CURVAS

Alejandro Ramírez Rodríguez

11 de mayo de 2021

1. INTRODUCCIÓN

En esta charla vamos a tratar de entender qué es una curva espacial, basándonos en la teoría desarrollada por Jean Frenet y Joseph Serret. No vamos a indagar en las demostraciones de los teoremas, aunque si veremos los puntos más importantes de ellas, así como los trucos que utilicen.

Definición. Sea I un intervalo abierto (a, b), se define **curva espacial** como una función $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ diferenciable infinitas veces, es decir, $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$.

En esta exposición I siempre va a ser un intervalo abierto, aunque también podría ser cerrado. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, se tiene que $x, y, z : I \to \mathbb{R}$ y han de ser $\mathcal{C}^\infty$.

Definición. La imagen de α se denomina **traza** de la curva. Se denota $Tr(\alpha)$.

Es importante notar la diferencia entre traza y curva. La curva es la función a partir de la cuál se obtiene la traza. La traza no determina unívocamente la curva. Por ejemplo, la circunferencia S_1 es la traza de varias curvas diferentes:

- $\alpha_1(t) = (cost, sent)$
- $\alpha_2(t) = (sent, cost)$

Se diferencian en el sentido en el que recorren S_1.

En el caso de que la $Tr(\alpha)$ esté contenida en un plano afín, se dice que la curva es **plana**. Si está contenida en una esfera entonces se denomina **esférica**.

A la hora de estudiar el comportamiento de una curva, es esencial medir como varía en un periodo de tiempo $[t_0, t]$. Para ello, debemos hallar $\frac{\alpha(t)-\alpha(t_0)}{t-t_0}$. Cuanto más próximo este t de t_0, tendremos una mejor aproximación. Por lo tanto, tomando el límite en t_0 obtenemos $\alpha'(t_0)$, que nos da la dirección de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Definición. Se denomina **vector tangente** a α en $\alpha(t_0)$ a $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. La recta afín que pasa por $\alpha(t_0)$ con dirección $\alpha'(t_0)$ es la **recta tangente** a α en $\alpha(t_0)$. El vector tangente se denota como $t_\alpha(t_0)$

Siempre hay que tener presente que el vector tangente no pasa por $\alpha(t_0)$, al igual que la recta tangente. Por lo tanto, el vector tangente que pasa por $\alpha(t_0)$ es el afín al especificado en la definición. En física, este vector también se conoce como el vector **velocidad**.

Si $\alpha'(t_0) = 0$, se dice que la curva tiene una **singularidad** en t_0. Si α no tiene ninguna singularidad se denomina **curva regular** (es decir, $\alpha'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$).

1.1. Ejemplos

A continuación vamos a estudiar algunos ejemplos sencillos de curvas para afianzar los nuevos conceptos:

- **Recta:** Sea $u = (u_1, u_2, u_3)$ un vector y $a = (a_1, a_2, a_3)$ un punto de $\mathbb{R}^3$, la recta $r = a + [u]$ es una curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, que viene dada por

  $$\alpha(t) = (a_1 + t * u_1,\ a_2 + t * u_2,\ a_3 + t * u_3)$$

  Se tiene que $\alpha'(t) = u$, por lo que es regular.

- **Hélice:** Sean $a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}^+$, se define la hélice como $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que

  $$\alpha(t) = (acos(t),\ asen(t),\ bt)$$

  La curva se enrolla alrededor de un cilindro. De hecho, las hélices son geodésicas del cilindro (camino más corto entre 2 puntos de su superficie, a excepción de que estén en línea recta).

  Además, $\alpha'(t) = (-asen(t), acost(t), b)$, por lo que es regular ($b \neq 0$). Viendo la expresión del vector tangente, se verifica que es perpendicular al radio de giro en altura bt, pues el radio de giro viene dado por $\alpha(t) - c(t)$, siendo $c(t) = (0, 0, bt)$ el centro de giro. Se tiene que $\alpha'(t) \cdot (\alpha(t) - c(t)) = 0$, comprobándose así la perpendicularidad.

- **Grafo de función:** Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ y $h : I \to \mathbb{R}$ tal que $h \in \mathcal{C}^\infty$. Se define el grafo de la función h como

  $$\begin{aligned} \alpha : & I \to \mathbb{R}^2 \\ & t \longmapsto (t, h(t)) \end{aligned}$$

  A veces se la llama traza de la función h. Al igual que la hélice, esta curva también es regular. De hecho, se recorre a velocidad constante respecto al eje X, ya que
  $\alpha'(t) = (1, h'(t)) \neq 0\ \forall t \in I$

2. REPARAMETRIZACIÓN

A veces conviene obtener una expresión alternativa de la curva con el objetivo de facilitar su análisis. Para ello empleamos la **reparametrización**, que como su nombre bien indica, consiste en un cambio del parámetro t en otro con diferente dominio.

Definición. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ y $J = (c, d)$, se define una reparametrización como una función $h : J \to I$ difeomorfa.

Un difeomorfismo es un homeomorfismo diferenciable, es decir, h es biyectiva y diferenciable, al igual que h^{-1}. Derivando en la expresión $h^{-1}(h(s)) = s$ se ve que $(h^{-1})' = \frac{1}{h'}$. Por lo tanto, h' no se anula nunca, pudiendo darse dos casos.

- $h' > 0$. Conserva la orientación de la curva original.

- $h' < 0$. Invierte la orientación de la curva original.

A pesar de que $\beta = \alpha \circ h$ sea otra curva diferente, ambas tienen la misma traza y singularidades. Esto se obtiene directamente de las definiciones, aprovechando que la reparametrización es un difeomorfismo. De hecho, diremos que son geométricamente equivalentes. Un ejemplo conocido de reparametrización es el de la interpolación lineal:

$$\begin{aligned} h : (0{,}1) &\to (a,b) \\ s &\longmapsto a(1-s) + bs \end{aligned}$$

Este es el ejemplo más básico, aunque se pueden utilizar otros intervalos y modificar la velocidad a la que se recorre la curva. Otro importante ejemplo de reparametrización es el de longitud por arco de curva, en el cual nos vamos a centrar.

2.1. LONGITUD DEL ARCO DE CURVA

Antes de ver la reparametrización, es necesario conocer como se calcula la longitud de un tramo de curva dado. Veamos la intuición que hay tras ella, originada por los griegos:

Dado $[c,d] \in I$, pretendemos calcular la longitud del tramo entre $\alpha(c)$ y $\alpha(d)$. Para ello obtenemos una **partición** de $[c,d]$, una sucesión finita de puntos $\{c = t_0 < t_1 < ... < t_n = d\}$. Se denota $\mathcal{P}$. Definimos su **diámetro** como $d = max\{|t_i - t_{i-1} : i \in [1,n]\}$. A la partición le asignamos una poligonal, uniendo los puntos $\alpha(t_i)$ y $\alpha(t_{i+1})$ mediante segmentos. Podemos calcular la longitud de la poligonal:

$$L_c^d(\alpha, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$$

Por lo tanto, cuánto más puntos incluyamos en $\mathcal{P}$, más aproximaremos la poligonal a la curva, acercándonos a la longitud que buscamos. Para obtenerla, recurrimos al cálculo infinitesimal, el cuál los griegos no llegaron a explorar.

Definición. Dada una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ y sea $(c,d) \in I$, se denomina longitud del arco de curva entre (c,d) a

$$L_c^d(\alpha) = \int_c^d |\alpha'(t)|\, dt$$

El siguiente lema demuestra que nuestra intuición sobre las poligonales es correcta:

Lema. $\forall \epsilon > 0$ *(nivel de aproximación)* $\exists \delta > 0$ *tal que* $\forall \mathcal{P}$ *partición de* $[c,d]$ *con diámetro* $d \leq \delta$ *cumple que* $|L_c^d(\alpha) - L_c^d(\alpha, \mathcal{P})| < \epsilon$

Para la demostración, partiendo de $I = [c,d]$ y $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ utilizamos la función

$$\begin{aligned} f : &I \times I \times I \to \mathbb{R} \\ &(t_1, t_2, t_3) \longmapsto \sqrt{x'(t_1)^2 + y'(t_1)^2 + z'(t_1)^2} \end{aligned}$$

aprovechando que es uniformemente continua (continua definida en compacto). También es necesario aplicar el teorema del valor medio (T.V.M) a $x(t)$,$y(t)$ y $z(t)$ en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$; y el asociado a las integrales (T.V.M.I). Con estas pinceladas, demostrar el lema es cuestión de escribir con cuidado las propiedades y ambas longitudes.

Veamos un curioso ejemplo, la **espiral logarítmica**:

$$\begin{aligned} \alpha : &\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ &t \longmapsto e^t(cost, sent) \end{aligned}$$

$$\alpha'(t) = e^t(cost, sent) + e^t(-sent, cost) \Rightarrow |\alpha'(t)|^2 = 2e^{2t} \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{2}e^t$$

Por lo tanto, sea $d > 0$ y $c < 0$, hallamos:

- $L_0^d(\alpha) = \int_0^d \sqrt{2}e^t\,dt = \sqrt{2}(e^d - 1) \xrightarrow[d\to\infty]{} \infty$

- $L_c^0(\alpha) = \int_c^0 \sqrt{2}e^t\,dt = \sqrt{2}(1 - e^c) \xrightarrow[c\to-\infty]{} \sqrt{2}$

  Se observa que en tiempo infinito se recorre longitud finita.

Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ y sea una parametrización $\varphi : J \to I$ tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$ es una nueva curva. Veamos la longitud de un arco de la curva β, siendo $\varphi' > 0$, $\varphi(c_0) = c$ y $\varphi(d_0) = d$:

$$L_{c_0}^{d_0}(\beta) = \int_{c_0}^{d_0} |\beta'(s)|\,ds = \int_{c_0}^{d_0} |\alpha'(\varphi(s))\varphi'(s)|\,ds = \int_{c_0}^{d_0} |\alpha'(\varphi(s))|\varphi'(s)\,ds = \int_c^d |\alpha'(t)|\,dt = L_c^d(\alpha)$$

donde hemos utilizado que φ preserva la orientación y el cambio de variable $t = \varphi(s)$. Si φ invierte la orientación, se tiene que $L_{c_0}^{d_0}(\beta) = -L_c^d(\alpha)$. Por lo tanto, si φ es una reparametrización por longitud de arco (preserva la orientación), la longitud de la curva entre t y t_1 es la longitud desde t a t_0 menos la de t_1 a t_0. Como α es p.l.a, el parámetro t es la longitud de t a t_1. Así pues, obtenemos la siguiente definición:

Definición. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, se dice que está **parametrizada por longitud de arco,(p.l.a)** si $\exists t_0 \in I$ tq $L_{t_0}^t(\alpha) = t - t_0$

Directamente de la definición se obtiene que: α está p.l.a $\Leftrightarrow |\alpha'(t)| = 1\ \forall t \in I$

Lema. *Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ regular. Entonces existe φ difeomorfismo creciente tq $\beta = \alpha \circ \varphi$ está parametrizada por longitud de arco .*

La demostración es constructiva, pues indica como se procede en la práctica. La idea es la siguiente:

- Tomamos $t_0 \in I$ y definimos ψ tq
$$\begin{aligned}\psi :& I \to \mathbb{R}\\ & t \longmapsto L_{t_0}^t(\alpha)\end{aligned}$$
- Por el teorema de la función inversa, ψ es un difeomorfismo creciente ($\psi'(t) = |\alpha'(t)| > 0$) tq $\psi : I \to J = (a_0, b_0)$. Definimos $\varphi = \psi^{-1}$, que es el difeomorfismo creciente que buscamos, pues el parámetro pasa a ser la longitud del arco de curva.
$$\begin{aligned}\varphi :& J \to I\\ & s \longmapsto \varphi(s) = t\end{aligned}$$
- Bastaría demostrar que siendo $\beta = \alpha \circ \varphi$, se cumple que $|\beta'(s)| = 1\ \forall s \in J$

Para reforzar el conocimiento adquirido, mostramos el ejemplo de la hélice:

$$\alpha(t) = (acost,\, asent,\, bt) \Rightarrow |\alpha'(t)| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \Rightarrow \psi(t) = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot t$$

Como $s = \psi(t) \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \Rightarrow \varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ Por lo tanto, la curva reparametrizada viene dada por

$$\beta(s) = \left(acos(\frac{s}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}),\, asen(\frac{s}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}),\, b(\frac{s}{\sqrt{(a^2 + b^2)}})\right)$$

Con esto finalizamos el análisis de las reparametrizaciones y damos paso al corazón del estudio de Frenet.

3. ESTUDIO DE FRENET

A partir de este momento vamos a suponer que la curva α es p.l.a, lo que significa que el vector tangente en cualquier punto es unitario.

3.1. CURVATURA

Ya hemos definido el vector tangente $t_\alpha(s)$ y su sentido geométrico. Podemos tratar de medir como varía a lo largo de la curva. Intuitivamente se observa que cuanto más curvada sea la curva, mayor va a ser la distancia entre $\alpha'(s_1)$ y $\alpha'(s_0)$, siendo s_1 y s_0 puntos próximos. Análogamente a lo que sucede con el vector tangente, hallando el $\lim_{s\to s_0} \frac{\alpha'(s)-\alpha'(s_0)}{s-s_0} = \alpha''(s_0)$ obtenemos como varía el $t_\alpha(s)$ en cada punto de la curva. Por lo tanto, podemos definir la **curvatura** como sigue:

Definición. Se define la curvatura espacial de α en s_0 como $\mathcal{K}_\alpha(s_0) = |\alpha''(s_0)|$

Hacemos hincapié en la curvatura espacial, pues es posible definir otra curvatura para curvas planas, que de hecho puede ser negativa. La curvatura espacial nunca puede ser negativa. Además, es muy sencillo comprobar que α es una recta $\Leftrightarrow$ tiene curvatura constantemente 0.

A partir de $\alpha''(s)$ también podemos definir otro vector de gran importancia:

Definición. Se define el **vector normal** a α en s como $\boxed{n_\alpha(s) = \frac{\alpha''(s)}{\mathcal{K}_\alpha(s)}}$

Esta es la **1ª fórmula de Frenet**, aunque se suele pasar la curvatura al otro término, para dejarla tal que $t'_\alpha(s) = \mathcal{K}_\alpha(s) * n_\alpha(s)$.
Se advierte que el vector normal es un vector unitario y además uno de los infinitos (en el plano solo hay 2, uno y su opuesto) perpendiculares al vector tangente $t_\alpha(s)$. Para verlo:

$$|\alpha'(s)| = 1 \to \alpha'(s)\cdot\alpha'(s) = |\alpha'(s)|^2 = 1 \text{ y derivando} \to \alpha''(s)\cdot\alpha'(s) = 0$$

Como son perpendiculares, ambos generan un plano vectorial, conocido como el **plano osculador** $\mathrm{H} = [t_\alpha(s), n_\alpha(s)]$ Podemos trasladar el plano osculador para que pase por el punto de la curva $\alpha(s)$. Este plano afín es el que mejor aproxima de forma local la curva. De hecho, si la curva es plana, el plano osculador en un punto cualquiera de ella coincide con el plano que la contiene.

3.2. TORSIÓN

Una vez conocemos el plano osculador, resulta natural preguntarse por un vector perpendicular a dicho plano, pues entonces formará una base de $\mathbb{R}^3$ junto con $t_\alpha(s)$ y $n_\alpha(s)$.

Definición. Se denomina **vector binormal** a $b_\alpha(s) = t_\alpha(s) \wedge n_\alpha(s)$

- $b_\alpha(s)$ es perpendicular a $t_\alpha(s)$ y $n_\alpha(s)$, pues ambos son linealmente independientes $((u\wedge v)\cdot u = 0, (u\wedge v)\cdot v = 0)$
- $|b_\alpha(s)| = 1\ \forall s \in I$, ya que $t_\alpha(s)$ y $n_\alpha(s)$ son unitarios y perpendiculares ($|u\wedge v| = |u||v|sen\theta$)

Por lo tanto, tomando como origen $\alpha(s)$, tenemos que $\mathcal{B} = \{t_\alpha(s), n_\alpha(s), b_\alpha(s)\}$ es una base positivamente orientada (determinante positivo) de $\mathbb{R}^3$. Para que sea positivamente orientada deben ir en el orden escrito. Los tres vectores que forman esta base se conocen como el **TRIEDRO DE FRENET**

Todavía nos queda por definir el concepto de torsión, que se obtiene a partir de la derivada del vector binormal. Para saber como varía $b_\alpha(s)$ a lo largo de la curva necesitamos calcular $b'_\alpha(s)$, utilizando que $(k * u) \wedge u = k * (u \wedge u) = k \cdot 0 = 0$; y la fórmula del vector normal:

$$b'_\alpha(s) = t'_\alpha(s) \wedge n_\alpha(s) + t_\alpha(s) \wedge n'_\alpha(s) = (\mathcal{K}_\alpha(s) \cdot n_\alpha(s)) \wedge n_\alpha(s) + t_\alpha(s) \wedge n'_\alpha(s) = t_\alpha(s) \wedge n'_\alpha(s)$$

Por lo tanto, tenemos que $b'_\alpha(s)$ es perpendicular a $t_\alpha(s)$. Además, como $b_\alpha(s)$ es unitario, $|b_\alpha(s)|^2 = 1$ y derivando $b'_\alpha(s) \cdot b_\alpha(s) = 0$. Así pues, $b'_\alpha(s)$ también es perpendicular a $b_\alpha(s)$. Entonces, $b'_\alpha(s)$ es perpendicular al plano $H = [t_\alpha(s), b_\alpha(s)]$, lo que implica que es proporcional a $n_\alpha(s)$.

Definición. Se define la **torsión** de α en s como el factor de proporcionalidad de $b'_\alpha(s)$ con respecto a $n_\alpha(s)$, es decir:

$$\boxed{b'_\alpha(s) = \mathcal{T}_\alpha(s) * n_\alpha(s)}$$

Esta es la **2ª fórmula de Frenet**. La torsión mide cuánto o como de rápido se aleja la curva en un punto de su plano osculador, es decir, como de retorcida parece. Se observa $|\mathcal{T}_\alpha(s)| = |b'_\alpha(s)|$ pues $n_\alpha(s)$ es unitario.

Es de esperar que si la torsión es nula en todo punto, la curva esté contenida en un plano. El recíproco también se da, pues el vector binormal va a ser constante. Veamos la demostración:

Demostración. *Vamos a demostrar la doble implicación:* $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ *es plana* $\Leftrightarrow \mathcal{T}_\alpha(s) = 0\ \forall s \in I$

- $\Rightarrow$ *:*
  Como α *es plana, su traza está contenida en un plano* H*, que de hecho es el plano afín osculador para cada punto* $\alpha(s)$*. Por lo tanto,* $b_\alpha(s) \perp H\ \forall s \in I$*. Ya conocemos su dirección y su módulo (siempre es unitario). Además, como* $b_\alpha(s)$ *es continua y derivable, no puede variar de sentido* $\Rightarrow b_\alpha(s)$ *es constante* $\Rightarrow b'_\alpha(s) = 0\ \forall s \in I \Rightarrow \mathcal{T}_\alpha(s) = 0\ \forall s \in I$

- $\Leftarrow$ *:*
  Partimos de $\mathcal{T}_\alpha(s) = 0\ \forall s \in I$*. Mediante la 2ª fórmula de Frenet se tiene que* $b'_\alpha(s) = 0$ $\forall s \in I \Rightarrow b_\alpha(s) = k\ \forall s \in I$*. Definimos una función auxiliar*

  $$\begin{aligned} f :& I \to \mathbb{R} \\ & s \longmapsto (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot b_\alpha(s) \end{aligned}$$

  Se observa que $f(s_0) = 0$ *y* $f'(s) = \alpha'(s) \cdot b_\alpha(s) = t_\alpha(s) \cdot b_\alpha(s) = 0$*. Por lo tanto,* $f(s) = 0$ $\forall s \in I \Rightarrow (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \perp b_\alpha(s)\ \forall s \in I \Rightarrow \alpha(s) \in \alpha(s_0) + H\ \forall s \in I$ *donde* $\alpha(s_0) + H$ *es el plano osculador afín. Así pues,* $Tr(\alpha) \subseteq P = \alpha(s_0) + H$

3.3. FÓRMULAS DE FRENET

En el estudio anterior de la curvatura y la torsión ya hemos obtenido las dos primeras fórmulas de Frenet. Vamos a deducir la tercera:

Partiendo del triedro de Frenet, hacemos una permutación circular de tal forma que $n_\alpha(s) = b_\alpha(s) \wedge t_\alpha(s)$. Derivando la expresión:

$$n'_\alpha(s) = b'_\alpha(s) \wedge t_\alpha(s) + b_\alpha(s) \wedge t'_\alpha(s) = (\mathcal{T}_\alpha(s) * n_\alpha(s)) \wedge t_\alpha(s) + b_\alpha(s) \wedge (\mathcal{K}_\alpha(s) * n_\alpha(s))$$

Como $n_\alpha(s) \wedge t_\alpha(s) = -b_\alpha(s)$ y $b_\alpha(s) \wedge n_\alpha(s) = -t_\alpha(s)$, se obtiene la **3ª fórmula de Frenet**:

$$\boxed{n'_\alpha(s) = -\mathcal{T}_\alpha(s) * b_\alpha(s) - \mathcal{K}_\alpha(s) * t_\alpha(s)}$$

La expresión matricial de las 3 fórmulas de Frenet quedaría tal que así:

$$\begin{pmatrix} t'_\alpha(s) \\ n'_\alpha(s) \\ b'_\alpha(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_\alpha(s) & 0 \\ -\mathcal{K}_\alpha(s) & 0 & -\mathcal{T}_\alpha(s) \\ 0 & \mathcal{T}_\alpha(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_\alpha(s) \\ n_\alpha(s) \\ b_\alpha(s) \end{pmatrix}$$

3.4. CASO PLANO

El estudio anterior de Frenet está centrado en curvas espaciales, aunque también podemos definir de forma parecida algunos conceptos para curvas planas. En esta sección, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ p.l.a

El vector tangente sigue siendo el mismo, es decir, $t_\alpha(s) = \alpha'(s)$. Ahora bien, tan solo hay dos vectores perpendiculares a $t_\alpha(s)$, por lo que uno de ellos ha de ser el vector normal. Se escoge el que hace que $\{t_\alpha(s), n_\alpha(s)\}$ sea positivamente orientada.

Si $t_\alpha(s) = (x'(s), y'(s))$, se tiene que $n_\alpha(s) = (-y'(s), x'(s))$. Mediante el producto escalar y el determinante se comprueba que son perpendiculares y forman base positivamente orientada. Además, como $t_\alpha(s)$ es unitario, $n_\alpha(s)$ también lo es.

Debido a esta definición, si aplicamos la teoría de curvas espaciales en curvas planas, el vector normal de la espacial puede coincidir o ser el opuesto al de la teoría de curvas planas. Depende de la orientación de la curva este hecho. Veamos un ejemplo en la circunferencia unidad, por lo que $|\alpha'(s)| = 1 = |\alpha"(s)|$

- $\alpha(s) = (sen(s), cos(s))$. Tenemos que $t_\alpha(s) = (cos(s), -sen(s)) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n_\alpha(s) = (sen(s), cos(s)) \text{ (t.c.p)} \\ n_\alpha(s) = \alpha"(s) = (-sen(s), -cos(s)) \text{ (t.c.e)} \end{cases}$$

- $\alpha(s) = (cos(s), sen(s))$. Tenemos que $t_\alpha(s) = (-sen(s), cos(s)) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n_\alpha(s) = (-cos(s), -sen(s)) \text{ (t.c.p)} \\ n_\alpha(s) = (-cos(s), -sen(s)) \text{ (t.c.e)} \end{cases}$$

Ya que $\alpha'(s)$ es unitario, derivando la expresión del módulo al cuadrado como ya hemos hecho un par de veces, obtenemos que $\alpha"(s) = \mathcal{K}_\alpha(s) * n_\alpha(s)$ siendo $\mathcal{K}_\alpha(s)$ la **curvatura en la teoría plana**. De hecho, $\alpha"(s)$ es el mismo en ambas teorías; y $n_\alpha(s)$ el mismo u opuesto. Por lo tanto, $\mathcal{K}_\alpha(s)$ es igual salvo signo a la de la teoría espacial.

Gracias a que el vector normal es unitario, se tiene que $\alpha"(s) \cdot n_\alpha(s) = \mathcal{K}_\alpha(s)$, por lo que

$$\mathcal{K}_\alpha(s) = -y'(s) * x"(s) + x'(s) * y"(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ x"(s) & y"(s) \end{vmatrix}$$

A continuación vamos a ver otra forma de expresar el vector tangente, aprovechando las características de $\mathbb{R}^2$. Sea $\theta(s)$ el ángulo que forma el vector tangente $t_\alpha(s)$ con el eje horizontal. Como $t_\alpha(s)$ es unitario, se tiene que $t_\alpha(s) = (cos\theta(s), sen\theta(s))$. Si derivamos esta expresión mediante la regla de la cadena:

$$\mathcal{K}_\alpha(s) * n_\alpha(s) = \alpha"(s) = t'_\alpha(s) = \theta'(s) * (-sen\theta(s), cos\theta(s)) \Rightarrow \boxed{\mathcal{K}_\alpha(s) = \theta'(s)}$$

Tiene mucho sentido, pues la curvatura mide como cambia el vector tangente, en este caso mediante la variación de su ángulo con el eje horizontal.

Por último, en la teoría de curvas planas no tienen sentido hablar de vector binormal. Si las observásemos como curvas espaciales, el vector binormal sería constante, por lo que su derivada sería nula, al igual que la torsión. Por lo tanto, tan solo tenemos 2 formulas de Frenet:

$$\begin{pmatrix} t'_\alpha(s) \\ n'_\alpha(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_\alpha(s) \\ -\mathcal{K}_\alpha(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_\alpha(s) \\ n_\alpha(s) \end{pmatrix}$$

3.5. TEOREMAS FUNDAMENTALES

En esta sección vamos a enunciar los dos teoremas fundamentales, uno para la teoría plana y otro para la espacial. Antes de ello, necesitamos conocer el concepto de **movimiento rígido directo**

Definición. Un movimiento rígido directo (**m.r.d**) es la composición de una aplicación ortogonal directa (determinante positivo) con una traslación. Una aplicación ortogonal es una lineal tal que conserva el producto escalar.

Presentamos ambos teoremas, primero el de la teoría plana y después el de la espacial:

Teorema. *Sea* $k : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad k \in \mathcal{C}^\infty$ *. Entonces existe una curva* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *p.l.a tal que* $\mathcal{K}_\alpha(s) = k(s)\ \forall s \in I$ ***(existencia)***

Además, si tenemos $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *p.l.a tal que* $\mathcal{K}_\alpha(s) = \mathcal{K}_\beta(s)\ \forall s \in I \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \delta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *m.r.d tal que* $\delta \circ \alpha = \beta$ ***(unicidad)***

Por lo tanto, las curvas planas están caracterizadas por su curvatura.

Demostración. *La demostración de la existencia es constructiva, pues para generar la curva se toma*

$$\begin{aligned} \theta :& I \to \mathbb{R} \\ s \longmapsto & \theta(s) = \int_{s_0}^{s} k(u)\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

siendo θ *el ángulo que forma el vector tangente con el eje horizontal. Se observa que* $\theta'(s) = k(s)$*. Con esta definición, podemos construir* α *tal que*

$$\begin{aligned} \alpha :& I \to \mathbb{R}^2 \\ s \longmapsto & \alpha(s) = \int_{s_0}^{s} (cos\theta(u), sen\theta(u))\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

Es de clase infinito por composición de clases infinito (θ *lo es). Además, como* $t_\alpha(s) = (cos(\theta(s), sen(\theta(s))) \Rightarrow |t_\alpha(s)| = 1 \Rightarrow$ *es p.l.a. Aplicando las fórmulas vistas en la teoría de curvas planas, se obtiene directamente que* $K_\alpha(s) = k(s)\ \forall s \in I$

En cuanto a la unicidad, debemos usar un resultado de álgebra lineal, el cual dice que si tenemos dos bases positivamente orientadas, $\exists! \delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *m.r.d que nos lleva una referencia cartesiana a la otra. Para demostrarla, definimos* $\gamma(s) = \delta(\alpha(s))$ *y debemos comprobar que* $\gamma = \beta$ *mediante el resultado expuesto.*

A continuación vemos el teorema relacionado con las curvas espaciales.

Teorema. *Sea* $k, \tau : I \longrightarrow \mathbb{R}$ $\;k, \tau \in \mathcal{C}^{\infty}$ $\;k > 0$ *(en espacial, la curvatura siempre positiva). Entonces existe una curva* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *p.l.a tal que*

$$\begin{cases} \mathcal{K}_\alpha(s) = k(s) \ \forall s \in I \\ \mathcal{T}_\alpha(s) = \tau(s) \ \forall s \in I \end{cases} \textit{(\textbf{existencia})}$$

Además, si tenemos $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *p.l.a tal que* $\mathcal{K}_\alpha(s) = \mathcal{K}_\beta(s)$ *y* $\mathcal{T}_\alpha(s) = \mathcal{T}_\beta(s)$ $\forall s \in I \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists \delta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *m.r.d tal que* $\delta \circ \alpha = \beta$ ***(unicidad)***

Por lo tanto, una curva espacial viene caracterizada por su curvatura y su torsión. La demostración de la existencia requiere conocimientos avanzados de ecuaciones diferenciales. La de la unicidad es análoga a la presentada para la teoría de curvas planas.

4. OTRAS REPARAMETRIZACIONES

El estudio que acabamos de ver está basado en curvas p.l.a, pero puede ser que α esté parametrizada de otra forma. Por lo tanto, es interesante obtener fórmulas generales como las de Frenet, en las que no intervenga la reparametrización.
Definimos $\varphi : J \longrightarrow I$ una reparametrización de $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\beta = \alpha \circ \varphi$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{cases} \mathcal{K}_\alpha(t) = \mathcal{K}_\beta(s) \text{ donde } t = \varphi(s) \\ \mathcal{T}_\alpha(t) = \mathcal{T}_\beta(s) \\ \{t_\alpha(t), n_\alpha(t), b_\alpha(t)\} = \{t_\beta(s), n_\beta(s), b_\beta(s)\} \end{cases}$$

Únicamente vamos a mostrar las fórmulas generales. Para demostrar su procedencia tenemos que derivar, aplicando la regla de la cadena, y utilizar las equivalencias de las dos secciones anteriores. No vamos a ver las procedencias, pues ya nos hemos quedado sin tiempo.

Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

- $\boxed{\mathcal{K}_\alpha(t) = \dfrac{|\alpha'(t) \wedge \alpha"(t)|}{|\alpha'(t)|^3}}$

- $\boxed{\mathcal{T}_\alpha(t) = -\dfrac{(\alpha'(t) \wedge \alpha"(t)) \cdot \alpha"'(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha"(t)|^2}}$

- $\boxed{n_\alpha(t) = \dfrac{(\alpha'(t) \wedge \alpha"(t)) \wedge \alpha'(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha"(t)| * |\alpha'(t)|}}$

- $\boxed{b_\alpha(t) = \dfrac{\alpha'(t) \wedge \alpha"(t)}{|\alpha'(t) \wedge \alpha"(t)|}}$