r_0})} \end{aligned} \quad 4-55$$

这就是简单目标体的目标强度公式。

六、简单几何体的目标强度

1、刚性球

对球体目标， $R_1 = R_2 = a$ ， a 为球半径。

由 4-55 式可得目标强度为：

$$TS_{\text{球}} = 10 \lg \frac{1}{4} \frac{a^2}{(1 + \frac{a}{r_0})^2} \quad 4-56$$

当声源离目标很远时有 $r_0 \gg a$,

$$TS_{\text{球}} = 10 \lg \frac{a^2}{4} \quad 4-57$$

2、无限长圆柱

设圆柱半径为 R , 圆柱长无限 ($l \gg \lambda$ 且 $l \gg r$), 当声波垂直柱轴入射时有:

$$R_1 \rightarrow \infty, R_2 \rightarrow R$$

因此无限长圆柱的目标强度为:

$$TS_{\text{长柱}} = 10 \lg \frac{r_0^2}{4} \frac{1}{1 + \frac{r_0}{R}} = 10 \lg \frac{1}{4(\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_0 R})} \quad 4-58$$

当 $r_0 \gg R$ 时

$$TS_{\text{长柱}} = 10 \lg \frac{r_0 R}{4} \quad 4-59$$

3、无限大平面

若平面的长和宽都远大于声波波长及声源距离时可视为无限大平面, 当声波垂直平面入射时:

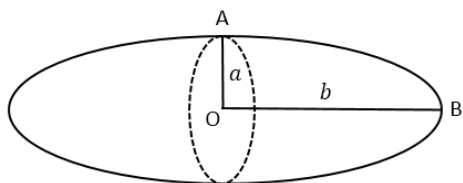
$$R_1 = R_2 \rightarrow \infty$$

所以目标强度为:

$$T_s = 10 \lg \frac{r_0^2}{4} \quad 4-60$$

4、旋转椭球体:

设旋转椭球的长轴为 b , 短轴为 a , 声波以 A 点为中心垂直长轴和以 B 点为中心平行于长轴入射时, 目标强度不同。



(1) 当声波平行于长轴入射时（首尾入射）

$$R_1 = R_2 \rightarrow \infty$$

$$\therefore T_{s\text{首尾} \perp a} = 10lg \frac{1}{4} \frac{(\frac{a^2}{b})^2}{(1 + \frac{a^2}{br_0})^2}$$

当声源离目标很远时，有： $r_0 \gg a, b$

所以：

$$T_{s\text{首尾} \perp a} = 10lg \frac{1}{4} (\frac{a^2}{b})^2 = 20lg \frac{a^2}{2b} \quad 4-61$$

(2) 当声波垂直于长轴入射时有（正横入射）：

$$R_1 = \frac{b^2}{a} \quad R_2 = \frac{a^2}{b}$$

此时目标强度为：

$$T_{s\text{正横} \perp b} = 10lg \frac{1}{4} \frac{b^2}{(1 + \frac{a}{r_0})(1 + \frac{b^2}{ar_0})}$$

当 $r_0 \gg a, b$ 时，

$$T_{s\text{正横} \perp b} = 10lg \frac{b^2}{4} = 20lg \frac{b}{2} \quad 4-62$$

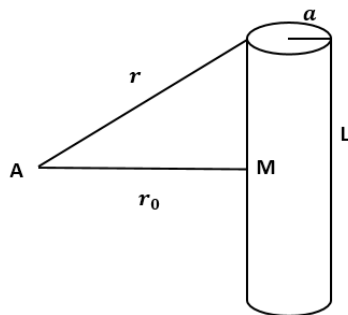
例如对 $a=4$ 米， $b=40$ 米的潜艇有：

$$T_{s\text{正横}} = 20lg \frac{b}{2} = 26dB$$

$$T_{s_{\text{菲}}} = 20 \lg \frac{a^2}{2b} = -14 \text{dB}$$

5、有点长圆柱：

设长为 L ，半径为 a 的圆柱， M 为其柱长中点，声波垂直圆柱入射，声源为 A 。



当 $r - r_0 \gg \frac{\lambda}{4}$ 时，可用菲涅尔波带法求解，由图可知：

$$r^2 = r_0^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\therefore r - r_0 = \frac{1}{r + r_0} \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

当 A 点与 M 点转远时， $r \approx r_0$

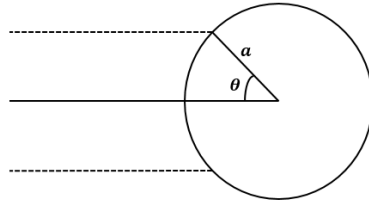
$$\therefore r - r_0 \approx \frac{1}{2r_0} \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

由此可知圆柱可视为无限长的条件为：

$$\frac{1}{2r_0} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \gg \frac{\lambda}{4} \quad \text{或} \quad r_0 \ll \frac{L^2}{2\lambda} \quad 4-63$$

当不满足上式时，为有限长圆柱，可由修正惠更斯积分求解，由 40 式及菲涅尔半波带法可得目标强度为（只考虑第一波带）

$$T_s = 20 \lg \frac{1}{\lambda} \left| \iint_S e^{-2jk\Delta r} \cos\theta dS \right| \quad 4-64$$



由图可知：

$$\Delta r = a(1 - \cos\theta)$$

由于其它菲涅尔波带相互抵消，所以只有一个菲涅尔波带起作用，于是：

$$T_s = 20 \lg \frac{1}{\lambda} \left| \iint_{s_1} e^{-2jk\Delta r} \cos\theta dS \right|$$

$\because \theta$ 为小量，

$$\therefore \cos\theta = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \approx 1$$

$$\Delta r = a(1 - \cos\theta) \approx a \frac{\theta^2}{2}$$

$$dS = aL d\theta$$

在只考虑第一菲涅尔波带时，其余波带互消， \therefore 积分上下限可变为无穷：

$$T_s = 20 \lg \frac{aL}{\lambda} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jka\theta^2} d\theta \right|$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

$$\therefore T_s = 20 \lg \frac{aL}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{ka}}$$

$$= 20 \lg \sqrt{\frac{aL^2}{2\lambda}}$$

$$= 20 \lg \frac{aL^2}{2\lambda}$$

第五章 海洋中的混响

定义：声波在海中传播时，由于海水介质的不均匀性以及海底海面的不平整性而引起声波的散射。这些散射波将先后传到接收点。先是声源附近的，然后再由远处的散射波陆续传来强度逐渐减弱的散射波。这样，如果在辐射器发送信号完结后，接收机将接到强度逐渐下降的连续回声。这种来自所有散射体散射总和而形成的连续回声成为“回声混响”，简称“混响”。它是主动声纳工作性能的主要限制。

5-1、混响的形式与分类：

人们按照海中产生混响的散射体不同，将其分为三种不同类型的混响—体积混响、海面混响、海底混响。

1、体积混响：无限均匀散射介质中的混响为体积混响。

成因：由于海水的均匀性，如密度、温度、盐度的不均匀分布以及气泡、悬浮硬粒子、浮游生物等散射体的散射所形成的。

2、海面混响：带有平面散射层（或面）的半无限均匀散射介质中的混响为海面（表面边界层）混响。

成因：海面的不均匀、不平整性（海浪），海面附近气泡层等对声散射而形成。

3、海底混响：带有平面散射边界的半无限均匀散射介质中的混响。

成因：海底的不平整性和不均匀性引起的声散射而形成的。

4、三种混响的存在于海洋环境关系：

三种混响在海洋中同时存在，不能截然分开，但在一定条件下，有一种或两种是主要的。例：

- （1）深海中，声源位于远离边界的深处发射时，主要为体积混响干扰。
- （2）声源位于海表面附近的深海中，最初为海面混响干扰，而后主要是体积混响。

(3) 浅海：海底、海面混响

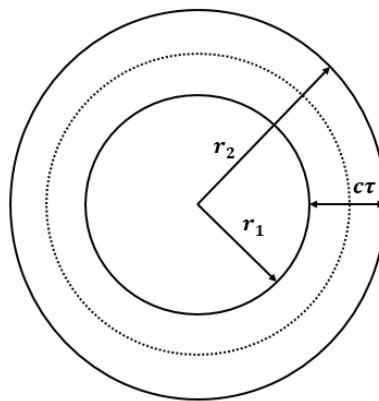
(4) 等温或正梯度层：深处声源：先是体积混响，后为海面混响。

(5) 负梯度层：先体积混响，后海底混响。

5-2、体积混响

当声源位于深海深处时，其受海面海底影响很小，这时产生混响的主要原因是由于空间中均匀分布的散射体对声散射引起，是体积混响。设收发合置。

在 D 点发射一宽度为 τ 的脉冲波。该脉冲以厚度为 $c\tau$ 的球壳层形式向外传播。我们考察声源发完脉冲后 $\frac{t}{2}$ 时刻的瞬间情况。这时声扰动为内径为 $r_1 = \frac{ct}{2}$ ，外径为 $r_2 = \frac{ct}{2} + c\tau$ 的球壳层空间。这些瞬间球层内所有质点都同时被声脉冲作用而扰动。当球层外表面的质点刚形成振动时，球层内表面质点立即停止振动。该瞬间位于 $c\tau$ 厚的球壳层内所有散射体（不均匀体）都是散射声源。该扰动层不断向外传播，也将以同样速度陆续不断地向接收点传播。所以传播着的扰动时产生混响的散射源。



在发射结束后过 $\frac{t}{2}$ 的瞬间，在球壳层 $r_1 = \frac{ct}{2}$ 到 $r_2 = r_1 + c\tau$ 内的质点同时振动，但这些振动的散射体所辐射的散射波不能同时到达接收点。内表层 $r = \frac{ct}{2}$ 的散射体即将停止扰动时，在 $r_0 = r_1 + \frac{c\tau}{2}$ 的球面层上的散射体已振动了 $\frac{\tau}{2}$ 时间，即

在 $\frac{t}{2} - \frac{\tau}{2}$ 时刻该层已开始振动。 r_0 和 r_1 两球面之间的散射体分别在 t_i 时刻（其中

$$\frac{t}{2} > t_i > \frac{t}{2} - \frac{\tau}{2}$$

振动所辐射的声波在 $\frac{t}{2}$ 时刻正好传播到内层 r_1 处，并与 $\frac{t}{2}$ 时刻内表层的散射波迭加在一起向接收点传播。因此，在脉冲发射完毕后，过了时间 t 我们将在接收点收到的是许多散射波的迭加，这些迭加的散射波来自内径为 $r_1 = \frac{ct}{2}$ ，外径为 $r_0 = r_1 + c\tau/2$ 的球壳层内的散射体。此球壳层的厚度为实际扰动厚度 $c\tau$ 的一半。

设入射波为球面波，则入射声强为：

$$I_{i0} = \frac{W}{4\pi r^2} 10^{-0.1\beta r} \quad 5-1$$

则单位体积的散射功率为（散射系数为 α_v ）：

$$P_s = I_{i0} \alpha_v = \frac{W \alpha_v}{4\pi r^2} 10^{-0.1\beta r} \quad 5-2$$

若发射器具有指向性，其方向性函数为 $R_1(\theta, \varphi)$ ，辐射器最大值方向上的声强为 I_{0max} ，则有：

$$I_{i0} = I_{0max} R_1^2(\theta, \varphi) \quad 5-3$$

此时散射功率为：

$$P_s = I_{i0} \alpha_v = I_{0max} R_1^2(\theta, \varphi) \alpha_v \quad 5-4$$

同样设接受器的方向性函数为 $R_2(\theta, \varphi)$ ，轴向灵敏度为 n_w （瓦/单位声强），则接收到的散射声强为（ dv 散射体）

$$dI_v = n_w P_s R_2^2(\theta, \varphi) dv = \frac{n_w \alpha_v I_{0max}}{4\pi r^2} R_1^2(\theta, \varphi) R_2^2(\theta, \varphi) dv \quad 5-5$$

若 γ_1 为发射器的轴向集中系数，则有：

$$\gamma_1 = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R_1^2(\theta, \varphi) d\theta} \quad 5-6$$

$$I_{0max} = \frac{W \gamma_1}{4\pi r^2} 10^{-0.1\beta r} \quad 5-7$$

所以（5-5）式变为：

$$dI_v = \frac{n_w \alpha_v W \gamma_1}{(4\pi r^2)^2} R_1^2(\theta, \varphi) R_2^2(\theta, \varphi) 10^{-0.2\beta r} dv \quad 5-8$$

$$dv = \frac{c\tau}{2} r^2 d\Omega = r^2 \sin\theta \frac{c\tau}{2} d\theta d\varphi dr \quad 5-9$$

所以，混响声强为：

$$I_v = \frac{n_w \alpha_v W \gamma_1}{(4\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi R_1^2(\theta, \varphi) R_2^2(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta \int_{r_1}^{r_1+c\tau/2} \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^2} dr \quad 5-10$$

若指向性图为 $b_1(\theta, \varphi) = R_1^2(\theta, \varphi)$, $b_2(\theta, \varphi) = R_2^2(\theta, \varphi)$ 则5-10式

可表示为

$$I_v = \frac{n_w \alpha_v W \gamma_1}{(4\pi)^2} \int_0^{4\pi} b_1(\theta, \varphi) b_2(\theta, \varphi) d\Omega \int_{r_1}^{r_1+c\tau/2} \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^2} dr \quad 5-11$$

式中对r的积分为：

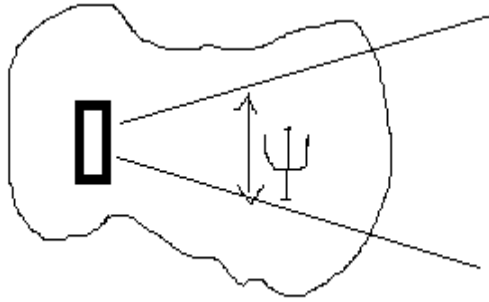
$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_1+\frac{c\tau}{2}} \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^2} dr &= \int_0^{\frac{c\tau}{2}} \frac{10^{-0.2\beta(r+x)}}{r_1^2 \left(1 + \frac{x}{r_1}\right)^2} dx \\ &= \frac{10^{-0.2\beta r}}{r_1^2} \int_0^{c\tau/2} \frac{10^{-0.2\beta x}}{\left(1 + \frac{x}{r_1}\right)^2} dx \approx \frac{c\tau}{2} \end{aligned} \quad 5-12$$

于是：

$$I_v = \frac{n_w \alpha_v W c\tau \gamma_1}{2(4\pi)^2 r_1^2} 10^{-0.2\beta r} \int_0^{4\pi} b_1(\theta, \varphi) b_2(\theta, \varphi) d\Omega \quad 5-13$$

设收发换能器的理想指向性图为 ψ ,

$$\psi = \int_0^{4\pi} b_1(\theta, \varphi) b_2(\theta, \varphi) d\Omega \quad 5-14$$



$$\begin{cases} b_1 b_2 = 1 & 0 < \Omega < \psi \\ b_1 b_2 = 0 & \psi < \Omega < 4\pi \end{cases}$$

因此，散射声强为：

$$I_v(r) = \frac{n_w W \gamma_1}{4\pi} \frac{\alpha_v}{4\pi} \frac{c\tau r^2}{2} \psi \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^4} \quad 5-15$$

将 $r = \frac{ct}{2}$ 代入上式中得：

$$I_v(t) = \frac{n_w \alpha_v W \tau \psi \gamma_1}{8\pi c} 10^{-0.2\beta ct} \quad 5-16$$

以上两式说明体积混响强度与辐射功率W，脉宽τ，及散射系数成正比，传播损失遵从球面扩展加吸收衰减率。按等效平面波混响级定义有：

$$\begin{aligned} R_{LV} &= 10\lg \frac{I_i}{I_{ref}} = 10\lg \frac{I_v(r)}{n_w I_{ref}} \\ &= 10\lg \frac{W \gamma_1}{4\pi I_{ref}} + 10\lg \frac{\alpha_v}{4\pi} + 10\lg \left(\frac{c\tau r^2}{2} \psi \right) - 20\lg(r 10^{0.1\beta r}) \\ &= SL + Sv + 10\lg V - 2TL \end{aligned} \quad 5-17$$

其中SL为声源级，Sv为散射强度，V为散射体积，TL为传播损失。

$$V = \int dv = \int_0^\psi r^2 \frac{c\tau}{2} d\Omega = \frac{c\tau}{2} (r^2 \psi) \quad 5-18$$

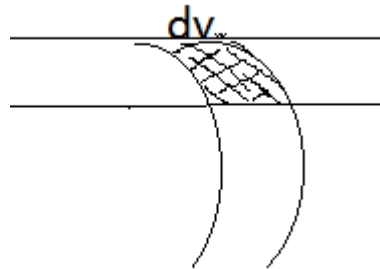
§5-3 海面混响

海面混响是由近海面表层的不均匀性产生散射而引起的混响。设海面散射层厚度为H，在小掠射角的情况下，空间散射体为一环腔体，内外表面的垂直距离为 $\frac{ct}{2}$ ，它实际上是球壳层被相距为H的两个平面所切割下的一部分，呈“井台”状。

当 $r \gg H$ 时，方向性函数中的 $\theta \approx 90^\circ$ 类似体积混响可推得：

$$dI_s = \frac{n_w \alpha_v I_{0max}}{4\pi r^2} R_1^2 R_2^2 10^{-0.1\beta r} dv \quad 5-19$$

$$dv = r dr d\phi H \quad 5-20$$



$$dI_s = \frac{H n_w \alpha_v W \gamma_1}{(4\pi r^2)^2} R_1^2 R_2^2 r 10^{-0.2\beta r} d\Omega dr \quad 5-21$$

令 $\alpha_s = \alpha_v H$ 称为海面散射系数，则有：

$$dI_s = \frac{n_w \alpha_s W \gamma_1}{(4\pi)^2 r^3} R_1^2 R_2^2 10^{-0.2\beta r} d\Omega dr \quad 5-22$$

类似体积混响的积分计算方法可得：

$$I_s(r) = \frac{n_w W \gamma_1}{4\pi} \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot \frac{c\tau r}{2} \psi \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^4} \quad 5-23$$

将 $r = \frac{ct}{2}$ 代入上式中得：

$$I_s(t) = \frac{n_w \alpha_s W \gamma_1}{4\pi c^2} t^{-3} \tau \psi 10^{-0.2\beta ct} \quad 5-24$$

可见，海面混响与体积混响类似（与W，I， α_s 成正比），但传播损失则按3

次方率衰减。

同理可得海面混响级为：

$$R_{Ls} = SL + Ss + 10lgA - 2TL \quad 5-25$$

其中： $SL = 10lg \frac{W \gamma_{\perp}}{4\pi I_{ref}}$;

$Ss = 10lg \frac{\alpha_s}{4\pi} = 10lg \frac{\alpha_v}{4\pi} + 10lg H = Sv + 10lg H$ 为海面散射强度，当层内散

射体不均匀时： $Ss = 10lg \int_0^H \frac{\alpha_v(h)}{4\pi} dh$;

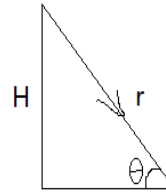
$A = \frac{c\tau}{2} r\psi$ 为海面散射面积；

$TL = 10lgr^2 + \beta r$ 为传播损失（ β 为海水吸收系数）。

§5-4 海底混响

海底混响是平面散射边界的不平整性引起的散射。其散射体为圆环片。

设源到海底的深度为H，按定义海底散射系数为：



$$\alpha_g = \frac{P_g}{I_0} = \frac{P_g}{I_{i0} \sin \theta} = \frac{P_g r}{I_{i0} H}$$

所以，

$$P_g = \alpha_g I_{i0} \frac{H}{r} \quad 5-26$$

类似体积混响推导可得（ $ds = r dr d\varphi$ ）

$$dI_g = \frac{n_W W \gamma_{\perp}}{(4\pi)^2} \alpha_g H R_1^2 R_2^2 10^{-0.2\beta r} \frac{1}{r^4} dr \quad 5-27$$

所以，

$$I_g(r) = \frac{n_w W \gamma_1}{4\pi} \frac{\alpha_g}{4\pi} \cdot H c \tau \psi \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^4} \quad 5-28$$

$$I_g(t) = \frac{n_w \alpha_g W \gamma_1}{\pi c^2} t^{-4} H \tau \psi 10^{-0.2\beta c t} \quad 5-29$$

则海底混响级为：

$$R_{Lg} = SL + Sg + 10lgA - 2TL \quad 5-30$$

其中SL，A，TL同前，

$$Sg = 10lg \frac{\alpha_g}{4\pi} \sin\theta \quad 5-31$$

§5-5 混响强度与参量的关系：

由此可见：

$$\left\{ \begin{array}{l} I_v = \frac{n_w W \gamma_1}{4\pi} \frac{\alpha_v}{4\pi} \frac{c \tau r^2}{2} \psi \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^4} \\ R_{LV} = SL + Sv + 10lgV - 2TL \quad V = \frac{1}{2} c \tau r^2 \psi \\ I_s = \frac{n_w W \gamma_1}{4\pi} \frac{\alpha_s}{4\pi} \cdot \frac{c \tau r}{2} \psi \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^4} \\ R_{Ls} = SL + Ss + 10lgA - 2TL \quad A = \frac{c \tau}{2} r \psi \\ I_g = \frac{n_w W \gamma_1}{4\pi} \frac{\alpha_g}{4\pi} \frac{\sin\theta}{2} \psi \frac{10^{-0.2\beta r}}{r^4} \\ R_{Lg} = SL + Sg + 10lgA - 2TL \quad A = \frac{c \tau}{2} r \psi \end{array} \right.$$

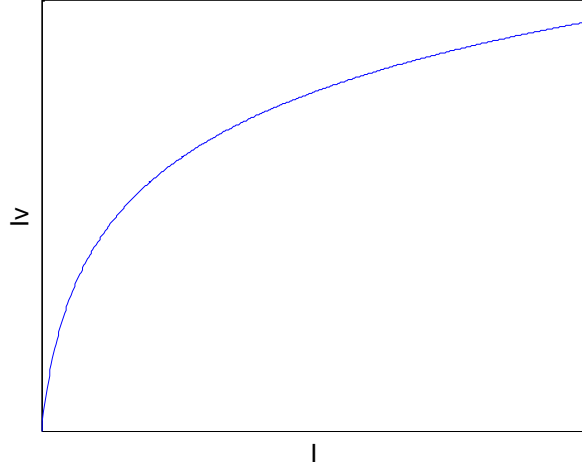
1. 混响强度与辐射功率成正比

这说明混响起因不同于噪声，它是由入射声波激发散射体引起再辐射迭加的结果，目标回波强度也与发射功率成正比。因此在混响干扰为主的情况下以提高发射功率来改善信混比（混响时背景干扰噪声的一种）那将是徒劳的。

2. 混响强度同发射声脉冲宽度成正比

由三种混响的计算式可看出，脉宽长短是反映对混响总和做贡献的散射体体积或面积的大小。

通常脉宽 τ 越大，混响强度越大，但当 τ 大到一定程度后，它不再与脉冲宽度有关。在推导混响强度公式 5-15 式时，对 r 的积分时假设 $\frac{\beta c \tau}{2} \ll 1$ 时得积分结果 $\frac{c \tau}{2}$ ，若不满足上述条件，则可积分得混响强度同脉冲宽度的关系函数为：



$$y = \frac{1 - 10^{-0.2 \beta \frac{c \tau}{2}}}{0.2 \beta \ln 10} = \frac{1}{0.2 \beta \ln 10} \quad \left(\frac{\beta c \tau}{2} \gg 1 \text{ 时} \right) \quad 5-32$$

这表示性信号脉宽 τ 到一定程度，其远处散射强度由于衰减损失，对总混响强度贡献很小，而这时混响强度不随脉宽增大，出现饱和现象。

由上一章目标反射理论可知，当 $\frac{1}{4} c \tau \gg \alpha$ 时，（ α 为目标反向散射截面的最大线度），回声强度与脉宽无关，否则与脉宽成正比。

对脉宽为 τ 的脉冲，其 90% 以上能量集中在 $\frac{1}{\tau}$ 宽度内，因此接收机带宽一般选为 $\frac{1}{\tau}$ ，所以脉宽 τ 越窄，要求接收机带宽越宽，则噪声干扰就越大。

因此，脉宽 τ 的选择要根据各种因素综合考虑。

3、混响强度与声系统指向性关系。

将混响强度公式中含有空间指向性因子突出而其他参数影响用 A 表示有：

$$I_v = A_v(\eta_w, w, c \tau, \beta, \alpha_v, r) \frac{\int_0^{4\pi} b_1(\theta, \phi) b_2(\theta, \phi) d\Omega}{\int_0^{4\pi} b_1(\theta, \phi) d\Omega}$$

$$I_s = A_s(\eta_w, w, c\tau, \beta, \alpha_s, r) \frac{\int_0^{2\pi} b_1(\theta, \phi) b_2(\theta, \phi) d\Omega}{\int_0^{4\pi} b_1(\theta, \phi) d\Omega}$$

$$I_g = A_g(\eta_w, w, c\tau, \beta, \alpha_g, r) \frac{\int_0^{2\pi} b_1(\theta, \phi) b_2(\theta, \phi) d\Omega}{\int_0^{4\pi} b_1(\theta, \phi) d\Omega}$$

(1) 当 $b_2(\theta, \phi) = 1$ 时

体积混响与辐射器指向性无关，这是由于接收为全向，而声源指向性变化若使入射声强增加（或减小），对应散射体体积减小（或增加），总散射功率不变。此时 $b_1(\theta, \phi)$ 也不是任意选取，因其受信混比影响，指向性越尖锐，信混比越大。

这时海面 and 海底混响仍与声源指向性 $b_1(\theta, \phi)$ 有关。

(2) 当 $b_1(\theta, \phi) = 1$ 时

此时体积、海面、海底混响受等效束宽 $\int_0^{4\pi} b_2(\theta, \phi) d\Omega$ 、 $\int_0^{2\pi} b_2(\theta, \phi) d\Omega$ 控制。

$b_2(\theta, \phi)$ 越尖锐，混响越小。

(3) $b_1(\theta, \phi)$ 、 $b_2(\theta, \phi)$ 都不为 1 且有：

$$\int_0^{4\pi} b_2(\theta, \phi) d\Omega < \int_0^{4\pi} b_1(\theta, \phi) d\Omega$$

当 $b_2(\theta, \phi)$ 一定时，随声源指向性 $b_1(\theta, \phi)$ 增加，入射声强增加，而 $b_2(\theta, \phi)$ 对应散射体体积或者面积变化不大，所以总混响强度增加，但信混比变化不大。

以上分析表明，一般提高接收器指向性是抑制混响，提高信混比的有效措施。

4、混响强度随距离变化的规律

三种混响随着距离的增加而减小，一方面随距离增加，散射体体积或面积增大，但另一方面，传播损失增大总所效应使三者分别按 2,3,4 次方规律衰减。

5、散射系数

对于几十 kHz 信号，散射系数典型值为：

$$\begin{aligned}d_v &\rightarrow 10^{-4} \sim 10^{-7} \\d_s &\rightarrow 10^{-3} \sim 10^{-4} \\d_g &\rightarrow 10^{-1} \sim 10^{-3}\end{aligned}$$

对不存在鱼群等的局部海水， $d_v \rightarrow 10^{-5} \sim 10^{-9}$

可见，在同样距离上强度体积混响<海面混响<海底混响，但衰减速上有体积混响<海面混响<海底混响，可见，在远程主要是体积混响干扰。

6、三种混响比较

	体积混响	海面混响	海底混响
产生原因	海水介质不均匀性，气泡，悬浮粒子，生物散射	海面下气泡层散射，海底散射等	海底界面的不平整性
无指向性时体元面元无形状	球壳	井台状	圆环状
衰减规律	$\frac{1}{r^2}$ 或 $\frac{1}{t^2}$	$\frac{1}{r^3}$ 或 $\frac{1}{t^3}$	$\frac{1}{r^4}$ 或 $\frac{1}{t^4}$
强度	小	中等	大

第六章 海洋噪声 （自学）

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{海洋环境噪声} \\ \text{辐射噪声} \\ \text{白噪声} \\ \text{噪声级} \\ \text{噪声谱级} \end{array} \right\}$$

海洋环境噪声中频段 6dB 衰减率

第七章 声纳方程的应用

检测概率，虚警概率及检测阈：

在相同输出信噪比条件下，不同的检测阈对应着不同的检测概率和虚警概率。

$$DT = 5 \lg \left(\frac{dB}{t} \right) \quad 7-1$$

其中 d 为接收特性值，它与检测概率和虚警概率有关，可由接收工作特性曲线求得。 B 为工作带宽， t 为检测时间。

例1 已知驱逐舰上声呐功率 $w=1000$ 瓦，工作频率为 8kHz ，收发指向性指数 $DI=20\text{dB}$ 。脉冲宽度 $\tau=0.1\text{s}$ ，接收带宽 $\Delta f=500\text{Hz}$ ，求其在 15 节航速下，探测位于 100m 厚混合层中下潜深度为 250m 真横方位的潜艇（目标强度为 25dB ）的距离。检测概率为 50% ，回波宽度内虚警概率为 0.01% 。

答：由已知 25kHz 噪声谱级为 27dB 和主动声呐方程可得：

$$TL = \frac{1}{2} (SL + TS - NL + DI - DT)$$

$$SL = 171.5 + 10 \lg W + DI_g = 172 + 30 + 20 = 222(\text{dB})$$

$$TS = 25\text{dB}$$

已知 25kHz 噪声谱级为 27dB ，则 8kHz 噪声谱级为：

$$NL_p = 27 + 20 \lg \left(\frac{25}{8} \right) = 37 \text{ dB/Hz}$$

$$\therefore NL = NL_p + 10 \lg B = 37 + 10 \lg 500 = 64 \text{ dB}$$

检测概率 $P(D) = 50\%$ 虚警 $F(D) = 0.01\%$

由接收工作特性曲线可得： $d=15$

$$\therefore DT = 5 \lg \left(15 * \frac{500}{0.1} \right) \approx 24\text{dB}$$

最后可得：

$$TL = \frac{1}{2} (222 + 25 - 64 + 20 - 24) \approx 90\text{dB}$$

由传播规律可得作用距离。

例2 被动探潜

已知一潜艇在会聚区中以 168dB 辐射出 500Hz 线谱，另一潜艇在 30 海里处用无指向性水听器听测，海洋背景噪声谱级为 55dB 。接收带宽 100Hz ，检测概率 50% ，虚警 1% ($d=6$)，则需要观察多长时间。

答：由被动声呐方程可得：

$$DT = SL - TL - NL + DI$$

$$TL = 20 \lg(30 * 1854) - 10 = 85(\text{dB}) \quad (10 \text{ 为会聚区增益})$$

$$SL = 168 \text{ dB}$$

$$NL = NL_p + 10 \lg B = 55 + 10 \lg 100 = 75 \text{ dB}$$

$$DI = 0$$

$$\therefore DT = 8$$

$$\therefore DT = 5 \lg\left(\frac{d * B}{t}\right)$$

$$\therefore t = \frac{d * B}{10^{\frac{DT}{5}}} = \frac{6 * 100}{10^{\frac{8}{5}}} \approx 15(\text{秒})$$