

IMÁGENES POLINÓMICAS Y REGULARES DE ESPACIOS AFINES Y BOLAS CERRADAS

Alejandro Ramírez Rodríguez

22 de diciembre de 2021

1. Introducción

El estudio de las imágenes de espacios afines a través de funciones polinómicas está sumergido en el área de la geometría algebraica y analítica real. Una de las ramas de investigación de esta disciplina son los **conjuntos constructibles**: combinaciones booleanas (uniones, complementarios...) finitas de igualdades y desigualdades de funciones a valores reales. Si las funciones son polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}[T]$, se denominan **conjuntos semialgebraicos**. En este artículo centraremos nuestra atención en dichos conjuntos, pues por el teorema de Tarski-Seidenberg, las imágenes polinómicas deben ser conjuntos semialgebraicos.

Gracias al análisis de las imágenes polinómicas, es posible **mejorar la eficiencia** de problemas con una complejidad computacional elevada. Algunos ejemplos aplicados sobre un conjunto semialgebraico \mathcal{S} son:

- **Optimización** de funciones polinómicas $g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$
- **Positivstellensatz**: certificados de positividad, es decir, expresiones algebraicas que permiten decidir la positividad de enunciados (identidad de Bezout para ver si $x \in \mathbb{Z}$ es primo).

En ambos problemas, la complejidad se suele reducir introduciendo una función polinómica $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{S}$ y analizando $g \circ f$. A pesar de que la composición añade complejidad, puede compensar a la eliminación de las condiciones de contorno que caracterizan \mathcal{S} .

El estudio elaborado por José F. Fernando, J. Manuel Gamboa, Carlos Ueno y Safey el Din (la última incorporación), partió de una propuesta de Gamboa: determinar si el cuadrante abierto $\mathcal{Q} = \{x > 0, y > 0\}$ era imagen de una aplicación polinómica $f : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$. Hallaron la respuesta afirmativa en 2001 (f tenía grado 64, aunque actualmente han rebajado el grado a 8 y pretenden demostrar que ese es el grado mínimo). A partir de ese descubrimiento, trataron de **caracterizar las imágenes polinómicas**.

Sin embargo, obtener la caracterización completa es un problema extremadamente complejo, debido en parte a que las imágenes polinómicas tienen muchas restricciones y son poco versátiles. Por ello centraron sus esfuerzos en casos concretos y obtuvieron diversos resultados:

1. Los objetos de dimensión 1 que son imágenes polinómicas regulares (racionales sin polos, $\frac{1}{1+x^2}$) de espacios euclídeos, también lo han de ser para \mathbb{R}^2 .
2. Construcciones de aplicaciones polinómicas $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ cuyas imágenes son **conjuntos semialgebraicos PL**, como por ejemplo los poliedros convexos. Los conjuntos semialgebraicos PL son aquellos con frontera lineal a trozos, es decir, combinaciones booleanas finitas de igualdades o desigualdades de funciones de grado 1.

En 2018, Sturmfels, conocido matemático, les propuso estudiar la existencia de una aplicación polinómica

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(\bar{B}_3)$ sea un polígono convexo (ha de ser compacto por continuidad). Con ello pretendía que este estudio adquiriera una mayor visualización. Surgieron nuevos retos generalizando la propuesta a mayores dimensiones, y a conjuntos semialgebraicos PL. Desde entonces, el estudio adquirió un nuevo enfoque, el cual vamos a detallar a continuación.

2. Polígonos convexos como imagen polinómica de \bar{B}_3

Todo polígono convexo \mathcal{P} es imagen polinómica de \bar{B}_3 , pues todos los poliedros convexos son triangulables. La idea es ir transformando polinómicamente \bar{B}_3 en figuras intermedias, para al final utilizar la triangulación del polígono. Ésta consiste en representar \mathcal{P} como una unión finita de n -símplices (si estamos en dimensión 2 son triángulos) tal que 2 de ellos comparten lado o vértice. El concepto de dividir un problema en fases es muy útil a la hora de afrontar otro tipo de cuestiones.

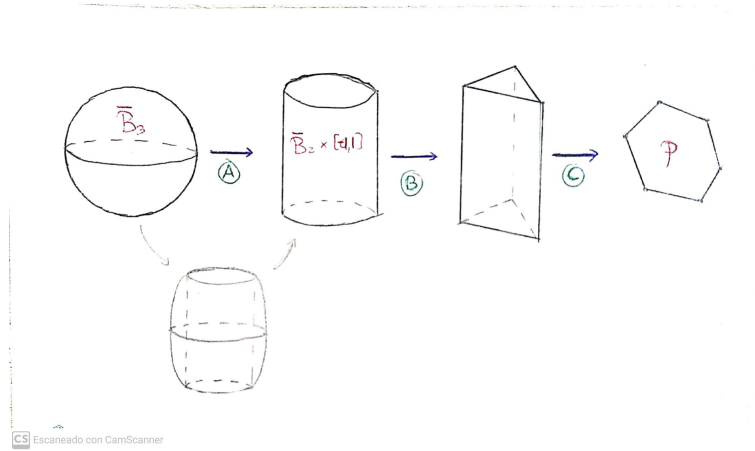


Figura 1: Transformación polinómica de \bar{B}_3 en polígono convexo

- **A:** Para transformar polinómicamente \bar{B}_3 en un cilindro, se utiliza una función polinómica obtenida mediante dos fases. En la primera se realizan dos pliegues verticales (se modifica la segunda coordenada) y en la segunda otros dos horizontales (se modifica la primera coordenada).
- **B:** Visualizamos el cilindro como \bar{B}_2 que se desplaza verticalmente con el paso del tiempo. De igual forma visualizamos el prisma, siendo un triángulo la base. Se transforma el círculo a altura t_k en el triángulo \mathcal{T} del prisma a altura t_k mediante la función $f : \bar{B}_2 \rightarrow \mathcal{T}$ tal que $f(x, y) = (x^2, y^2)$
- **C:** Vemos el prisma como un triángulo que se mueve hacia arriba en el tiempo. **Triangulando** el polígono obtenemos n triángulos, cada uno de los cuales se asocia con otro del prisma T_i en un instante t_i . Así podemos obtener \mathcal{P} mediante el prisma. Sin embargo, falta representar la transición entre cada T_i y T_{i+1} , la cual siempre debe estar contenida en el polígono. Las trayectorias de los vértices 1 y 2, (3 queda fijo), nos indican el recorrido que realiza la imagen del triángulo cuando avanza en el tiempo. Dichas trayectorias han de ser polinómicas, contenidas en \mathcal{P} y para cada t_i prefijado deben estar en el correspondiente vértice de \mathcal{P} . Así aseguramos la transformación del prisma en \mathcal{P} , aunque con mucha superposición.

Para las fases **A** y **B**, las aplicaciones polinómicas ya están resueltas. Sin embargo, es necesario asegurar la existencia de dichas trayectorias polinómicas en el paso **C**. Esto se consigue gracias al **lema de la selección de curvas inteligentes**.

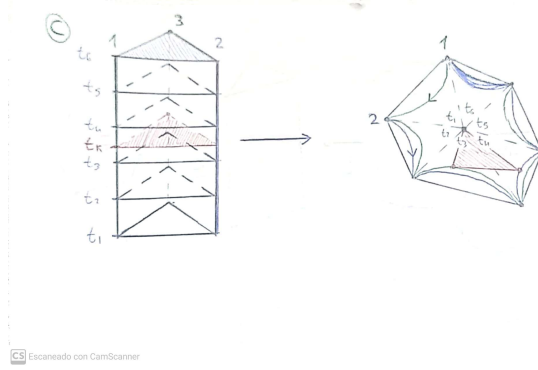


Figura 2: Fase C

Este lema dice que dados n conjuntos semialgebraicos abiertos conexos $\mathcal{S}_1 \dots \mathcal{S}_n$, con puntos de intersección entre dos consecutivos y arcos de curva analítica que permiten pasar de uno a otro; y fijando tiempos de paso por unos puntos $p_1 \dots p_n$ y tiempos de paso por los puntos de intersección, podemos conseguir una curva polinómica que se mantiene dentro de la figura $(\cup_{i=0}^n \mathcal{S}_i)$ y que pasa por esos puntos en sus correspondientes tiempos.

En nuestro caso, los símlices serían $\mathcal{S}_1 \dots \mathcal{S}_n$, $p_1 \dots p_n$ serían los vértices de \mathcal{P} y la curva polinómica es la trayectoria que buscamos. Además, en una variable hay muchas estrategias para encontrar dichas trayectorias, como los polinomios de Bernstein, por lo que la situación es muy favorable.

Queda probado que los polígonos convexos se pueden obtener como imagen polinómica de \bar{B}_3 . En las siguientes secciones se exprime este resultado, tratando de eliminar condiciones innecesarias y de extender los posibles conjuntos semialgebraicos que se obtienen como imagen polinómica de \bar{B}_n .

3. Conjuntos semialgebraicos como imagen polinómica de \bar{B}_n

Un **conjunto semialgebraico PL** (compacto) de dimensión n se puede representar como la unión finita de poliedros convexos, que a su vez se triangulan en símlices. Por el lema de la selección de curvas inteligentes y la sección 2, lo único necesario para obtener \mathcal{PL} como imagen polinómica de \bar{B}_{n+1} es la **conexión de los símlices por caminos analíticos**.

Teorema. *Sea \mathcal{S} una unión finita de poliedros convexos (compactos) n -dimensionales. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. \mathcal{S} es conexo por caminos analíticos.
2. Existe una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{B}_{n+1}) = \mathcal{S}$

Para obtener la aplicación polinómica f habría que seguir las fases explicadas en la sección 2, aplicadas a las dimensiones $n+1$ y n . Por otro lado, exprimiendo los argumentos de la demostración, es posible reducir el dominio de f a \mathbb{R}_n y obtener $f(\bar{B}_n) = \mathcal{S}$.

En este caso, para dimensión 2, se transforma \bar{B}_2 en un cuadrado, visualizado como el desplazamiento vertical de un segmento. A continuación se aplica la misma idea del paso C, es decir, hallar dos trayectorias polinómicas, contenidas en \mathcal{S} , que representan el movimiento de los dos extremos del segmento, de tal forma que se recubre todo \mathcal{S} . Las curvas obtenidas son más complejas que en el caso anterior, pues se ha disminuido el número de parámetros,

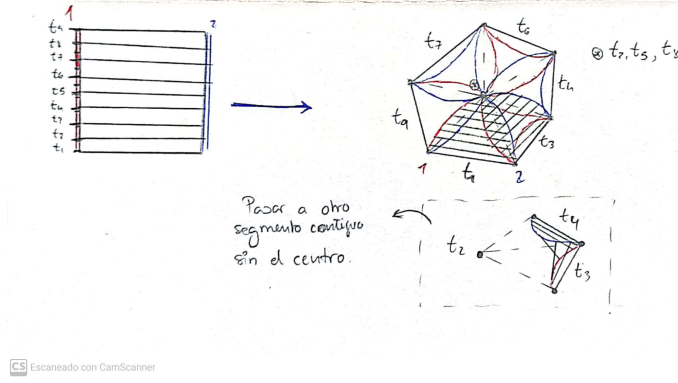


Figura 3: Fase C mediante segmentos

Ambas trayectorias van por fuera del triángulo cuando necesitan recubrirlo, y trasladan un lado de \mathcal{S} en el contiguo cuando ya tienen recubierto el triángulo, sin pasar por el centro.

Por otro lado, ya se ha mostrado en la sección 2 como transformar polinómicamente \bar{B}_{n+1} en el cilindro de dimensión n , que se visualiza como \bar{B}_n desplazándose verticalmente a lo largo del tiempo. Por ello, realmente no es necesario que el conjunto semialgebraico \mathcal{S} esté formado por poliedros convexos, si no por **la unión de conjuntos semialgebraicos convexos** que sean imagen polinómica de \bar{B}_n . Sin embargo, dicha unión debe seguir siendo conexa por caminos analíticos para poder utilizar el lema de la selección de curvas inteligentes. Algunos ejemplos de estos "bloques" que se pueden utilizar son: bolas cerradas, elipsoides, símlices, hipercubos e hiperprismas, conos truncados...

Es posible exprimir aun más las condiciones iniciales, sustituyendo la convexión de los conjuntos semialgebraicos por otras condiciones menos restrictivas. Se definen los **m-ladrillos** como conjuntos semialgebraicos que son imagen polinómica de \bar{B}_m , tales que se pueden deformar (de forma continua) a un punto interior. Además, la imagen polinómica de \bar{B}_m a lo largo del tiempo siempre cae en el m-ladrillo (está definido mediante una homotopía). Algunos ejemplos de m-ladrillos son:

- **Estrellas esféricas m-dimensionales:** $\{x_1^{2/k_1} + \dots + x_m^{2/k_m} \leq 1\}$. $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1^{k_1}, \dots, x_m^{k_m})$ es la función polinómica que transforma \bar{B}_m en la estrella esférica.
- **Conjuntos semialgebraicos estrictamente radialmente convexos** que son imagen polinómica de \bar{B}_m : estrictamente radialmente convexo quiere decir que para cada punto de su interior, y para cada rayo L con origen en él, se tiene $(L \cap \mathcal{S}) \in \mathcal{S}$.
- **Conjuntos semialgebraicos convexos** que son imagen polinómica de \bar{B}_m
- **Sectores hiperbólicos m-dimensionales**

Teorema. Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ una unión finita de m-ladrillos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. \mathcal{S} es conexo por caminos analíticos.
2. Existe una aplicación polinómica $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\bar{B}_{m+1}) = \mathcal{S}$

Gracias a este resultado, no se depende de conjuntos semialgebraicos convexos (triangulables o no) para caracterizar los conjuntos semialgebraicos que son imagen polinómica de \bar{B}_n . Es el resultado más general que se muestra en este artículo, y con el cuál nos despedimos.