计算声学

(简明原理及推导)

温润泽

2023.3.28

计算声学

1 第一部分·物理基础

1.1 符号说明

$c_{ijk} \qquad i,j,k=1,2,3$

$c_{ijk}X_jY_k = X\times Y$

逆序数为奇数个为-1，偶数为+1,其余为0；c_{231} 2>1,3>1 所以逆序数为2

1.2 Reynolds输运定理

$$d[\iiint_{V(t)}[B(\vec{x},t)dv]/dt = \iiint_{V(t)}\frac{\partial B}{\partial t}dv + \iint_{\partial V(t)}B\vec{u}dS$$

$$d[\iiint_{V(t)}[B(\vec{x},t)dv]/dt = \iiint_{V(t)}\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla\cdot(B\vec{u})dv$$

Reynolds输运定理实际上就是三维Leibniz积分法则在流体力学中的应用,右端第一项是本地变化率,第二项是边界上的输入变化率

1.3 质量守恒

将流场中的物理量B换成密度ρ,任意一个流体微元在运动的过程中,其质量都不会发生改变,对于任意体积V都满足$d[\int\int\int_{V(t)}[B(\vec{x},t)dv]/dt=0$.可得:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{u})=0$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\vec{u}=0$$

1.4 动量守恒

体积$V(t)$中的流体，其动量单位时间的变化应当等于外界动量的输入，而外力包含体积力$\vec{f}$（单位体积收到的力）和应力两部分。

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)}\rho\vec{u}dv = \iiint_{V(t)}\vec{f}(\vec{x},t)dv + \iint_{\partial V(t)}\sigma d\vec{S}$$

由高斯定理可得:

$$\iint_{\partial V(t)}\sigma dS = \iiint_{V(t)}\nabla\cdot\sigma dv$$

由Reynolds输运定理可得：

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)}\rho\vec{u}dv=\iiint_{V(t)}\vec{f}+\nabla\cdot\sigma dv$$

即

$$\rho[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}]=\nabla\cdot\sigma+\vec{f}$$

$\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ 可得另一种Cauchy方程：

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt}=\nabla\cdot\sigma+\vec{f}$$

速度散度的物理意义实际上就是体积变化率，对于不可压缩流体或固体，其体积变化率为0，所以$\nabla\cdot\vec{u}=0$，所以固体Cauchy方程

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=\nabla\cdot\sigma+\vec{f}$$

1.5 能量守恒

$$\frac{d(E_k+Ei)}{dt}=P_w-Q$$

其中Q定义为流出的热量，带入各量的表达式, e 是单位质量蕴含的能量

$$\frac{d[\iiint_{V(t)}(\rho u_iu_i/2+\rho e)dv]}{dt}=\iint_{\partial V(t)}T_iu_ids+\iiint_{V(t)}f_iu_idv-\iint_{\partial V(t)}q_in_ids$$

$$\frac{d[\iiint_{V(t)}(\rho u_iu_i/2+\rho e)dv]}{dt}=\iiint_{V(t)}[(T_{ij}u_i)_{,j}+f_iu_i-q_{i,j}]dv$$

$$\iiint_{V(t)}[\rho d(u_iu_i/2+e)/dt]dv=\iiint_{V(t)}[(T_{ij}u_i)_{,j}+f_iu_i-q_{i,j}]dv$$

移项并去除积分号

$$\rho d(u_iu_i/2+e)/dt-[(T_{ij}u_i)_{,j}-f_iu_i+q_{i,j}]=0$$

$$(\rho\frac{du_i}{dt}-T_{ij,j}-f_i)u_i+\rho\dot{e}-T_{ij}u_{i,j}+q_{i,j}=0$$

已知$\rho\frac{du_i}{dt}-T_{ij,j}-f_i=0$,即得

$$\rho\dot{e}-T_{ij}u_{i,j}+q_{i,j}=0$$

1.6 应力应变

当小体元发生形变是收到周围相邻部分力地作用，小体院单位表面上的力称为应力，固体中能产生法向应力和切应力，表面一般收到9个应力分量T_{ij}，$i=j$时代表法向应力，$i\neq j$时代表切应力,且具有对称性

$$T_{ij}=T_{ji}$$

确定应力特性需要6个分量

柯西应变可以分为主应变（normal strain）与剪切应变（角应变，shear strain）两种。一维定义$e=\lim_{L\to 0}\frac{\Delta L}{L}$，在三维中用柯西应变张量可方便地表示

1.7 虎克定律

$\boldsymbol{\sigma}=Ee$，其中 $\boldsymbol{\sigma}=F\,/\,A$,

广义虎克定律可以描述应力与应变的本构关系，一般情况下，应力与应变具有线性关系，每个分量均对应变有贡献，即每个应力均是6个应变分量的线性函数。

$$T_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$\begin{bmatrix}T_{11}\\T_{22}\\T_{33}\\T_{32}\\T_{13}\\T_{13}\\T_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\C_{41}&C_{42}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\C_{51}&C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\C_{61}&C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{33}\\\varepsilon_{32}\\\varepsilon_{13}\\\varepsilon_{21}\end{bmatrix}$$

其中C_{ij}为弹性系数，固体具有36个弹性系数，具有对称性$C_{ij}=C_{ji}$，可减少到21个，各向同性固体可减少到2个

$$\begin{bmatrix}T_{11}\\T_{22}\\T_{33}\\T_{32}\\T_{13}\\T_{13}\\T_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{11}-2c_{44}&c_{11}-2c_{44}&0&0&0\\c_{11}-2c_{44}&c_{11}&c_{11}-2c_{44}&0&0&0\\c_{11}-2c_{44}&c_{11}-2c_{44}&c_{11}&0&0&0\\0&0&0&c_{44}&0&0\\0&0&0&0&c_{44}&0\\0&0&0&0&0&c_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{22}\\\varepsilon_{33}\\2\varepsilon_{32}\\2\varepsilon_{13}\\2\varepsilon_{21}\end{bmatrix}$$

其中

$$c_{44}=c_{55}=c_{66},c_{11}=c_{22}=c_{33}$$

$$c_{ij}=c_{11}-2c_{44},(i\neq j)$$

1.8 波动方程

$$\rho(\partial u_i \, / \, \partial t) - \vec{f}_i + P_i = 0$$

忽略体力

$$\rho(\partial \vec{u} \, / \, \partial t) + \nabla P = 0$$

因 $\vec{u} = \frac{\partial \vec{d}}{\partial t}$，方程两端同时取∇得

$$\rho \partial^2 (\nabla \cdot \vec{d}\,) \, / \, \partial^2 t + \nabla \cdot \nabla P = 0$$

$$\rho \partial^2 (\theta\,) \, / \, \partial^2 t + \nabla \cdot \nabla P = 0$$

其中θ是体积张量

流体中波动方程

$$\partial^2 P \, / \, \partial^2 t = c^2 \nabla^2 P$$

其中声速 $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$，体积模量 $k = -\frac{P}{\theta}$

固体中直接用表面力表示

$$\rho \partial v_i \, / \, \partial t \;-\; f_i(\vec{x}, t) \;-\; T_{ij,j} = 0$$

其中$\dot{T}_{ij} = C_{ijkl} \, \nu_{k,l}$

1.9 分析力学

广义坐标

1.9.1 约束

对非自由体的某些位移起限制作用的条件称为约束

通常只能知道约束力的作用，但无法知道详细的约束力，通过约束力关联的变量之间不独立。为了解决这个问题，我们引入广义坐标。

完整约束的广义坐标等于其自由度数目，非完整约系统的有些速度项无法消去，所以其广义坐标数一般大于系统的自由度的数目

$\dot{q}$ 和 q 是不同的两个变量

1.9.2 广义速度

对广义坐标求全导数，下式中q_j用了求和约定

$$\dot{r}_i = dr_i \,/\, dt = \partial r_i \,/\partial t + (\partial r_i \,/\partial q_j)\dot{q}_j$$

可以写成矩阵形式，A可以称为 雅可比矩阵(Jacobian matrix),是一阶偏导数以一定方式排列成的矩阵，其行列式称为雅可比行列式

$$\dot{\mathbf{r}} = A\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \partial r_1 \,/\, \partial t \\ \partial r_2 \,/\, \partial t \\ \partial r_3 \,/\, \partial t \\ .... \\ \partial r_{3N} \,/\, \partial t \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial r_1/\partial q_1, \partial r_1/\partial q_2, \ldots, \ldots, \partial r_1/\partial q_M \\ \partial r_2/\partial q_1, \partial r_2/\partial q_3, \ldots\ldots, \partial r_2/\partial q_M \\ \partial r_3/\partial q_1, \partial r_3/\partial q_2, \ldots\ldots, \partial r_3/\partial q_M \\ .... \\ \partial r_{3N}/\partial q_1, \partial r_{3N}/\partial q_2, \ldots\ldots \partial r_{3N}/\partial q_M \end{bmatrix}$$

1.9.3 达朗伯原理

虚位移跟时间相互独立，$\delta r_\alpha = dr_\alpha = (\partial r_\alpha/\partial q_i)\delta q_i$

虚功 $\delta W = F_\alpha \delta r_\alpha = F_\alpha(\partial r_\alpha/\partial q_{_i})\delta q_i$

广义力 $Q =_\alpha (\partial r_\alpha/\partial q_{_i})$

广义动量 $p_i = \partial T \,/\, \partial \dot{q}_i = \partial L \,/\, \partial \dot{q}_i$

当一个有约束的力学系统处于力学平衡时，考虑某个时刻 t 系统坐标的一个微小的、与运动方程和约束条件都兼容的虚位移，由于每个质点都处于力学平衡即$\mathbf{F}_i = 0$，可知

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(c)}$$

$\mathbf{F}_i^{(a)}$为主动力，$\mathbf{F}_i^{(c)}$为约束力，许多完整约束的约束力的虚功之和为零，可得到虚功原理所有主动力的虚功之和为0

$$\sum_i \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0$$

当力学系统不平衡时，可以将$\mathbf{F}_i = 0$替换成牛顿方程$\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0$可得到达朗伯原理(d'Alembert's principle)：

$$\sum_i (\mathbf{F}_i^{(a)} - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta\mathbf{x}_i = 0$$

$$\mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta\mathbf{x}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_i}\delta q_j = Q_j \delta q_j$$

由全导数易知$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}$

$$\dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{x}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\delta q_j = [\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial q_j}\right)]\delta q_j$$

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right]\delta q_j = 0$$

对于完整约束，q_j都是独立的变量因此可得一种形式的欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

如果主动力是由不依赖于速度的势能$\boldsymbol{V}$给出

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

定义拉格朗日量为系统的动能与势能之差$\boldsymbol{L}=T-V$欧拉- 拉格朗日方程也可以写为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

1.9.4 哈密顿原理

哈密顿作用量 为对拉格朗日函数对时间积分，为洛伦兹标量；原理可叙述为完整、保守系统在具有相同时间间隔，从起始到终了位置的一切可能运动和真实运动相比较，真实运动的哈密顿作用量为极值

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt$$

$$\delta S = \delta\int_{t_1}^{t_2} L\ (q,\dot{q},t)\mathrm{d}t = 0$$

可通过变分法推导出拉格朗日方程

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_c+\delta q,\dot{q}_c+\delta\dot{q},t)dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_c,\dot{q}_c,t)dt = \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i$$

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i = 0$$

由于变分δq为无穷小量且为时间的任意函数，所以 $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$，第一项为 0，第二项系数也必为 0，得真实运动满足的欧拉-拉格朗日方程 (f个自由度的完整约束系统)

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0\,,\quad i=1,2,\cdots,f$$

1.9.5 哈密顿正则方程

广义动量 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

广义力 $\dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$

哈密顿量 是拉格朗日函数的勒让德变换，以广义坐标和共轭的广义动量为变量的函数，在数值上等于系统的能量

$$H(p,q,t) = p_i\dot{q}_i - L$$

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t}dt$$

由哈密顿量的微分可知

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

若系统的哈密顿量不显含时间，则同样可得

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

这一组方程为哈密顿正则方程

1.9.6 哈密顿-雅可比方程

$$L = \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i\dot{q}_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_i\dot{q}_i - L = 0$$

根据哈密顿量的定义可得

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$$