OR

Metodo del simplesso

Passo 0 - inizializzazione

Sia dato un problema di programmazione lineare in forma standard ($min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$) e una base ammissibile di partenza B

Dove:

- $A \in R^{m\,x\,n}$
- $B \in R^{m\,x\,m}$
- $x, c \in R^n$
- $b \in R^m$

Passo 1 – passaggio alla forma canonica

Si scriva il modello in forma canonica rispetto alla base corrente B:

$$z = \bar{z}_B + \bar{c}_{F1}x_{F1} + \cdots + \bar{c}_{F(n-m)}x_{F(n-m)}$$

$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{iF1}\bar{x}_{F1} - \cdots - \bar{a}_{iF(n-m)}\bar{x}_{F(n-m)} \quad con\ i = 1 \ldots m$$

Passo 2 – test di ottimalità

Se $\bar{c}_{Fi} \geq 0\ \forall i$ →

$$La\ soluzione\ di\ base\ corrente\ B\ è\ ottima$$

L'algoritmo termina con soluzione ottima

$$x^*_{Bi} = \bar{b}_i \ \ con\ i = 1 \ldots m$$

$$x^*_{Fj} = 0 \ \ con\ j = 1 \ldots n - m$$

$$z^* = \bar{z}_B$$

Passo 3 – test di illimitatezza

Se

$\exists x_h$ fuori base: $\bar{c}_h < 0\ e\ \bar{a}_{ih} \leq 0\ \forall\ i = 1 \ldots m$ →

Il problema è illimitato. L'algoritmo termina.

Passo 4 – scelta della variabile entrante per il cambio base

Si scelga come variabile entrante una variabile x_h: $h = \min\{j: \bar{c}_j < 0\}$ secondo la regola di Bland

Passo 5 – scelta della variabile uscente per il cambio base

Data la variabile entrantex_h, si scelga come variabile uscente x_{Bt} con

$$t = \arg\min_{i=1\ldots m}\{\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} : \bar{a}_{ih} > 0\}$$

Passo 6 – cambio base e iterazione

Aggiornare la base B corrente eliminando la colonna di x_{Bt} e sostituendola con la colonna di x_h. Tornare al passo 1.

Forma standard di problemi di PL

$$\min z = c^T x$$
$$\text{s.t. } a_i x = b_i$$
$$x_i, b_i \in R^+ \text{ con } i = 1 \dots m$$

Di solito scritto come

$$min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

Dove

- $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \in R^n$
- $a_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \dots \\ a_{in} \end{bmatrix} \in R^n$
- $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \in R^n$

Soluzioni di base

Dato un sistema $Ax = b$ e una base B di A

→

Le soluzioni ottenute ponendo $x_B = B^{-1}b$ e $x_F = 0$ si dicono soluzioni di base

Soluzioni di base ammissibili

Dato un sistema $Ax = b$ e una base B di A

Se

$$x_B = B^{-1}b \geq 0$$

→

La soluzione di base corrispondente si dice ammissibile

Forma canonica di problemi di PL

Dato un problema di PL in forma standard $min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ e data una base B di A

Se

Le variabili in base (x_{B_i}) e la funzione obiettivo (z) sono scritte esplicitamente in termini delle variabili fuori base:

$$z = \bar{z}_B + \bar{c}_{F1} x_{F1} + \dots + \bar{c}_{F(n-m)} x_{F(n-m)}$$
$$x_{B_i} = \bar{b}_i - \bar{a}_{iF1} \bar{x}_{F1} - \dots - \bar{a}_{iF(n-m)} \bar{x}_{F(n-m)} \quad con\ i = 1 \dots m$$

→

Il problema si dice in forma canonica rispetto alla base B

Il tableau del simplesso

$c^T{}_B$	$c^T{}_F$	-1	0
B	F	0 $\vdots$ 0	b

Dualità

6.1 La dualità forte come condizione di ottimalità

Sia data una coppia di problemi primale-duale:

$$(PP)\quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (PD)\quad \begin{array}{ll} \max & u^T b \\ \text{s.t.} & u^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \end{array}$$

e due vettori $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$.

I teoremi della dualità forniscono delle *condizioni di ottimalità*:

$$\begin{array}{c} \bar{x} \text{ e } \bar{u} \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \begin{array}{ll} \bar{x} \text{ è ammissibile primale:} & A\bar{x} \geq b \wedge \bar{x} \geq 0 \\ \bar{u} \text{ è ammissibile duale:} & \bar{u}^T A \leq c^T \wedge \bar{u} \geq 0 \\ \text{vale la dualità forte:} & c^T \bar{x} = \bar{u}^T b \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \text{ e } u \text{ ottime} \\ \text{primale e duale (risp.)} \end{array} \iff \begin{array}{ll} Ax \geq b \wedge x \geq 0 & (\textit{ammissibilità primale}) \\ u^T A \leq c^T \wedge u \geq 0 & (\textit{ammissibilità duale}) \\ \left.\begin{array}{r} u^T(Ax - b) = 0 \\ (c^T - u^T A)x = 0 \end{array}\right\} & (\textit{ortogonalità}) \end{array}$$

$$\begin{aligned} u_i(a_i^T x - b_i) &= 0, \quad \boxed{\forall}\ i = 1 \ldots m \\ (c_j - u^T A_j)x_j &= 0, \quad \boxed{\forall}\ j = 1 \ldots n \end{aligned}$$

Procedimento

Passo 1 – verificare che la x fornita sia ammissibile primale

- Controlla i vincoli singoli sulle variabili
- Controlla i vincoli che coinvolgono più variabili

Passo 2 – trovare u duale

Tramite la tabellina

Primale $(\min c^T x)$	**Duale** $(\max u^T b)$
$a_i^T x \geq b_i$	$u_i \geq 0$
$a_i^T x \leq b_i$	$u_i \leq 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$u^T A_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$u^T A_j \geq c_j$
x_j libera	$u^T A_j = c_j$

Passo 3 – ortogonalità

$$\begin{aligned} u_i(a_i^T x - b_i) &= 0, \quad \boxed{\forall}\ i = 1 \ldots m \\ (c_j - u^T A_j)x_j &= 0, \quad \boxed{\forall}\ j = 1 \ldots n \end{aligned}$$

Passo 4 – Sistema formato da CCPD e ammissibilità duale

Passo 5 – verifica ammissibilità duale

Passo 6 - conclusioni